UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Sobre una familia de operadores discretos N-dimensionales de tipo escalera, construidos mediante un operador conmutador Z_N Toeplitz-Hermitiano

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

MIGUEL ÁNGEL ORTIZ CORTÉS

DIRECTOR: **DR. NATIG ATAKISHIYEV**

CUERNAVACA, MORELOS JUNIO, 2025

Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Miembros del Jurado

	Nombre	**Adscripción**	**Línea de Investigación**
Presidente	Dr. Yuriy Karlovych	CInC - UAEM	Matemáticas Puras y Aplicadas
Secretario	Dr. Rogelio Valdéz Delgado	CInC - UAEM	Matemáticas Puras y Aplicadas
Vocal	Dr. Juan Pablo Díaz González	CInC - UAEM	Matemáticas Puras y Aplicadas
Vocal	Dra. Liudmila Lvovna Sabinina	CInC - UAEM	Matemáticas Puras y Aplicadas
Vocal	Dr. Emilio Marmolejo Olea	UCIM - UNAM	Variable Compleja, Análisis de Fourier
Suplente	Dr. Markus Franciskus Müller Bender	CInC - UAEM	Análisis y Simulación de Sistemas Complejos
Suplente	Dr. Natig Atakishiyev	UCIM - UNAM	Ecuaciones en Diferencias, Análisis de Fourier

Artículo correspondiente:

M. A. Ortiz and N. Atakishiyev, “ON A FAMILY OF DISCRETE ND LADDER-TYPE OPERATORS CONSTRUCTED IN TERMS OF THE HERMITIAN TOEPLITZ COMMUTATOR OPERATOR Z_N”, Maltepe Journal of Mathematics, vol. 6, no. 2, pp. 24–49, 2024, https://doi.org/10.47087/mjm.1467436

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Resumen

Centro de Investigación en Ciencias
Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Doctor en Ciencias

Sobre una familia de operadores discretos N-dimensionales de tipo escalera, construidos mediante un operador conmutador Z_N Toeplitz-Hermitiano

por Miguel Ángel Ortiz Cortés

El problema de la asociación de sistemas de autovectores para la Transformada de Fourier Discreta (TFD) es aun un problema abierto al no haber todavía un criterio que permita seleccionar un autosistema que provea a los autovectores con la calidad de *canónico*. Este problema es importante porque puede conducir a la obtención de relaciones de recurrencia de tres términos y sistemas polinomiales distinguidos para la TFD. Existe una amplia variedad de maneras de abordar el problema, pero imitando el caso continuo, este puede tratarse de dos formas: mediante representaciones de álgebras de grupo, o mediante representaciones a nivel del álgebra de Heisenberg. La primera opción ha sido explorada en el Tratamiento de Atakishiyeva-Atakishiyev (TAA) y en este trabajo se realiza una construcción algebraica en el marco de la segunda opción, con operadores N-dimensionales de tipo escalera, siguiendo una analogía con las *relaciones canónicas de conmutación* del caso continuo. Se encuentra que una matriz Toeplitz-Hermitiana Z_N, que juega el papel de la identidad, es suficiente para satisfacer la identidad de Jacobi y se estudia el comportamiento de dicha matriz para N grande; entonces, resolviendo ciertas *relaciones de compatibilidad*, se construye una familia de operadores de *creación* y *aniquilación* con hamiltonianos asociados que conmutan con Z_N. Se argumenta además, que este sistema puede también realizarse en términos del operador de Heun W asociado a la TFD, en el ámbito de las representaciones de álgebras de grupo del TAA, obteniendo de esta forma la inherente conexión entre ambas opciones, misma que permite una comprensión más profunda de la estructura algebraica subyacente. Dicha conexión abre la posibilidad de la aplicación de herramientas que pueden conducir a la *resolubilidad* de los problemas que implica la existencia de las mencionadas relaciones de recurrencia.

Palabras clave: Transformada Discreta de Fourier, operadores de tipo escalera, operadores Toeplitz Hermitianos, Grupo de Heisenberg, operadores discretos de ascenso y descenso, núcleo de Dirichlet, matrices circulantes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Abstract

Centro de Investigación en Ciencias
Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Doctor of Science

On a family of discrete ND ladder-type operators, constructed in terms of the Hermitian-Toeplitz commutator operator Z_N

by Miguel Ángel Ortiz Cortés

The problem of associating eigenvector systems with the Discrete Fourier Transform (DFT) remains open, as there is still no established criterion for selecting an eigensystem with the property of being *canonical*. This issue is important because solving it could lead to the discovery of distinguished three-term recurrence relations and polynomial systems for the DFT. There exists several approaches to the problem, but mimicking the continuous case, it can be dealt with in two ways: by means of group algebra representations or by means of representations at the level of the Heisenberg algebra. The first option has been explored in the Atakishiyeva-Atakishiyev approach (AA-approach) whereas an algebraic construction is done in this work, within the scope of the second option, with ladder-type N-dimensional operators, making an analogy with the *canonical commutation relations* of the continuous case. It is found that a Toeplitz-Hermitian matrix Z_N, which plays the role of the identity, is enough to satisfy the Jacobi identity, and the behaviour of such a matriz for large N is analyzed; then, a family of *creation and annihilation operators* with corresponding hamiltonians which commute with Z_N is constructed by solving some *compatibility relations*. It is additionally argued that this system can also be solved in terms of the Heun operator W associated to the DFT, within the framework of the group algebra representations of the AA-approach, thus obtaining the inherent connection between the two options, allowing for a deeper understanding of the underlying algebraic structure. This connection gives the possibility of applying tools that can lead to the *solvability* of the problems that the existence of the aforementioned recurrence relations imply.

Keywords: Discrete Fourier Transform, ladder-type operators, Toeplitz Hermitian operators, Heisenberg Group, raising and lowering operators, Dirichlet kernel, circulant matrices.

«*We have all this evidence that the Riemann zeros are vibrations, but we don't know what's doing the vibrating*»

M. du Sautoy

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Masuma Atakishiyeva (D. E. P.) y al Dr. Natig Atakishiyev por su invaluable guía y paciencia.

A mi familia, en especial a mi tío Erasmo Peralta Castillo por la gran ayuda brindada.

A Adriana Valdéz Lombera, por su grandiosa empatía y valiosísimo apoyo: gracias por existir.

También al Centro de Investigación en Ciencias del IICBA, así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, hoy Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovción, sin cuyo estímulo económico, esto no habría sido posible.

A la memoria de mi padre...

Índice general

Resumen IV

Agradecimientos VII

Introducción XII

1. Revisión de fundamentos de mecánica cuántica 1
- 1.1. El álgebra de Heisenberg y la realización de Schrödinger . . . 2
- 1.2. El grupo de Heisenberg-Weyl . . . 4
- 1.3. Sobre representaciones del grupo de Heisenberg . . . 5

2. Trasfondo matemático para estructuras discretas 9
- 2.1. El operador de traslación, la TFD y las relaciones de Weyl . . . 10
- 2.2. Una representación para el grupo de Heisenberg . . . 18
- 2.3. Operadores de ascenso y descenso de Atakishiyeva y Atakishiyev: *Primera consideración* . . . 20
- 2.4. Estructura algebraica de Askey-Wilson-Heun generada por A y $A^\dagger$ . . . 24

3. Un álgebra asociada a la Transformada de Fourier discreta 28
- 3.1. La TFD y los operadores discretos de posición y momento . . . 29
- 3.2. Relaciones de conmutación discretas . . . 32
- 3.3. Sobre los operadores canónicos de creación y aniquilación con Z_N . . . 35

4. Sobre la naturaleza de Z_N 37
- 4.1. La forma explícita de Z_N: propiedad Toeplitz-Hermitiana y traza cero . 37
- 4.2. Sobre el comportamiento de Z_N para N grande . . . 40

5. Un sistema algebraico asociado a la TFD a partir de Z_N 45
- 5.1. Operadores genéricos de tipo escalera . . . 45
- 5.2. Relaciones de compatibilidad discretas . . . 46
- 5.3. Resolución de las relaciones de compatibilidad discretas . . . 49

6. El tratamiento de Atakishiyeva-Atakishiyev como álgebra de grupo 59
- 6.1. Los operadores A y $A^\dagger$ como elementos de álgebra de grupo: *Segunda consideración* . . . 59
- 6.2. Realización de las RCDs con el operador de Heun . . . 62

Conclusiones 64

A. Construcción numérica de un operador de aniquilación para Z_7 y los respectivos operadores hamiltoniano y de número **66**

B. Demostración del Teorema 2.2.3 **71**

Bibliografía **73**

Lista de Abreviaturas

AWH	(algebras u operadores de) **A**skey-**W**ilson-**Heun**
BCN	**B**ase (de) **C**arácteres **N**ormalizada
BFN	**B**ase (de) **F**ourier **N**ormalizada
EHNR	**E**spacio (de) **H**ilbert (con) **N**úcleo **R**eproductor
MC	**M**ecánica **C**lásica
MQ	**M**ecánica Cuántica, **Q**uantum
OAC	**O**scilador **A**rmónico **C**uántico
PAW	**P**olinomios (de) **A**skey-**W**ilson
RCCs	**R**elaciones (de) **C**onmutación **C**anónicas
RCDs	**R**elaciones (de) **C**ompatibilidad **D**iscretas
TAA	**T**ratamiento de **A**takishiyeva-**A**takishiyev
TFD	**T**ransformada (de) **F**ourier **D**iscreta (N - dimensional)
TFI	**T**ransformada (de) **F**ourier **I**ntegral

Introducción

El estudio de estructuras discretas es cada vez más considerablemente relevante para la teoría de procesamiento de señales, óptica cuántica, procesos de información cuántica, entrelazamiento y más. Aunque los espacios de estados cuánticos son continuos, estos contienen algunas realizaciones de estructuras discretas sobre espacios de Hilbert de dimensión finita que resultan sorpresivas e intrigantes (vea p. ej. [11], Cap. 12) y que son la fuente de consideraciones muy interesantes que vale la pena estudiar. Una de tales consideraciones consiste en el problema de la construcción de un sistema de autovectores para la transformada de Fourier discreta (TFD) N-dimensional, el cual es todavía un problema abierto, y se ha analizado con avances notables obtenidos por J. H. McClellan and T. W. Parks [30] ya desde el año 1972. El problema se mantiene abierto debido a que del conjunto infinito de autosistemas de la TFD, no se ha conseguido el establecimiento de un criterio o convención de selección de algún sistema distinguido de autovectores. La solución de este problema es trascendental porque la "mejor" selección de un sistema distinguido puede conducir a la obtención de relaciones de recurrencia de tres términos, lo que a su vez, implica la existencia de un algoritmo para la obtención de la acción de la TFD sobre vectores de datos del dominio del tiempo al dominio de frecuencias; algoritmo que deberá compararse con el todavía más popular y más eficiente de los algoritmos para calcular la TFD, este es, el algoritmo de la Trasformada de Fourier Rápida de Cooley-Tookey ([8], p. 870).

El problema de la selección o asociación de un autosistema para la TFD, puede abordarse desde varias perspectivas [4, 9, 19, 20, 31, 41], entre las cuales están las que incluyen técnicas que mimetizan el caso continuo de la Transformada de Fourier Integral (TFI) con el propósito de proponer un autosistema, con la propiedad de ser *canónico*, donde canónico significa la aplicación cuidadosa de procedimientos estándar de la mecánica cuántica continua, al caso discreto, finito o infinito. Estas técnicas pueden, al menos, dividirse en tres direcciones: las que utilizan el *principio de incertidumbre* asociado con grupos cíclicos de orden primo [29]; las que utilizan las representaciones de álgebras de grupo al nivel del grupo de Heisenberg; y las que utilizan representaciones a nivel del álgebra de Heisenberg.

La segunda dirección mencionada en el párrafo anterior ha sido estudiada en el Tratamiento de M. K. Atakishiyeva y N. M. Atakishiyev —en adelante denominado TAA— [3, 6, 7] desarrollando una analogía de los operadores de ascenso y descenso en el ámbito del *oscilador armónico cuántico lineal*, mediante la construcción de un operador conmutante con la TFD, asegurando así que ambos operadores tengan el mismo conjunto de autovectores, lo que conduce a una autobase ortonormal para la TFD —como en [14, 25])—. Los *operadores de ascenso* $A^\dagger$ y *descenso* A en esta analogía en efecto conducen a la construcción de un operador de *número* $\mathcal{N}$ que notablemente conmuta con la TFD, así como en el caso continuo. Un resultado esperado de esta segunda dirección, es que la obtención sistemática de los autovectores permita asociar algún sistema de polinomios ortogonales más allá de las funciones monomiales de transición entre las bases canónica y de Fourier. La necesidad de sistematizar la estructura algebraica que subyace en estos operadores surge del problema de la existencia y búsqueda de fórmulas explícitas de los autovectores de la TFD para N arbitraria, impar o prima; tal sistematización debe conducir al establecimiento de un marco de trabajo que permita el estudio profundo del significado de dichos operadores y que conduzca a la solución del problema de la existencia de tales fórmulas e incluso, la obtención de las mismas, lo que conduciría a *relaciones de recurrencia de tres términos*, de donde puede determinarse si es posible establecer fórmulas de tipo Rodrigues para el cálculo de sistemas polinomiales correspondientes.

Si bien la construcción de los operadores de ascenso y descenso junto con el correspondiente operador de número $\mathcal{N}$ conmutante con la TFD logrado en el TAA es ya en sí mismo un notable avance, la sistematización mencionada en el párrafo anterior, es aun necesaria para establecer la viabilidad de las construcciones todavía faltantes —a decir, relaciones de recurrencia de tres términos, fórmulas de Rodrigues, sistemas de polinomios—. Dicha sistematización requiere una ampliación de la analogía con el caso continuo, para la precisa identificación de los objetos matemáticos involucrados en el caso discreto, que se corresponden con el caso continuo, así como el establecimiento del mencionado marco de trabajo. Esta ampliación es precisamente lo que motiva el presente trabajo, explorando la tercera dirección antes mencionada, con el objetivo de profundizar en la comprensión de la naturaleza de los operadores A y $A^\dagger$ así como también, para poder lidiar con este problema de autovectores de una forma más sistemática dentro del paisaje discreto. En este sentido, tal ampliación debe responder las siguientes preguntas: ¿es posible extender aun más esta analogía del oscilador armónico que imita al caso continuo?, si en el caso continuo el álgebra que encapsula las propiedades

de los operadores A y $A^\dagger$ es el *álgebra de Heisenberg*, ¿hasta qué punto se puede llevar la realización de una analogía discreta de *las relaciones canónicas de conmutación* para espacios de Hilbert de dimensión finita?, ¿qué propiedades se preservan y cuáles se pierden?, ¿cuál es el comportamiento asintótico de los operadores resultantes?. Es este el hilo conductor que nos lleva a la propuesta de un sistema algebraico mediante el establecimiento de unas *relaciones de compatibilidad* que admiten soluciones de operadores de *tipo escalera*, partiendo del uso de una matriz Toeplitz-Hermitiana Z_N, que juega el papel de la identidad. Entonces se establece una notable relación entre esta construcción y el TAA mediante el uso del operador de Heun W que aparece en este último; obteniendo de esta manera la propuesta de una realización completa para el sistema algebraico planteado.

El afán de la obtención de una comprensión más amplia del panorama matemático que subyace en el problema de autosistemas para la TFD en analogía con el caso continuo, condujo a la distinción necesaria de que el TAA está asociado a representaciones del grupo de Heisenberg H, como álgebra de grupo $\mathbf{C}H$ y el sistema algebraico planteado en esta tesis, a nivel de representaciones del álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}$ en el sentido de que los elementos básicos de esta álgebra funcionan como generadores de grupos unitarios uniparamétricos bajo el mapeo exponencial. Esta distinción y el estudio exhaustivo del sistema algebraico planteado, abre la posibilidad de aplicar herramientas ya conocidas que pueden conducir a soluciones de los problemas previamente mencionados. Por ejemplo, la aparición de secuencias de las matrices Toeplitz Z_N, y la notable conexión que resultan tener con las matrices circulantes, abren la posibilidad de aplicar los teoremas límite de Szegö para la estimación de la distribución asintótica de sus autovalores, o en su defecto, la aplicación de la teoría de distribuciones.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. En el Capítulo 1, se revisan brevemente algunos fundamentos cuánticos sobre las relaciones canónicas de conmutación. En el Capítulo 2 se presenta el trasfondo matemático necesario para fundamentar en lo general, las estructuras discretas en espacios de Hilbert de dimension finita y para desarrollar esta Tesis en particular. El Capítulo 3 inicia con los resultados de este trabajo determinando un álgebra asociada a la TFD con operadores discretos de posición Q y momento P que satisfacen las *relaciones de conmutación discretas*, además de que se muestra que tales operadores satisfacen la identidad de Jacobi; se propone la matriz Z_N que juega el papel de la identidad y se discute sobre la *no centralidad* de ella y sus consecuencias en el álgebra resultante. En el Capítulo 4 se obtiene una representación explícita de Z_N además de que se hace una breve investigación sobre la naturaleza de

este operador para N grande. El Capítulo 5 está dedicado a los resultados principales de este trabajo, a decir, la propuesta de un sistema algebraico en términos del operador Toeplitz-Hermitiano Z_N y mediante *las relaciones de compatibilidad discretas* (RCD), cuyas soluciones consisten de operadores de tipo escalera $L^{\pm}$ que permiten la obtención de Hamiltonianos $\mathscr{H}$ para cada N; sin embargo, estas soluciones cumplen al menos dos de los cuatro requerimientos del sistema algebraico propuesto y no necesariamente los otros dos. Entonces, en el Capítulo 6 se muestra cómo los operadores Q y P generadores de Z_N, están relacionados a los operadores de ascenso y descenso así como al operador de Heun W del TAA, mediante el mapeo exponencial. De esta manera se concluye que esta conexión podría dotar al sistema algebraico de una realización completa; es decir, del cumplimiento de los cuatro requerimientos que lo forman. Finalmente, en Conclusiones 6.2, se realizan comentarios finales sobre lo que se ha estudiado, así como también, sobre los varios asuntos que se dejan abiertos y que quedan pendientes para estudios futuros.

Capítulo 1

Revisión de fundamentos de mecánica cuántica

En este primer capítulo se revisan brevemente algunos fundamentos de la mecánica cuántica. Ya que se está buscando la construcción de una analogía adecuada entre las *realizaciones* continuas y discretas del álgebra de Heisenberg, se analizan las similitudes entre la Mecánica Clásica (MC) y la Mecánica Cuántica (MQ). Todo lo que se dice aquí se puede encontrar con mayor detalle en [15].

- Los observables en MC son funciones suaves sobre $\mathbb{R}^{2n}$.
- Los operadores Hermitianos en MQ juegan el papel de los campos vectoriales de MC; considerados *transformaciones canónicas infinitesimales*, o *automorfismos infinitesimales*, los campos vectoriales se usan para obtener transformaciones canónicas —locales— mediante la integración de las ecuaciones de Hamilton. Similarmente, los operadores Hermitianos A se usan para obtener operadores antiadjuntos y así determinar un grupo unitario uniparamétrico exponenciando al operador $2\pi \mathrm{i} A$.
- Entonces se pone atención a los automorfismos del conjunto subyacente $\mathbb{R}^{2n+1}$, que es el mismo como álgebra de Lie o como grupo de Lie, dependiendo de lo que esté definido en él: operación de corchete o ley de grupo, respectivamente.
- La transformada de Fourier surge naturalmente de la mera naturaleza ondulatoria de la MQ en una base idealizada de paquetes básicos de onda plana —autofunciones de momento— $e_\xi(x) = e^{2\pi \mathrm{i} \xi x}$, cuyo momento está dado por $h\xi$, siendo h la constante de Planck.

- Construyendo la j-ésima componente del momento a través de la correspondencia de las medidas de Borel con sus operadores Hermitianos, resulta que la transformada de Fourier entrelaza a los operadores de posición y momento

$$P_j = h\mathcal{F}Q_j\mathcal{F}^{-1} \implies P_j = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = hD_j. \tag{1.1}$$

- Es posible probar que la acción de las exponenciales de los operadores de posición y momento es sobre las funciones de L^2 y representa una traslación en el espacio de posiciones y una traslación en el espacio de momentos, respectivamente.

- Los observables básicos Q_j y P_j satisfacen las *relaciones canónicas de conmutación* (ver [15], p. 15)

$$[P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0, \qquad [P_j, Q_k] = \frac{h\delta_{jk}}{2\pi \mathrm{i}} I. \tag{1.2}$$

1.1. El álgebra de Heisenberg y la realización de Schrödinger

En esta sección se sigue el tratamiento de Seligman [37] sobre teoría de representaciones.

Se considera el álgebra de Lie de Heisenberg-Weyl de la mecánica cuántica, denotada por $\mathfrak{h}$, con elementos Q, P e I. Esta álgebra se define estableciendo un corchete bilineal denominado *corchete de Lie*, de la siguiente forma

$$[Q, P] = \mathrm{i}I, \quad [Q, I] = 0, \quad [P, I] = 0. \tag{1.3}$$

Los elementos Q, P, e I constituyen una base de vectores para el álgebra, de modo que se puede escribir para los elementos de $\mathfrak{h}$

$$E = xQ + yP + zI, \quad x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Para una base algebraica de $\mathfrak{h}$, es suficiente tomar Q y P solamente, ya que I se produce por el corchete de Lie en la primera de las eqs. (1.3).

Los elementos de interés en este esquema algebraico son

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - \mathrm{i}P), \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + \mathrm{i}P), \tag{1.4}$$

que satisfacen

$$[L, R] = I, \quad [L, I] = 0, \quad [R, I] = 0. \tag{1.5}$$

Estos operadores son en sí mismos una base de $\mathfrak{h}$ y por lo tanto definen también a $\mathfrak{h}$.

El objetivo principal en esta teoría es la construcción de modelos concretos mediante representaciones de $\mathfrak{h}$ con el conjunto de operadores lineales, los cuales tienen representaciones matriciales; esto siempre es posible ya que todas las álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$ son isomorfas a alguna álgebra de matrices.

Por lo tanto, si tenemos un álgebra de dimensión finita, podemos encontrar una representación matricial finito-dimensional de $N \times N$, preferentemente fiel,[1] como subálgebra de $gl(N, \mathbb{C})$. Una representación fiel como subálgebra de $gl(3, \mathbb{C})$ para $\mathfrak{h}$ está dada por

$$\mathbf{Q}^f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}^f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

de modo que

$$E^f = xQ^f + yP^f + zI^f = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & \mathrm{i}z & 0 \end{pmatrix}.$$

Mediante transformaciones de similaridad es posible obtener otras representaciones. La *realización de Fock*[2] es otra representación obtenida proponiendo la acción de los operadores abstractos R y L sobre algún espacio vectorial como sigue

$$R \longrightarrow R^F := z, \qquad L \longrightarrow L^F := \frac{d}{dz}, \qquad I \longrightarrow I^F := I;$$

la representación matricial de R^F toma la forma familiar de "unos sobre la diagonal" sobre alguna base apropiada.

La realización de Schrödinger utiliza la *maquinaria abstracta*

$$\mathcal{N} := RL = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 - I) \tag{1.7}$$

[1] Una representación fiel de un grupo G es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ que es inyectivo, es decir, que su núcleo es trivial.

[2] Se le llama realización debido a que la información del espacio subyacente sobre el que la "representación" actúa, no está claramente definida.

bajo relaciones de conmutación

$$[\mathcal{N}, R] = R, \qquad [\mathcal{N}, L] = -L, \qquad [\mathcal{N}, I] = 0, \tag{1.8}$$

necesarias para que R y L sean efectivamente operadores de ascenso y descenso. Así, si en alguna representación se consigue construir un autovector de $\mathcal{N}$, se obtendrá completamente el espacio vectorial V donde tales operadores actúan. Eso se logra si se establece

$$Q \longrightarrow Q^S := q, \qquad P \longrightarrow P^S := -\mathrm{i}\frac{d}{dq}, \qquad I \longrightarrow I^S := 1. \tag{1.9}$$

Por lo tanto surge la cuestión acerca de cómo obtener esta realización en términos formales, desde la mera estructura de las simetrías en un grupo G que actúa sobre algún espacio vectorial. Este es el objeto de análisis en las siguientes secciones.

1.2. El grupo de Heisenberg-Weyl

Para el álgebra de Heisenberg-Weyl $\mathfrak{h}$ definida en (1.3) se puede usar su representación fiel que es subalgebra de $gl(3, \mathbb{C})$, dada por $\mathfrak{h}^f$ para construir su correspondiente grupo de Lie H^f, que es un subgrupo de $GL(3, \mathbb{C})$, mediante el mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{h}^f \to H^f$, de modo que $\mathfrak{h}^f$ sea el espacio tangente de H^f en la identidad. El mapeo exponencial

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

existe, ya que la exponencial de cualquier matriz arbitraria con elementos finitos es una serie que converge absolutamente y produce otra matriz que es invertible; tal mapeo manda al elemento cero en $\mathfrak{h}^f$ al elemento identidad en H^f. Como variedad, los parámetros que constituyen cartas locales, constituyen un sistema coordenado canónico de H^f.

Los elementos del grupo de Lie H están dados por

$$G(x, y, z) = \exp \mathrm{i}(xQ^f + yP^f + zI^f) = \exp \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & \mathrm{i}z & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

De las propiedades de exp, es posible obtener la ley de composición del correspondiente grupo abstracto H como

$$g(x_1, y_1, z_1)g(x_2, y_2, z_2) = g(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}[y_1x_2 - x_1y_2]) \tag{1.11}$$

$$e = g(0, 0, 0), \qquad g(x, y, x)^{-1} = g(-x, -y, -z). \tag{1.12}$$

Claro que esta ley de composición corresponde al grupo abstracto H, pero formalmente, se debe tener en mente que la exponenciación proporciona elementos del grupo de Lie H^f; es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{h}^f(V) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\rho_G} & H^f(V) \end{array}$$

Este grupo H es llamado el grupo de Heisenberg-Weyl —o símplemente de Heisenberg—. Todos los parámetros corren sobre $\mathbb{R}$ así que como variedad es isomorfa a $\mathbb{R}^3$, no compacta y símplemente conexa. El centro de H generado por I es el subgrupo de elementos $g(0, 0, z)$.

1.3. Sobre representaciones del grupo de Heisenberg

Ahora se usará el grupo de Heisenberg H cuya ley de composición (ecs. (1.11) y (1.12)) se obtuvo a través de la exponenciación de la representación fiel del álgebra abstracta $\mathfrak{h}$ de Heisenberg-Weyl, para obtener algunas realizaciones de ella. Siguiendo a Seligman, esto se puede hacer actuando sobre, o dividiendo a, H como sigue:

1. Actuando sobre H por la derecha.
2. Actuando sobre H por la izquierda.
3. Con acciones de grupo con multiplicador para obtener operadores de orden cero, como en la realización de Schrödinger.

Existen más formas aparte de estas para obtener realizaciones de $\mathfrak{h}$, pero es suficiente analizar estas para entender cómo funciona el proceso. De hecho, este análisis solo se enfocará en la primera y tercera.

Para tal objetivo, se debe mantener en mente terminología básica sobre el caracter de variedad de H (ver [32], Cap. 1).

Si (U,ϕ) es una carta en $g \in X = G$ con funciones coordenadas $x_j, j = 0,\ldots,N-1$, $\phi(g) = (x_0(g),\ldots,x_{N-1}(g))$ —en nuestro caso $N = 3$— entonces, los mapeos lineales $\partial_j|_g = \partial/\partial x_j|_g : C^\infty(G) \to \mathbb{C}$ definidos por $\partial/\partial x_j|_g(f) := D_j(f \circ \phi^{-1}(\phi(g))$, están en $T_g(G)$. Sean (U,ϕ) y (V,ψ) dos cartas sobre G y $\{x_j\}_0^{N-1}$, $\{x'_j\}_0^{N-1}$ dos conjuntos de funciones coordenadas tales que $x'_j = x'_j(x_0,\ldots,x_{N-1})$ en $U \cap V$; por la regla de la cadena, la correspondiente base coordenada satisface la ley de transformación

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x'_j}. \tag{1.13}$$

1. Actuando por la derecha sobre H consigo mismo. El álgebra de Lie $\mathfrak{h}^R$ del grupo H^R obtenida por traslación derecha de H en sí mismo, $\mathfrak{h}^R = T_e(\{H^f h'\}_{h'\in H^f})$, tiene su propia base $\{P^R, Q^R\} \cup \{I^R\}$ relacionada a la del álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}$ mediante (1.13), y la ley de composición del grupo de Heisenberg H, obtenida mediante exponenciación de $\mathfrak{h}$, a decir (1.11). Por lo cual, la transformación de coordenadas para $h \in H$ bajo la traslación derecha satisface

$$\begin{aligned} x &= x_R - x' \\ y &= y_R - y' \\ z &= z_R - z' - \frac{1}{2}(yx' - xy'), \end{aligned}$$

de manera que la ley de transformación entre bases en $\mathfrak{h}$ por traslación derecha de H es, de acuerdo a (1.13)

$$\begin{pmatrix} Q^R \\ P^R \\ I^R \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{-1}{2}y \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

de lo que se obtiene

$$Q^R = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad P^R = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad I^R = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.14}$$

lo cual coincide con los generadores infinitesimales para tres variables en [37], p. 24. Antes de tratar brevemente a las acciones izquierda y de multiplicador, resumimos la

acción derecha sobre H^f en sí mismo en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{h}^f & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{h}f}} & \mathfrak{h}^R(V) \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp & & \log \uparrow \\ H & \xrightarrow{\rho_G} & H^f & \xrightarrow{\rho_{Hf}} & H^R(V) \end{array}$$

2. Para la acción izquierda de H^f por h'. El proceso es el mismo obteniendo relaciones similares. Se parte de $f^L_{h'}(H^f) = h'^{-1}H^f$, usando la multiplicación de grupo en H^f y $\psi(h)^{-1} = (-x(h), -y(h), -z(h))$, el equivalente de las ecs. (1.14) se obtienen de

$$\psi(h'^{-1})\psi(h) = (-x' + x^L, -y' + y^L, -z' + z^L + \frac{1}{2}[-y'x^L + x'y^L]),$$

por lo que usando la ley de transformación (1.13) se encuentra finalmente

$$Q^L = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad P^L = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad I^L = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}.$$

3. Acciones de grupo con multiplicador. Las traslaciones derecha e izquierda hacen que h actúe sobre funciones de tres variables, así H se convierte en un *grupo de transformaciones de Lie* sobre la variedad diferenciable $M = H$.

H puede también actuar sobre otras viariedades como grupo de transformación, estas variedades W pueden ser, por ejemplo, los cosets derechos e izquierdos de H. Cuando H es particionado en esta forma, actúa sobre funciones de dos variables sobre la variedad $M = W/H_Q$, donde $H_Q = \{g(x, 0, 0)\}_{x\in\mathbb{R}}$.

La representación de Schrödinger resulta de considerar las representaciones con *multiplicador*, que están relacionadas a representaciones *inducidas*. Partiendo de un grupo normal M en H, existe una acción natural de H a M, $n \longrightarrow gng^{-1} = n_g$; así que si H ya está particionado por un subconjunto de la forma $H_I = \{g(0, 0, z)\}$, entonces actuando sobre funciones de dos variables, se puede particionar otra vez mediante M para obtener la variedad $S = (G/H_I)N$, permitiendo que H actúe sobre funciones de una variable. Combinando esto con un poco de información particular de M, a decir, sus representaciones, es posible hacer que H actúe sobre funciones f de una variable por medio de funciones F definidas sobre cosets izquierdos $c^L_Q(y, z)$ como

$$F^\lambda(c^L_Q(y, z)) = f^\lambda(y)e^{\mathrm{i}\lambda z}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Esto induce una transformación de las funciones sobre y,

$$f^\lambda(y) \xrightarrow{g(x',y',z')} f^\lambda_{g'}(y) = f^\lambda(y+y')\exp\left[\mathrm{i}\lambda\left(z' + \tfrac{1}{2}x'y' + x'y\right)\right];$$

el factor $\mu(y,g) = \exp[\mathrm{i}\lambda(z' + \frac{1}{2}x'y' + x'y)]$ se denomiona *factor multiplicador*.

Con esto, Q^S, P^S y I^S generarán el grupo de transformaciones sobre S. Con un proceso similar al que condujo a las ecs. (1.14), se encuentra

$$Q^S = \lambda y, \quad P^S = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad I^S = \lambda. \tag{1.15}$$

Este último conjunto de generadores determina a la realización de Schrödinger identificando λ con la constante de Planck $\hbar$.

Es pertinente citar las siguientes palabras de Seligman: *quizás la propiedad más intrigante de los generadores (1.15) que resultan de la acción con multiplicador, es que el propio Sophus Lie no los habria reconocido como generadores de un álgebra de Lie. Él consideró grupos de transformaciones de Lie, donde los grupos actúan efectivamente sobre variedades, así que sus generadores son todos únicamente operadores diferenciales de primer orden. Generadores con operadores de orden cero como Q^S e I^S provienen de acciones de grupo con multiplicador* —ver [37], p. 25— para más detalles sobre la acción con multiplicador.

Capítulo 2

Trasfondo matemático para estructuras discretas

En este capítulo se consideran las estructuras discretas sobre espacios de Hilbert de dimensión finita, que son la base sobre las que se construye el resto del trabajo, de modo que se establece cierta terminología estándar con el fin de identificar con claridad los objetos involucrados y las conexiones entre ellos.

Si G es un grupo y X un conjunto, la **acción** de G sobre X es una función $f : G \times X \longrightarrow X$ tal que $f(e, x) = x$ y $f(gh, x) = f(g, f(h, x))$. Una **representación N-dimensional** de un grupo G sobre un campo K, es un homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow GL(V)$, donde V es un espacio vectorial N-dimensional sobre K y $GL(V)$ es el grupo de operadores lineales sobre V; si $\phi(g)$ es unitario $\forall g \in G$, lo que significa que su correspondiente **transpuesto conjugado** satisface $\phi(g)^\dagger = \phi(g)^{-1}$, se dice que la representación ϕ es unitaria. Los **grupos discretos** son grupos de Lie con la **topología discreta** y se considera que cualquier grupo finito G actúa sobre sí mismo por automorfismos, se puede encajar en algún **grupo de permutaciones** S_N y este admite una representación sobre K^N con K un campo.

Como se ha dicho antes, la transformada de Fourier surge naturalmente del comportamiento armónico ondulatorio de los sistemas cuánticos, donde la periodicidad es de alguna manera fundamental. De esta forma nos concentramos en el **grupo abeliano cíclico finito** $\mathbb{Z}_N$; este grupo, es un grupo que es igual a alguno de sus subgrupos cíclicos, esto es, que $\mathbb{Z}_N = \langle z \rangle$ para algún $z \in \mathbb{Z}_N$ donde $\langle z \rangle := \{z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{N-1}\}$, con $z^0 = e$, la identidad, e inversos $z^{-1} = z^{N-1}$. $\mathbb{Z}_N$ es isomorfo a —estructuralmente el mismo que— el **grupo aditivo de enteros módulo** N, $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, bajo la identificación $\mu : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : z^k \mapsto k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. También se considera

frecuentemente la **serie geométrica**

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{N-1} = \begin{cases} (1 - z^N)/(1 - z), & \text{if } z \neq 1 \\ N, & \text{if } z = 1 \end{cases}. \tag{2.1}$$

Sea $\omega := e^{2\pi \mathrm{i}/N}$ la **raíz primitiva N-ésima de la unidad**, donde $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$, entonces el conjunto de **raíces N-ésimas de la unidad**, $\{\omega^k\}$, $k = 0, \ldots, N-1$ es un grupo multiplicativo que satisface $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{N-1} = 0$, ya que $e^{2\pi i} - 1 = 0$; tal grupo se denota por $U_N(1)$ y es isomorfo a $\mathbb{Z}_N$ bajo la identificación $\psi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow U_N(1) : z^k \mapsto \omega^k$. No es difícil notar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \overset{\alpha}{\dashrightarrow} & U_N(1) \\ {\scriptstyle\mu}\uparrow & \nearrow_{\psi} & \\ \mathbb{Z}_N & & \end{array} \tag{2.2}$$

conmuta si se define la biyección $\alpha(k) := \omega^k = e^{2\pi \mathrm{i} k/N}$, $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, luego $\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong U_N(1)$. También indicamos por $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ al conjunto de homomorfismos de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sobre $U_N(1)$. Por otro lado, si un vector es denotado por v, sus componentes se escribirán como v_j, la **base canónica** de $\mathbb{C}^N$ es $e_k = \{(\delta_{k,0}, \ldots, \delta_{k,N-1}) : k = 0, \ldots, N-1\}$, donde δ_{kj} es la **función delta de Kronecker**; los operadores se denotan con letras mayúsculas T y sus entradas matriciales con T_{mn}. Abusando de la notación, los operadores y sus representaciones matriciales se escribirán con la misma letra a menos que se especifique otra cosa.

2.1. El operador de traslación, la TFD y las relaciones de Weyl

Como se dijo en el Capítulo 1, los operaodres de posición y momento generan traslaciones en el espacio subyacente del caso continuo. De la misma forma, se considera en el caso discreto una noción de traslación en el espacio de funciones complejo-valuadas sobre $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (ver [8]). Primero se le dota de un producto interno para convertirlo en un **espacio de Hilbert** $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ por medio del producto interno

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$$

donde $\bar{x}$ es el conjugado de $x \in \mathbb{C}$.

Definición 2.1.1. *El operador de traslación* $T_a : L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, *se define por la acción de* $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ *sobre* $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ *dada por*

$$T_a f(b) := f(b-a) \ \forall a, b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

Lema 2.1.2. *Una base ortonormal para* $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ *es* $\{f_\alpha\}$, $\alpha = 0, \ldots, N-1$, *donde*

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1 & si\ \alpha = \beta \\ 0 & si\ \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

Demostración. Claramente

$$\langle f_\alpha, f_\beta \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f_\alpha(\gamma)\overline{f_\beta(\gamma)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},$$

así que $\{f_\alpha\}$ es un conjunto ortonormal. Sea $g \in L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$; el rango de g es el conjunto $\{g(0), \ldots, g(N-1)\}$, de manera que $\langle f_\alpha, g \rangle = g(\alpha)$, por lo cual $g = \sum_\alpha \langle g, f_\alpha \rangle f_\alpha$. Entonces $\{f_\alpha\}$ es un conjunto completo. □

Se busca ahora una representación matricial V de T en la base $\{f_\alpha\}$. Considerando el rango de $f \in L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ordenado por su argumento desde $0, 1$, hasta $N-1$ como un vector $(f(0), f(1), \ldots, f(N-1)) \in \mathbb{C}^N$, esto implica que $\{f_\alpha\}$ es representado en $\mathbb{C}^N$ por la base canónica $\{e_l\}$.

Lema 2.1.3. *La representación matricial* V *de* $T_{a=1} := T$ *en la base* $\{f_\alpha\}$ *es la matriz de* $N \times N$ *dada por*

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

y el conjunto completo de matrices para los demás valores de a satisface $V_j = V^j$, $j = 0, \ldots, N-1$.

Demostración. Evalúe el operador T en la base de funciones $\{f_\alpha\}$ y exprese las imagenes Tf como combinaciones lineales de ellas; los coeficientes de estas combinaciones son las columnas de la representación matricial. Así que $\forall \ \ b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $T(f_\alpha(b)) =$

$T_{a=1}(f_\alpha(b)) = f_\alpha(b-1) = 1$ si y sólo si $b-1=\alpha$, entonces $b=\alpha+1$, por lo cual

$$1 = (T_{a=1}f_\alpha)(b) = \left(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t_\beta f_\beta\right)(b) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t_\beta f_\beta(\alpha+1) = t_{\alpha+1}.$$

Por lo tanto, la única componente con valor 1 es la siguiente en las correspondientes columnas de la matriz, de donde se obtiene inmediatamente la matriz V. Ya que V es una permutación cíclica de la base canónica, la aplicación sucesiva de ella conduce a $V_j = V^j$. □

Lema 2.1.4. *Las matrices V^j son unitarias para $j = 0,\ldots,N-1$ y $V^N = I$.*

Demostración. Para la primera afirmación, use que T es suprayectiva y que es una isometría $\langle T(f), T(g)\rangle = \langle f, g\rangle$. La segunda afirmación se obtiene usando la definición libre de coordenadas de T. □

Las V^j, $j = 0,\ldots,N-1$ son bien conocidas en la literatura como **matrices de traslado** y forman una base para el álgebra de las matrices circulantes [28].

Sea G un grupo finito de orden N con identidad e y $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ un conjunto finito sobre el que G actúa mediante gx_j. Sobre cualquier campo K considere el espacio vectorial N-dimensional W con una base indizada por los elementos de X, $\{v_{x_0}, v_{x_1}, \ldots, v_{x_{N-1}}\}$. Podemos hacer que G actúe sobre W mediante $f : G\times W \longrightarrow W$ definido por $f(g, v_{x_j}) := v_{gx_j}$ $\forall$ $x_j \in X$ y $g \in G$ y expandiendo por linealidad; entonces se verifica que $f_g := f(g,\cdot) : W \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $f_e = \mathrm{id}_W$ es la identidad de $GL(W)$ y $f_g f_h = f_{gh}$. Así pues, la función $\rho : G \longrightarrow GL(W) : g \mapsto f_g$ es un homomorfismo de grupos y por lo tanto una representación N-dimensional sobre K, llamada **la representación permutación** sobre K adjunta a X y denotada por $K[X]$. En adelante usaremos notación de "bra-ket".

Definición 2.1.5. *Sea K un campo y G un grupo finito de orden N. Considere el espacio vectorial W sobre K con base indizada por los elementos de G, denotada por $\{|g_0\rangle, |g_1\rangle, \ldots, |g_{N-1}\rangle\}$. La representación regular (izquierda) $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ de G, es la representación permutación $K[G]$, sobre K adjunta a $X = G$, dada por $\rho(g_i) = f_{g_i} = f(g_i,\cdot) : W \longrightarrow W$.*

Lema 2.1.6. *La representación regular $\rho : \mathbb{Z}_N \longrightarrow GL(L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ del grupo cíclico $\mathbb{Z}_N$ sobre $\mathbb{C}$ está dada por*

$$\rho(a_j) = V^j, \qquad j = 0,\ldots,N-1.$$

Demostración. Sea z un generador de $\mathbb{Z}_N$, entonces, $\mathbb{Z}_N = \langle z \rangle := \{z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{N-1}\}$. Considere el espacio vectorial W con una base ortonormal indizada por los elementos de $\mathbb{Z}_N$, $\{|z^0\rangle, |z^1\rangle, \ldots, |z^{N-1}\rangle\}$. Por definición, $\rho(z^j) : W \longrightarrow W$ es una transformación lineal que satisface $\rho(z^j)(|z^k\rangle) = f_{z^j}|z^k\rangle = f(z^j, |z^k\rangle) := |z^j z^k\rangle$. Así que la representación matricial de $\rho(z^j)$ en la base anterior es

$$\rho(z^j)_{kl} = \langle z^k|\rho(z^j)|z^l\rangle = \langle z^k|z^j z^l\rangle = \langle z^k|z^{j+l(\mathrm{mod}N)}\rangle = \delta_{k,j+l(\mathrm{mod}N)} = (V^j)_{kl}.$$

□

Observación 2.1.7. *Lo anterior implica, equivalentemente, que la representación matricial de los operadores de traslación sobre $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ es la representación regular del grupo N-cíclico $\mathbb{Z}_N$, que a su vez es completamente reducible, así que como $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ es abeliano, se puede descomponer en una suma directa de representaciones irreducibles 1-dimensionales. Esta simple descomposición es la fuente de una estructura notablemente intrincada, misma que da origen a la teoría de Fourier, y que será explotada en este trabajo.*

Definición 2.1.8. *Un carácter sobre $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupo $\lambda : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow U_N(1)$.*

O sea que los elementos de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ son los carácteres sobre $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Lema 2.1.9. *$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong U_N(1)$.*

Demostración. El isomorfismo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong U_N(1)$ es evidente con las identificaciones arriba indicadas ϕ y ψ. En cuanto a $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, notemos que el mapeo $\lambda'_a : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow U(1) : b \mapsto \exp(-2\pi \mathrm{i} ab)$, $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, es un carácter bien definido, entonces, basta tomar dos carácteres $\lambda'_a, \lambda'_b \in Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ y definir $(\lambda'_a + \lambda'_b)(c) := \lambda'_a(c) \cdot \lambda'_b(c) \ \ \forall c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ para verificar que $Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ es un grupo, isomorfo a $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ bajo la identificación

$$\zeta : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) : a \mapsto e^{-2\pi \mathrm{i} a/N},$$

la cual es una biyección; es decir, que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \xrightarrow{\ \zeta\ } & Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ & \searrow^{id_Z} \quad \downarrow \zeta^{-1} \quad \searrow^{id_H} & \\ & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\ \zeta\ } Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) & \end{array}$$

conmuta. □

Por el Lema anterior, los carácteres en $Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ son N elementos de la forma

$$\lambda_l'(\cdot) = e^{-2\pi \mathrm{i} l(\cdot)/N}, \qquad l = 0, \ldots, N-1.$$

Teorema 2.1.10. *Sea la función* $\lambda_l : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \in L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ *definida por* $\lambda_l(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi \mathrm{i} l(\cdot)/N}$, $l \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. *El conjunto* $\{\lambda_l\}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$ *forma una base ortonormal de* $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_l, \lambda_m \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_l(n)\overline{\lambda_m(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi \mathrm{i}(m-l)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{2\pi \mathrm{i}(m-l)/N}\right]^n \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } l = m \\ 0 & \text{if } l \neq m \end{cases} \qquad l, m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde hemos usado la serie geométrica (2.1) y el hecho de que

$$\left[e^{2\pi \mathrm{i}(m-l)/N}\right]^n = 1, \ \ -N < m - l < M.$$

Por lo tanto $\{\lambda_j\}$ es un conjunto ortonormal y como $\dim(L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})) = N$, se sigue que $\{\lambda_j\}$, $j = 0, \ldots, N-1$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. □

A esta base $\{\lambda_l\}$, $l = 0, \ldots, N-1$, la llamaremos **base de caracteres normalizada** (**BCN**) para $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Debido al teorema anterior, podemos expander $f \in L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ como una combinación lineal de la base $\{\lambda_l\}$, a decir

$$f = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \lambda_l, \ \ \hat{f}_l \in \mathbb{C};$$

tal expresión es la N-ésima suma parcial de la **serie de Fourier** de f. Los coeficientes $\hat{f}_l$ se pueden obtener aplicando como siempre, ortonormalidad de la BCN:

$$\langle f, \lambda_m \rangle = \langle \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \lambda_l, \lambda_m \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \langle \lambda_l, \lambda_m \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \delta_{lm} = \hat{f_m}, \ \ m = 0, \ldots, N-1.$$

De donde

$$\begin{aligned} \hat{f_m} &= \langle f, \lambda_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\overline{\lambda_m(n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{2\pi \mathrm{i} mn/N}, \qquad m = 0, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Esto es evidentemente, la m-ésima componente de una multiplicación matricial con el vector $(f(0), f(1), \ldots, f(N-1))$. Nombramos a la transformación lineal subyacente como sigue.

Definición 2.1.11. *Sea* $\{\lambda_m\}$, $l = 0, \ldots, N-1$ *la base de carácteres normalizada y establezca* $\hat{f_m} := (\Phi_N f)(m)$. *La transformada de Fourier discreta (TFD) es el operador lineal* $\Phi_N : L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ *definida por*

$$(\Phi_N f)(m) := \langle f, \lambda_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(n) \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} mn}{N}\right).$$

Las siguientes son propiedades bien conocidas en la literatura.

Teorema 2.1.12. *La TFD satisface lo siguiente*

1. Φ_N *es un operador unitario*
2. $\Phi_N^4 = I$, *donde* I *es el operador identidad*
3. *La representación matricial de* Φ_N *en la base* $\{f_\beta\}$ *es*

$$(\Phi_N)_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} mn}{N}\right), \ m, n = 0, \ldots, N-1.$$

Lo anterior implica que las columnas de la representación matricial de la TFD, forman una base ortonormal $\{\epsilon_k\}$ para $\mathbb{C}^N$. Llámese esta base, la **base de Fourier normalizada (BFN)**.

Es posible obtener una especie de *relación de cerradura* de la propiedad de *completez* de la BCN. Establezca $\omega := e^{2\pi \mathrm{i}/N}$ como antes y tómese $l \in \mathbb{Z}/N$, entonces

$$\begin{aligned} f(l) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}/N} (\Phi_N f)(n) \lambda_n(l) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{nm} \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{-nl} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(m-l)} \right] f(m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n(l) \overline{\lambda_n(m)} \right] f(m), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{Z}/N). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Argumentando como en la ec. (2.3), la expresión entre corchetes es necesariamente la función delta de Kronecker

$$\delta_{lm}(N) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{n(m-l)} = \sum_{n=0}^{N-1}\lambda_n(l)\overline{\lambda_n(m)}$$

que satisface la *propiedad reproductora*, ec. 2.4. Esto muestra que $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ puede verse como un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor (EHNR) dado por

$$K(x,y) := \delta_{xy}(N),$$

de modo que podemos escribir a f como la evaluación puntual mediante el producto interno:

$$\langle f, K(\cdot,x)\rangle = \sum_{y\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(y)K(y,x) = f(x).$$

Observación 2.1.13. *Este núcleo es un núcleo válido semipositivo definido y corresponde a la BCN en el espacio $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ de funciones complejo-valuadas sobre el dominio discreto $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ y su uso implica algoritmos de tipo "punto vecino más próximo" en aprendizaje de máquinas.*

Observación 2.1.14. *La propiedad reproductora de la δ_{xy} de Kronecker recuerda a la propiedad reproductora de la $\delta(x-y)$ de Dirac*

$$\int f(y)\delta(y-x)dy = f(x),$$

sin embargo, en este caso no es posible la construcción de un EHNR en espacios continuos debido a que $\delta(x-y)$ no es una función, sino una distribución. Esto resultará relevante más adelante y se analizará detalladamente en la segunda sección del Capítulo 4.

Ahora volvemos a las matrices de traslado para establecer una conexión con la TFD. Porque las V^j son unitarias, ellas deben ser unitariamente similares a una matriz diagonal por el *teorema espectral*. Es aquí donde la TFD juega un papel fundamental en este trabajo.

Teorema 2.1.15. *La TFD, Φ_N, diagonaliza simultáneamente a las matrices V^j, con autovalores*

$$\alpha_{jl} = exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} jl}{N}\right),\ j,l = 0,\ldots,N-1,$$

y las columnas de la TFD como autovectores.

Demostración. Ver [13], pp. 29 y 30. □

Definición 2.1.16. *Sean $\rho_1 : G \longrightarrow U(H_1)$ y $\rho_2 : G \longrightarrow U(H_2)$ representaciones unitarias de un grupo G sobre los espacios de Hilbert H_1 y H_2. Se dice que el operador $A : H_1 \longrightarrow H_2$ entrelaza a ρ_1 y ρ_2 si*

$$A\rho_1(g) = \rho_2(g)A, \ \forall g \in G;$$

así ρ_1 y ρ_2 se dicen unitariamente equivalentes si A es unitaria y el operador A se llama operador entrelazante.

En consecuencia se tiene inmediatamente,

Corolario 2.1.17. *Sea U el operador diagonal obtenido mediante diagonalización de V por la TFD, entonces U^j y V^j son representaciones unitariamente equivalentes de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ con la TFD como operador entrelazante. A decir*

$$V^j = \Phi_N U^j \Phi_N^\dagger, \ j = 0, \ldots, N-1.$$

Demostración. Se sigue inmediatamente del Lema 2.1.6, el Teorema 2.1.15 y la Definición 2.1.16. □

Es importante tener presente la acción de V sobre los autovectores de U y viceversa.

Corolario 2.1.18. *Sea $\omega := \exp(2\pi \mathrm{i}/N)$ la raíz primitiva N-ésima de la unidad, $\{\epsilon_k\}$ la BFN and $\{e_k\}$ la base canónica. Entonces*

1. *Los autovectores de U y V satisfacen*

$$V^j \epsilon_k = \omega^{kj} \epsilon_k \text{ and } U^j e_k = \omega^{kj} e_k.$$

2. *V actúa como un traslado sobre los autovectores de U y viceversa, o sea que*

$$V^j e_k = e_{k+j} \quad \text{and} \quad U^j \epsilon_k = \epsilon_{k+j}.$$

3. *$U^N = I$.*

Demostración. 1. Se sigue del Teorema 2.1.15. 2. Se sigue del Lema 2.1.3. 3. Se sigue del Lema 2.1.4. □

Por este último corolario, a las matrices U^j se les llama **matrices reloj**. Finalmente, tenemos lo siguiente

Corolario 2.1.19. *Las matrices reloj y de traslado U y V satisfacen las así llamadas relaciones de conmutación de Weyl*

$$UV = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}} VU.$$

Demostración. Usando el Corolario 2.1.18, $UVe_k = Ue_{k+1} = \omega^{k+1} e_{k+1} = \omega\omega^k e_{k+1}$; $VUe_k = V\omega^k e_k = \omega^k V e_k = \omega^k e_{k+1}$. Combinando estos resultados se obtiene $(UV - \omega VU)e_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. De donde se obtiene la afirmación. □

2.2. Una representación para el grupo de Heisenberg

Debido al isomorfismo $\mathbf{Z}_N \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong U_N(1)$, estos grupos tienen la misma estructura algebraica y la representación regular unitaria de ellos es completamente reducible y equivalente a la representación —completamente reducida y— unitaria U^j con la TFD como operador entrelazante.

En esta sección, se establece la relación de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ y $U_N(1)$ con el grupo de Heisenberg.

La ley de composición para el grupo de Heisenberg encontrada en (1.11) surgió de la exponenciación de la representación fiel dada en (2.10). Esta ley de composición es apropiada cuando la *estructura simpléctica* del espacio subyacente es considerada. Sin embargo, para nuestros propósitos en este capítulo, se considerará el modelo donde la representación del álgebra de Heisenberg produce bajo exponenciación las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

tomando $a, b, c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ como un anillo conmutativo con identidad. Se denotará a este conjunto de matrices por $H(\mathbf{Z}_N)$ y sus elementos por (a, b, c); la ley de composición se puede obtener fácilmente, así que se define

Definición 2.2.1. *El grupo de Heisenberg es el conjunto $H(\mathbf{Z}_N)$ con ley de composición dada por*

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_2 b_2).$$

A veces a este grupo se le llama *el grupo de Heisenberg polarizado* en este modelo, pero es isomorfo al que definimos previamente en el Capítulo 1 bajo *discretización*. Este grupo se puede relacionar con $U_N(1)$ ya que se tiene lo siguiente ([8])

Teorema 2.2.2. $H(\mathbf{Z}_N) \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times U_N(1)$.

Demostración. Considerando la biyección $\alpha : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow U_N(1)$ del Diagrama (2.2),

$$\alpha(k) = \omega^k = e^{2\pi \mathrm{i} k/N}, \qquad k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

y la biyección $\zeta : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ del Lema 2.1.9,

$$\zeta(b)(\cdot) = e^{-2\pi \mathrm{i} b(\cdot)/N}, \qquad b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

definimos el mapeo $\gamma : H(\mathbf{Z}_N) \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times U_N(1)$ mediante

$$\gamma(a, b, c) := (a, \zeta(b), \alpha(c)), \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Es un cálculo elemental probar que γ es un isomorfismo. □

Así que $H(\mathbf{Z}_N)$ es esencialmente lo mismo que el producto cartesiano de tres copias del grupo cíclico $\mathbb{Z}_N$. Recuerde que $\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ bajo la biyección μ del Diagrama (2.2), por esto, las matrices reloj y de traslado deben tener una implicación importante: de ellas es posible obtener una representación irreducible de $H(\mathbf{Z}_N)$.

Teorema 2.2.3 (Atakishiyeva y Atakishiyev, 2016)**.** *El conjunto de N^3 operadores unitarios definidos mediante*

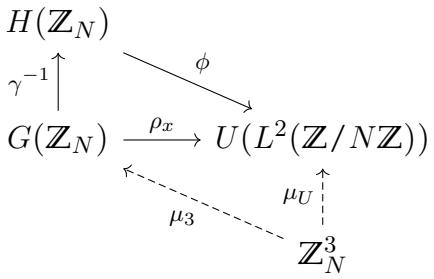
$$u(l; m, n) := \omega^l V^n U^m, \qquad k, m, n = 0, \ldots, N-1,$$

determinan a una representación unitaria irreducible $\phi : H(\mathbb{Z}_N) \longrightarrow U(L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$.

Demostración. Ver Apéndice B. □

Por lo tanto se sigue el siguiente corolario.

Corolario 2.2.4. *Sea* $G(\mathbb{Z}_N) := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times Hom(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times U_N(1)$. *El siguiente diagrama*



(2.6)

conmuta.

Demostración. Defina $\rho_x := \phi \circ \gamma^{-1}$ con ϕ dada por el teorema anterior y $\mu_U := \rho_x \circ \mu_3$. □

μ_3 es una función cuya existencia se sigue del contexto. El diagrama anterior permite ver con precisión la interconexión de los diferentes objetos involucrados con el grupo de Heisenberg $H(\mathbb{Z}_N)$. La TFD, Φ_N, diagonaliza a los elementos $u(0;0,n)$ del Teorema 2.2.3, los cuales corresponden a la representación regular del grupo cíclico $\mathbb{Z}_N$, o equivalentemente, a la representación matricial de las traslaciones T_a sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

2.3. Operadores de ascenso y descenso de Atakishiyeva y Atakishiyev: *Primera consideración*

En este trabajo se emplearán las nociones de *operadores de ascenso y descenso* y de *operadores de creación y aniquilación* en un sentido ligeramente distinto al origen conceptual de los mismos. Como sabemos, los operadores de ascenso y descenso aparecen originalmente en la factorización del hamiltoniano del oscilador armónico cuántico (OAC) y producen ascenso y descenso de estados energéticos; mientras que los operadores de creación y aniquilación surgen en el tratamiento de la teoría de campos cuánticos en la creación y aniquilación de partículas. Debido a que en el tratamiento discreto, sea infinito o finito, aparecen varias formas de definir la *escalabilidad* de los autoestados de los operadores involucrados, es que tomamos prestado del *argot* de la física-matemática, las palabras ascenso, descenso, creación y aniquilación para poder diferenciar las distintas nociones de operadores discretos que aparecen en este tratamiento. En general, la idea de escalabilidad, es decir, la propiedad de obtener un estado previo o posterior, antecesor o sucesor, creador o aniquilador, la encapsularemos en lo que llamaremos de aquí en adelante, *la propiedad de escalera* del operador involucrado.

Esto nos permite precisar que en la analogía que buscamos realizar, priorizamos las propiedades básicas del caso cuántico como la factorización del operador hermitiano —denominado hamiltoniano y— definido sobre algún espacio de Hilbert, por medio de operadores dotados de la propiedad de escalera, sin preocuparnos por ahora, de la interpretación específica que la obtención de tales operadores implique. De esta manera, en el Tratameinto de Atakishiyeva-Atakishiyev (TAA), se construyen operadores de ascenso y descenso imitando el caso continuo del OAC y en este trabajo se obtendrán operadores de creación y aniquilación imitando el caso más amplio de las relaciones canónicas de conmutación (RCCs) en los capítulos 3, 4 y 5 obteniendo así mismo, la conexión entre los operadores de ambos tratamientos en el Capítulo 6. Dicho lo anterior, en esta sección establecemos resumidamente los resultados obtenidos en el TAA, así como los problemas que aparecen en las estructuras algebraicas del TAA, mismas que motivan la propuesta algebraica de este trabajo.

El objetivo principal del TAA es la obtención de un sistema de autovectores *canónicamente asociados* a la TFD, preferentemente junto con una fórmula de Rodrigues que permita la construcción polinomial de dicho sistema. Ya que la TFD tiene una infinidad de sistemas de autovectores, por "canónicamente asociados" nos referimos a la construcción de un autosistema distinguido mediante algún criterio que provea la calidad de canónico; en este caso dicho criterio consiste en el establecimiento de una analogía con el OAC del caso continuo[1]. Esta analogía implica tácitamente la postulación de que las RCCs son válidas en el ámbito de la mecánica cuántica en dimensión finita, lo cual es una suposición muy fuerte[2]; no obstante, resulta notable que este tratamiento consigue exitosamente la construcción de un operador de *número* $\mathcal{N}$ que conmuta con la TFD, de modo que ambos operadores tienen los mismos autovectores, así que el sistema de autovectores canónicamente asociados a la TFD es precisamente algún sistema de autovectores de $\mathcal{N}$.

En esta sección se presenta el TAA siguiendo la construcción más breve del mismo que se encuentra en [5], para una descripción más extensa y heurística, vea [6, 7] para más sobre el tema. Se parte de operadores A y B de la forma tridiagonal cíclica más

[1] Recuerde que el sistema de autovectores del oscilador armónico cuántico son las funciones de Hermite, que a su vez son también autovectores de la transformada de Fourier integral.

[2] Esta suposición será discutida nuevamente en el Capítulo 5, en el marco de la obtención de los principales resultados de este trabajo.

general

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \cdots & a_{N-1} \\ a_0 & b_1 & c_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ c_{N-1} & \cdots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{c}_0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{N-1} \\ \hat{a}_0 & \hat{b}_1 & \hat{c}_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \hat{a}_{N-3} & \hat{b}_{N-2} & \hat{c}_{N-2} \\ \hat{c}_{N-1} & \cdots & 0 & \hat{a}_{N-2} & \hat{b}_{N-1} \end{pmatrix},$$

donde $a_k, b_k, c_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k, \hat{c}_k$ son números complejos en principio. Se buscan soluciones A y B que satisfagan relaciones entrelazantes de la forma

$$A\Phi = \mathrm{i}\Phi A, \qquad B\Phi = -\mathrm{i}\Phi B; \tag{2.7}$$

de esto se sigue que la solución general para A y B requiere que

$$a_k = -\mathrm{i}\alpha + \beta(\mathrm{i}\omega^{-k} - \omega^{k+1}), b_k = \alpha(\omega^k - \omega^{-k}), c_k = \mathrm{i}\alpha + \beta(\omega^{-k} - \mathrm{i}\omega^{k+1}),$$

y

$$\hat{a}_k = \mathrm{i}\hat{\alpha} - \hat{\beta}(\mathrm{i}\omega^{-k} + \omega^{k+1}), \hat{b}_k = \hat{\alpha}(\omega^k - \omega^{-k}), \hat{c}_k = -\mathrm{i}\hat{\alpha} + \hat{\beta}(\omega^{-k} + \mathrm{i}\omega^{k+1}),$$

donde $\alpha, \beta, \hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son parámetros complejos arbitrarios. Si se impone la condición de hermiticidad, $B = A^\dagger$, entonces

$$\hat{a}_n = c_n^*, \qquad \hat{b}_n = b_n^*, \qquad \hat{c}_n = a_n^*,$$

de manera que

$$\hat{\alpha} = -\alpha^*, \qquad \omega\hat{\beta} = -\beta^*.$$

Introduzca ahora dos combinaciones lineales de los operadores A y $A^\dagger$ de la forma

$$Y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^\dagger) \qquad y \qquad X = \frac{1}{2}(A + A^\dagger), \tag{2.8}$$

entonces los operadores Y y X son hermitianos y juegan el papel de análogos a los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica.

Es natural requerir que el operador de momento sea diagonal; esto ocurre si y solo si $\beta = 0$ y α es un parámetro imaginario puro, o sea que $\alpha + \alpha^* = 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $\alpha = -\mathrm{i}$, de donde

$$a_n = -1, \qquad b_n = 2\sin(n\theta_N), \qquad c_n = 1, \qquad \theta_N = \frac{2\pi}{N}.$$

Por lo tanto

$$X = 2\mathrm{diag}(0, s_1, s_2, \ldots, s_{N-2}, s_{N-1}), \qquad s_n = \frac{\omega^n - \omega^{-n}}{2\mathrm{i}} = \sin(n\theta_N),$$

mientras que

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Así pues, los operadores A y $A^\dagger$ toman la expresión final siguiente:

$$A = X + \mathrm{i}Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2s_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2s_{N-2} & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & -1 & 2s_{N-1} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

y

$$A^\dagger = X - \mathrm{i}Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 2s_1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2s_{N-2} & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & 1 & 2s_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Estos operadores tienen la virtud de que si definimos $\mathcal{N} := A^\dagger A$, entonces $[\mathcal{N}, \Phi_N] = 0$ por lo cual, $\mathcal{N}$ y Φ_N comparten el mismo conjunto de autovectores.

2.4. Estructura algebraica de Askey-Wilson-Heun generada por A y $A^\dagger$

A continuación se describen brevemente ciertas álgebras generadas por A y $A^\dagger$, así como pros y contras que aparecen en sus estructuras con respecto a la flexibilidad de ellas para sistematizar la obtención explícita de sistemas de autovectores.

1. Álgebra cúbica generada por los operadores A y $A^\dagger$.
Tales operadores satisfacen un álgebra cúbica cuando se define el operador

$$C = [A, A^\dagger] = AA^T - A^T A.$$

Se verifica directamente que estos operadores satisfacen

$$[C, A] = \beta_1 AA^T A + \beta_2 A - \beta_1 (A^T)^3, \qquad [A^T, C] = \beta_1 A^T AA^T + \beta_2 A^T - \beta_1 A^3, \tag{2.12}$$

donde

$$\beta_1 = \frac{(1-q)^2}{1+q^2}, \qquad \beta_2 = -4\frac{(q-q^{-1})^2}{q+q^{-1}}; \tag{2.13}$$

tales operadores cumplen la identidad de Jacobi

$$[A, [A^T, C]] + [C, [A, A^T]] + [A^T, [C, A]] = 0. \tag{2.14}$$

En el límite cuando $N \to \infty$ y $q \to 1$, los coeficientes β_1 y β_2 tienden a cero. Entonces $[C, A] = [C, A^T] = 0$; de modo que $[C, A]$ no es proporcional a A, por lo que A no puede funcionar como operador de tipo escalera para C.

2. Álgebra de Askey-Wilson generada por X y Y.
En cuanto a los operadores de *posición* y *momento* X, Y, definidos mediante

$$X = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad Y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^T),$$

es posible probar mediante las relaciones entrelazantes (2.7) que

$$Y\Phi = \Phi X, \qquad X\Phi = -\Phi Y, \tag{2.15}$$

por lo cual

$$Y = \Phi X \Phi^{\dagger}, \tag{2.16}$$

así que los operadores X, Y son unitariamente equivalentes e isospectrales; además de que al ser la TFD la matriz de equivalencia, tales operadores resultan tener representación matricial circulante, con la TFD como matriz diagonalizadora de X, Y con los autovalores de X o Y, según corresponda, en la diagonal.

Ya que las columnas de la TFD forman una base ortonormal —la BFN de la Sección 2.1— repecto a la estructura hermitiana inducida por el producto interno estándar $\langle , \rangle$, podrían por lo tanto interpretarse sus entradas como coeficientes de transición entre bases de autovectores de X y Y siendo la otra base, la canónica. El intercambio de representación matricial entre estas bases, efectivamente intercambia el rol de diagonalidad y bi-diagonalidad[3] entre Y y X lo que permite interpretar a estos operadores como un caso especial de las álgebras de Askey-Wilson:

Proposición 2.4.1 (Atakishiyeva, Atakishiyev, Zhedanov 2021)**.** *Los operadores Y y X proveen una representación del álgebra de Askey-Wilson con relaciones de conmutación*

$$\begin{aligned} X^2Y + YX^2 - (q+q^{-1})XYX &= -(q-q^{-1})^2 Y, \\ Y^2X + XY^2 - (q+q^{-1})YXY &= -(q-q^{-1})^2 X. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Demostración. Consúltese [5], pp. 4 y 5. □

Para realizar el álgebra anterior con más claridad, se introducen los operadores $K_0 = (1/2s_1)X$, $K_1 = (1/2s_1)Y$ y $K_2 = (i/2s_1)Z$, $Z = [X, Y]_q$, que satisfacen

$$[K_0, K_1]_q = K_2, \ [K_0, K_2]_q = -K_1, \ [K_1, K_2]_q = -K_0. \tag{2.18}$$

En efecto al obtener las funciones de transición (o entrelazantes) para esta representación algebraica, es evidente que si ϵ_k y e_l son los autovectores de Y y X, respectivamente, entonces, usando la técnica de Zhedanov se establece

$$\langle \epsilon_k, e_l \rangle = N^{-1/2)} \sum_{j=0}^{N-1} q^{kj} \delta_{lj} = N^{-1/2} q^{-kl} = (e_k, e_0) P_l(\mu_k),$$

de donde las funciones de transición resultan ser los monomios $P_l(\mu_k) = \mu_k^l$ en el argumento discreto $\mu_k = q^{-k}$ como se esperaba. Claramente estos monomios forman un sistema ortogonal completo, pero al ser las mismas entradas de la representación

[3]Este intercambio es una condición necesaria para introducir relaciones de recurrencia de tres términos, y satisfacer el principio de dualidad, como se indica al final de este capítulo.

matricial de la TFD, no se obtiene nueva información más allá de la interpretación de ellas como elementos de un álgebra de Askey-Wilson.

3. Álgebras de operadores de Askey-Wilson-Heun (AWH).
Sobre el espacio vectorial de los polinomios en la variable $x = z + z^{-1}$, el operador de Heun de tipo Askey-Wilson puede caracterizarse como el operador más general en la variable z, que mapea polinomios de grado n en $x = z + z^{-1}$ en polinomios de grado $n + 1$. El operador de Heun W tiene la propiedad de actuar tridiagonalmente sobre los polinomios de Askey-Wilson (PAW) [10]. Entonces se introduce el algebra de Askey-Wilson-Heun a través de los generadores X, W. La motivación de esta álgebra radica en la observación de que el operador algebraico de Heun, puede asociarse a cualquier problema bispectral y es sabido que los polinomios (q-)hipergeométricos del esquema de Askey, presentan instancias bispectrales cuyas propiedades yacen en álgebras cuadráticas.

Tomando los generadores Y y X del álgebra de Askey-Wilson, se construye el operador de Heun como una combinación bilineal arbitraria

$$W = \tau_1 XY + \tau_2 YX + \tau_3 X + \tau_4 Y + \tau_0 \mathcal{I}. \tag{2.19}$$

Debido a que X definido por 2.8 permite la introducción de los operadores A y $A^\dagger$ de modo natural, se puede escoger W como un operador que conmuta con Φ_N tomando $\tau_3 = \tau_4 = 0$ y $\tau_2 = -\tau_1$. Esto implica que W satisface

$$W = -2\mathrm{i}[X, Y] = [A, A^\dagger]. \tag{2.20}$$

Se prueba en [43] que los pares $X, \mathcal{W}$ o $Y, \mathcal{W}$ constituyen un álgebra de tipo Askey-Wilson-Heun (AWH) cerrada bajo relaciones de conmutación. En [5], p. 7, se demuestra que $X, \mathcal{W}$ forman una álgebra cúbica de tipo Heun. Sin embargo, al intercambiar los roles entre X y W buscando la dualidad para obtener funciones de transición donde puedan aparecer los PAW, se encuentra que no se intercambia la tridiagonalidad necesaria que conduce a ellos.

Puede decirse que la revisión de los casos anteriores para la posible obtención de polinomios asociados a la TFD, amplía el panorama que la rodea de tal forma que se conocen más a fondo sus propiedades: El espectro de autovalores del operador de número $\mathcal{N}$ es no degenerado para dimensiones impares de N, mientras que para dimensiones pares, aparece *ruptura de simetría de reflexión espontánea*; el álgebra generada con los

operadores A y A^T no es una álgebra no-lineal 'clásica' del esquema Askey-Wilson ([5], p. 8); los operadores Y y X forman una (q-)álgebra de tipo Askey-Wilson, siendo las entradas de la TFD las funciones de transición, pero no se obtiene más información ni *maniobrabilidad*; el par $X, \mathcal{W}$ forma un álgebra cúbica de tipo AWH, pero no conduce a intercambio de tridiagonalidad para obtener bases duales. Todas estas propiedades echan luz sobre el problema en general y la obtención de un algoritmo para la TFD, para al menos el caso impar, en lo particular.

En cuanto a la forma explícita de autovectores y autovalores, su posible obtención implica reconocer los parámetros adecuados e interpretar a $\mathcal{N}$ como un operador en diferencias de segundo orden que, al verlo en sí mismo como una relación de recurrencia de tres términos en función de su argumento, pueda conectarse con la relación de recurrencia de tres términos con respecto al grado N, para satisfacer de esta forma al concepto de dualidad.

Finalmente, la noción de bispectralidad es importante, como se dice en el prefacio de [27], p. vii: *por un lado, polinomios ortogonales $p_n(x)$ son autofunciones de un operador en diferencias de segundo orden en la variable N con autovalor x; por otro lado, si pertenecen al (q-)esquema de Askey, entonces son autofunciones de un operador de segundo orden en la variable x con autovalor que depende de N.*

Las consideraciones anteriores muestran la problemática subyacente en el TAA y permiten establecer el problema sobre el que se pretende echar luz: *la construcción de un sistema algebraico que provea un marco de trabajo más amplio para obtener sistemáticamente metodologías que conduzcan a la determinación de la resolubilidad de la obtención de alguna fórmula de (tipo) Rodrigues, así como correspondientes relaciones de recurrencia de tres términos, asociadas a la TFD.*

Capítulo 3

Un álgebra asociada a la Transformada de Fourier discreta

En la última parte de la Sección 2.4 del capitulo anterior se ha planteado el problema general que motiva este trabajo, de modo que el objetivo general de esta tesis consiste en

el establecimiento de un sistema algebraico siguiendo una analogía fundada no en propiedades del OAC —analogía ya explotada en el TAA— sino en propiedades más amplias como las que abarcan las relaciones de conmutación canónicas (RCCs) de manera que se obtenga más flexibilidad de análisis sobre las estructuras discretas en espacios de Hilbert de dimension finita;

por *flexibilidad* nos referimos a que el establecimiento del sistema algebraico permita el uso de métodos y técnicas ya existentes en el análisis armónico y álgebras conmutativas, para obtener herramientas que permitan decidir la posible existencia y establecimiento de fórmulas de Rodrigues así como correspondientes relaciones de recurrencia de tres términos, las cuales pueden verse como ecuaciones en diferencias de segundo orden, asociadas de alguna manera a la TFD. Por ejemplo, veremos que la existencia de una matriz Toeplitz-Hermitiana en conexión con matrices circulantes, abre la posibilidad de aplicar la teoría de Szegö sobre secuencias de matrices Toeplitz para la estimación asintótica del comportamiento de la distribución de sus autovalores, conforme $N \to \infty$. Por esto los objetivos específicos consisten en

1. la obtención de análogos discretos de las RCCs,
2. analizar los operadores de ascenso y descenso tradicionalmente definidos que surgen en este contexto,
3. establecer criterios de consistencia de la estructura discreta resultante,

4. construir operadores discretos con la propiedad de escalera y,

5. determinar la relación de este sistema ampliado, con el TAA.

.

En las siguientes secciones de este capítulo se estudian los objetivos 1 y 2; en los capítulos 4 y 5 los 3 y 4 y en el Capítulo 6 el objetivo 5. Este es el hilo conductor así propuesto y creemos que contribuirá al ampliamiento de la comprensión de la estructura algebraica alrededor de la TFD en lo particular y a la de los espacios de Hilbert finito-dimensionales en lo general.

3.1. La TFD y los operadores discretos de posición y momento

Todo lo que se ha mencionado en los capítulos anteriores no es nuevo, excepto el hecho de que los operadores A y $A^\dagger$ yacen a nivel de representaciones del grupo de Heisenberg. Para construir una analogía más cercana a la realización de Schrödinger, se necesitan de alguna forma, operadores a nivel de representaciones de álgebras de Lie, sin importar si tenemos que lidiar con *conmutadores deformados* o si se pierde la propiedad de autovalores equidistantes típica del caso continuo canónico[1], pero cuidando que la estructura algebraica obtenida esté bien definida, además de que no se trivialice. Uno de los principales obstáculos que podría desmotivar el estudio de estas estructuras, es el hecho de que al ser un álgebra de Lie el espacio tangente en la identidad de su correspondiente grupo de Lie como variedad diferenciable, en el caso discreto, el álgebra de Lie inducida por la topología discreta —presente en las estructuras finitas bajo consideración— se trivializa al espacio vectorial $\{0\}$ y ya no hay más estructura ni nada más que hacer.

Precisamente en este capítulo se propone una alternativa algebraica dotada de un corchete bilineal que es antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi, con la que se puede evitar tal trivialización mediante el uso de una matriz Z_N a expensas de prescindir de la aparición de la identidad en las relaciones de conmutación y usando el mapeo exponencial para identificar a los generadores de las *familias uniparamétricas*

[1] Autovalores no equidistantes no necesariamente son una mala señal, ya que estos son fundamentales, por ejemplo, para la construcción de cubits *bien portados* en computación cuántica: cuando los cubits se modelan como osciladores armónicos en circuitos de resonador LC, los autovalores equidistantes de energía se deben perturbar mediante uniones de Josephson para convertir a un circuito superconductor en un cubit ([26] p. 3).

discretas dadas por las matrices reloj U^j y de traslado V^j que, en virtud del Corolario 2.1.17, tienen a la unitaria TFD como operador entrelazante.

De la propia Definición 2.1.1 de traslación, el operador V genera traslaciones en el espacio subyacente $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$; por eso, se buscan soluciones hermitianas P cuya exponenciación —imaginaria— reproduzca al operador unitario V en analogía con la ec. (1.10).

Teorema 3.1.1. *Sea $j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Un operador hermitiano $P_j \in GL(L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ que es una solución de la ecuación $V^j = exp(\mathrm{i}\eta P_j)$, donde η es un parámetro real, está dada por*

$$P_j = \Phi_N \, diag\{\frac{2\pi jl}{\eta N}\}_{l=0}^{N-1} \Phi_N^{-1}.$$

Demostración. Notar que debido a la unitaridad de Φ_N, (Theorem 2.1.12-1)

$$\begin{aligned} P_j^\dagger &= \left(\Phi_N \mathrm{diag}\{\frac{2\pi jl}{\eta N}\}\Phi_N^\dagger\right)^\dagger \\ &= \Phi_N \mathrm{diag}\{\frac{2\pi jl}{\eta N}\}\Phi_N^\dagger \\ &= P_j, \end{aligned}$$

de modo que P_j es hermitiano.

Ahora se demuestra que bajo exponenciación, en efecto recuperamos V^j. La exponenciación de P_j está bien definida ya queP_j es una matriz con entradas finitas, es una serie que converge absolutamente y produce una matriz que es invertible; además, multiplicación por la unidad imaginaria, $\mathrm{i}P_j$, da una matriz antiadjunta, que bajo exponenciación produce una matriz unitaria. Entonces sea $\eta \in \mathbb{R}$ y calcúlese la representación matricial de $\exp(\mathrm{i}\eta P_j)$ en la base canónica $\{e_l\}$; usando la unitaridad de Φ_N

$$\exp(\mathrm{i}\eta P_j) = \exp\left(\mathrm{i}\eta\Phi_N \mathrm{diag}\{\frac{2\pi jl}{\eta N}\}_{l=0}^{N-1}\Phi_N^{-1}\right) = \Phi_N \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} j}{N}\mathrm{diag}\{l\}_{l=0}^{N-1}\right)\Phi_N^{-1},$$

multiplicando por Φ_N por la derecha y aplicando e_l se obtiene

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\eta P_j}\Phi_N e_l &= \Phi_N\left(I + \frac{2\pi \mathrm{i} j}{N}\mathrm{diag}\{l\}_{l=0}^{N-1} + \frac{(2\pi \mathrm{i} j)^2}{2!N^2}\mathrm{diag}^2\{l\}_{l=0}^{N-1} + \cdots\right)e_l \\ &= \Phi_N\left(1 + \frac{2\pi \mathrm{i} j}{N}l + \frac{(2\pi \mathrm{i} j)^2}{2!N^2}l^2 + \cdots\right)e_l \\ &= \Phi_N e^{2\pi \mathrm{i} jl/N}e_l \\ &= \Phi_N U^j e_l, \quad \forall j, l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \end{aligned}$$

De donde, usando el Corolario 2.1.17, se sigue

$$e^{\mathrm{i}\eta P_j}\Phi_N e_l = \Phi_N \Phi_N^\dagger V^j \Phi_N e_l = V^j \Phi_N e_l, \quad \forall j,l \in \{0,1,\ldots,N-1\},$$

así,

$$\left(e^{\mathrm{i}\eta P_j}\Phi_N - V^j\Phi_N\right) e_l = 0, \quad \forall j,l \in \{0,1,\ldots,N-1\},$$

entonces

$$e^{\mathrm{i}\eta P_j}\Phi_N = V^j\Phi_N, \quad \forall j \in \{0,1,\ldots,N-1\},$$

por lo tanto

$$e^{\mathrm{i}\eta P_j} = V^j, \quad \forall j \in \{0,1,\ldots,N-1\}.$$

□

Observación 3.1.2. *Claramente, los autovalores de P_j son $2\pi jl/(\eta N)$ con la NFB como autovectores. Similarmente cuando se exponencia U^j se obtienen los mismos autovalores.*

Denotemos a los operadores diagonales como

$$Q_j := \frac{2\pi}{\eta N}\mathrm{diag}(0,j,\ldots,(N-1)j);$$

de esta manera la TFD entrelaza a los operadores P_j y Q_j como en la ec. (1.1). Entonces la TFD entrelaza operadores a nivel de representaciones de grupo (los V_j's) así como también a algún nivel de representaciones de álgebras (los P_j's); esto es una consecuencia directa del mapeo exponencial y la unitaridad de la TFD. Así pues, el entrelazamiento es una condición necesaria para construir posibles álgebras a nivel de la realización de Schrödinger, pero no suficiente. Es así como se nota que por lo tanto se requiere de una condición adicional, a decir, que los operadores de traslación resulten de exponenciación de los operadores P_j y Q_j.

Ejemplo 3.1.3. *Para el caso $N = 5$ se obtiene con $j = 1$*

$$P = \begin{pmatrix} 2{,}51 & -0{,}628{+}0{,}865i & -0{,}628{+}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}865i \\ -0{,}628{-}0{,}865i & 2{,}51 & -0{,}628{+}0{,}865i & -0{,}628{+}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}204i \\ -0{,}628{-}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}865i & 2{,}51 & -0{,}628{+}0{,}865i & -0{,}628{+}0{,}204i \\ -0{,}628{+}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}865i & 2{,}51 & -0{,}628{+}0{,}865i \\ -0{,}628{+}0{,}865i & -0{,}628{+}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}204i & -0{,}628{-}0{,}865i & 2{,}51 \end{pmatrix},$$

la cual resulta ser Toeplitz, hermitiana y circulante.

3.2. Relaciones de conmutación discretas

En analogía con la ecuación (1.1) resulta natural identificar a los operadores Q_j y P_k con —las coordenadas conjugadas u— operadores conjugados de posición y momento.

Definición 3.2.1. *Los operadores* $Q : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *y* $P : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *definidos mediante*

$$Q := \frac{2\pi}{\eta N} diag(0, 1, \ldots, N-1), \qquad P := \Phi_N Q \Phi_N^{-1}, \tag{3.1}$$

se denominarán como operadores conjugados discretos de posición y momento, respectivamente.

Observación 3.2.2. *Recuerde que hemos convenido representar a los operadores de* $GL(L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ *y sus representaciones matriciales en la base canónica, con la misma letra.*

Observación 3.2.3. *El número real* η *es un parámetro de acoplamiento que puede tomar valores apropiados según tratemos con la trasformada de Fourier discreta finita (TFD), discreta infinita (series de Fourier) o continua infinita (transformada integral de Fourier).*

Ahora consideramos conmutadores de operadores anti-adjuntos

$$\frac{1}{\mathrm{i}}[\mathrm{i}Q, \mathrm{i}P] = \mathrm{i}[Q, P].$$

Puesto que, en virtud del Teorema 3.1.1, para cada j se puede asociar un operador de momento P_j y en consecuencia, por la propiedad entrelazante de Φ_N, un operador de posición Q_j, no es difícil verificar que $[Q, P]$ permanece constante en el sentido de que Q y P determinan a Q_j y P_j como generadoras del *conjunto uniparamétrico de transformaciones discretas* $\{V_j\}_{j=0}^{N-1}$. Esta constancia se considera crucial como análoga a la identidad del caso continuo y sugiere la siguiente definición.

Definición 3.2.4. *Se define al conmutador de* $Q : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *y* $P : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *por* Z_N *mediante*

$$Z_N := \mathrm{i}[Q, P].$$

Al desarrollar este trabajo, se encontró que esta matriz ha sido previamente estudiada por Santhanam y Tekumalla en [36] obteniéndose mediante el uso de logaritmos. Con la definición anterior, Z_N implica lo siguiente.

Corolario 3.2.5. *Los operadores* Q, P, Z_N *satisfacen la identidad de Jacobi*

$$[Q, [P, Z_N]] + [P, [Z_N, Q]] + [Z_N, [Q, P]] = 0.$$

Demostración. Calculando directamente a los conmutadores resulta

$$[Q,[P,Z_N]] = \mathrm{i}(2(QP)^2 - Q^2P^2 - 2(PQ)^2 + P^2Q^2),$$

$$[P,[Z_N,Q]] = \mathrm{i}(2(PQ)^2 - P^2Q^2 - 2(QP)^2 + Q^2P^2),$$

$$[Z_N,[Q,P]] = 0;$$

por lo tanto

$$[Q,[P,Z_N]] + [P,[Z_N,Q]] + [Z_N,[Q,P]] = 0.$$

□

Adicionalmente, se establecen las siguientes relaciones.

Corolario 3.2.6. *Los operadores Q_j, P_k y Z_N, $j,k = 0,\ldots,N-1$, satisfacen las relaciones de conmutación discretas*

$$[P_j,P_k] = 0, \quad [Q_j,Q_k] = 0, \quad [P_j,Q_k] = \mathrm{i}jkZ_N.$$

Demostración. Ya que

$$Q = \frac{2\pi}{\eta N}\mathrm{diag}(0,1,\ldots,N-1),$$

entonces, por el Teorema 3.1.1 y las ecs.(3.1), $Q_j = jQ$, por lo cual $P_j = \Phi_N Q_j \Phi_N^{-1} = \Phi_N jQ\Phi_N^{-1} = jP$, así que $[P_j,Q_k] = P_jQ_k - Q_kP_j = jk(PQ-QP) = -\mathrm{i}^2jk[P,Q] = -\mathrm{i}jk\mathrm{i}[P,Q] = \mathrm{i}jkZ_N$. Los otros conmutadores se satisfacen trivialmente. □

De esta manera, comparando con las relaciones canónicas de conmutación del caso continuo (ecs. 1.2), Z_N juega el papel de la identidad en esta álgebra discreta. Podemos notar una fundamental, esperada e inevitable desviación del caso continuo, pues en esta analogía $[P_j,Q_k] \neq 0$ para $j \neq k$, mientras que en el caso continuo, $[P_j,Q_k] = 0$ para $j \neq k$. Esto se debe a que Z_N no es un elemento central —i.e., no es una matriz escalar— por lo cual, no es difícil comprobar que $[Q,Z_N] \neq 0$ y $[P,Z_N] \neq 0$ de modo que esta álgebra implicada en el lema anterior, no es un álgebra de Heisenberg. Esto no debe sorprender, pues no se debe esperar que la teoría de operadores en diferencias, tenga las mismas propiedades que la teoría de operadores diferenciales, ya que una diferencia finita es radicalmente diferente a una *cantidad infinitamente pequeña* pero no nula, como los son los diferenciales —infinitésimos—. Así pues, esta álgebra discreta resulta *menos conmutativa* que el caso cuántico continuo. O sea que se puede afirmar que existe una jerarquía sobre el grado de conmutatividad en los sistemas bajo consideración:

- en el caso clásico continuo todo conmuta;

- en el caso cuántico continuio, Q_j y P_k conmutan para $j \neq k$;
- en la analogía cuántica discreta, solo Q_j, Q_k y P_j, P_k conmutan entre sí.

Es decir que el sistema no-conmutativo *más conmutativo* resulta ser el modelo de la realización de Schrödinger en el sentido de que si bien es no conmutativo, por lo menos se acerca a la conmutatividad pues los únicos elementos que no conmutan son los operadores conjugados Q_j, P_k con índices iguales y con la *bien portada* identidad como conmutador. Por esto, en el caso continuo, el centro del grupo de Hesenberg se mapea al centro del álgebra de Heisenberg, el cual consiste de matrices escalares que, en virtud del teorema de Stone-Von Neumann, una vez fijada una escala —la constante de Planck— cada representación unitaria es equivalente a la representación estándar de los operadores de posición y momento. En el caso discreto, sin embargo, se pierde conmutatividad en las "coordenadas conjugadas" Q_j, P_k incluso con índice diferente, por el *no tan bien portado* operador Z_N como conmutador. Debido a esta pérdida de conmutatividad el caso discreto presenta mayor complejidad y es de esperarse que operadores como el de número $\mathcal{N}$ normalmente definidos no posean las mismas propiedades del caso continuo; no obstante, a cambio se obtienen mayores posibilidades de análisis, por lo que tal complejidad, es digna de ser estudiada. Después de todo, a nosostros lo único que nos interesa es la propiedad entrelazante que la TFD tiene con los operadores conjugados —ecs. (3.1)— y con las matrices reloj y de traslado —Corolario 2.1.17— y cómo la TFD transforma muestras de datos del dominio del tiempo al de frecuencias o viceversa; como consecuencia de esto, hemos obtenido a cambio, el álgebra implícita en los Coroloarios 3.2.5 y 3.2.6. Estas consideraciones son algunas de las razones por las que no se procederá únicamente con las definiciones canónicas o estándar de los operadores de creación y aniquilación sino que en el Capítulo 5 se establecerá un sistema algebraico que permita cierta ampliación y flexibilidad considerando definiciones genéricas de operadores de tipo escalera.

Por otro lado, ya que Z_N juega el papel de la identidad, surge la natural necesidad de conocer su forma explícita así como de investigar su comportamiento para N grande. Este es el objeto de estudio del siguiente capítulo. Pero antes se realiza en la siguiente sección un breve análisis sobre las definiciones estándar de los operadores de ascenso y descenso en el contexto de Z_N. Este análisis es trascedental para el posterior desarrollo de este trabajo.

3.3. Sobre los operadores canónicos de creación y aniquilación con Z_N

Como se mencionó en la Sección 2.3, reservamos las palabras de ascenso y descenso para los operadores del TAA. En esta sección analizamos a las definiciones estándar

$$a_j^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_j - \mathrm{i}P_j\right), \qquad a_j := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_j + \mathrm{i}P_j\right), \tag{3.2}$$

en el contexto de las relaciones de conmutación discretas del Corolario 3.2.6, con el fin de determinar si estas definiciones conducen a una teoría de representaciones *bien portada*.

Teorema 3.3.1. *Los operadores $a_j^\dagger$ y a_j satisfacen las siguientes relaciones de conmutación*

$$[a_j, a_k] = 0, \quad [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0, \quad [a_j, a_k^\dagger] = jkZ_N.$$

Demostración. Usando bilinealidad del conmutador y el Corolario 3.2.6, tratamos simultáneamente con a y $a^\dagger$ para los conmutadores cero como sigue

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_j \pm \mathrm{i}P_j\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_k \pm \mathrm{i}P_k\right)\right] &= \frac{1}{2}\left([Q_j, Q_k] \pm \mathrm{i}[Q_j, P_k] \pm \mathrm{i}[P_j, Q_k] \pm [P_j, P_k]\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mp jkZ_N \pm kjZ_N\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, para a_j and $a_k^\dagger$ se tiene

$$\begin{aligned}[a_j, a_k^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_j + \mathrm{i}P_j\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_k - \mathrm{i}P_k\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left([Q_j, Q_k] - \mathrm{i}[Q_j, P_k] + \mathrm{i}[P_j, Q_k] + [P_j, P_k]\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\mathrm{i}^2 jkZ_N - \mathrm{i}^2 kjZ_N\right)\\ &= jkZ_N.\end{aligned}$$

□

El propósito principal en esta construcción es considerar al operador $n := a^\dagger a$ como *potencial* operador de número. Con esta definición se obtiene

$$\begin{aligned} n &= a^\dagger a \\ &= \frac{N^2}{4\pi}\left(Q^2 + P^2 + \mathrm{i}[Q,P]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{N^2}{2\pi}\left(Q^2+P^2\right) - Z_N\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Esto nuevamente refleja al caso continuo (ec. (1.7)) con la matriz Z_N en el papel de la identidad. Se nota inmediatamente que para que n y Φ_N tengan el mismo conjunto de autovectores, es necesario que $[n, \Phi_N] = 0$; sin embargo, es posible proporcionar contraejemplos numéricos donde esto no ocurre. Adicionalmente, no es dificil verificar que n, a and $a^\dagger$ satisfacen

$$[a, a^\dagger] = Z_N, \quad [n, a^\dagger] = a^\dagger Z_N, \quad [n, a] = -aZ_N.$$

Se debe recordar —ecs. (1.8)— que una condición necesaria para que a y $a^\dagger$ sean efectivamente operadores de escalera, es que sus conmutadores con el operador de número sean proporcionales a ellos

$$[a, a^\dagger] = \alpha I, \quad [n, a^\dagger] = \beta a^\dagger, \quad [n, a] = -\gamma a, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Por lo tanto, lo anterior es una restricción severa que impide que podamos considerar a los operadores a y $a^\dagger$ como genuinos operadores de ascenso y descenso en el contexto del operador Z_N, por el hecho de que no se satisfizo la condición necesaria para poseer la propiedad de escalera. Lo anterior no implica una desestimación del estudio de estos operadores, pero para nuestros fines, se detiene aquí este análisis y en el Capítulo 5 se propone una manera de resolver esta dificultad.

Capítulo 4

Sobre la naturaleza de Z_N

Como se vió en el capítulo anterior, el operador Z_N juega el papel de la identidad en este tratamiento. En este capítulo se explora acerca del significado de Z_N en el sentido de [36], obteniéndose formalmente la forma explícita de la misma y se argumenta detalladamente, aunque no se formaliza, que en el límite cuando $N \to \infty$, $Z_N \to \delta$, donde δ es la *distribución delta de Dirac*, que es la identidad en distribuciones bajo convolución.

4.1. La forma explícita de Z_N: propiedad Toeplitz-Hermitiana y traza cero

Para saber la forma explícita de Z_N, se calcula la acción de los operadores Q_j y P_j sobre la BFN, para obtener la representación matricial de $[Q_j, P_k]$ en dicha base.

Es claro que P_j está en la representación canónica; ya que la TFD la diagonaliza, su inversa actúa como la matriz de transición de $\{e_l\}$ a $\{\epsilon_l\}$, resultando Q_j, la cual está en la representación de la BFN[1]. Como los autovectores se preservan bajo el mapeo exponencial, los autovectores de P_j son la BFN, y porque Q_j es diagonal, los de esta son los $\{e_l\}$. También, los correspondientes autovalores son los exponentes de los correpsndientes a V^j, U^j, respectivamente (Corolario 2.1.18), a decir

$$P_j \epsilon_k = \frac{2\pi jk}{\eta N} \epsilon_k, \quad Q_j e_k = \frac{2\pi jk}{\eta N} e_k, \tag{4.1}$$

y

$$\epsilon_k = \sum_m \Phi_{mk} e_m, \quad e_k = \sum_m \Phi^{-1}_{mk} \epsilon_m, \tag{4.2}$$

donde Φ_{mk} representa a las entradas matriciales de Φ_N.

[1] Tómese en cuenta que la definición que se está usando para la TFD es con signo positivo en el exponente.

Ahora se calcula la transformación de la BFN por los operadores P_kQ_j y se expresa en términos de la base misma.

Lema 4.1.1. *El operador P_kQ_j transforma a la BFN como*

$$P_kQ_j\epsilon_m = \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3}\sum_n\sum_{n'} nn'\omega^{n(m-n')}\epsilon_{n'}, \quad 0 \leq k, j, m, n, n' \leq (N-1).$$

Demostración. Primero se calcula $Q_j\epsilon_m$, $0 \leq j, m \leq (N-1)$ usando la primera de las ecs. (4.2), para aplicar la propiedad de autovalores de Q_j; entonces se aplica la segunda de las ecs. (4.1) para obtener los autovalores correspondientes. Finalmente se usa la segunda de las ecs. (4.2) para expresar el resultado en la BFN:

$$\begin{aligned} Q_j\epsilon_m &= Q_j\sum_n \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{nm}e_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{nm}Q_je_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n \omega^{nm}\frac{2\pi j}{\eta N}ne_n = \frac{2\pi j}{\eta N^2}\sum_n \omega^{nm}n\sum_{n'}\omega^{-nn'}\epsilon_{n'} \\ &= \frac{2\pi j}{\eta N^2}\sum_n\sum_{n'} n\omega^{n(m-n')}\epsilon_{n'}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ahora se obtiene

$$P_kQ_j\epsilon_m = \frac{2\pi j}{\eta N^2}\sum_n\sum_{n'} n\omega^{n(m-n')}\epsilon_{n'}\frac{2\pi kn'}{\eta N}\epsilon_{n'} = \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3}\sum_n\sum_{n'} nn'\omega^{n(m-n')}\epsilon_{n'}.$$

□

De esta forma los elementos de matriz del conmutador satisfacen lo siguiente.

Teorema 4.1.2. *Los elementos de matriz de $[Q_j, P_k]$ en la BFN están dados por*

$$[Q_j, P_k]_{lm} = \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3}\sum_n (m-l)n\omega^{n(m-l)},$$

donde $j, k, l, m, n = 0, \ldots, N-1$.

Demostración. Sea $[Q_j, P_k]_{lm}$ la entrada (l, m) de la representación matricial de $[Q_j, P_k]$ en la BFN, entonces, por la ec. (4.3), Lema 4.1.1, y ortonormalidad, se sigue que

$$\begin{aligned}
[Q_j, P_k]_{lm} &= \langle \epsilon_l, [Q_j, P_k]\epsilon_m \rangle = \langle \epsilon_l, \frac{2\pi km}{\eta N} Q_j \epsilon_m - P_k Q_j \epsilon_m \rangle \\
&= \langle \epsilon_l, \frac{2\pi km}{\eta N} \frac{2\pi j}{\eta N^2} \sum_n \sum_{n'} n\omega^{n(m-n')} \epsilon_{n'} - \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3} \sum_n \sum_{n'} nn' \omega^{n(m-n')} \epsilon_{n'} \rangle \\
&= \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3} \langle \epsilon_l, \sum_n \sum_{n'} (m - n') n\omega^{n(m-n')} \epsilon_{n'} \rangle \\
&= \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3} \sum_n \sum_{n'} (m - n') n\omega^{n(m-n')} \langle \epsilon_l, \epsilon_{n'} \rangle \\
&= \frac{4\pi^2 jk}{\eta^2 N^3} \sum_n (m - l) n\omega^{n(m-l)},
\end{aligned}$$

donde se ha usado la bilinealidad de $\langle , \rangle$. □

Para estimar el comportamiento de Z_N para N grande, es necesario centrar a los elementos de matriz de $[Q_j, P_k]$ con respecto a sus entradas lm. Establezca que

$$r := \begin{cases} N = 2L + 1, & \frac{N-1}{2} = L \\ N = 2M, & \frac{N}{2} = M \end{cases};$$

defínanse ahora nuevos índices centrados l', m', n' por medio de $n' = n - r$, $m' = m - r$, $n' = n - r$, entonces

$$[Q, P]_{lm} = \frac{4\pi^2}{\eta^2 N^3} \omega^{(m'-l')r} \sum_{n'} (m' - l')(n' - r)\omega^{n'(m'-l')},$$

por lo cual

$$[Q, P]_{lm} = \omega^{(m-l)r} [Q, P]^C_{l'm'}, \tag{4.4}$$

donde $[Q, P]^C_{l'm'}$ está dado por la siguiente definición.

Definición 4.1.3. *Se denota por $[Q, P]^C_{l'm'}$ a la versión centrada de $[Q, P]_{lm}$, y está dada por*

$$[Q, P]^C_{l'm'} = \frac{4\pi^2}{\eta^2 N^3} \sum_{n'} (m' - l')(n' + r)\omega^{n'(m'-l')},$$

donde

$$l', m', n' := \begin{cases} -\frac{N-1}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2} & \textit{si } N \textit{ es impar} \\ -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1 & \textit{si } N \textit{ es par} \end{cases}.$$

La versión centrada puede simplificarse.

Proposición 4.1.4. *La versión centrada de $[Q,P]$ satisface*

$$[Q,P]^C_{l'm'} = \frac{4\pi^2}{\eta^2 N^3}\sum_{n'}(m'-l')n'\omega^{n'(m'-l')}.$$

Demostración. Tomamos de la Definición 4.1.3 la sumatoria con factor $1/N$ y la dividimos en dos términos, así, tomando en cuenta que $m'-l' = m-l$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n'}(m'-l')(n'+r)\omega^{n'(m'-l')} = &\frac{1}{N}\sum_{n'}(m'-l')n'\omega^{n'(m'-l')}\\ &+\frac{1}{N}\sum_{n'}(m'-l')r\omega^{n'(m'-l')},\end{aligned}$$

donde el segundo término se anula,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n'}(m'-l')r\omega^{n'(m'-l')} &= \frac{m-n}{N}r\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{(n-r)(m-l)}\\ &= (m-l)r\omega^{-r(m-l)}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{n(m-l)}\\ &= (m-l)r\omega^{-r(m-l)}\delta_{ml} = 0, \quad \forall\ m,l = 0,\dots,N-1.\end{aligned}$$

La delta de Kronecker δ_{ml} aparece después de usar la serie geométrica, eq.(2.1); por lo tanto, poniendo esto en la Definición 4.1.3, se obtiene la afirmación de la proposición. □

Así que la versión centrada es la no-centrada multiplicada por el factor de fase $\omega^{-(m-l)r}$ en cada entrada matricial.

Corolario 4.1.5. *$Z_N = \mathrm{i}[Q,P]$ es un operador Toeplitz-Hermitiano de traza cero.*

Demostración. Esto claramente se sigue del Teorema 4.1.2. □

4.2. Sobre el comportamiento de Z_N para N grande

Ahora estamos en posición de estimar aproximadamente el comportamiento de $Z_N = \mathrm{i}[Q,P]$ para N grande, estableciendo una restricción sobre el parámetro η. En esta sección relajamos la formalidad para ganar intuición sobre Z_N. Se va a tratar un poco con distribuciones temperadas como funcionales lineales continuos sobre el espacio de funciones de Schwartz y también con la transformada de Fourier de distribuciones. Un

tratameinto amigable de estos conceptos se puede encontrar en [35] y para uno riguroso consulte [1].

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones periódicas de cuadrado integrable $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ con serie de Fourier convergente en la base $\{\lambda_n(t) = e^{-\mathrm{i}nt} : n = 0, 1, ..., N-1\}$. Entonces

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{-\mathrm{i}nt},$$

con

$$\langle f(t), \lambda_m(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mathrm{i}nt} dt =: \hat{f}_n; \tag{4.5}$$

donde $\hat{f}_n$ es la transformada de Fourier de f definida a través del producto interno $\langle , \rangle$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ correspondiente. Entonces, introduciendo la N-ésima suma parcial de f,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{-\mathrm{i}nt} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{-\mathrm{i}nt} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{\mathrm{i}nt'} dt' e^{-\mathrm{i}nt} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{\mathrm{i}n(t'-t)} dt' \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{i}n(t'-t)} dt = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') D_N(t'-t) dt', \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde D_N es un núcleo bien conocido:

Definición 4.2.1. *La sucesión de funciones $\{D_N\}, N \in \mathbb{N}$, es llamado el N-ésimo núcleo de Dirichlet,*

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{i}nt}.$$

También es bien sabido (vea [21] para pruebas detalladas) que, usando la serie geométrica (2.1), el núcleo de Dirichlet obedece, luego de insertar el factor $2\pi/N$ en la variable t,

1. $D_N(t) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})t]}{\sin(t)}$,
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$,
3. $D_N(0) = 2N + 1$.

Debido a estos hechos, el núcleo de Dirichlet se toma como una sucesión aproximada de funciones para la distribución delta de Dirac, denotada por δ. Así que en el sentido

de distribuciones se puede escribir

$$\lim_{N\to\infty} D_N = \delta. \tag{4.7}$$

Definición 4.2.2. *Si f y g son dos funciones periódicas 2π-integrables, entonces*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

es la convolución de f y g.

Por esto, se sigue inmediatamente que las sumas parciales en la ec. (4.6) satisfacen

$$S_N(f)(t) \quad := \quad \sum_{-N}^{N} \hat{f}_n e^{\mathrm{i}nt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t')D_N(t'-t)dt' = (f * D_N)(t);$$

así

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}(D_N * f)(t), \quad \forall\ t \in (-\pi,\pi), \quad \forall\ f \in \mathcal{F}. \tag{4.8}$$

Como la función f determina una distribución temperada bien definida a través de su acción bajo el signo integral sobre funciones de prueba ϕ, abusando de la notación, es común escribir f en lugar de su distribución inducida T_f. Esto significa que se puede considerar a δ como la identidad bajo convolución en el sentido distribucional; de modo que, usando la ec. (4.7), se puede escribir

$$\delta * f = f \qquad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{4.9}$$

Desafortunadamente, se sabe que el núcleo de Dirichlet es problemático y no es un *buen núcleo* en el sentido de [21], pp. 99, 102, ya que cuando $N \to \infty$ el área entre las curvas y el eje x medida en valor absoluto diverge. Esto hace que este núcleo sea muy difícil de trabajar y se tiene que ser muy cuidadoso cuando se lidia con integrales con valor absoluto porque podrían no converger. Para evitar esta dificultad, usualmente se usa a cambio el así llamadao núcleo de Fejér, obtenido mediante las medias aritméticas de $D_0, D_1, \ldots, D_{N-1}$, las cuales se denominan *sumas de Cèsaro*. Esto remedia los problemas de convergencia gracias a que tomar promedios frecuentemente hace las cosas mejor portadas; de esta manera se obtiene un buen núcleo no negativo (cf. [21], Remark 5, p.103). No obstante, la convergencia de las sumas parciales $S_N(f)(t)$ está garantizada si f es Lipschitz o diferenciable, pues en tal caso, ellas convergen por punto en todas partes.

Para conectar esto con Z_N calcúlese la derivada de D_N:

$$D'_N(t'-t) := \frac{\mathrm{d}D_N(t'-t)}{\mathrm{d}t'} = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{i}n e^{\mathrm{i}n(t'-t)},$$

de modo que

$$(t'-t)D'_N(t'-t) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{i}n(t'-t)e^{\mathrm{i}n(t'-t)}.$$

Ahora tomamos una muestra de N datos dada por $t' = \frac{2\pi m}{N}, t = \frac{2\pi l}{N} \in [-\pi, \pi]$. Cuando se acoplan los tratamientos discreto y continuo, l, m y n se toman de acuerdo a la Definición 4.1.3. Esto evita que se tenga que cambiar el factor 2π en la exponencial. Por lo tanto, usando la Proposición 4.1.4 y acompletando factores necesarios se obtiene

$$\begin{aligned}
(m-l)D'_N(m-l) &= \sum_{n=-N}^{N} n(m-l)\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}n(m-l)\right) \\
&= \frac{4\pi^2}{\eta^2 N^3}\frac{N^3\eta^2\mathrm{i}}{4\pi^2}\sum_{n=-N}^{N}(m-l)n\omega^{n(m-l)} = \frac{N^3\eta^2}{4\pi^2}\mathrm{i}[Q,P]_{lm} \\
&= Z_{lm}, \quad \text{siempre que } \eta = \frac{2\pi}{N^{3/2}};
\end{aligned}$$

o sea que,

$$Z_{lm} = (m-l)D'_N(m-l). \tag{4.10}$$

Se puede hacer un cálculo refinado si se considera un continuo de frecuencias. En tal caso, la serie de Fourier es reemplazada por la transformación integral de Fourier y η tomaría el valor $\sqrt{2\pi/N}$.

La ec. (4.10) sugiere la siguiente afirmación:

en el límite cuando $N \to \infty$, se espera que $Z_{lm} \to (t'-t)\delta'(t'-t)$. Entonces como $f(t)\delta'(t) = -f'(t)\delta(t)$, tomando $f(t) = t'-t$, se encuentra que $Z_{lm} \to -(-1)\delta(t'-t) = \delta(t'-t)$ cuando $N \to \infty$.

Así, de acuerdo con la ec. (4.9), se conjetura que el límite de Z_N es la identidad bajo convolución en el espacio vectorial de las distribuciones temperadas, esto es, la distribución δ. Adicionalmente, ya que Z_N está representada por una matriz Toeplitz, resulta natural preguntarse si sus entradas matriciales son los coeficientes de una serie de Fourier de alguna función real valuada[2]. Es decir que cuando $N \to \infty$, nos preguntamos

[2]Se sabe que las entradas de las matrices Toeplitz son los coeficientes de Fourier de una función L^1 que converge a cero cuando $N \to \infty$ o de una función Radon cuando permanecen acotados.

cuál es esta función real valuada cuya transformada de Fourier es la delta de Dirac. Se puede verificar que tal función es la constante 1; o sea que, para ser precisos, la transformada de Fourier de la distribución T_1 inducida por 1 es la distribución δ (vea [35], p. 204). En el estudio de las álgebras de operadores de Toeplitz, a tal función real valuada se le llama el *símbolo* del operador de Toeplitz; de manera que en este contexto, el símbolo del límite del operador Toeplitz Z_N es la constante 1 como distribución. Los asuntos sobre acotamiento y compacidad se analizan en [40] para símbolos como funciones y en [34] para símbolos como distribuciones. Finalmente, el análisis formal acerca de la veracidad de estas afirmaciones requiere de la aplicación rigurosa de la teoría de distribuciones y es el objeto de estudio para trabajos futuros.

Capítulo 5

Un sistema algebraico asociado a la TFD a partir de Z_N

Se procede ahora a la construcción de operadores con la propiedad de escalera, partiendo de su definición genérica y dando a Z_N su papel como una forma de identidad por derecho propio. Se prescinde del uso de las definiciones estándar $(1/\sqrt{2})(Q \pm \mathrm{i}P)$ por lo expuesto en la Sección 3.3, no sin antes usarlas brevemente, y porque no hay una razón *a priori* para asumir que deberían ser válidas en este contexto. Esto implica relajar la condición en la que las "relaciones canónicas de conmutación son iguales a una constante" por la identidad como se analiza en [16] y [18] y dar suficiente libertad para buscar soluciones asociadas a la TFD, construyendo nuevos operadores L^- y L^+, pero tomando cierto tipo de relaciones de compatibilidad como elemental e incluso elevarlas a la categoría de postulado fundamental dentro de este marco de trabajo. Estas relaciones de compatibilidad son también llamadas *relaciones de compatibilidad de las ecuaciones de Hamilton con las ecuaciones de Heisenberg* en [22], p. 5 y [23], p. 3, así como también *relaciones de consistencia de Heisenberg-Schrödinger*. Un estudio similar se puede encontrar en [2].

5.1. Operadores genéricos de tipo escalera

Hasta ahora en las secciones 2.3 y 3.3 se han considerado los operadores de ascenso y descenso del TAA (ecs. (2.10), (2.11)) y de creación y aniquilación (ec. (3.2)) definiéndolos en el modo tradicional que implica el OAC; hemos aprendido que A y $A^\dagger$ así definidos, poseen estructura algebraica de tipo AWH que no intercambia tridiagonalidad al intercambiar bases y que los operadores a_j y $a_j^\dagger$ no cumplen la propiedad de escalera. Estas dificultades nos conducen a considerar la propiedad de escalabilidad[1] del modo más amplio posible, preservando la esencia de la misma y al mismo tiempo

[1] Recordemos que noción de escalabilidad fue establecida al inicio de la Sección 2.3.

permitiendo libertad suficiente para construir operadores de tipo escalera que abran la posibilidad de resolver las dificultades mencionadas dentro del marco de la matriz Z_N. Por esto, en esta sección analizamos las ideas básicas de estos operadores.

En espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión finita, los estados de los sistemas en consideración se representan por vectores en $\mathbb{C}^N$ debido a que dichos sistemas poseen un número finito de niveles de energía o estados. Los operadores de escalera R y L se usan para obtener cambios de estados entre niveles de energía adyacentes. Usando la notación de Dirac, la forma genérica de dichos operadores está dada por

$$L = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{k}|k-1\rangle\langle k|, \qquad R = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{k}|k+1\rangle\langle k|,$$

donde el conjunto $\{|k\rangle\}$ es un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Es bien sabido que

$$R|k\rangle = \sqrt{k+1}|k+1\rangle, \qquad L|k\rangle = \sqrt{k}|k-1\rangle,$$

además de que se satisfacen las relaciones de conmutación

$$[R,R] = [L,L] = 0, \qquad [L,R] = 1 - \frac{\mathcal{N}}{N}.$$

En lo que sigue, se busca seguir pasos similares usando la matriz Z_N.

5.2. Relaciones de compatibilidad discretas

Para obtener la forma de las relaciones de compatibilidad en el caso discreto, obtengamos la forma del conmutador $[\mathscr{H}, Q]$ usando la definición tradicional de $\mathscr{H}$, pero introduciendo a la matriz Z_N mediante el Corolario 3.2.6:

$$\begin{aligned}
[\mathscr{H}, Q] &= [\frac{1}{2}(Q^2+P^2), Q] = -\frac{1}{2}[Q, P^2] \\
&= -\frac{1}{2}[Q,P]P - \frac{1}{2}P[Q,P] = \frac{\mathrm{i}}{2}(Z_N P + P Z_N) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\{P, Z_N\},
\end{aligned}$$

similarmente

$$[\mathscr{H}, P] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\{Q, Z_N\}.$$

Introduciendo momentáneamente las definiciones estándar $L = (1/\sqrt{2})(Q + \mathrm{i}P)$,

$R = (1/\sqrt{2})(Q - \mathrm{i}P)$ para eliminar Q y P en las relaciones anteriores, se obtiene, usando el Teorema 3.3.1 y la ec. (3.3)

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\{R, L\}, \quad Z_N = [R, L].$$

De esto se sigue que las relaciones de conmutación

$$[\mathscr{H}, R] = -\frac{1}{2}\{R, Z_N\}, \quad [\mathscr{H}, L] = \frac{1}{2}\{L, Z_N\},$$

son válidas y por lo tanto

$$[\{R, L\}, R] = -\{R, Z_N\}, \quad [\{R, L\}, L] = \{L, Z_N\}.$$

Llamaremos a estas ecuaciones *relaciones de compatibilidad discretas* (RCD) y se referirá al operador $\mathscr{H}$ como operador Hamiltonianao. Prescindimos ahora del uso de las definiciones estándar de L y R, y al mismo tiempo, elevamos tales relaciones a la categoría de postulado fundamental en el contexto de las relaciones de conmutación discretas —Corolario 3.2.6—, pues no está garantizado que la contraparte continua correspondiente tenga tal propiedad fundamental en la mecánica cuántica, como menciona Wigner en [42]. Además, de acuerdo con el Corolario 4.1.5, el hecho de que $Z_N, N \in \mathbb{N}$ determina una sucesión de matrices Toeplitz-Hermitianas, permite asociar naturalmente estas relaciones con la TFD en el sentido de que las entradas de Z_N están conectadas a una sucesión aproximante de una distribución cuya transformada de Fourier es la δ de Dirac, a decir, la distribución T_1 inducida por la constante 1, como se discutió anteriormente.

Por otro lado, las matrices Toeplitz se pueden partir en dos partes

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N-1} z_{-k}(B^T)^k + \sum_{k=0}^{N-1} z_k B^k,$$

donde B es *matriz de traslado hacia atrás* que satisface $B^T = KBK$ con K la matriz *reversa* definida por unos en la antidiagonal y cero en cualquier otra entrada.

Tomando el operador de paridad usado en el TAA como $S = KV$ con V la matriz circulante básica, parece haber una enriquecida estructura que provee de un posible marco de trabajo que creemos que vale la pena analizar.

Resumiendo, se propone el siguiente sistema algebraico[2]:

[2] También referiremos a este sistema como esquema algebraico indiferentemente.

Construir operadores $L^- : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ y $L^+ : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ tales que:

1. el operador $\mathscr{H} := (1/2)\{L^+, L^-\}$ es hermitiano (semi-)positivo definido;

2. las relaciones de compatibilidad discretas (RCD) se deben satisfacer,

$$[\{L^+, L^-\}, L^+] = -\{L^+, Z_N\}, \qquad [\{L^+, L^-\}, L^-] = \{L^-, Z_N\}; \tag{5.1}$$

3. condición de paridad con el operador S —reflexión respecto a un punto— para dividir los autovectores en pares e impares,

$$[\{L^+, L^-\}, S] = 0; \tag{5.2}$$

4. conmutación con la TFD: para obtener un autosistema para $\mathbf{\Phi}_N$ con el hamiltoniano $\mathscr{H}$,

$$[\{L^+, L^-\}, \mathbf{\Phi}_N] = 0. \tag{5.3}$$

En este esquema, como se ha mencionado antes, se permiten los autovalores no equidistantes del hamiltoniano, pues esta propiedad juega un papel clave en los procesos de información cuántica. Para determinar si existen modelos para este sistema, se usa la forma general de los operadores hermitianos discretos

$$\mathscr{H} = \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n \phi_n \langle \phi_n, \cdot \rangle,$$

donde ϕ_n es una autobase de $\mathscr{H}$. Entonces se usa la forma genérica de los operadores de tipo escalera para construir operadores de creación y aniquilación mediante

$$L^+ := \sum_{n=0}^{N-1} r_n \phi_{n+1} \langle \phi_n, \cdot \rangle, \qquad L^- := \sum_{n=0}^{N-1} l_n \phi_{n-1} \langle \phi_n, \cdot \rangle.$$

Condiciones suficientes para hallar soluciones que resuelven este esquema algebraico, en cuanto a los primeros dos requerimientos, se establecen en la sección siguiente.

5.3. Resolución de las relaciones de compatibilidad discretas

Para resolver el sistema algebraico propuesto en la sección anterior, se establecen ahora criterios suficientes para encontrar soluciones al menos para los primeros dos requerimientos. Nuestro objetivo es establecer las condiciones bajo las cuales se pueden construir hamiltonianos comprendiendo la relación existente con la TFD dentro del marco de las RCD. En lo que sigue se hará uso de la notación bra-ket de Dirac.

Sea $\mathscr{H}$ un operador hermitiano (semi-)positivo definido sobre $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ y $\{|\xi_j\rangle | j = 0, \ldots, N-1\}$ un conjunto completo de autovectores de $\mathscr{H}$ tal que

$$\mathscr{H}|\xi_j\rangle = \xi_j|\xi_j\rangle, \tag{5.4}$$

también

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\xi_n\rangle\langle\xi_n| = I,$$

por lo tanto

$$\mathscr{H} = \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n|\xi_n\rangle\langle\xi_n|.$$

Definición 5.3.1. *Los operadores lineales de creación y aniquilación $L^+, L^- : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, están definidos por*

$$L^+ := \sum_{n=0}^{N-1} l_n^+ |\xi_{n+1}\rangle\langle\xi_n|, \qquad L^- := \sum_{n=0}^{N-1} l_n^- |\xi_{n-1}\rangle\langle\xi_n|.$$

Se establecerán algunos resultados para determinar bajo qué condiciones se pueden encontrar soluciones $L^\pm$ tales que

$$[\{L^+, L^-\}, L^+] = -\{L^+, Z_N\}, \quad [\{L^+, L^-\}, L^-] = \{L^-, Z_N\}$$

se satisface. De modo que se tiene lo siguiente

Lema 5.3.2. *$|\xi_j\rangle$ es un autovector de $\{L^+, L^-\}$ con autovalor $l_{j-1}^+ l_j^- + l_j^+ l_{j+1}^-$.*

Demostración. Usando definiciones y ortonormalidad se calcula directamente que

$$\begin{aligned}
\{L^+, L^-\}|\xi_j\rangle &= (L^+L^- + L^-L^+)|\xi_j\rangle \\
&= L^+ \sum_{n=0}^{N-1} l_n^- |\xi_{n-1}\rangle\langle\xi_n|\xi_j\rangle + L^- \sum_{n=0}^{N-1} l_n^+ |\xi_{n+1}\rangle\langle\xi_n|\xi_j\rangle \\
&= L^+ l_j^- |\xi_{j-1}\rangle + L^- l_j^+ |\xi_{j+1}\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} l_n^+ |\xi_{n+1}\rangle\langle\xi_n|l_j^-|\xi_{j-1}\rangle + \sum_{n=0}^{N-1} l_n^- |\xi_{n-1}\rangle\langle\xi_n|l_j^+|\xi_{j+1}\rangle \\
&= (l_{j-1}^+ l_j^- + l_j^+ l_{j+1}^-)|\xi_j\rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.3.3. *Las representaciones matriciales de $[\{L^+, L^-\}, L^\pm]$ en la base $\{|\xi_j\rangle\}$, están dadas por*

$$[\{L^+, L^-\}, L^-]^\xi_{kj} = (l_{j-2}^+ l_{j-1}^- - l_j^+ l_{j+1}^-) l_j^+ \delta_{k,j-1},$$

$$[\{L^+, L^-\}, L^+]^\xi_{kj} = (l_{j+1}^+ l_{j+2}^- - l_{j-1}^+ l_j^-) l_j^+ \delta_{k,j+1},$$

respectivamente.

Demostración. Calculando los conmutadores con L^- usando el Lema anterior 5.3.2,

$$\begin{aligned}
[\{L^+, L^-\}, L^-]|\xi_j\rangle &= (\{L^+, L^-\}L^- - L^-\{L^+, L^-\})|\xi_j\rangle \\
&= \{L^+, L^-\} \sum_{n=0}^{N-1} l_n^- |\xi_{n-1}\rangle\langle\xi_n|\xi_j\rangle - L^-(l_{j-1}^+ l_j^- + l_j^+ l_{j+1}^-)|\xi_j\rangle \\
&= \{L^+, L^-\} l_j^- |\xi_{j-1}\rangle - (l_{j-1}^+ l_j^- + l_j^+ l_{j+1}^-) l_j^- |\xi_{j-1}\rangle \\
&= (l_{j-2}^+ l_{j-1}^- - l_j^+ l_{j+1}^-) l_j^- |\xi_{j-1}\rangle,
\end{aligned}$$

de donde, la ortonormalidad de $\{|\xi_j\rangle\}$ implica

$$\begin{aligned}
\langle\xi_k|[\{L^+, L^-\}, L^-]|\xi_j\rangle &= \langle\xi_k|(l_{j-2}^+ l_{j-1}^- - l_j^+ l_{j+1}^-) l_j^- |\xi_j\rangle \\
&= (l_{j-2}^+ l_{j-1}^- - l_j^+ l_{j+1}^-) l_j^- \delta_{k,j-1}.
\end{aligned}$$

La segunda ecuación se obtiene similarmente. □

Luego, se obtiene la representación matricial de $\{L^\pm, Z_N\}$. Sea $Z^\xi_{\alpha\beta}$ la representación matricial de Z_N en la base $\{|\xi_j\rangle\}$ y recuerde que $\{|e_j\rangle\}$ es la base canónica. Entonces es claro que si $C_{\alpha\beta} := \langle\xi_\alpha|e_m\rangle$ representa a la matriz de transición de $\{|e_j\rangle\}$ a $\{|\xi_j\rangle\}$,

se tiene

$$Z^{\xi}_{\alpha\beta} = \sum_{m,n} C_{\alpha m} Z^{e}_{mn} C^{-1}_{n\beta} = \sum_{m,n} C_{\alpha m} Z^{e}_{mn} \bar{C}_{\beta n} = \sum_{m,n} \langle \xi_\alpha | e_m \rangle Z^{e}_{mn} \langle e_n | \xi_\beta \rangle,$$

ya que C es una matriz unitaria.

Lema 5.3.4. *Las representaciones matriciales de $\{L^{\pm}, Z_N\}$ en la base $\{|\xi_j\rangle\}$, están dadas por*

$$\{L^{\pm}, Z_N\}^{\xi}_{kj} = l^{\pm}_{k\mp 1} Z^{\xi}_{k\mp 1, j} + l^{\pm}_{j} Z^{\xi}_{k, j\pm 1}, \quad k, j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde $Z^{\xi}_{\alpha\beta}$ son las entradas de la representación matricial de Z_N en la base $\{|\xi_j\rangle\}$.

Demostración. Como $Z^{\xi}_{\alpha\beta}$ es la representación matricial de Z_N en la base $\{|\xi_j\rangle\}$, entonces la acción de Z_N sobre un vector básico se puede expander como $Z_N|\xi_j\rangle = \sum_\alpha Z^{\xi}_{\alpha j}|\xi_\alpha\rangle$, así que

$$\begin{aligned} \{L^{\pm}, Z_N\}^{\xi}_{kj} &= \langle \xi_k | L^{\pm} Z_N + Z_N L^{\pm} | \xi_j \rangle = \langle \xi_k | L^{\pm} \sum_\alpha Z^{\xi}_{\alpha j} | \xi_\alpha \rangle + \langle \xi_k | Z_N l^{\pm}_{j} | \xi_{j\pm 1} \rangle \\ &= \langle \xi_k | \sum_\alpha Z^{\xi}_{\alpha j} l^{\pm}_{\alpha} | \xi_{\alpha \pm 1} \rangle + l^{\pm}_{j} Z^{\xi}_{k, j\pm 1} = l^{\pm}_{k\mp 1} Z^{\xi}_{k\mp 1, j} + l^{\pm}_{j} Z^{\xi}_{k, j\pm 1}. \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, juntando todo esto, inmediatamente se puede ver que las RCD son equivalentes a

$$(l^{\pm}_{j\pm 1} l^{\mp}_{j\pm 2} - l^{\pm}_{j\mp 1} l^{\mp}_{j}) l^{\pm}_{j} \delta_{k, j\pm 1} = \mp l^{\pm}_{k\mp 1} Z^{\xi}_{k\mp 1, j} \mp l^{\pm}_{j} Z^{\xi}_{k, j\pm 1}, \ \forall k, j = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (5.5)$$

Ahora se impone la transposición conjugada entre los operadores $L^{\pm}$, y se usa la hermiticidad de Z_N.

Proposición 5.3.5. *Suponga que se satisfacen las RCD. Si $(L^{-})^{\dagger} = L^{+}$, entonces*

1. *las RCD son equivalentes, y*
2. *ellas se reducen a*

$$(|l^{-}_{j-1}|^2 - |l^{-}_{j+1}|^2) l^{-}_{j} \delta_{k, j-1} = l^{-}_{k+1} Z^{\xi}_{k+1, j} + l^{-}_{j} Z^{\xi}_{k, j-1}, \ \forall k, j = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (5.6)$$

Demostración. Primero considere que

$$\begin{aligned}(L^-)^\dagger|\xi_j\rangle &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} l_k^-|\xi_{k-1}\rangle\langle\xi_k|\right)^\dagger|\xi_j\rangle = \left(\sum_{k=0}^{N-1}\overline{l_k^-}|\xi_k\rangle\langle\xi_{k-1}|\right)|\xi_j\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\overline{l_k^-}|\xi_k\rangle\delta_{k-1,j},\ k-1=j, \\ &= \overline{l_{j+1}^-}|\xi_{j+1}\rangle;\end{aligned}$$

por otro lado $L^+|\xi_j\rangle = l_j^+|\xi_{j+1}\rangle$, así, si $(L^-)^\dagger = L^+$, se tiene necesariamente que $(\overline{l_{j+1}^-} - l_j^+)|\xi_{j+1}\rangle = 0,\ \ \forall\ j = 0,\ldots,N-1$, de donde $l_j^+ = \overline{l^-}_{j+1}$. Por lo tanto, usando esto y la ec. (5.5) obtenemos para las RCD

$$(|l_{j+2}^-|^2 - |l_j^-|^2)\overline{l_{j+1}^-}\delta_{k,j+1} = -\overline{l_k^-}\,Z^\xi_{k-1,j} - \overline{l_{j+1}^-}Z^\xi_{k,j+1},$$

$$(|l_{j-1}^-|^2 - |l_{j+1}^-|^2)l_j^-\,\delta_{k,j-1} = l_{k+1}^- Z^\xi_{k+1,j} + l_j^-\,Z^\xi_{k,j-1}.$$

Así que para probar la parte 1 de la proposición, es suficiente transponer y conjugar cualquiera de las ecuaciones anteriores para obtener la otra usando la hermiticidad de Z_N (Corolario 4.1.5) y un cambio de índices. La parte 2 claramente es consecuencia de la equivalencia en la parte 1 escogiendo la segunda expresión. □

De esta manera, cuando se impone la condición de transposición y conjugación, podemos lidiar solamente con una de las RCD contenidas en la ec. (5.5), a decir, la de la parte 2 de la proposición anterior; esta se despliega en las siguientes dos ecuaciones luego de aplicar la definición de la delta de Kronecker:

$$|l_{j-1}^-|^2 - |l_{j+1}^-|^2 = Z_{jj} + Z_{j-1,j-1},\quad k = j-1, \tag{5.7}$$

$$l_{k+1}^- Z^\xi_{k+1,j} + l_j^-\,Z^\xi_{k,j-1} = 0,\quad k \neq j-1. \tag{5.8}$$

Esto significa que se tiene un conjunto de N^2 ecuaciones que nos gustaría resolver para $l^- := \{l_0^-, l_1^-, \ldots, l_{N-1}^-\}$; o equivalentemente, resolver $2N-1$ relaciones de recurrencia: la primera dada por la ec. (5.7) con $k = j-1$ y las otras restantes corresponden a $k = j-N+1, j-N, j-N-1, \ldots, j-2, j, j+1, j+2, \ldots, j+N-2$, dadas por la ec. (5.8). En cuanto a las *condiciones de frontera*, se hace la siguiente correspondencia sobre lo índices: $N \mapsto 0$ y $-1 \mapsto N-1$, por ejemplo $l_N = l_0$ y $l_{-1} = l_{N-1}$. Expandiendo la primera relación de recurrencia, se despliegan N de las N^2 ecuaciones

como

$$\begin{aligned} |l^-_{N-1}|^2 - |l^-_1|^2 &= Z^\xi_{00} + Z^\xi_{N-1,N-1}, \quad j=0, k=N-1 \\ |l^-_0|^2 - |l^-_2|^2 &= Z^\xi_{11} + Z^\xi_{00}, \quad j=1, k=0, \\ |l^-_1|^2 - |l^-_3|^2 &= Z^\xi_{22} + Z^\xi_{11}, \quad j=2, k=1, \\ &\vdots \\ |l^-_{N-2}|^2 - |l^-_0|^2 &= Z^\xi_{N-1,N-1} + Z^\xi_{N-2,N-2}, \quad j=N-1, k=N-2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Para resolver esta relación de recurrencia dada N arbitraria, se necesita expresar todo en términos de un parámetro inicial $|l^-_0|^2$; resulta que esto es sólamente posible para N impar, mientras que para N par, se requiere adicionalmente de l^-_1, por lo que los casos par e impar se tienen que tratar separadamente[3]. La solución se resume en el siguiente teorema, en donde se requiere otra de las notables propiedades de Z_N, a decir, su no-trazalidad.

Teorema 5.3.6. *Las soluciones para la relación de recurrencia (5.7) satisface a las siguientes relaciones hiperbólicas:*

1. *para N impar,*

$$\begin{aligned} |l^-_{N-1}|^2 - |l^-_0|^2 &= Z^\xi_{N-1,N-1}, \\ |l^-_1|^2 - |l^-_0|^2 &= -Z^\xi_{00}; \end{aligned}$$

2. *para N par,*

$$\begin{aligned} |l^-_{N-2}|^2 - |l^-_0|^2 &= Z^\xi_{N-2,N-2} + Z^\xi_{N-1,N-1}, \\ |l^-_{N-1}|^2 - |l^-_1|^2 &= Z^\xi_{00}. \end{aligned}$$

Demostración. Notar que l^-_j están interrelacionados por índices pares e impares en (5.9), así separamos a las ecuaciones en conjuntos de índices par e impar, lo que implica que tendremos una ecuación no interrelacionada cuando N es par, pues este caso requiere de dos parámetros al resultar mezclados los índices. Por esto resolvemos los casos par e impar separadamente.

[3]Se describe este comportamiento en la notable frase en inglés que dice *even numbers are odd* dando a entender que *los números pares son raros* y que puede llegar a ser un poco tenebroso el estudio de estos casos al surgir dificultades nada deseadas (cf. [11], Chap. XII.)

Caso 1: N impar. Separemos los índices de $j = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ en enteros pares e impares. Resolviendo las ecs. (5.9) para $j = 2m, m = 1, 2, \ldots, (N-1)/2$ en términos de l_0^- y sustituyendo recursivamente,

$$\begin{aligned} |l_2^-|^2 &= |l_0^-|^2 - Z_{00}^{\xi} - Z_{11}^{\xi}, \\ |l_4^-|^2 &= |l_0^-|^2 - Z_{00}^{\xi} - Z_{11}^{\xi} - Z_{22}^{\xi} - Z_{33}^{\xi}, \\ &\vdots \\ |l_{N-1}^-|^2 &= |l_0^-|^2 + Z_{N-1,N-1}^{\xi} - Tr(Z_N). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Similarmente para $j = 2m - 1$ en orden inverso,

$$\begin{aligned} |l_{N-2}^-|^2 &= |l_0^-|^2 + Z_{N-2,N-2}^{\xi} + Z_{N-1,N-1}^{\xi}, \\ |l_{N-4}^-|^2 &= |l_0^-|^2 + Z_{N-4,N-4}^{\xi} + Z_{N-3,N-3}^{\xi} + Z_{N-2,N-2}^{\xi} + Z_{N-1,N-1}^{\xi}, \\ &\vdots \\ |l_1^-|^2 &= |l_0^-|^2 - Z_{00}^{\xi} + Tr(Z_N). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Caso 2: N par. Este caso se puede manipular similarmente, excepto que no es posible expresar todo en términos de $|l_0^-|^2$ únicamente, sino que también es necesario $|l_1^-|^2$.

Para $j = 2m$ en (5.9)

$$|l_{N-2}^-|^2 = |l_0^-|^2 - \sum_{m=0}^{N-3} Z_{mm}^{\xi},$$

para $j = 2m - 1$

$$|l_{N-1}^-|^2 = |l_1^-|^2 - \sum_{m=1}^{N-2} Z_{mm}^{\xi};$$

lo que es equivalente a

$$|l_{N-2}^-|^2 = |l_0^-|^2 + Z_{N-2,N-2}^{\xi} + Z_{N-1,N-1}^{\xi} - \mathrm{Tr}(Z_N),$$

$$|l_{N-1}^-|^2 = |l_1^-|^2 + Z_{00}^{\xi} - \mathrm{Tr}(Z_N).$$

Finalmente se obtiene el resultado afirmado en este teorema, recordando que Z_N es de traza cero, de acuerdo con el Corolario 4.1.5. □

Notar que el caso impar requiere sólamente tres parámetros l_0^-, l_1^-, l_{N-1}^- para construir

soluciones $L^{\pm}$, mientras que el caso par requiere cuatro. El hecho de que sólamente están involucrados los módulos de las l_j^-, anticipa la existencia de muchos operadores $L^{\pm}$ y consecuentemente, la de muchos hamiltonianos $\mathscr{H}$.

Hasta ahora dos de las tres principales propiedades de Z_N se han usado: su hermiticidad y su no-trazalidad; en seguida entra en juego su diagonalizabilidad.

Corolario 5.3.7. *Un operador de aniquilación L^- que es solución de las RCD, existe si los parámetros $l_0^-, l_1^-, l_{N-1}^-, l_{N-2}^-$ satisfacen a las relaciones hiperbólicas (5.3.6) y $\{|\xi_j\rangle\}$ es una base completa de autovectores de Z_N.*

Demostración. Como $l_0^-, l_1^-, l_{N-1}^-, l_{N-2}^-$ satisfacen a las relaciones (5.3.6), entonces se cumple la recurrencia (5.7). En cuanto a las $2N-2$ recurrencias restantes en (5.8), el hecho de que $|\xi_j\rangle$ son autovectores de Z_N, implica que Z_N^{ξ} es diagonal, por lo tanto $Z^{\xi}_{k,j-1} = Z^{\xi}_{k+1,j} = 0 \ \ \forall \ k = j-N+1, j-N, \ldots, j-2, j, j+1, \ldots, j+N-2$; esto es, los elementos fuera de la diagonal de Z_N^{ξ} se anulan, así que la ec. (5.8) se satisface. □

De este modo, la construcción de los operadores $L^{\pm}$ se obtiene recursivamente por (5.10) y (5.11) partiendo de soluciones de las relaciones hiperbólicas.

Ejemplo 5.3.8. *Podemos obtener un ejemplo numérico ejecutando código para calcular $Z_N = i[Q,P]$ con $N = 13$ en Wolfram-Mathematica. Este programa produce los siguientes autovalores para Z_{13}*

$$Z^{\xi}_{00} = 11,1582, \quad Z^{\xi}_{1212} = -0{,}371055,$$

de modo que las correspondientes relaciones hiperbólicas del Teorema 5.3.6 que resuelve a las relaciones de recurrencia son

$$|l_{12}^-|^2 - |l_1^-|^2 = Z^{\xi}_{00} + Z^{\xi}_{1212} = 10{,}7872,$$

$$|l_1^-|^2 - |l_0^-|^2 = -11{,}1582.$$

Esto implica que $|l_1^-|^2 = |l_0^-|^2 - 11{,}1582$, y por lo tanto$|l_0^-|^2 > 11{,}1582$. Así que si tomamos $|l_0^-| = 12$, entonces el círculo $C_0 = \{l_0 \in \mathbb{C} || l_0^-| = 12\}$ determina a un conjunto infinito de soluciones. Elegimos construir en el eje imaginario, así que se toma $l_0^- = 12i$; de donde $|l_1^-|^2 = 144 - 11{,}1582$ o bien $|l_1^-| = 11{,}5257$, de modo que $l_1^- = 11{,}5257i$; también, $|l_{12}^-|^2 = |l_1^-|^2 + 10{,}7872$ implica que $l_{12}^- = 11{,}9845i$. Las demás l_j^- se obtienen recursivamente con las ecs. (5.10) y (5.11).

Una vez que se ha demostrado la existencia de los operadores $L^{\pm}$, se tienen naturalmente los siguientes planteamientos.

Corolario 5.3.9. *Sea $\mathfrak{h}_N$ el conjunto de hamiltonianos $\mathscr{H} := \frac{1}{2}\{L^+, L^-\}$, tales que $[\{L^+, L^-\}, L^-] = \{L^-, Z_N\}$, entonces $[\mathscr{H}, Z_N] = 0$, $\forall\, \mathscr{H} \in \mathfrak{h}_N$.*

Demostración. Ahora esto es claro por construcción pues se está tomando al conjunto completo de autovectores de Z_N como la base $\{|\xi_j\rangle\}$, que a su vez son autovectores de $\mathscr{H}$ de acuerdo con la ec. (5.4); de manera que tiene el mismo conjunto de autovectores, así que deben conmutar. □

Definición 5.3.10. *El operador de número $\mathcal{N} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ se define como $\mathcal{N} := L^+L^-$.*

Corolario 5.3.11. $[\mathcal{N}, \mathscr{H}] = [\mathcal{N}, Z_N] = 0$.

Demostración. Es suficiente probar que los autovectores de $\mathcal{N}$ son los del conjunto $\{|\xi_j\rangle\}$. Usando las definiciones de L^+ y L^- se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= L^+L^- = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{j'=0}^{N-1} l_j^+ |\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| l_{j'}^- |\xi_{j'-1}\rangle\langle\xi_{j'}| \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{j'=0}^{N-1} l_j^+ l_{j'}^- |\xi_{j+1}\rangle\delta_{j,j'-1}\langle\xi_{j'}| = \sum_{j=0}^{N-1} l_j^+ l_{j+1}^- |\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_{j+1}| \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} |l_{j+1}^-|^2 |\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_{j+1}|,
\end{aligned}$$

ya que $l_j^+ = \overline{l^-}_{j+1}$ (ver la prueba de la Proposición 5.3.5); por lo tanto

$$\mathcal{N}|\xi_\alpha\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} |l_{j+1}^-|^2 |\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_{j+1}|\xi_\alpha\rangle \;=\; |l_\alpha^-|^2 |\xi_\alpha\rangle.$$

Así, $\mathcal{N}$ tiene los mismos autovectores que $\mathscr{H}$, como se quería demostrar. □

Corolario 5.3.12. *La acción de los operadores $L^{\pm}$ y $\mathcal{N}$ sobre la base de autovectores $\{|\xi_\alpha\rangle\}_{\alpha=0}^{N-1}$ está dada por*

$$[L^+, L^-] = z(\alpha), \qquad [\mathcal{N}, L^+] = -z(\alpha)L^+, \qquad [\mathcal{N}, L^-] = z(\alpha)L^-, \tag{5.12}$$

donde $z(\alpha) := |l_\alpha^-|^2 - |l_{\alpha+1}^-|^2$ es una función real valuada de l_j^-.

Demostración. Por el corolario anterior,

$$\begin{aligned}
[L^+, L^-]|\xi_\alpha\rangle &= (\mathcal{N} - L^-L^+)|\xi_\alpha\rangle \\
&= |l_\alpha^-|^2|\xi_\alpha\rangle - \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{j'=0}^{N-1} l_j^-|\xi_{j-1}\rangle\langle\xi_j|l_{j'}^+|\xi_{j'-1}\rangle\langle\xi_{j'}|\xi_\alpha\rangle \\
&= |l_\alpha^-|^2|\xi_\alpha\rangle - \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{j'=0}^{N-1} l_j^- l_{j'}^+|\xi_{j-1}\rangle\delta_{j,j'+1}\delta_{j'\alpha} \\
&= |l_\alpha^-|^2|\xi_\alpha\rangle - l_{\alpha+1}^- l_\alpha^+|\xi_\alpha\rangle = (|l_\alpha^-|^2 - |l_{\alpha+1}^-|^2)|\xi_\alpha\rangle \\
&= z(\alpha)|\xi_\alpha\rangle, \qquad z := |l_\alpha^-|^2 - |l_{\alpha+1}^-|^2.
\end{aligned}$$

En cuanto al segundo conmutador,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{N}, L^+]|\xi_\alpha\rangle &= L^+(L^-L^+ - L^+L^-)|\xi_\alpha\rangle \\
&= -L^+[L^+, L^-]|\xi_\alpha\rangle \\
&= (|l_{\alpha+1}^-|^2 - |l_\alpha^-|^2)L^+|\xi_\alpha\rangle = -z(\alpha)L^+|\xi_\alpha\rangle.
\end{aligned}$$

Similarmente para la tercera expresión. □

Lo anterior demuestra que la teoría de representación generada por los operadores $L^\pm$ y $\mathcal{N}$ en el contexto de Z_N, se comporta adecuadamente con autovalores no necesariamente equidistantes. El anterior corolario indica que las relaciones canónicas de conmutación de las ecs. 3.4 se recuperan si y solo si $z(\alpha) = |l_\alpha^-|^2 - |l_{\alpha+1}^-|^2 = \text{cte.} \in \mathbb{R}$; el problema de la existencia de soluciones l_j con esta condición depende de las relaciones hiperbólicas del Teorema 5.3.6 y se deja abierto.

Ejemplo 5.3.13. *En el Apéndice A se realiza completamente la construcción de un operador de aniquilación L^- para $N = 7$ calculando una solución de las relaciones de recurrencia mediante la obtención de los parámetros l_0, l_1 y l_6 con las relaciones hiperbólicas. Se verifica que se satisface la propiedad de escalera; se verifican las relaciones de compatibilidad discretas RCDs y que Z_7 es Toeplitz-Hermitiana de traza cero; se obtienen las representaciones numéricas del operador hamiltoniano en las bases canónica y de autovectores de Z_7 donde se comprueba su diagonabilidad y por lo tanto conmutatividad con Z_7; finalmente se verifica lo mismo para el operador de número $\mathcal{N}_7$.*

Con estos resultados, se han satisfecho los requerimientos 1 y 2 del esquema algebraico propuesto. El uso de la base completa $\{\xi_j\}_{j=0}^{N-1}$ permite el establecimiento de relaciones de recurrencia de tres términos de dos posibles formas:

- transformando directamente al hamiltoniano $\mathscr{H}$ a su forma tridiagonal usando el algoritmo de reducción de Householder [39] o el algoritmo iterativo de Lanczos que produce una matriz tridiagonal Toeplitz de la cual se conocen sus autovalores y autovectores [33];

- construyendo el operador en diferencias de segundo orden

$$L|\xi_m\rangle = a_m|\xi_{m+1}\rangle + b_m|\xi_m\rangle + c_m|\xi_{m-1}\rangle, \tag{5.13}$$

  y haciendo que

$$|s\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} P_m(s)|\xi_m\rangle$$

  sea un autovector de L con autovalor s: $L|s\rangle = s|s\rangle$ siguiendo un procedimiento parecido a [24].

De lo anterior, polinomios ortogonales surgen naturalmente definiendo la relación de recurrencia para polinomios correspondiente.

Capítulo 6

El tratamiento de Atakishiyeva-Atakishiyev como álgebra de grupo

El propósito de este trabajo es proveer un marco de trabajo para el análisis de autosistemas asociados a la TFD para N arbitraria, ya sea usando un operador que no necesariamente conmuta con la TFD, como en la realización en términos del operador Z_N, o empleando un operador W, que conmuta con la TFD. En esta sección se propone una posible realización para el esquema algebraico 5.2, usando el operador de Heun W del TAA, que podría conducir al cumplimiento de los cuatro requerimientos de dicho esquema. Esto se puede hacer debido a la existencia de una conexión significativa entre los operadores Q y P y los operadores de ascenso y descenso A y $A^\dagger$ del tratamiento AA mediante el mapeo exponencial. Así, se muestra cómo estos operadores están relacionados y se establecen correspondientes RCDs que se siguen naturalmente en este sentido.

6.1. Los operadores A y $A^\dagger$ como elementos de álgebra de grupo: *Segunda consideración*

Reescribimos a los operadores A y $A^\dagger$, como se determinaron en las ecs. (2.10) y (2.11). Recordemos que son operadores lineales $A, A^\dagger : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ tales que

$$A = X + \mathrm{i}Y, \quad A^\dagger = X - \mathrm{i}Y,$$

donde $X = \mathrm{diag}(S_0, S_1, \ldots, S_{N-1})$, $S_n := 2\sin(2\pi n/N), n \in \mathbb{Z}_N$ y $Y = i(V^\dagger - V)$. Ya que X y Y son hermitianos, se pueden identificar como operadores de posición y momento, respectivamente. Notar que los operadores A y $A^\dagger$ satisfacen las *relaciones*

de intercambio

$$A\Phi_N = \mathrm{i}\Phi A, \qquad A^\dagger\Phi = -\mathrm{i}\Phi A^\dagger.$$

A partir de ellas es posible probar el siguiente resultado importante: si se define el operador discreto de número como $\mathcal{N} := A^\dagger A$, entonces

$$[\mathcal{N}, \Phi_N] = 0,$$

por lo que $\mathcal{N}$ y Φ_N tienen los mismos autovectores.

Por otro lado, no es difícil probar que el operador X satisface la relación (ver [6], p. 89)

$$X = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(U - U^\dagger\right),$$

por lo cual

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{N}{\pi}}\left[V^\dagger - V + \mathrm{i}\left(U^\dagger - U\right)\right],$$

$$A^\dagger = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{N}{\pi}}\left[V - V^\dagger - \mathrm{i}\left(U - U^\dagger\right)\right],$$

donde, como se sabe por el Corolario 2.1.17, los operadores U y V están entrelazados por la TFD.

En el Teorema 2.2.3 se demostró que el conjunto de operadores unitarios definidos como

$$\mathfrak{u}(l; m, n) := \sqrt{N} q^l V^n U^m, \quad 0 \leq l, m, n \leq N-1,$$

forman una representación unitaria irreducible $\mathcal{U}(N)$ sobre $\mathbb{C}^N$ del grupo finito de Heisenberg H. Adicionalmente, como se demuestra en [17], Teorema 1.5, p.19, los elementos de matriz de las representaciones unitarias irreducibles de H forman un conjunto ortonormal completo para el espacio vectorial de la representación regular $\mathbb{C}[H]$ de H, que a su vez se obtiene de una base indexada por los elementos de H. Es posible convertir $\mathbb{C}[H]$ en un álgebra por medio del producto $v_g v_h = v_{gh}$, $g, h \in H$ y extendiendo linealmente; el álgebra resultante es el álgebra de grupo $\mathbb{C}H$ de H sobre el campo $\mathbb{C}$. Por lo tanto, los elementos de matriz de A y $A^\dagger$ son elementos del álgebra de grupo $\mathbb{C}H$. Recuerde que, en virtud del Teorema 3.1.1,

$$V^j = \exp(\mathrm{i}\eta P_j), \qquad U^j = \exp(\mathrm{i}\eta Q_j)$$

que implica que los operadores de ascenso y descenso A y $A^\dagger$ también pueden interpretarse como combinaciones lineales de exponenciaciones de los operadores Q y P, con elementos de matriz pertenecientes al álgebra de grupo $\mathbb{C}H$. Estos argumentos prueban

la profunda conexión entre Q, P, A y $A^\dagger$. En resumen, se puede decir que los operadores Q, P, L^+, L^- y Z_N *yacen a nivel de representaciones del álgebra de Heisenberg* $\mathfrak{h}$ en el sentido de que son argumentos del mapeo exponencial, mientras que los operadores X, Y, A, $A^\dagger$ y W *yacen a nivel de representaciones del grupo de Heisenberg* H —como álgebra de grupo $\mathbb{C}H$— y conectados mediante el mapeo exponencial, con espacio de Hilbert finito-dimensional subyacente $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Sean $\mathfrak{p}(\mathbb{C}^N)$ y $\mathfrak{q}(\mathbb{C}^N)$ los conjuntos de todos lo operadores P_j y Q_j respectivamente y sea $f : \mathfrak{p}(\mathbb{C}^N) \longrightarrow \mathfrak{q}(\mathbb{C}^N)$ la transformación de similitud tal que $f(P_j) = \Phi_N P_j \Phi_N^\dagger$. Entonces el mapeo exponencial del Teorema 3.1.1 es una función inyectiva $\exp : \mathfrak{p}(\mathbb{C}) \longrightarrow U_N(L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$, donde $U_N = \{u(l;m,n) | l,m,n = 0,1,\ldots,N-1\}$. Podemos completar el diagrama del Corolario 2.2.4 con mapeos que relacionan a todos los objetos donde yacen los operadores mencionados en el párrafo anterior, respectivamente, ilustrando la estructura completa que interconecta a los mismos:

$$\begin{array}{ccccc} H(\mathbf{Z}_N) & \dashleftarrow & \mathfrak{p}(\mathbb{C}^N) & & \\ {\scriptstyle \gamma^{-1}}\uparrow & \searrow^{\phi} & \downarrow{\scriptstyle exp} & \searrow^{f} & \\ G(\mathbf{Z}_N) & \xrightarrow{\rho_x} & U_N(L^2) & \xleftarrow[exp]{} & \mathfrak{q}(\mathbb{C}^N) \\ & \nwarrow_{\mu_3} & \uparrow{\scriptstyle \mu_U} & & \\ & & \mathbb{Z}_N^3 & & \end{array} \tag{6.1}$$

No nos atrevemos a enunciar la conmutatividad de este diagrama resultante porque falta la consolidación del morfismo punteado, así como decidir si es lícita la extensión de los conjuntos $\mathfrak{p}(\mathbb{C}^N)$ y $\mathfrak{q}(\mathbb{C}^N)$ a su expansión completa como espacios vectoriales. Este diagrama es distinto esencial y estructuralmente a los del Capítulo 1 debido a que el conmutador de los generadores Q y P, a decir, Z_N, no es un elemento central, lo cual se sigue de las relaciones de conmutación discretas del Corolario 3.2.6 y la discusión subsiguiente; por lo que, aunque estos operadores producen un álgebra de Lie discreta, es necesario tratar a los subespacios generados por Q_j y P_j por separado, pero interconectándolos con la TFD para que se consiga un mapeo exponencial mejor comportado, gracias a la conmutatividad de las combinaciones lineales de las P_j. Esta distinción estructural es de esperarse debido a que las álgebras del caso continuo contienen realizaciónes con ecuaciones diferenciales y en este caso discreto, realizaciones con ecuaciones en diferencias. Lo que se obtiene a cambio es la comprensión de que el mapeo exponencial en este contexto, permite conectar cuatro representaciones del álgebra de las matrices circulantes: las de las matrices reloj U^j y de traslado V^j con las de los operadores Q_j y P_j siendo estos generadores de aquellas y la TFD como

transformación unitaria, entrelazante y diagonalizadora.

6.2. Realización de las RCDs con el operador de Heun

En la sección aterior se ha obtenido una mejor comprensión sobre la estructura matemática alrededor de la TFD, de modo que estamos ahora en posición de establecer una posible realización para el esquema 5.2 que surge naturalmente del TAA. Sería deseable, aunque no obligatorio, que $\mathcal{N}$ fuera hermitiano; sin embargo esta condición no se cumple ya que A y $A^\dagger$ generan un álgebra cúbica ([5]). Afortunadamente, ha sido posible encontrar una transformación T que transforma $\mathcal{N}$ en una matriz hermitiana por medio de una simetrización con respecto al operador de paridad S, que se puede extender a N arbitraria; esto implica que $\mathcal{N}$ es diagonalizable de modo que existe una autobase ortonormal de $\mathcal{N}$ que ya se ha construído al menos para $N = 5$ al momento de escribir este trabajo ([3]). Esto significa que se podría usar esta base para construir una familia asociada de operadores escalera aparte de los operadores de ascenso y descenso del Tratamiento AA. El candidato natural que juega el papel de Z_N en este contexto, es el operador de Heun

$$W := -2\mathrm{i}\,[X, Y] = [A, A^\dagger],$$

definido en [5], p.7, que adicionalmente, puede escogerse de tal forma que conmute con $\mathbf{\Phi}_N$. Así que a pesar del hecho de que W puede no tener la propiedad de ser Toeplitz, sería posible obtener a cambio el notable cumplimiento de los cuatro requerimientos de 5.2. La propiedad de ser matriz de Toeplitz solo será relevante cuando se estudie formalmente la naturaleza intrínseca de Z_N, así que su ausencia aquí no perjudica el esquema bajo consideración, pues la existencia de soluciones de las RCDs solo requiere la hermiticidad, cero-trazalidad y diagonalizabilidad, como se aprendió en el Capítulo 5. Por lo tanto es importante determinar si es posible la construcción de operadores L^+ y L^-, tales que

$$[\{L^+, L^-\}, L^+] = -\{L^+, W\}, \quad [\{L^+, L^-\}, L^-] = \{L^-, W\}.$$

Si existen soluciones para estas ecuaciones, entonces el esquema algebraico propouesto se habrá resuelto completamente, ya que

$$[W, \mathbf{\Phi}_N] = 0.$$

El estudio de la construcción de los operadores $L^{\pm}$ en el ámbito del operador W es importante porque se sabe que cualquier matriz es unitariamente equivalente a una matriz tridiagonal [39] mediante la reducción de Householder o el algoritmo de Lanczos, lo cual conduce, como se discutió al final del Capítulo 5, a relaciones de recurrencia de tres términos y a correspondientes polinomios ortogonales.

Estas observaciones ayudan sin duda a acompletar el entendimiento de la estructura matemática que describe el comportamiento de X, Y, A y $A^{\dagger}$, así como su interrelación con W, y creemos que esto será de utilidad para avances adicionales en la materia, sobre todo porque la posible realización en el contexto de W, incluye la conmutatividad con el operador de paridad y con posibles operadores hamiltonianos.

Conclusiones

En este trabajo se ha establecido un conjunto de relaciones de conmutación discretas obtenidas mediante los operadores Q, P y el operador Toeplitz-Hermitiano de traza cero Z_N, el cual juega el papel que la identidad tiene en las relaciones canónicas de conmutación, pero al ser un elemento no central, el álgebra resultante se distingue de la realización de Schrödinger al no admitir la construcción de operadores con la propiedad de escalera, usando las definiciones estándar. Se estudió el comportamiento de Z_N para N grande planteándose que el límite de Z_N puede identificarse con la distribución δ de Dirac, que es la identidad bajo convolución en el espacio de distribuciones temperadas con símbolo 1. Luego, por medio de la formulación de las relaciones de compatibilidad discretas, se propuso el sistema algebraico 5.2 y se demostró que admite soluciones de operadores de tipo escalera L^+ y L^- mediante la resolución de relaciones de recurrencia, lo cual conduce a la construcción de familias de hamiltonianos $\mathscr{H}$ para cada N. También se estableció que los operadores Q y P son generadores del álgebra conmutativa de las matrices circulantes, con la TFD como operador unitario, entrelazante y diagonalizador; así como una notable relación entre los operadores Q y P y los operadores del TAA, A y $A^\dagger$, en el sentido de que estos son combinaciones lineales de exponenciaciones de los primeros, con elementos matriciales pertenecientes al álgebra de grupo $\mathbb{C}H$. Con esto se cumplimentaron dos de los cuatro requerimientos del sistema algebraico propuesto. Entonces se propuso que la condición $[W, \Phi_N] = 0$, puede conducir naturalmente al cumplimiento de los cuatro requerimientos del sistema algebraico propuesto y por lo tanto se puede obtener un modelo completo del mismo, obteniendo un mejor entendimiento de la estructura algebraica subyacente a la TFD. Esto ciertamente conduce a un marco de trabajo bien formulado para estudiar sistemáticamente ciertos sistemas discretos en espacios de Hilbert de dimensión finita en general, y los problemas que motivaron esta tesis en particular.

Se necesita análisis adicional para estudiar formalmente la conjeturada relación entre Z_N y la distribución δ, así como también determinar si es posible la obtención de expresiones analíticas para los autovectores de Z_N. Adicionalmente, es importante el estudio del comportamiento asintótico —i.e. cotas superiores e inferiores— de los

autovalores extremos, si es que las hay, tratando de seguir procedimientos similares a los empleados en [12]. Así mismo, este trabajo se ha realizado con el fin de echar luz sobre lo que queda pendiente para trabajos futuros, como el problema de la existencia y establecimiento de relaciones de recurrencia de tres términos para los autovectores de la TFD, que conducen a polinomios asociados mediante fórmulas en diferencias de Rodrigues, lo cual parece inminente tanto en el ámbito de la matriz Z_N como en el del operador W debido a los algoritmos de tridiagonalización de Householder y Lanczos —como se discutió alrededor de la ec. (5.13). Así mismo, la extensión de estos resultados al caso multivariado es posible tomando productos cartesianos del grupo cíclico subyacente, o de cualquiera de sus objetos isomorfos.

Debe mencionarse, finalmente, que se deja como un problema abierto la posible recuperación del caso continuo, la cual puede ocurrir de dos maneras: A partir de la representación L^+, L^-, $\mathcal{N}$, obteniendo las relaciones 3.4 si existen soluciones l_j que cumplan la condición $z(\alpha) = |l_\alpha^-|^2 - |l_{\alpha+1}^-|^2 = cte \in \mathbb{R}$ y a partir de la representación Q, P, Z_N dentro del contexto del Teorema del Límite Central de la probabilidad. Esta segunda forma es más compleja y yace en la veracidad del límite de Z_N como la distribución de Dirac, así como del conocimiento de la forma explícita de sus autovectores; si este límite se cumple, entonces Z_N tiene comportamiento distribucional de Schwartz. Por eso, para tal recuperación, se necesita encontrar un análogo apropiado del operador identidad de las RCC (1.2), en lugar de emplear el operador identidad bajo convolución en el sentido distribucional de las relaciones de conmutación discretas (3.2.6). Esto se debe al hecho de que las Distribuciones de Schwartz constituyen una noción un poco diferente a las distribuciones de probabilidad usuales. No obstante, esto no es detrimento para el álgebra de las relaciones de conmutación discretas porque en este trabajo hemos priorizado *el principio de correspondencia* de Tarazov. Este principio establece que (ver [38] p.4) la correspondencia entre teorías cuánticas continuas y discretas yace no tanto en la concordancia límite cuando el paso de discretización tiende a cero, como en el hecho de que las operaciones matemáticas en las dos teorías obedezcan, en muchos casos, las mismas leyes. Finalmente, los problemas de la recuperación del caso continuo asociado al operador de Heun W, o si el límite de Z_N resulta ser un operador acotado, se dejan abiertos.

Apéndice A

Construcción numérica de un operador de aniquilación para Z_7 y los respectivos operadores hamiltoniano y de número

En este apéndice se realiza la construcción numérica de un operador de aniquilación para $N = 7$ usando Wolfram Mathematica.[1]

1. Sea

$$\omega = \frac{2\pi \mathrm{i}}{7},$$

entonces

$$[\Phi_7]_{ij} = \sum_{0}^{6} \omega^{ij},$$

$$Q = \frac{2\pi}{7}\mathrm{Diag}\{0, 1, 2, \ldots, 6\},$$

$$P = \Phi Q \Phi^{\dagger}$$

y

$$Z_7 = \mathrm{i}(QP - PQ).$$

Asignando valores numéricos se verifica que Z_7 es Toeplitz-Hermitiana de traza cero:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0{,}84{+}0{,}40i & 0{,}64{+}0{,}81i & 0{,}28{+}1{,}21i & -0{,}4{+}1{,}6i & -1{,}6{+}2{,}0i & -5{,}0{+}2{,}4i \\
0{,}84{-}0{,}40i & 0 & 0{,}84{+}0{,}40i & 0{,}64{+}0{,}81i & 0{,}28{+}1{,}21i & -0{,}4{+}1{,}6i & -1{,}6{+}2{,}0i \\
0{,}64{-}0{,}81i & 0{,}84{-}0{,}40i & 0 & 0{,}84{+}0{,}40i & 0{,}64{+}0{,}81i & 0{,}28{+}1{,}21i & -0{,}4{+}1{,}6i \\
0{,}28{-}1{,}21i & 0{,}64{-}0{,}81i & 0{,}84{-}0{,}40i & 0 & 0{,}84{+}0{,}40i & 0{,}64{+}0{,}81i & 0{,}28{+}1{,}21i \\
-0{,}4{-}1{,}6i & 0{,}28{-}1{,}21i & 0{,}64{-}0{,}81i & 0{,}84{-}0{,}40i & 0 & 0{,}84{+}0{,}40i & 0{,}64{+}0{,}81i \\
-1{,}6{-}2{,}0i & -0{,}4{-}1{,}6i & 0{,}28{-}1{,}21i & 0{,}64{-}0{,}81i & 0{,}84{-}0{,}40i & 0 & 0{,}84{+}0{,}40i \\
-5{,}0{-}2{,}4i & -1{,}6{-}2{,}0i & -0{,}4{-}1{,}6i & 0{,}28{-}1{,}21i & 0{,}64{-}0{,}81i & 0{,}84{-}0{,}40i & 0
\end{pmatrix}$$

[1] La elección particular de esta dimensión es meramente arbitraria y obedece a pruebas previas usando otras autobases solo válidas para dimensión impar.

Extrayendo los autovectores de Z_7 y construyendo la matriz de transición T de la autobase de Z_7 a la base canónica (poniendo los autovectores como columnas) se obtiene la forma diagonal de la matriz Z_7 con sus autovalores en la diagonal:

$$\begin{pmatrix} 9{,}76696 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6{,}26294 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}09213 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}898954 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}897557 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}876866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}261498 \end{pmatrix}.$$

2. Se calcula una solución de las relaciones de recurrencia para obtener los valores de l_j. Considerndo los autovalores

$$Z^{\xi}_{00} = 9{,}76696, \quad Z^{\xi}_{66} = 0{,}261498,$$

de donde las relaciones hiperbólicas del Teorema 5.3.6 que resuelve las relaciones de recurrencia son

$$|l_6^-|^2 - |l_1^-|^2 = Z^{\xi}_{00} + Z^{\xi}_{66} = 10{,}0285,$$
$$|l_1^-|^2 - |l_0^-|^2 = -9{,}76696.$$

De donde, como se argumentó en el ejemplo x, $|l_1^-|^2 = |l_0^-|^2 - 9{,}76696$, por lo que soluciones existen si $|l_0^-|^2 > 9{,}76696$. Tomando $|l_0|^2 = 100$, se sigue que el círculo $C_0 = \{l_0 \in \mathbb{C} : |l_0| = 10\}$ determina un conjunto infinito de soluciones. Para obtener un operador L^-, se escoge construir sobre el eje imaginario, de modo que se toma $l_0^- = 10\text{i}$; así pues, $|l_1^-|^2 = 100 - 9{,}76696 = 90{,}2330$, de donde podemos establecer $l_1^- = 9{,}4991\text{i}$; de aquí que $|l_6^-|^2 = |l_1^-|^2 + 10{,}0285$ implica $l_6^- = 10{,}0113\text{i}$. Con estos valores de l_0^-, l_1^- y l_6^-, se pueden obtener las faltantes $l_j^-, j = 2, 3, 4, 5$ usando las ecs. (5.10) para subíndices pares y (5.11) para subíndices impares —en orden inverso— obteniéndose la lista $l_j^-, j = 0, 1, \ldots, 6$ que acá acomodamos en forma de vector:

$$\begin{pmatrix} 10i \\ 0. + 9{,}49911i \\ 0. + 9{,}81074i \\ 0. + 11{,}7777i \\ 0. + 9{,}78496i \\ 0. + 11{,}8426i \\ 0. + 10{,}0131i \end{pmatrix}.$$

3. Construyendo el operador de aniquilación L^- con las l^- del punto 2, que corresponden a la solución particular dada por $l_0^- = 10\text{i}$. Se usa la definición

$$L^- := \sum_{n=0}^{6} l_n^- |\xi_{n-1}\rangle\langle\xi_n|, \tag{A.1}$$

obteniéndose

$$L^- = \begin{pmatrix} 0.-1{,}34i & -1{,}2+4{,}15i & 0{,}046-0{,}04i & 0{,}52-0{,}12i & 1{,}91+0{,}43i & 5{,}43+4{,}33i & 1{,}94+4{,}03i \\ 2{,}48+5{,}15i & 0.-1{,}36i & -2{,}17+4{,}52i & 2{,}64-2{,}11i & 4{,}08-0{,}93i & 1{,}81+0{,}41i & -1{,}85-1{,}47i \\ 1{,}52+1{,}21i & 2{,}31+4{,}81i & 0.+0{,}40i & -1{,}78+3{,}70i & 3{,}59-2{,}86i & -5{,}0+1{,}14i & 1{,}17+0{,}26i \\ 2{,}19+0{,}50i & -0{,}63-0{,}50i & 2{,}14+4{,}46i & 0.+6{,}61i & -1{,}95+4{,}05i & 1{,}55-1{,}23i & 0{,}93-0{,}21i \\ 2{,}23-0{,}51i & 4{,}79+1{,}09i & 1{,}34+1{,}07i & -2{,}11-4{,}39i & 0.+5{,}76i & -1{,}13+2{,}36i & 1{,}07-0{,}85i \\ 5{,}08-4{,}05i & 0{,}44-0{,}10i & -6{,}53-1{,}49i & 1{,}08+0{,}86i & 0{,}57+1{,}19i & 0.-2{,}12i & -0{,}64+1{,}34i \\ 0{,}93-1{,}93i & -3{,}59+2{,}86i & -0{,}69+0{,}15i & -0{,}99-0{,}22i & -0{,}52-0{,}42i & 0{,}91+1{,}89i & 0.-7{,}96i \end{pmatrix}.$$

Cuando se multiplica por el cuarto autovector dado por Mathematica

$$|\xi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0{,}030 - 0{,}014i \\ -0{,}206 + 0{,}258i \\ 0{,}138 - 0{,}608i \\ 0 \\ 0{,}388 + 0{,}487i \\ -0{,}298 - 0{,}143i \\ 0{,}034 + 0.i \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$L^-|\xi_3\rangle = \begin{pmatrix} -1{,}09911 - 2{,}28232i \\ 4{,}45019 + 3{,}54891i \\ 3{,}07963 + 0{,}702904i \\ 0 \\ -2{,}46967 + 1{,}96949i \\ -2{,}46967 + 5{,}12832i \\ 0. - 2{,}53318i \end{pmatrix}; \tag{A.2}$$

por otro lado

$$l_3^-|\xi_2\rangle = \begin{pmatrix} -1{,}09911 - 2{,}28232i \\ 4{,}45019 + 3{,}54891i \\ 3{,}07963 + 0{,}702904i \\ 0 \\ -2{,}46967 + 1{,}96949i \\ -2{,}46967 + 5{,}12832i \\ 0. - 2{,}53318i \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

donde $|\xi_2\rangle$ es efectivamente el tercer autovector, i.e., se cumple la ec. A.1.

4. Verificando que las relaciones de compatibilidad discretas (RCDs) se satisfacen al transformarlas a la base de autovectores de Z_7, $\{\xi_j\}$. Se puede comprobar que

$$\{L^-, Z_7\}^\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0.+33{,}28i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.-72{,}25i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.-19{,}67i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.-17{,}83i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.-17{,}69i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.-6{,}16i \\ 0.+100{,}28i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así mismo, considerando que $L^+ = (L^-)^\dagger$,

$$[\{L^+, L^-\}, L^-]^\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0.+33{,}28i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.-72{,}25i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.-19{,}67i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.-17{,}83i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.-17{,}69i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.-6{,}16i \\ 0.+100{,}28i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$[\{L^+, L^-\}, L^-]^\xi = \{L^-, Z_N\}^\xi. \tag{A.4}$$

5. Calculando el hamiltoniano. El hamiltoniano[2] $\mathscr{H} := \{L^+, L^-\}$, en la base canónica toma la forma

$$\mathscr{H}^e = \begin{pmatrix} 191{,}17 & -2{,}64-1{,}27\mathrm{i} & -1{,}17-1{,}47\mathrm{i} & -0{,}31-1{,}35\mathrm{i} & 0{,}24-1{,}04\mathrm{i} & 0{,}34-0{,}43\mathrm{i} & -3{,}11+1{,}5\mathrm{i} \\ -2{,}64+1{,}27\mathrm{i} & 195{,}62 & -1{,}15-0{,}554\mathrm{i} & -0{,}56-0{,}70\mathrm{i} & -0{,}03-0{,}12\mathrm{i} & -0{,}43+1{,}91\mathrm{i} & 0{,}34-0{,}43\mathrm{i} \\ -1{,}17+1{,}47\mathit{I}\mathrm{i} & -1{,}15+0{,}55\mathrm{i} & 196{,}57 & 0{,}038+0{,}018\mathrm{i} & 0{,}66+0{,}83\mathrm{i} & -0{,}03-0{,}12\mathrm{i} & 0{,}24-1{,}04\mathrm{i} \\ -0{,}31+1{,}35\mathrm{i} & -0{,}56+0{,}70\mathrm{i} & 0{,}038-0{,}02\mathrm{i} & 198{,}19 & 0{,}038+0{,}018\mathrm{i} & -0{,}56-0{,}70\mathrm{i} & -0{,}31-1{,}35\mathrm{i} \\ 0{,}24+1{,}04\mathrm{i} & -0{,}03+0{,}12\mathrm{i} & 0{,}66-0{,}83\mathrm{i} & 0{,}04-0{,}02\mathrm{i} & 196{,}57 & -1{,}15-0{,}55\mathrm{i} & -1{,}17-1{,}47\mathrm{i} \\ 0{,}34+0{,}43\mathrm{i} & -0{,}43-1{,}91\mathrm{i} & -0{,}03+0{,}12\mathrm{i} & -0{,}56+0{,}70\mathrm{i} & -1{,}15+0{,}55\mathrm{i} & 195{,}62 & -2{,}64-1{,}27\mathrm{i} \\ -3{,}11-1{,}5\mathrm{i} & 0{,}34+0{,}43\mathrm{i} & 0{,}24+1{,}04\mathrm{i} & -0{,}31+1{,}35\mathrm{i} & -1{,}17+1{,}47\mathrm{i} & -2{,}64+1{,}27\mathrm{i} & 191{,}17 \end{pmatrix},$$

al transformar a la autobase de Z_N se convierte en

$$\mathscr{H}^\xi = \begin{pmatrix} 190{,}233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 186{,}729 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 194{,}084 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 196{,}075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 197{,}872 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 199{,}646 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200{,}262 \end{pmatrix};$$

se observa entonces que al ser diagonalizada por los autovectores de Z_7, $\{\xi_j\}$, estos deben ser también autovectores de $\mathscr{H}$, así que deben conmutar entre sí, como se esperaba:

[2] Se omitirá el factor 1/2.

$[\mathscr{H}, Z_7] = 0$.

6. Finalmente, el operador de número $\mathcal{N}$, en la base canónica toma la forma

$$\mathcal{N}^e = \begin{pmatrix} 95{,}6 & -0{,}9-0{,}43\mathrm{i} & -0{,}26-0{,}33\mathrm{i} & -0{,}01-0{,}07\mathrm{i} & -0{,}06+0{,}28\mathrm{i} & -0{,}63+0{,}79\mathrm{i} & -4{,}06+1{,}96\mathrm{i} \\ -0{,}9+0{,}43\mathrm{i} & 97{,}8 & -0{,}15-0{,}07\mathrm{i} & 0{,}04+0{,}05\mathrm{i} & 0{,}12+0{,}54\mathrm{i} & -0{,}4+1{,}76\mathrm{i} & -0{,}63+0{,}79\mathrm{i} \\ -0{,}26+0{,}33\mathrm{i} & -0{,}15+0{,}07\mathrm{i} & 98{,}3 & 0{,}43+0{,}21\mathrm{i} & 0{,}65+0{,}81\mathrm{i} & 0{,}12+0{,}54\mathrm{i} & -0{,}06+0{,}28\mathrm{i} \\ -0{,}01+0{,}07\mathrm{i} & 0{,}04-0{,}05\mathrm{i} & 0{,}43-0{,}21\mathrm{i} & 99{,}1 & 0{,}43+0{,}21\mathrm{i} & 0{,}04+0{,}05\mathrm{i} & -0{,}01-0{,}07\mathrm{i} \\ -0{,}06-0{,}28\mathrm{i} & 0{,}12-0{,}54\mathrm{i} & 0{,}65-0{,}81\mathrm{i} & 0{,}43-0{,}21\mathrm{i} & 98{,}3 & -0{,}15-0{,}07\mathrm{i} & -0{,}26-0{,}33\mathrm{i} \\ -0{,}63-0{,}79\mathrm{i} & -0{,}4-1{,}76\mathrm{i} & 0{,}12-0{,}54\mathrm{i} & 0{,}04-0{,}05\mathrm{i} & -0{,}15+0{,}07\mathrm{i} & 97{,}8 & -0{,}9-0{,}43\mathrm{i} \\ -4{,}06-1{,}96\mathrm{i} & -0{,}63-0{,}79\mathrm{i} & -0{,}06-0{,}28\mathrm{i} & -0{,}01+0{,}07\mathrm{i} & -0{,}26+0{,}33\mathrm{i} & -0{,}9+0{,}43\mathrm{i} & 95{,}6 \end{pmatrix},$$

mientras que en la autobase $\{\xi_j\}$,

$$\mathcal{N}^\xi = \begin{pmatrix} 100. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90{,}233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96{,}496 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 97{,}5881 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 98{,}4871 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 99{,}3846 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100{,}262 \end{pmatrix};$$

se concluye evidentemente que también $[\mathcal{N}, Z_7] = 0$.

Apéndice B

Demostración del Teorema 2.2.3

Defina X como

$$\mathbf{X} := \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{V}^m\mathbf{U}^n, \tag{B.1}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(m,n)\mathbf{X}(m',n') &= \frac{1}{N}\mathbf{V}^m\mathbf{U}^n\mathbf{V}^{m'}\mathbf{U}^{n'} \\ &= \frac{q^{nm'}}{N}\mathbf{V}^{m+m'}\mathbf{U}^{n+n'} \\ &= \frac{q^{nm'}}{\sqrt{N}}\mathbf{X}(m+m',n+n');\end{aligned}$$

de donde se sigue la regla de multiplicación de grupo para cualesquiera dos matrices unitarias u:

$$u(l_1;m_1,n_1)u(l_2;m_2,n_2) = u(l_1+l_2+m_1n_2;m_1+m_2,n_1+n_2).$$

Por lo que la asignación ϕ es un homomorfismo y por eso una representación unitaria.

La irreducibilidad de la representación en cuestión se prueba usando la teoría de caracteres de grupos finitos; así, para que la representación sea irreducible, el carácter $\chi(w(m,n;l)) := \mathrm{Tr}(u(l;m,n))$ debe satisfacer

$$\langle\chi,\chi\rangle_{\mathcal{H}} := \frac{1}{|\mathcal{H}|}\sum_{w\in\mathcal{H}}\chi(w)^*\chi(w) = 1,$$

donde $|\mathcal{H}|$ es el orden de $\mathcal{H}$.

En efecto, la forma explícita de u se obtiene procediendo por inducción sobre n para verificar que $V^n_{jk} = \delta_{j,k+n}$, además de que claramente $U^m_{jk} = q^{km}\delta_{jk}$, de manera que $u_{jk}(l;m,n) = q^l(\mathbf{V}^n\mathbf{U}^m)_{jk} = q^l\sum_r V^n_{jr}U^m_{rk} = q^l\sum_r \delta_{j,r+n}q^{km}\delta_{rk} = q^{l+mk}\delta_{j,k+n}$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\chi(w(m,n;l)) &= \mathrm{Tr}(u(l;m,n)) \\ &= \sum_j u_{jj} \\ &= q^l\delta_{0,n} + q^{l+m}\delta_{1,1+n} + q^{l+2m}\delta_{2,2+n} + \cdots \\ &= 0 \quad \text{si } n \neq 0;\end{aligned}$$

así se sigue que

$$\begin{aligned}\chi(w(m,0;l)) &= q^l[1 + q^m + (q^m)^2 + \cdots + (q^m)^{N-1}] \\ &= q^l\left[\frac{1-(q^m)^N}{1-q^m}\right] \\ &= 0 \quad \text{si } m \neq 0, \text{ pues } (q^m)^N = 1;\end{aligned}$$

de modo que los caracteres distintos de cero, son solamente los de la forma

$$\chi(w(0,0;l)) = q^l[N], \qquad l = 0, \ldots, N-1;$$

por lo tanto

$$\sum_{w\in\mathcal{H}} \chi(w)^*\chi(w) = \sum_{l=0}^{N-1} N^2 = N^3,$$

de donde se sigue el resultado, pues $|\mathcal{H}| = N^3$.

Bibliografía

[1] J. Alvarez. «A Matehmatical Presentation of Laurent Schwartz Dsitributions». En: *Surveys in Mathematics and its Applications* 15 (2020), págs. 1-37. URL: https://www.utgjiu.ro/math/sma/v15/p15_01.pdf.

[2] M. Arik, N. M. Atakishiyev y K. B. Wolf. «Quantum algebraic structures compatible with the harmonic oscillator Newton equation». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 32.33 (ago. de 1999), pág. L371. DOI: 10.1088/0305-4470/32/33/101. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/32/33/101.

[3] N. M. Atakishiyev. «The eigenvalues and eigenvectors of the 5D discrete Fourier transform number operator revisited». En: (2022). URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.01990.

[4] N. M. Atakishiyev, L. E. Vincet y K. B. Wolf. «Continuous vs. discrete fractional Fourier transforms». En: *J. Comput. Appl. Math.* 107 (1999), págs. 73-95.

[5] M. Atakishiyeva, N. Atakishiyev y A. Shedanov. «An algebraic interpretation of the intertwining operators associated with the DFT». En: *J. Math. Phys.* 62 (2021), pág. 101704.

[6] M. K. Atakishiyeva y N. M. Atakishiyev. «On Algebraic Properties of the Discrete Rising and Lowering Operators, Associated with the N-dimensional Discrete Fourier Transform». En: *Advances in Dynamical Systems and Applications* 11 (2016), págs. 81-92. ISSN: 0973-5321. URL: http://campus.mst.edu/adsa.

[7] M. K. Atakishiyeva y N. M. Atakishiyev. «On the rising and lowering difference operators for eigenvectors of the finite Fourier transform». En: *Journal of Physics: Conf. Ser.* 597 (2015), pág. 012012.

[8] L. Auslander y R. Tolimieri. «Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 1 (1979), págs. 847-897.

[9] L. Barker et al. «The discrete harmonic oscillator, Harper's equation, and the discrete fractional Fourier transform». En: *Phys.* A 33 (2000), págs. 2209-2222.

[10] P. Baseihlac et al. «The Heun-Askey-Wilson algebra and the Heun operator of Askey-Wilson type». En: (2019). URL: https://arxiv.org/abs/1811.11407.

[11] I. Bengtsson y K. Zyczkowsky. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Ed. por Cambrigde University Press. 2017. URL: https://chaos.if.uj.edu.pl/~karol/geometry.htm.

[12] J.M. Bogoya et al. «Eigenvalues of Hermitian Toeplitz matrices with smooth simple-loop symbols». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 422.2 (2015), págs. 1308-1334. ISSN: 0022-247X. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.09.057.

[13] M. A. Ortiz C. «Propiedades algebraicas de los operadores de ascenso y descenso, asociados a la transformada de Fourier discreta N-dimensional». Morelos, México: CInC - IICBA, UAEMor, 2019. URL: http://riaa.uaem.%20mx/xmlui/handle/20.500.12055/786.

[14] B. W. Dickinson y K. Steiglitz. «Eigenvectors and Functions of the Discrete Fourier Transform». En: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* ASSP-30.1 (1982), págs. 847-897.

[15] G. B. Folland. *Armonic Analysis in Phase Space*. Ed. por New Jersey Princeton University Press. 1989.

[16] A. Ch. Ganchev y T. D. Palev. «A Lie superalgebraic interpretation of the para-Bose statistics». En: *J. Math. Phys.* 21(4) (1979), págs. 797-799. URL: https://doi.org/10.1063/1.524502.

[17] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. Advanced Book Program, 1999.

[18] H. S. Green. «A Generalized Method of Field Quantization». En: *Phys. Rev.* 90 (2 abr. de 1953), págs. 270-273. DOI: 10.1103/PhysRev.90.270. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.90.270.

[19] F. A. Grünbaum. «The Eigenvectors of the Discrete Fourier Transform: A Version of the Hermite Functions». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 88 (1982), págs. 355-363.

[20] S. Gurevich y R. Hadani. «On the diagonalization of the Discrete Fourier transform». En: *Appl. Comput. Harmoc. Anal* 27 (2009).

[21] M. Guzman-Partida J. Alvarez. «Properties of the Dirichlet Kernel». En: *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications* 11 (2023), págs. 96-110. URL: http://math-frac.org/Journals/EJMAA/.

[22] E. Jafarov, S. Lievens y J. Van der Jeugt. «The Wigner distribution function for the one-dimensional parabose oscillator». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41.23 (mayo de 2008), pág. 235301. DOI: 10.1088/1751-8113/41/23/235301. URL: https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/41/23/235301.

[23] E. I. Jafarov, N. I. Stoilova y J. Van der Jeugt. «Finite oscillator models: the Hahn oscillator». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44.26 (mayo de 2011), pág. 265203. DOI: 10.1088/1751-8113/44/26/265203. URL: https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/26/265203.

[24] I.I. Kachurik. «Spectra, Eigenvectors and Overlap Functions for Representation Operators of q-Deformed Algebras». En: *Commun. Math Phys.* 175 (1996).

[25] A. N. Karkischenko y V. B. Mnukhin. «On a system of eigenvectors of the Fourier transform over finite Gaussian fields». En: *J. of Phys.: Conf. Ser.* (2018). DOI: doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012040. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1096/1/012040/pdf.

[26] A. F. Kockum y F. Nori. «Quantum bits with Josephson junctions». En: *Fundamentals snd Frontiers of the Josephson effect* (2019). URL: arXiv:1908.09558.

[27] R. Koekoek, P.A. Lesky y R. F. Swarttouw. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues*. Con pról. de T. Koornwinder. 2010. ISBN: 978-3-642-05013.8. DOI: 10.1007/978-3-642-05014-5.

[28] I. Kra y S. R. Simanca. «On Circulant Matrices». En: *Notices of the AMS* 59.3 (mar. de 2012), págs. 368-377. URL: https://www.ams.org/notices/201203/rtx120300368p.pdf.

[29] A. Kuznetsov y M. Kwaśnicki. «Minimal Hermite-Type Eigenbasis of the Discrete Fourier Transform». En: *J. Fourier Anal. Appl.* 25 (jun. de 2019), págs. 1053-1079. DOI: 10.1007/s00041-018-9600-z.

[30] J. H. McClellan y T. W. Parks. «Eigenvalue and Eigenvector Decomposition of the Discrete Fourier Transform». En: *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* AU-20.1 (mar. de 1972).

[31] M. L. Mehta. «Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform». En: *J. Math. Phys.* (1987).

[32] G. L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge Fields. Interactions*. Ed. por Springer-Verlag. Ed. por G. E. Marsden. Ed. por L. Sirovich. 2000. ISBN: 0-387-98947-1.

[33] S. Noschese, L. Pasquini y L. Reichel. «Tridiagonal Toeplitz Matrices: Properties and Novel Applications». En: *Numer. Linear Algebra Appl.* (2006).

[34] A. Perälä, J. Taskinen y J. Virtanen. «Toeplitz operators with distributional symbols on Fock spaces». En: *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* 44.2 (2011), págs. 203-213. DOI: 10.7169/facm/1308749124. URL: https://doi.org/10.7169/facm/1308749124.

[35] M. C. Pereyra y L. A. Word. *Harmonic Analysis: from Fourier to wavelets*. Ed. por Rhode Island AMS Providence. 2012.

[36] T. S. Santhanam y A. R. Tekumalla. «Quantum Mechanics in Finite Dimensions». En: *Foundations of Physics* 6.5 (1975), págs. 583-587. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00715110.

[37] T. H. Seligman. *Group Theory and its Applications in Physics*. Ed. por N. Y. AIP. 1980.

[38] V. E. Tarasov. «Exact Discrete Analogs of Canonical Commutation and Uncertainty Relations». En: *Mathematics MDPI* 4 (2016), pág. 44.

[39] R. Vandebril. «On tridiagonal matrices unitarily equivalent to normal matrices». En: *Elsevier* (2010).

[40] N. L. Vasilevski. *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*. Ed. por Birkhäuser Basel. Vol. 185. 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8726-6.

[41] Z. Wang y G. Gong. «A note on the diagonalization of the discrete Fourier transform». En: *Appl. Comput. Harmoc. Anal.* 28 (2010), págs. 114-120.

[42] E. P. Wigner. «Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?» En: *Phys. Rev.* 77.5 (mar. de 1950).

[43] A.S. Zhedanov. «"Hidden Symmetry" of Askey-Wilson Polynomials». En: *Teoreticheskaya i Maematicheskaya Fisika* (1991).

Cuernavaca, Mor., a 8 de abril de 2025

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS

P R E S E N T E

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: **Sobre una familia de operadores discretos N-dimensionales de tipo escalera, construidos mediante un operador conmutador Z_N Toeplitz-Hermitiano**, que presenta el M. en C. Miguel Ángel Ortiz Cortés (10033395) para obtener el título de Doctorado en Ciencias.

Director de tesis: Dr. Natig Atakishiyev
Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Yuriy Karlovych CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Rogelio Valdéz Delgado CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Juan Pablo Díaz González CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Liudmila Lvovna Sabinina CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Emilio Marmolejo Olea UCIM-UNAM	APROBADO	
Dr. Markus Franciskus Müller Bender CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Natig Atakishiyev UCIM-UNAM	APROBADO	

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento con firma electrónica UAEM, soportada por el certificado vigente a la fecha de su elaboración y con efectos plenos de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS PUBLICADOS en el ÓRGANÓ INFORMATIVO UNIVERSITARIO "ADOLFO MENÉNDEZ SAMARÁ" número 117 de fecha 20 de abril de 2021.

Sello electrónico

NATIG ATAKISHIYEV . | Fecha:2025-04-08 15:26:57 | FIRMANTE
gJ7uz2wnLKSTK7vYixLaV0lRhZZl/gu3GGeUTracnfDXQPtWdr93xvF8oCF+eIIGMZptWz9igh9KBtJxYhyLbWD3mp8HzSRDUbV3e3lW8LCujSsCTh7vInPpvgGJAoWswgcksKPS
FrfXgQVkXGF2oPVOJjSSFrUy4CSAiwEn0VPl8qEXt2Z0gnhjHnqY38Efn2qJKVX0YgpHqLN6CBmqLOHWN4QiuftPX9gDw+BI/BsLx39K82VqugeTzGEL5liIE1B3awwiIeVLjjg82T
KpxmkBTvr76GXS6JJa0HoFOevcWk50uLC2JZOStpLQR6wkg295HMfasIDYJ+WWHtW04A==

YURIY KARLOVYCH | Fecha:2025-04-08 15:39:15 | FIRMANTE
TzXZjWnb5l6Rpe1D31gkBESgt0H0ZMhomV9maq4qI4yyXxicZq4Q0nTCGQDHkafXnhJ34XS21Q6Qjw64QyusJRlPIDFC/P3FqJHXmYBd16H9gxYP4E2J2EdQ4ucF089Vczxj1T
DBfStbCoU2EBZka1ceR5tFgVpIaM8t7Or2frdvKr8nzOKLHkubsrrzHAMrEFNmLqmkKfummvb3EJXyxWwiun0UL9KlQKdppr1PSIDA6mmeaosjNFgTQ0MJtp1xVHdwh3GRQ7a93I
PeJ84es2LSHeFq0WyWqXiP0t60t9ICjCYtGkA+MSgVtXVpv+YqhpjmQN6O0fc7cH/iOUXBTA==

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2025-04-08 15:39:24 | FIRMANTE
mqJhy7qvp15qOQylEPqpCAdovby3K4pRmixQRkHdQU64/ozoDZItMxAHy8SeNiqRTcC2pfC5FzcA2+WoY7Q2oB7v8Z2N/muByZS0L4UySQ3E1+O5pWcpUyJ6ZFLKnmxhfiuGvI
Df2lE3Foq5DSi+nyTVmy27S4c2hJ9+1Rxywx9fyTLhvM5a4S3UK+LuPjN+aBoCjgDR5BCi+MkrYi4cuAviSjR+Rp/0Sr++pvyGRS3V8YBty8wiz6Ny0aXU2p7YBj9iOxqbbTVqjmwFjF
gHKezni3sx7wHH96yS/x9NVzt5pVFymxbJF4amqDxpFHcI6mZQAUDC9raoiJkfL1M5Mg==

EMILIO MARMOLEJO OLEA | Fecha:2025-04-08 16:32:20 | FIRMANTE
G/Bv+dEVgP51OiI3RPNYoRSf55/gLQRMh5Xq0qcdkhNmLUoHfqCcNjbAG9JxTa3QbFMIJrujjEMvHj5ScUvIrHaxKXCqAAYLBBE+rMMAcaDzRW29uJB2tePNXVzTmwNZgtAwgg
t5UJ3Aa+6UmY5OAY/2AgmLKHBtKJR95flHPhg3b8JZBTNXqsh9aXhk6hyjDScxvTuGSV/ETV1Wy0nDWknJ9JOFBg1eSrfA8oxuF+OOfUhWV1AvwrtrdEL3ZwBaKJBAhUZF9tad
edcKeLwcORSu0dsfsLT7w49A+np8Nhvb+biwgwRQ9kKEkUsYqwXaxOIcXyI1OsWGllol+cWLxA==

LIUDMILA LVOVNA SABININA | Fecha:2025-04-08 16:34:27 | FIRMANTE
KWM5emM75wQU+vDgeZfybgQYACNP+z5OZLk0xW0VFrAxkZRO8cEAZzlr6GA60tjHmX2T1BPD/6nQCh6+yeKmNikK/pMjIdLPx/75oFe1P/7pYwV7Zk2B+AIbmCFZa2t+SEgW3
1Ss8ljCOSZ13y57pXeXfr+0sXZHFwZfXAo1fv6SPXdEIk2Jffeq0njhwR8ot1ZZZmdVGYL31xfyNKPOyvxGr/GhyxDb3Yf+Prkcubk4gXBVuo1NElxGMWj3IygfFiuHozETT2Sxrn3Gz6
M/vlPaAalNYD8Q8XTTJfdGB8kgQhyxVp1pUWwZHD4MzElgXtoRJlLG9awdDwyJMRKU1g==

MARKUS FRANCISKUS MULLER BENDER | Fecha:2025-04-08 18:41:05 | FIRMANTE
pJpY4mxYCvK/pnMw6x91UMH0L2BJk8niZgJCzqEBXzTp9RKQsMf+acMjIFqg4ud918mp8r3Rh/lk5aAb03bIoa3OkQfmdEsIxbdPSrfFIsIfO7atvjrKebcdRhZeShYiTyaCNHzTERDw
Uel1re12XxUBexANkLyNMGL6x4NrjuYXdnaWRRz/33ToQzopGAhLX/eyNUEjuIfjNteQP8iv8cT6ApCHD0sDhUOgM0rosVF5M1jmRn1dLbrQDZJMdNMUhT8UOSUa3zzz89gxp8
d50MWjkLszxytqrt5fJ2MrJd07qO2q6p9hAFMTPDVXR2r+lOGEEZsIvk1hCe1H9/ybyQ==

JUAN PABLO DIAZ GONZALEZ | Fecha:2025-04-08 19:08:11 | FIRMANTE
yL/muxHDSY1XLDxm90ujv7CzTHTmnbQpQTp7Y7jzRlGGze0PE+DLQ7ObWpVUml2H9JCu1PM+r7mM92Nr/z4dW/l/4iflaLBAJQTy+EWT3Z/KEs3aSEb2P9J55cCNfxqIT7tD5reJ
jmJA0ALiGPU8i9MBvyFT/99+2pOaVYVnWNpD7Eomr1jNwAF0Lt9+qioM9WID3e9MrVIe+is+cO5tvmEG+QDh5U9sXJRmXgqDz5bFGI/5HweN10E+gJXgXsz0He9EfpDzWGMSA
kXsLVWFcJdUGoWhuiXD0wTrt12C94UtvvSX0i3olRVbmHGBO96tyowBirBSkzmp1kLKUgo3Gw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:

Doa9X2tNy

https://efirma.uaem.mx/noRepudio/K4k81kpO6hDuLo11zDfe32qcypH8UcqV