

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

# Flujos en contrasentido generados por fuerzas magnéticas

T E S I S

QUE PRESENTA:

LIC. FÍS. DARIEL JONDALAR RODRÍGUEZ PROAL

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS  
(FÍSICA)

ASESOR:

DR. ALDO FIGUEROA LARA  
(SECIHTI-CINC, UAEM)



Cuernavaca, Morelos, Junio 2026

Jurado revisor de tesis:

Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos  
(CInC, UAEM)

Dr. Rolando Pérez Álvarez  
(CInC, UAEM)

Dr. Marco Antonio Rivera Islas  
(CInC, UAEM)

Dr. Sergio Cuevas García  
(IER-UNAM)

Dr. Michel Alejandro Rivero Corona  
(IIM-UNAM)

# Agradecimientos

Este proyecto fue apoyado por la SECIHTI (antes CONAHCYT), México, por lo cual doy gracias. Adicionalmente, se extiende un agradecimiento a la fundación Marcos Moshinsky para la adquisición de la infraestructura requerida.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi madre Amanda Liliana Proal Moncloa, por su amor incondicional, su fortaleza y su apoyo constante en cada etapa de mi vida. Su cariño ha sido un pilar fundamental para alcanzar este logro.

A mis abuelos María Dolores Gómez Gómez, Pilar Isolda Moncloa Moncloa y José Bernardo Proal Nájera, quienes han sido no solo mi principal sustento económico, sino también un ejemplo de trabajo, integridad y sabiduría. Su confianza en mí ha sido un motor esencial para continuar adelante.

A mis hermanos menores Ana María y Elie Francisco, por su alegría, su cariño y por recordarme siempre la importancia de la familia. Gracias por ser tan buenos hermanos y acompañarme en este camino.

Viridiana Bahena Sánchez, por su paciencia, su comprensión y su compañía inquebrantable. Gracias por estar a mi lado en los momentos de mayor exigencia, apoyándome tanto en lo académico como en lo emocional.

Finalmente, a mi comité sinodal, y en especial a mi asesor Aldo Figueroa Lara, por su dedicación, orientación y paciencia durante este proceso. Su guía ha sido clave para el desarrollo de esta investigación.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento.



# Resumen

Se analiza experimental, teórica y numéricamente la dinámica del flujo de cizallamiento resultante de la interacción entre un campo magnético vertical y una corriente continua en una capa delgada de un electrolito en régimen laminar. El flujo básico consiste en flujos horizontales con direcciones opuestas contenidos en un canal estrecho. Se exploran corrientes eléctricas en el rango de 10 a 200 mA con imanes que producen un campo magnético aproximado de 85 mT. El flujo presenta una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz cuando la fuerza impulsora impulsada por una corriente de aproximadamente  $I = 95$  mA ( $Re \approx 40$ ).

Los campos de velocidad se miden mediante velocimetría de imágenes de partículas. Adicionalmente, los patrones de flujo se observan mediante la inyección de colorante. Una solución numérica bidimensional reproduce las principales características del flujo, tales como el flujo tipo cizalla y la inestabilidad del tipo Kelvin-Helmholtz.

Además, se presentan soluciones analíticas unidimensionales para casos particulares; dichas soluciones reproducen las principales características de los flujos observados. Un análisis de estabilidad lineal corrobora los resultados obtenidos y muestra que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz está controlada por la intensidad de la fuerza de Lorenz, la forma del campo magnético y la fricción de Rayleigh.

# Índice general

|                                                 |            |
|-------------------------------------------------|------------|
| <b>Agradecimientos</b>                          | <b>I</b>   |
| <b>Resumen</b>                                  | <b>III</b> |
| <b>1 Introducción</b>                           | <b>3</b>   |
| <b>2 Modelo Experimental</b>                    | <b>5</b>   |
| 2.1 Sistema dos bandas . . . . .                | 6          |
| 2.2 Sistema multibandas . . . . .               | 6          |
| <b>3 Modelo matemático</b>                      | <b>9</b>   |
| 3.1 Solución analítica unidimensional . . . . . | 10         |
| 3.1.1 Sistema dos bandas . . . . .              | 10         |
| 3.1.2 Sistema multibandas . . . . .             | 13         |
| 3.2 Solución numérica bidimensional . . . . .   | 15         |
| <b>4 Resultados</b>                             | <b>17</b>  |
| 4.1 Sistema de dos bandas . . . . .             | 17         |
| 4.2 Sistema multibandas . . . . .               | 20         |
| <b>5 Conclusiones y trabajo futuro</b>          | <b>25</b>  |
| <b>A Análisis de estabilidad</b>                | <b>27</b>  |
| <b>Referencias</b>                              | <b>37</b>  |



# Capítulo 1

## Introducción

KHI La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (IKH), llamada así por Lord Kelvin y Hermann von Helmholtz, es un fenómeno fluidodinámico que puede ocurrir cuando existe una diferencia de velocidad en la interfaz entre dos fluidos o cuando hay cizalladura de velocidad en un fluido continuo. Esta inestabilidad se caracteriza por pequeñas ondas que crecen, se enrollan y se rompen en vórtices [1]. La IKH es un fenómeno ubicuo; a diversas escalas, se realizaron observaciones geofísicas de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz hasta finales de la década de 1960 y principios de la de 1970 en nubes [2], ver figura 1.1a), y posteriormente en el océano [3]. Además, la IKH también es visible en atmósferas planetarias (por ejemplo, la Mancha Roja de Júpiter y las bandas de Saturno), ver figura 1.1b), o en nubes interestelares [4]. Durante las últimas dos décadas, se ha detectado el IKH en la magnetopausa terrestre [5, 6] y en la corona solar [7, 8]. Dado que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz mejora el transporte de masa, momento y energía, se utiliza habitualmente en diversas geometrías para mezclar dos o más corrientes de fluidos en aplicaciones de ingeniería [9].



(a) Nubes terrestres [10].



(b) Atmósfera jupiterina [11].

Figura 1.1: Ejemplos de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la naturaleza.

La IKH se demuestra fácilmente en el laboratorio con un tanque que contiene dos capas estratificadas de líquido, típicamente agua dulce en la parte superior y agua salada, más densa, en la inferior, para generar la inestabilidad. Al inclinarse, el fluido más denso fluye cuesta abajo y el fluido más ligero cuesta arriba; la velocidad relativa de estos dos fluidos alcanza un punto crítico; su interfaz se vuelve inestable, formando las distintivas crestas de onda que se inclinan para mezclar las dos capas [12], revelando vórtices rodantes clásicos, similares a las nubes atmosféricas, lo que demuestra cómo las diferencias de velocidad a través de los límites del

fluido conducen a la inestabilidad. Además, otros estudios han analizado la IKH en diferentes sistemas como flujos oscilatorios [13], películas de jabón [14], películas de aire ultrafinas [15], fluidos viscoelásticos [16], fluidos multicomponentes [17], fluidos perfectamente dieléctricos [18], superfluidos [19], fluidos de polvo cargados [20] y plasmas [21].

Aunque la IKH ha sido ampliamente documentada, los estudios sobre el tema con flujos de cizallamiento forzados electromagnéticamente son escasos. Recientemente esta técnica se ha utilizado ampliamente debido a su capacidad para forzar el flujo de una manera muy controlada y no intrusiva [22]. Para generar un flujo de cizallamiento cuasi-bidimensional (Q2D), se utiliza una capa delgada de un fluido conductor que es forzado electromagnéticamente en contrasentido, provocando roces en una interfaz entre flujos. Se han realizado pocos estudios en geometrías cilíndricas [23-25]. En tales experimentos, se obtiene una capa de cizallamiento estable para flujos débilmente forzados. En valores críticos del número de Reynolds, el flujo de cizallamiento se vuelve inestable y se observa una cadena de vórtices. Dado que las paredes laterales producen confinamiento y potencialmente afectan la evolución de la inestabilidad, menos estudios consideran dominios rectangulares. Manin (1992) [26] realizó simulaciones numéricas del flujo de cizallamiento bidimensional forzado con fricción en el fondo. Además, González Vera y Zavala Sansón (2015) [27] publicaron un estudio experimental y numérico en el que las fuerzas de Lorentz en un flujo poco profundo dentro de un dominio rectangular cerrado produjeron un patrón de vórtices inestable. Posteriormente, basándose en simulaciones numéricas, López Zazueta y Zavala Sansón (2018) [28] afirmaron que, según el flujo, pueden desarrollarse inestabilidades de Kelvin-Helmholtz que presentan oscilaciones regulares o irregulares.

Considerando los trabajos citados en canales rectangulares, el presente trabajo presenta un modelo experimental más simple en el que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se produce por un flujo de cizallamiento generado mediante forzamiento electromagnético en una capa delgada de electrolito. Los campos de velocidades presentes en el flujo se caracterizarán experimentalmente utilizando la técnica de velocimetría por imágenes de partículas (PIV). Asimismo, desarrollamos modelos teóricos y numéricos que concuerdan bien con las observaciones experimentales. Las principales diferencias con trabajos previos en canales rectangulares radican en la comparación cuantitativa entre los experimentos y las simulaciones numéricas, y en el análisis de estabilidad, donde se constata que la IKH está controlada por la fuerza de Lorentz, la forma del campo magnético y la fricción de Rayleigh.

# Capítulo 2

## Modelo Experimental

Los montajes de los experimentos consisten en recipientes rectangulares de acrílico, ver figuras [2.1](#) y [2.2](#). Los recipientes se llenaron con una capa de una solución electrolítica de bicarbonato de sodio al 8.6 % en peso. La capa de fluido tiene una profundidad de  $h = 5$  mm. A temperatura ambiente ( $20^\circ$  C), la densidad de masa, la viscosidad cinemática y la conductividad eléctrica del fluido de trabajo son  $\rho = 1.09 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s y  $\sigma = 6.36$  S/m, respectivamente. El origen del sistema de coordenadas se encuentra en el centro geométrico de los contenedores, específicamente en la pared inferior. En este marco de referencia, los ejes  $x$  e  $y$  están en el plano horizontal, mientras que el eje  $z$  apunta en la dirección normal (vertical). La distribución del campo magnético se genera mediante arreglos de imanes permanentes magnetizados verticalmente, ubicados con polaridad opuesta debajo de los contenedores (Figuras [3.1](#) y [3.4](#)). La distribución del campo magnético se caracterizó con un medidor de Tesla (modelo F.W. Bell 048), y se midió una intensidad máxima del campo magnético de  $B_0 = 85$  mT en  $z = 5$  mm. Se inyectaron corrientes eléctricas continuas en el rango  $10 \leq I \leq 200$  mA en la dirección  $y$  a través de un par de electrodos de cobre paralelos. La corriente eléctrica inyectada interactúa con la distribución del campo magnético para producir fuerzas de Lorentz, principalmente horizontales en direcciones opuestas, que impulsan un flujo de cizallamiento; lo cual promueve una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Se obtuvieron observaciones cualitativas mediante la inyección de tinta en la superficie libre del fluido. Cabe destacar que para corrientes eléctricas mayores de 68 mA se presentó electrólisis. A medida que se liberaban pequeñas burbujas al ambiente a través de la superficie libre de la capa de fluido, el fenómeno de electrólisis alteró ligeramente la dinámica del flujo. De hecho, las burbujas sirvieron como trazadores para visualizaciones experimentales cualitativas. Adicionalmente, se obtuvieron mediciones cuantitativas del campo de velocidad horizontal en la superficie libre ( $z = 5$  mm) mediante velocimetría de imágenes de partículas. Se colocaron esferas huecas de vidrio de borosilicato (10  $\mu$ m de diámetro) en la superficie libre de la capa de electrolito y se iluminaron con LED. El contraste de las partículas se mejoró colocando una hoja de papel negro mate debajo del recipiente. Las imágenes del flujo se capturaron con una cámara digital Nikon D3300 con una resolución de  $1920 \times 1080$  píxeles y un objetivo AF-S Nikkor de 18-55 mm. Las imágenes registradas se analizaron utilizando PIVLab [\[29\]](#). Ajustando una distribución normal a los datos en los puntos muestreados, pudimos obtener el error en los datos de velocidad. En estas condiciones, el error máximo en las observaciones experimentales fue del 10 %.

## 2.1. Sistema dos bandas

El primer dispositivo experimental, que en adelante se denominará “sistema de dos bandas”, tiene como propósito analizar la dinámica de flujos inducidos por forzamiento electromagnético en su configuración más simple: un sistema compuesto por dos flujos. Este sistema de dos bandas consiste en un canal de 0.8 cm de ancho, con paredes aislantes de acrílico de 0.5 cm de altura y 12 cm de longitud. Internamente, las paredes del canal están recubiertas con placas de cobre conectadas a la fuente de poder. El canal está abierto en los extremos para permitir la re-circulación del fluido (ver Figura 2.1) y, finalmente, se encuentra rodeado por un recipiente cuadrado de acrílico de 20 cm de largo, 4 cm de ancho y 1 cm de alto, únicamente para contener el fluido del experimento. El canal está inmerso en el campo magnético generado mediante dos imanes; uno de los imanes domina en la parte positiva de  $y$  y el otro, en la parte negativa, dividiendo el canal en dos. Ambos imanes son idénticos en magnitud y dimensiones, pero invertidos; el imán superior tiene su campo magnético orientado en  $z$  (hacia fuera del plano del canal) y el inferior orientado en  $-z$  (hacia dentro del plano del canal). El canal se llena con el electrolito descrito previamente sin rebozar a unos 5 mm de altura (Figuras 2.1 y 3.1).

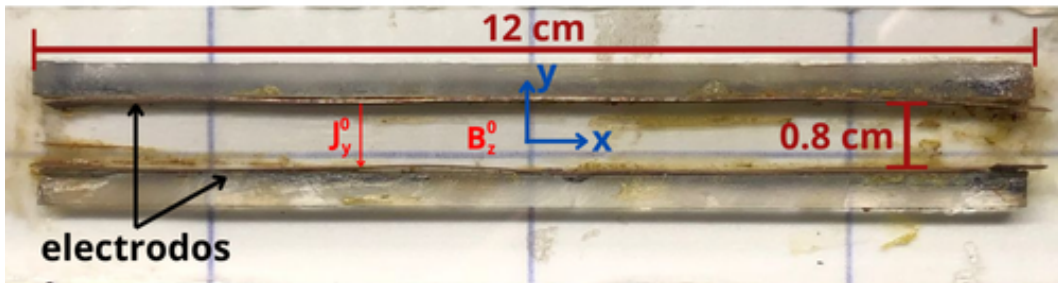


Figura 2.1: Foto del aparato experimental para el sistema de dos bandas.

En este sistema, los campos magnéticos, en combinación con la corriente DC inyectada en la dirección  $y$ , generan dos fuerzas de Lorentz que actúan en dirección  $x$  pero en sentidos opuestos. Estas fuerzas de Lorentz provocan el movimiento del fluido en dos flujos, creando las condiciones ideales para establecer una interfaz que puede dar lugar a inestabilidades del tipo Kelvin-Helmholtz.

## 2.2. Sistema multibandas

El segundo dispositivo experimental, que en adelante será denominado “sistema multibandas”, consiste en otro canal (más amplio que en el sistema de dos bandas), el cual está formado por dos paredes acrílicas de 12 cm de largo y 1 cm de alto, colocadas paralelas entre sí con una separación de 5.08 cm (2 pulgadas). La parte interna de estas paredes está recubierta por placas de cobre (electrodos) que nuevamente serán conectadas a una fuente de corriente eléctrica. El canal está abierto en los extremos para permitir la re-circulación del electrolito y está centrado dentro de un recipiente cuadrado de acrílico de 18 cm de lado y 1 cm de alto, con paredes de 1 cm de grosor para que el fluido no se derrame (Figuras 2.2 y 3.4). Finalmente, el sistema multibandas se llena de electrolito sin derramar. El canal se encuentra bajo la influencia del campo magnético de cuatro imanes permanentes iguales, cuyas medidas superiores son de 1.27 cm de ancho y 5.08 cm de largo, con el campo magnético orientado en el eje  $z$ , intercalando la dirección entre imanes continuos de manera que primero será campo saliente en un imán y campo entrante en el siguiente, y así sucesivamente. En este canal, el campo magnético alineado en dirección  $z$  junto a la corriente inyectada al sistema conductor en dirección  $y$  producen

cuatro fuerzas de Lorentz en dirección  $x$  en sentidos contrarios.

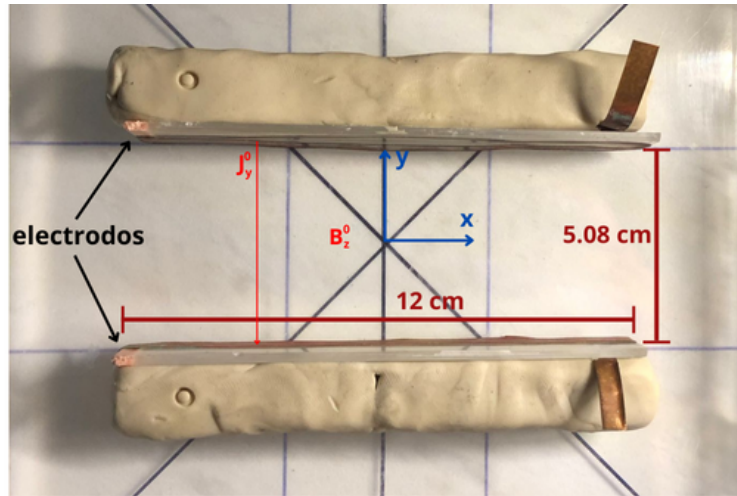


Figura 2.2: Foto del aparato experimental para el sistema multibandas.

Estos dos dispositivos permitirán crear flujos paralelos encontrados, en cuya interfaz se podrán observar inestabilidades del tipo Kelvin-Helmholtz y remolinos. La velocidad de los flujos forzados electromagnéticamente podrá ser variada por medio de la fuente de voltaje y ajustar los parámetros hasta llegar al momento en que se observen las inestabilidades buscadas.



# Capítulo 3

## Modelo matemático

Los flujos impulsados electromagnéticamente en capas delgadas de electrolitos se han modelado con éxito mediante un enfoque cuasi-bidimensional (Q2D). El modelo Q2D se basa en el promedio de las ecuaciones de balance en la dirección normal  $z$ , de modo que los flujos se describen en términos de el flujo bidimensional del núcleo del flujo con una fricción lineal que tiene en cuenta los efectos de la capa límite. Sin embargo, como primer acercamiento al análisis del problema actual, se adaptó un modelo bidimensional (2D). En términos adimensionales, las ecuaciones de conservación en el plano  $(x - y)$  tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla_{\perp}^2 u + Q j_y B_z, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla_{\perp}^2 v. \quad (3.3)$$

Las coordenadas espaciales se normalizan por la mitad del ancho del canal, y el tiempo  $t$  se normaliza por  $l/u_0$ , donde  $u_0 = \nu/l$  es la velocidad viscosa característica. Las componentes de velocidad  $u$  y  $v$ , la presión  $p$ , la componente vertical del campo magnético  $B_z$  y la componente de densidad de corriente eléctrica inyectada  $j_y$  se adimensionalizan usando  $u_0$ , el doble de la presión dinámica  $\rho u_0^2$ , la intensidad máxima del campo magnético del imán  $B_0 = 85$  mT y la densidad de corriente eléctrica característica  $j_0 = I/A_0$ , respectivamente. El subíndice  $\perp$  denota la proyección del operador  $\nabla^2$  en el plano  $(x - y)$ .  $A_0$  es el área de la sección transversal del electrodo de cobre, es decir,  $A_0 = 0.12 \times 0.005$  m<sup>2</sup>. La fuerza de Lorentz resultante de la interacción de la corriente eléctrica aplicada en la dirección  $y$  ( $j_y$ ) con la componente normal del campo magnético ( $B_z$ ) es la única fuerza impulsora en la dirección  $x$ , a saber,  $Q j_y B_z$ . El único parámetro adimensional involucrado es el parámetro de la fuerza de Lorentz  $Q = U_0/u_0$ . La velocidad volumétrica característica  $U_0 = j_0 B_0 l^2 / \rho \nu$  se obtiene de un equilibrio entre las fuerzas viscosas y de Lorentz aplicadas. La componente vertical del campo magnético  $B_z$  se modela con aproximaciones que serán mencionadas para cada caso. Dado que el estudio se hace en la zona central del canal, los efectos de borde de corriente o campo magnético (y por ende fuerza de Lorentz) son despreciados.

### 3.1. Solución analítica unidimensional

En esta sección, simplificamos el problema utilizando diversas suposiciones que nos permitieron obtener una solución analítica para el flujo de forma adimensionalizada. En primer lugar, no existe un gradiente de presión impuesto. La única fuerza impulsora es la componente  $x$  de la fuerza de Lorentz, resultante de la interacción entre el campo magnético externo  $B_z$  y la densidad de corriente eléctrica aplicada en la dirección  $y$ , esto es  $j_y = 1$ . Por lo tanto, en estado estacionario, asumimos un flujo horizontal que solo depende de la coordenada  $y$ . Por tanto, la ecuación resultante es

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -Q j_y B_z. \quad (3.4)$$

#### 3.1.1. Sistema dos bandas

En este caso de estudio, se tienen dos flujos encontrados dentro de un canal. En primera instancia, asumimos que el campo magnético tiene un comportamiento tipo escalón en la dirección  $y$ , siendo positivo en la mitad superior del canal y negativo en la mitad inferior del canal (ver figura 3.1).

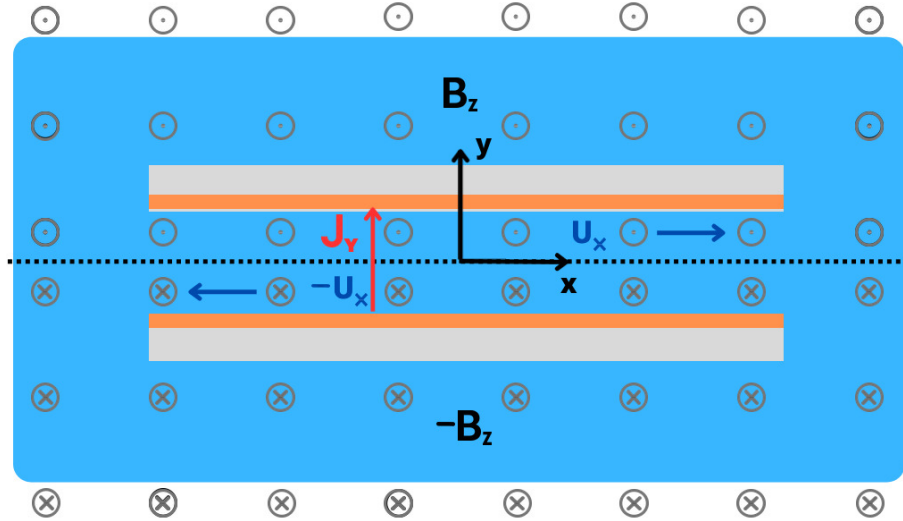


Figura 3.1: Modelo físico del sistema de dos bandas.

Ahora tenemos dos flujos por resolver para la ec. (3.4), la mitad inferior y la mitad superior del flujo. Resolvamos primero la mitad superior, o sea, para  $0 \leq y \leq 1$ , con  $B_z = 1$ , cuya ecuación es

$$u = -Q \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2, \quad (3.5)$$

con las condiciones de frontera

$$u(y = 1) = 0, u(y = 0) = 0. \quad (3.6)$$

con solución

$$u_{up}(y) = -\frac{Q}{2}y^2 + \frac{Q}{2}y, \quad (3.7)$$

con una velocidad máxima en  $y = 1/2$ , la cual es

$$u_{up-max} = \frac{Q}{32}.$$

Posteriormente, resolviendo la mitad inferior para  $-1 < y \leq 0$ , con  $B_z = -1$ , cuya ecuación es

$$u = Q\frac{y^2}{2} + c_3y + c_4, \quad (3.8)$$

con las condiciones de frontera

$$u(0) = 0, u(y = -1) = 0. \quad (3.9)$$

con solución

$$u_{down}(y) = \frac{Q}{2}y^2 + \frac{Q}{2}y, \quad (3.10)$$

con una velocidad máxima en  $u_{down}(y) = 0$  o en  $y = 1/2$ , la cual es:

$$u_{down-min} = -\frac{Q}{32}.$$

Se puede notar que la magnitud de  $u_{up-max} = \frac{Q}{32}$  y  $u_{down-max} = \frac{-Q}{32}$  es la misma, por lo que el flujo es antisimétrico.

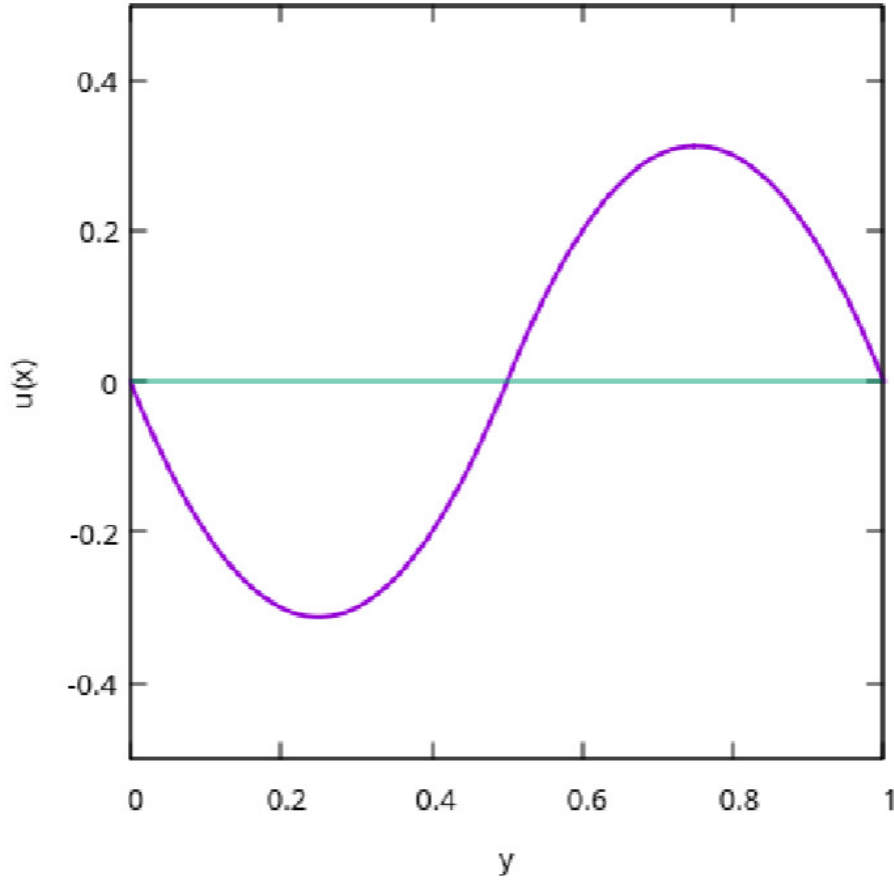


Figura 3.2: Gráfica de la solución analítica con campo magnético tipo escalón. Perfil de velocidad  $u(y)$  respecto al eje  $y$  del caso 3 ( $Q = 10$ )

Observando la gráfica 3.2 podemos notar que hay 2 flujos en contrasentido. De manera adicional, si asumimos que el campo magnético tiene un comportamiento más suave, es decir, un comportamiento tipo sinusoidal  $B_z = -\sin(2\pi y)$ , la solución a la ec. (3.4) es

$$u = \frac{-Q \sin(2\pi y)}{4\pi^2} + c_1 y + c_2 \quad (3.11)$$

Considerando las siguientes condiciones de frontera

$$u(y = 1) = 0, u(y = -1) = 0, \quad (3.12)$$

la solución es

$$u(y) = \frac{-Q \sin(2\pi y)}{4\pi^2}. \quad (3.13)$$

Para encontrar los máximos y mínimos de la velocidad, tenemos que encontrar las soluciones a  $u'(y) = -\frac{Q \cos(2\pi y)}{2\pi} = 0$  para  $-1 \leq y \leq 1$ , que se cumplen para los valores  $y = -1/2$  y  $y = 1/2$

$$u_{min} = -\frac{Q}{4\pi^2} \text{ para } y = -1/2,$$

$$u_{max} = \frac{Q}{4\pi^2} \text{ para } y = 1/2.$$

La solución (3.13) está representada en la figura 3.3, donde se percibe que la solución es similar, cualitativamente hablando, a la solución con el campo magnético escalonado debido a que, si bien en una consideración escalonada el campo no es suave, el movimiento debido a la fuerza de lorentz suaviza las gráficas de las velocidades conforme el sistema se desarrolla. Por tanto, en las soluciones analíticas y numéricas subsecuentes se considerará el campo magnético de tipo sinusoidal. Cabe mencionar que, pensando en realizar un análisis de estabilidad de este problema en el futuro, se revisó y reprodujo el análisis clásico de la inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz para el caso sin viscosidad; dicho ejercicio está plasmado en el Apéndice A

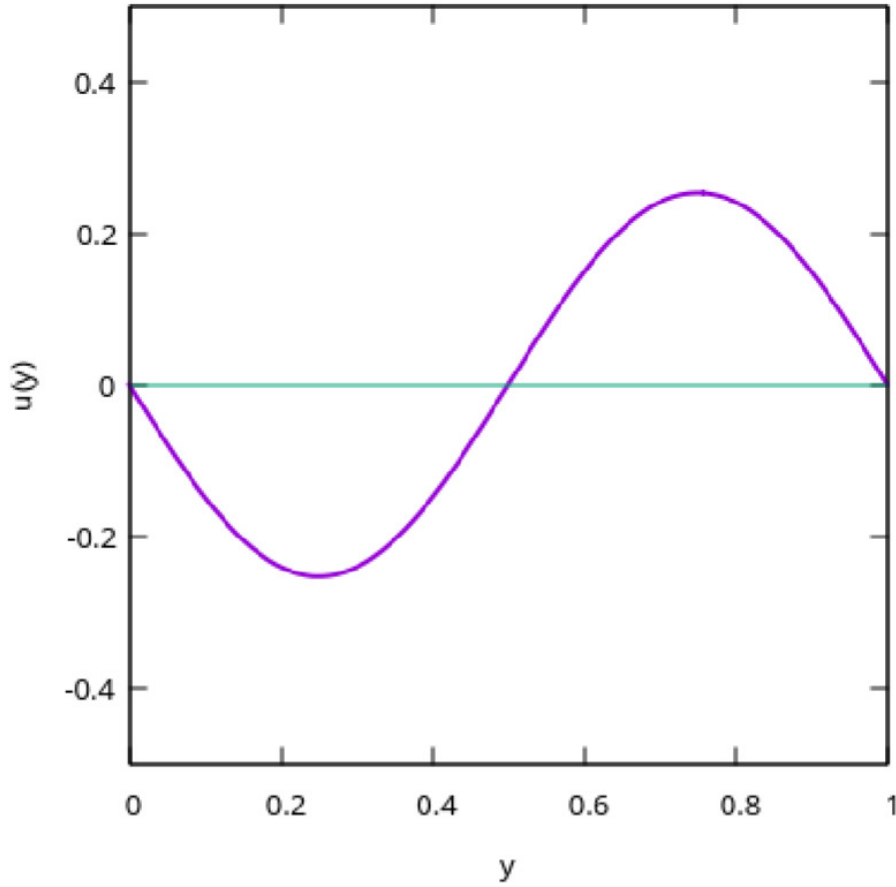


Figura 3.3: Gráfica de la solución analítica con campo magnético tipo sinusoidal. Perfil de velocidad  $u(y)$  respecto al eje  $y$  del caso 3 ( $Q = 10$ )

### 3.1.2. Sistema multibandas

Para el sistema multibandas se considera que el comportamiento del campo magnético es sinusoidal a lo largo del eje  $y$  (con sus máximos en las zonas medias de los imanes y sus mínimos entre los imanes). Con el fin de obtener un resultado analítico, impondremos condiciones de frontera de no deslizamiento ( $u(y = 0) = 0$  y  $u(y = 1) = 0$ ), tomando en cuenta el modelo físico en la figura 3.4

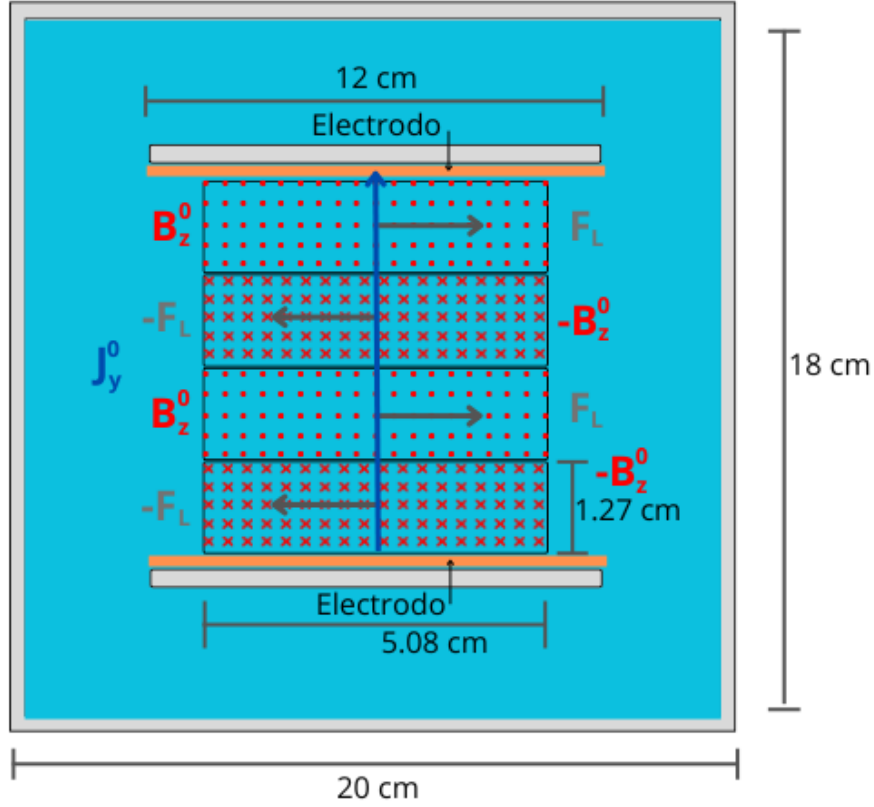


Figura 3.4: Esquema 2D del sistema multibandas. En rojo la dirección del campo magnético, en azul la dirección de la corriente en el sistema, en gris la dirección de la fuerza de Lorentz.

Para resolver la ec. (3.4) tenemos  $j_y = 1$ ,  $Q = 1$  y  $B_z = \sin(N\pi y)$ , donde  $N$  representa el número de imanes, por lo tanto, la solución es

$$u(y) = \frac{\sin(N\pi y)}{(N\pi)^2}. \quad (3.14)$$

La gráfica de esta solución se muestra en la figura 3.5 y esquemáticamente la vemos en la figura 3.6.

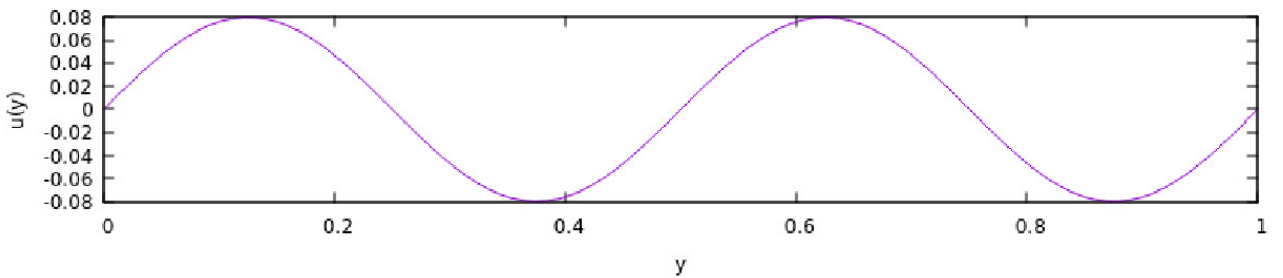


Figura 3.5: Gráfica analítica de la solución de la velocidad respecto al eje  $y$  para  $N = 4$ .

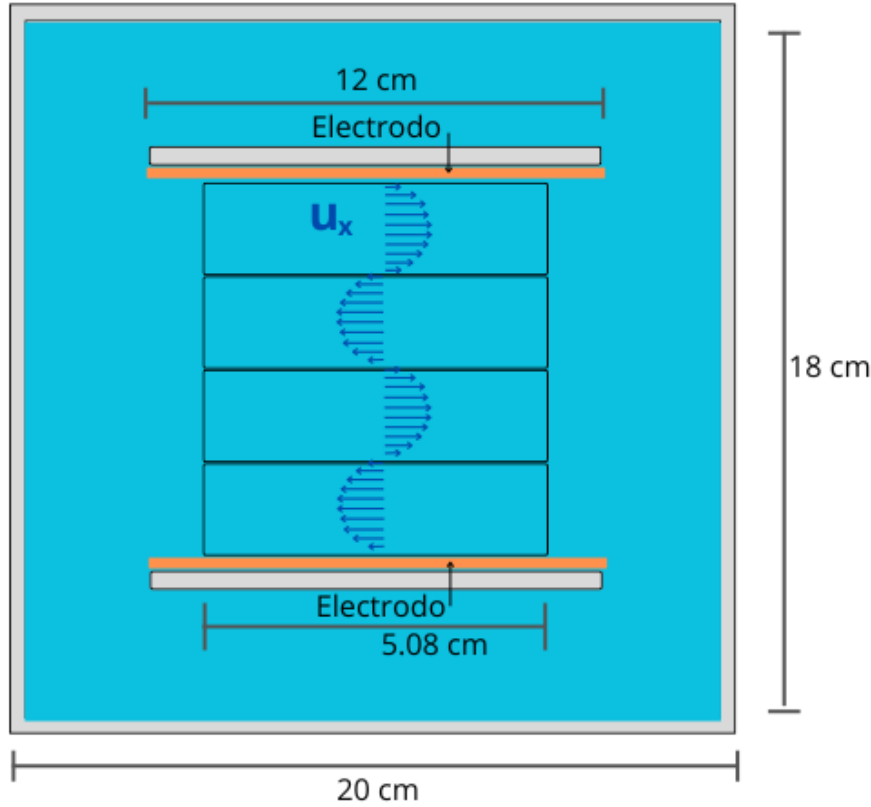


Figura 3.6: Esquema 2D del perfil de velocidades a lo largo del eje central en  $x$ .

### 3.2. Solución numérica bidimensional

El sistema de ecuaciones (3.1)-(3.3) se resolvió numéricamente utilizando un método de diferencias finitas que ha sido previamente validado en otros estudios de flujos impulsados electromagnéticamente en capas poco profundas. Las ecuaciones en forma discretizada son las siguientes

$$F^n = u^n + \delta t \left( \left( \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + Qj_y B_z - \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (3.15)$$

$$G^n = v^n + \delta t \left( \left( \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \right). \quad (3.16)$$

Mientras la ecuación de Poisson para la presión es

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta t} \left( \frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} \right). \quad (3.17)$$

Una vez que se resuelve la ecuación para la presión, se obtienen las componentes de velocidad

$$u^{n+1} = F^n - \delta t \frac{\partial(p^{n+1})}{\partial x}, \quad (3.18)$$

$$v^{n+1} = G^n - \partial t \frac{\partial(p^{n+1})}{\partial x}. \quad (3.19)$$

El dominio numérico es del mismo tamaño que el canal estrecho del modelo experimental, las componentes de velocidad satisfacen condiciones de no deslizamiento ( $u = 0$ ,  $v = 0$ ) en las paredes inferior y superior del canal, y se consideran condiciones de contorno de Neumann ( $\partial u / \partial x = 0$ ,  $\partial v / \partial x = 0$ ) en los límites izquierdo y derecho. Como condiciones iniciales, se considera un fluido en reposo ( $u = 0$ ,  $v = 0$ ) sin corriente aplicada ( $j_y = 0$ ). La componente vertical del campo magnético es  $B_z = \sin(2\pi y)$ . Para el caso de dos bandas, se usa una malla de  $300 \times 20$  con un paso temporal de 0.0001, mientras que para el caso multibandas, la malla fue  $100 \times 100$  (el cambio en la malla únicamente es por capacidad computacional y resolución, pero no es un problema para el análisis final de las simulaciones).

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Sistema de dos bandas

La interacción de la corriente eléctrica y el campo magnético genera una fuerza de Lorentz que promueve un flujo de cizallamiento horizontal, como se observa en la figura [4.1](#) donde se muestran fotogramas del experimento de dos bandas con la técnica de inyección de colorante. Como se puede apreciar en las fotos, la tinta es arrastrada en dos direcciones: en el eje positivo en  $y$  a la derecha y en el negativo a la izquierda (como en la figura [3.1](#)). Conforme el experimento sigue evolucionando, notamos formaciones de vórtices a lo largo de la zona media. Estos vórtices son perturbaciones debido a los flujos encontrados, y su formación nos recuerda un poco a la gran mancha roja de Júpiter. Esta técnica en este experimento tiene limitaciones muy marcadas, una de ellas es que la inyección de tinta requiere mucha precisión o buen pulso, lo que hace que muchos de los intentos se descarten sólo por haber inyectado mal la tinta. Otro problema es que la tinta se va mezclando cada vez más y el fluido se va pintando completamente de verde, interrumpiendo la misma observación, como se puede ver hacia el final de los fotogramas. Como observación final, a los extremos del canal se ven líneas perpendiculares azules, estas marcan el límite de los imanes, por lo que los efectos de borde como la recirculación, la cual es notada por remolinos en esta zona, no son de interés.



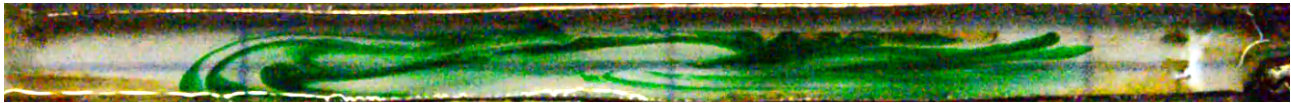
(a) Fotograma en 00:13.



(b) Fotograma en 00:15.



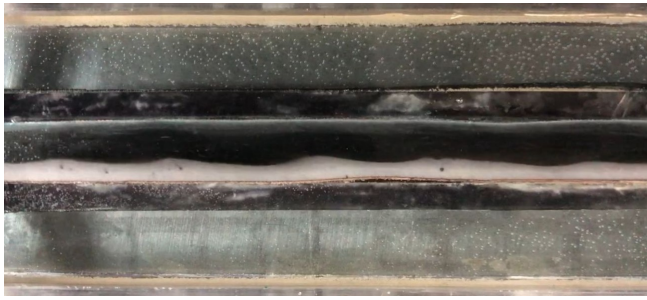
(c) Fotograma en 00:17.



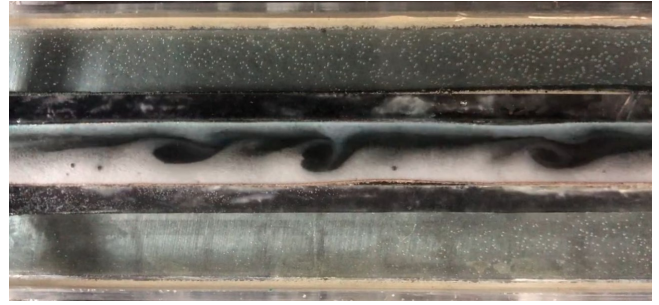
(d) Fotograma en 00:19.

Figura 4.1: Observación experimental del sistema de dos bandas con la técnica de inyección de colorante.

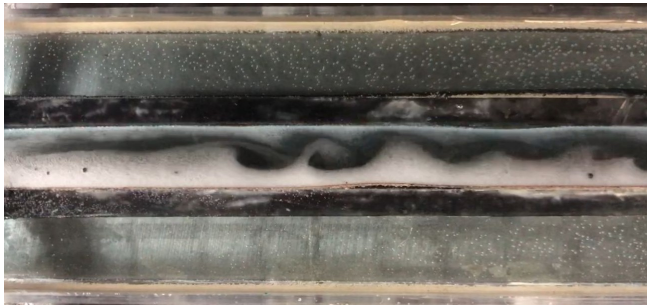
La evolución temporal de la inestabilidad también se puede observar en la figura. 4.2, donde las burbujas de la electrólisis sirven como trazadores. Centrándonos en las observaciones experimentales, para  $t = 2$  s, se forman pequeñas ondulaciones; véase la figura 4.2a). Luego ocurre el proceso de amplificación, haciendo que la ola crezca para  $t = 8$  s; véase la figura 4.2b). Las suaves crestas de la ola se curvan, formando finalmente los característicos vórtices espirales; véase la figura 4.2b)-e). La electrólisis es un proceso químico inducido por el paso de una corriente eléctrica a través de un medio, el cual puede encontrarse en estado líquido (fundido) o disuelto en agua. Dicho fenómeno consiste en la descomposición de una sustancia en sus componentes elementales o en la formación de nuevos compuestos debido a las reacciones de oxidación y reducción que ocurren en los electrodos. En términos generales, durante la electrólisis, los cationes (iones con carga positiva) migran hacia el cátodo, donde adquieren electrones (reducción), mientras que los aniones (iones con carga negativa) se desplazan hacia el ánodo, donde ceden electrones (oxidación). Este principio permite transformar compuestos químicos estables en sus elementos constituyentes o en productos diferentes, lo cual no ocurriría de manera espontánea sin la aplicación de energía eléctrica [30]. En el experimento se puede observar la formación espontánea de espuma en el ánodo debido a la electrólisis del electrolito (véase figura 4.2a)). Gracias a que esta espuma se forma en las cercanías de un solo electrodo, en conjunto con las dimensiones del canal, se obtiene una curiosa casualidad: la mitad inferior del canal se vuelve visible y similar a una nube en el cielo. Es influenciada por el flujo contrario en su superficie, permitiendo ver la transformación del experimento a un flujo con inestabilidad del tipo Kelvin-Helmholtz.



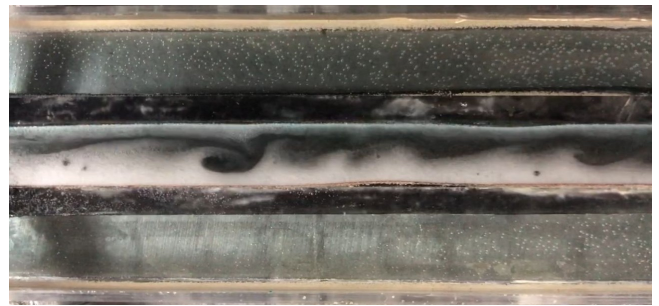
(a) Fotograma en 00:04.



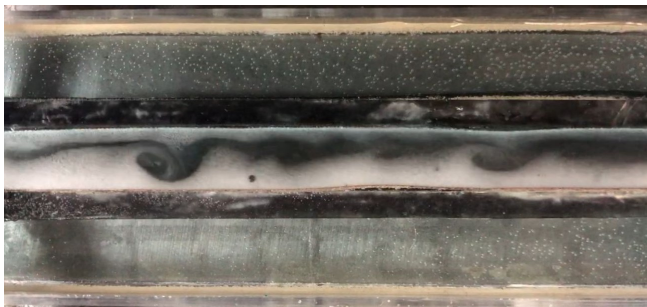
(b) Fotograma en 00:08.



(c) Fotograma en 00:12.



(d) Fotograma en 00:16.



(e) Fotograma en 00:20.

Figura 4.2: Observación experimental del sistema de dos bandas mediante las burbujas de la electrólisis.

Una mejor manera de observar el comportamiento del fluido es emplear PIV; sin embargo, como ya se mencionó, un proceso químico llamado electrólisis impidió por completo este método de observación. A corrientes bajas ( $I \leq 60$  mA), cuando aún no hay formación de vórtices, podemos evitar la electrólisis, pero a medida que nos acercamos a corrientes que permiten la perturbación del fluido, también nos acercamos al inicio de la electrólisis. Por lo tanto, para obtener flujos de mayor velocidad se requieren corrientes más intensas, con lo que el fenómeno de inestabilidad y la electrólisis se harán presentes al mismo tiempo. De manera adicional, se realizó la simulación numérica de este flujo, ver figura 4.3. En particular, la simulación numérica reproduce los principales efectos físicos observados durante el desarrollo de la inestabilidad. Las estructuras de vórtice aparecen como resultado de una inestabilidad del flujo básico de cizalla (ver figura 3.3), y la transición de un régimen estable a uno inestable se observa cuando aumenta la fuerza de Lorentz ( $Q = 4000$ ).

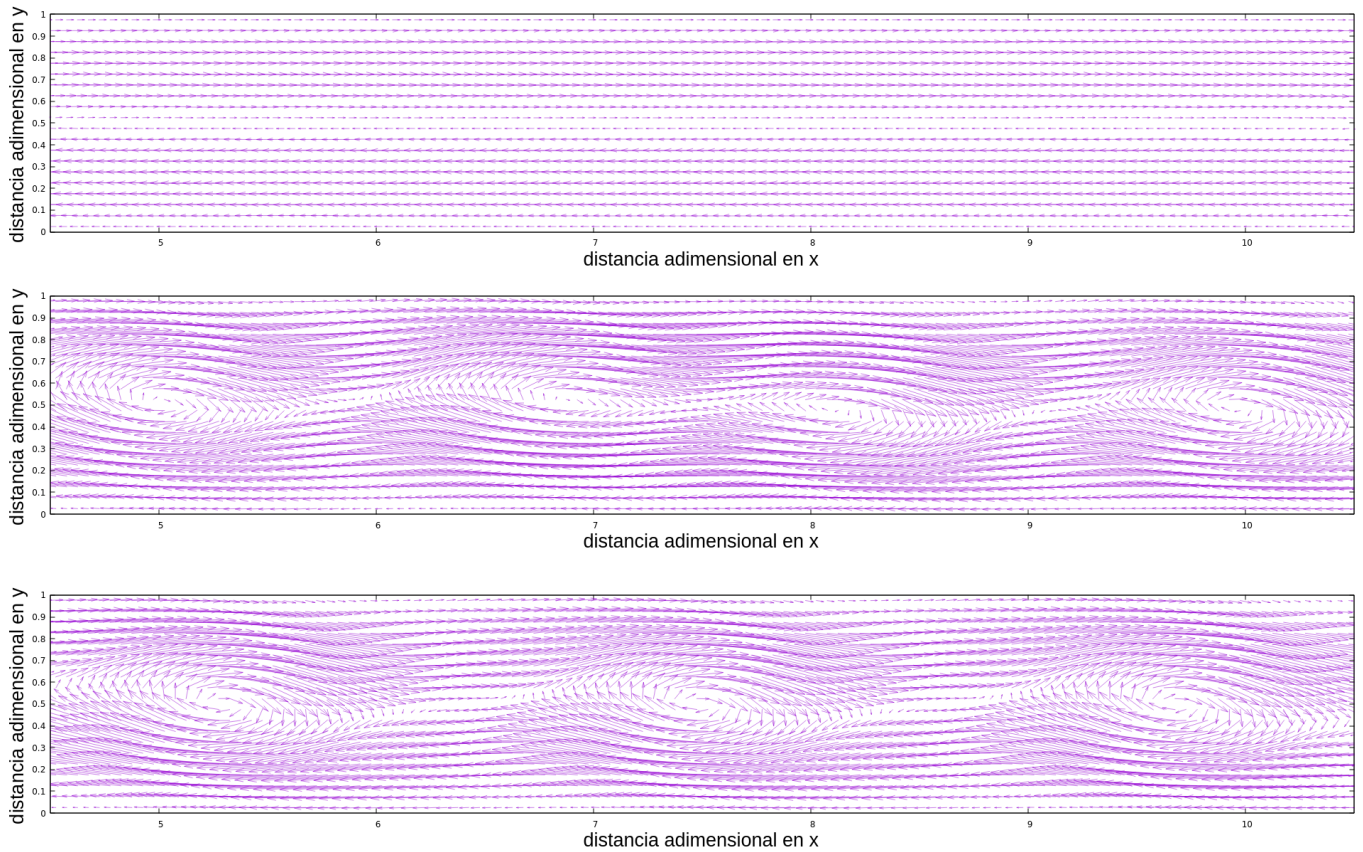


Figura 4.3: Campo vectorial de velocidad. a)  $t = 0.01$ . b)  $t = 0.2$ . c)  $t = 0.3$ .  $Q = 4000$ . Solución numérica 2D.

## 4.2. Sistema multibandas

En el caso experimental para el sistema multibandas, la tinta se inyecta a lo largo del eje  $y$  en  $x = 0$  mientras el fluido permanece en reposo; posteriormente, se enciende la fuente de poder en los valores previamente establecidos de una corriente de 0.01 amperios y un voltaje de 3.1 voltios, y se deja evolucionar en el tiempo; ver figura 4.4. Al ser un sistema de 4 imanes, sucede lo esperado en cuanto a 4 flujos contrarios intercalados; sus regiones de dominio son claras, pero se puede observar un comportamiento muy claro: los flujos externos (pegados a los electrodos) son más intensos que los internos. Esto tiene sentido, pues mientras los flujos externos tienen un flujo encontrado de un lado y una condición de no deslizamiento con la pared del canal, los flujos internos tienen dos flujos contrarios, sin embargo, retomado la gráfica analítica de la figura 3.5, podemos notar una gran diferencia cualitativa en los perfiles teórico y experimental. Conforme el perfil avanza, la tinta llega a los límites del campo magnético, por lo que, debido a la re-circulación del sistema, se deforma en una espiral, la cual no es de interés para el propósito de este análisis. Si bien la tinta nos ayuda a ver los perfiles de velocidad, no nos permite ver el comportamiento general en el canal para este caso. Sin embargo, en esta configuración, la electrólisis no se presenta, por lo que es posible realizar el análisis PIV de esta configuración.

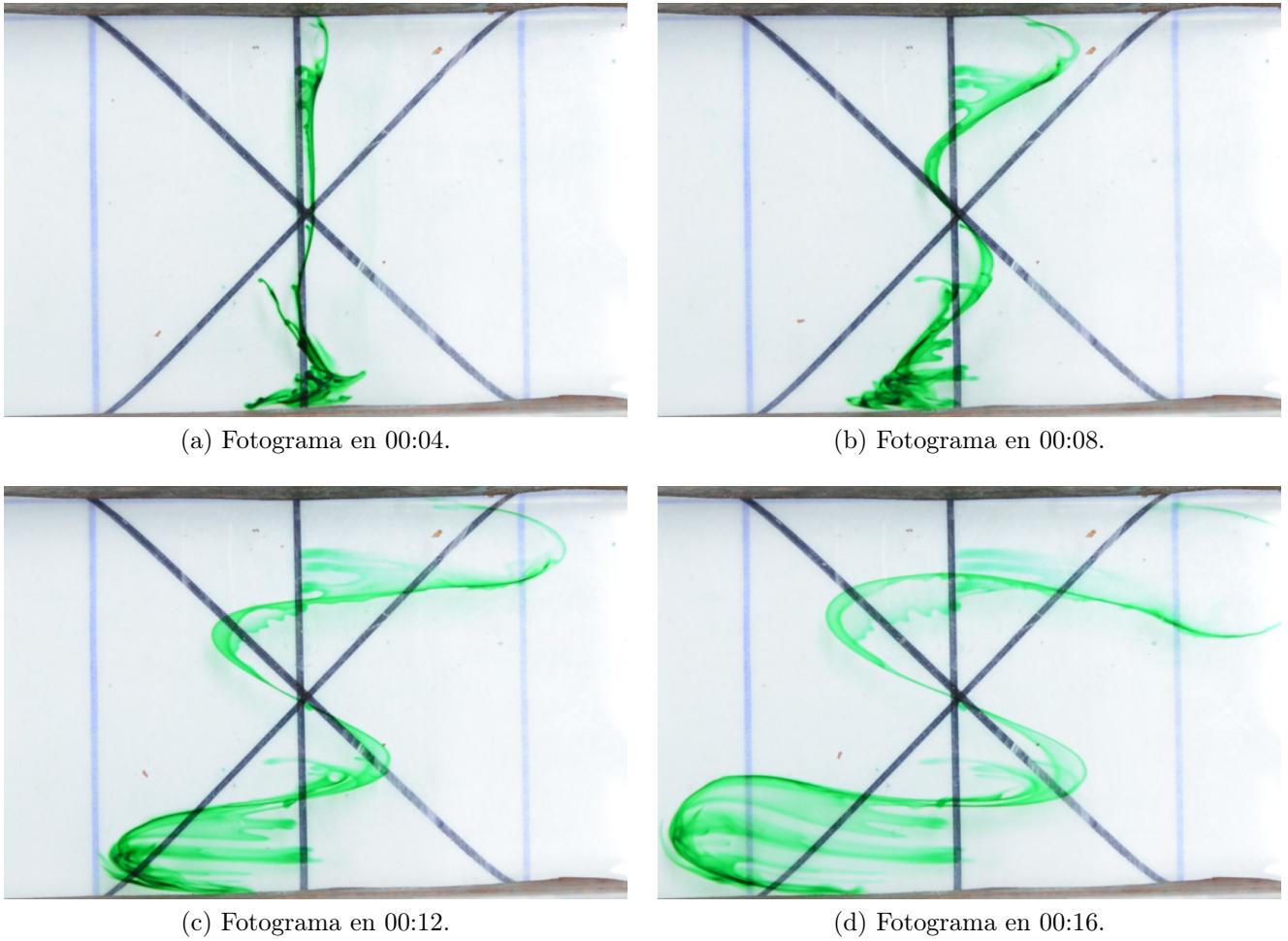


Figura 4.4: Evolución temporal del video experimental del sistema de cuatro bandas visualizado con inyección de colorante.

Para las observaciones experimentales de PIV del sistema multibandas, se introducen partículas de prueba sobre la superficie de la solución, las cuales nos ayudan a visualizar el campo vectorial de velocidades en toda el área; ver figura 4.5. Suponiendo el fluido estacionario, se emplea un promedio temporal de los videos para homogeneizar las observaciones, obteniendo así la figura 4.6a). En esta figura, podemos observar en los extremos una mayor intensidad de la velocidad y recirculaciones de fluido; sin embargo, no están atribuidas a ninguna inestabilidad.

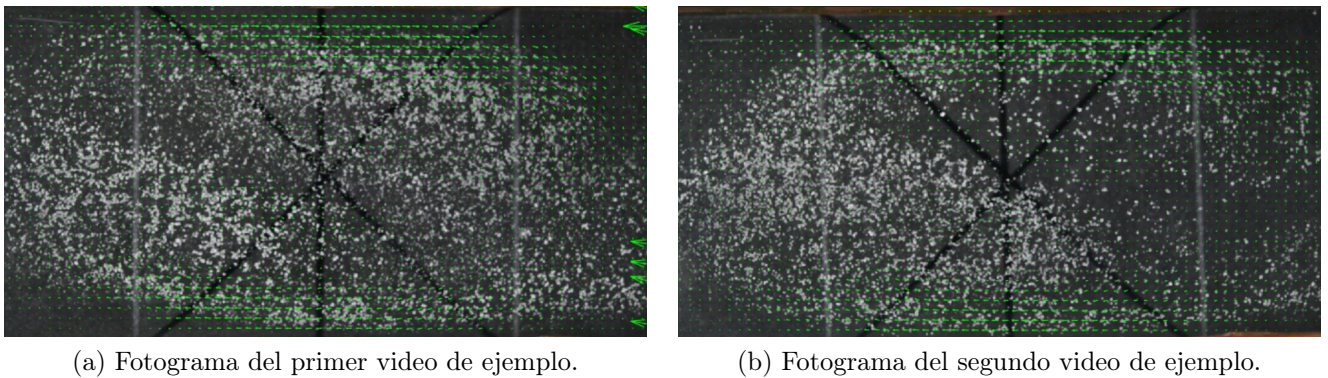


Figura 4.5: Campo vectorial experimental mediante fotogramas analizados con la técnica de PIV.

Los perfiles de velocidad en función de la coordenada  $y$  se muestran en la figura 4.6b). Se puede observar que la componente  $v$  es un orden de magnitud menor que la componente  $u$ . Usando la velocidad máxima obtenida con PIV,  $u_{max} = 0.03$  m/s, y el ancho de un imán como longitud característica  $L = 0.0125$  m, el número de Reynolds es  $Re = u_{max}L/\nu \approx 375$ , lo cual indica que los flujos observados son laminares. Adicionalmente, la componente  $u$  tiene un acuerdo cualitativo con la solución analítica presentada en la figura 3.5.

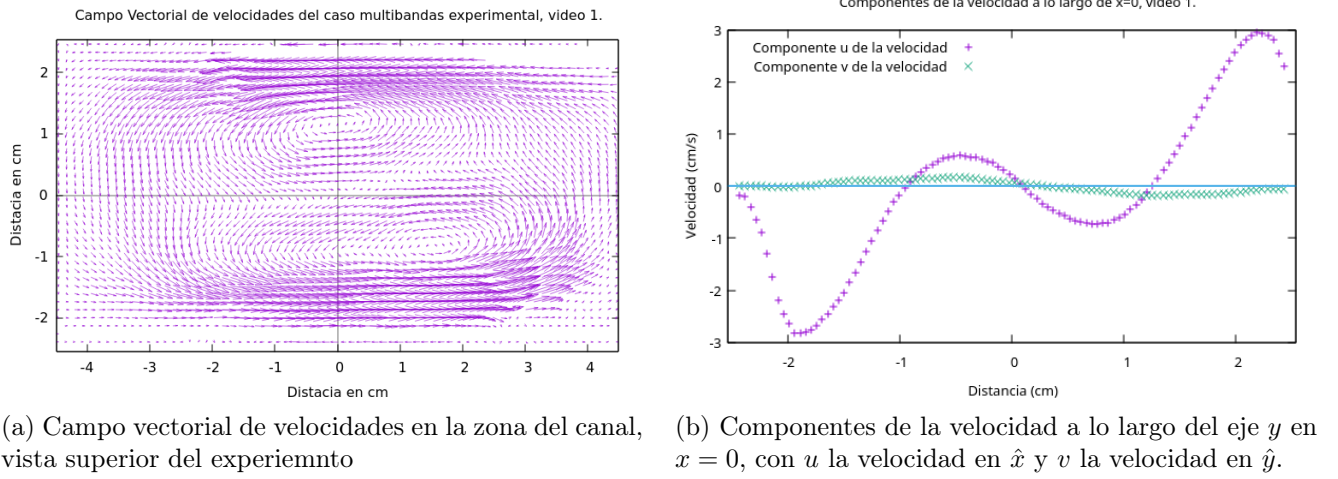


Figura 4.6: Análisis PIV del sistema multibandas.

Finalmente, las figuras 4.7 y 4.8 muestran el campo de velocidad y el perfil de velocidad horizontal, respectivamente, provenientes de la simulación numérica.

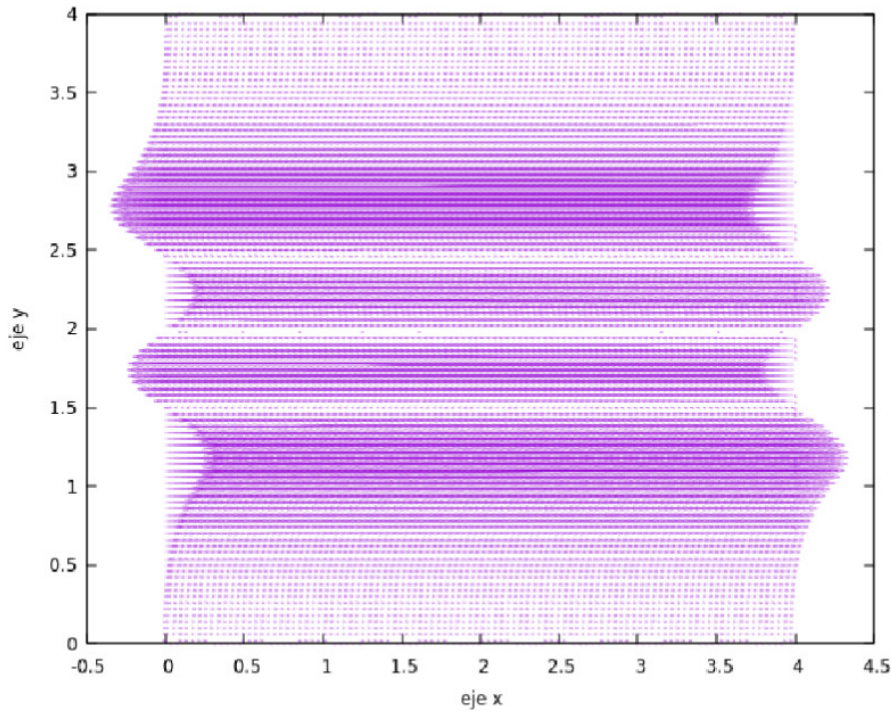


Figura 4.7: Campo vectorial de velocidades numérico para el sistema multibandas.

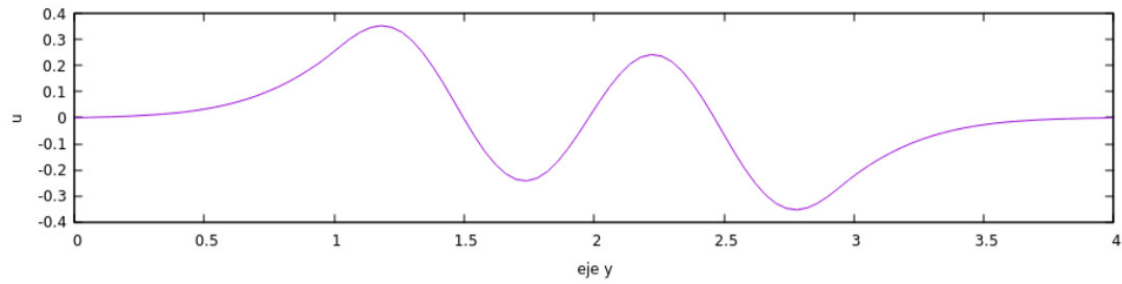


Figura 4.8: Gráfica de la velocidad  $u$  en dirección  $x$  a lo largo de un corte vertical de la simulación numérica a la mitad.

Estos resultados muestran un acuerdo cualitativo con las observaciones experimentales.

En general, podemos comentar que hay una concordancia cualitativa entre las observaciones experimentales y las simulaciones numéricas. Además, a pesar de las suposiciones realizadas durante la derivación de las soluciones analíticas, estas se aproximan cualitativamente con los perfiles experimentales y numéricos aunque habiendo un cambio muy remarcado en los máximos y mínimos de los 4 flujos. Dado que lo numérico viene dado de ecuaciones analíticas sin simplificaciones, nos queda un alivio de que el fenómeno experimental sí puede ser modelado por el método de diferencias finitas empleado.



## Capítulo 5

### Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se analizó la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz generada en un canal. Los flujos fueron impulsados por la interacción entre la distribución del campo magnético de dos imanes y una corriente continua uniforme. Bajo las condiciones examinadas, los efectos convectivos se manifestaron mediante la aparición de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Experimentalmente, se encontró que la inestabilidad apareció para  $I \geq 100$  mA. Un modelo numérico 2D se compara cualitativamente con las observaciones experimentales. El campo magnético generado por dos imanes permanentes se aproxima conservando solo su componente normal, lo que proporciona una representación realista de la fuerza impulsora. Además, se obtuvieron soluciones analíticas 1D que se comparan cualitativamente con los resultados numéricos y experimentales para corrientes bajas. Como trabajo futuro, se plantea integrar la fricción de fondo en el modelo numérico para realizar una comparación cuantitativa con las observaciones experimentales, así como un análisis de estabilidad. A diferencia de los métodos tradicionales para generar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, este trabajo resalta el potencial de la excitación electromagnética como medio para inducir movimientos controlados en fluidos conductores de electricidad.



# Apéndice A

## Análisis de estabilidad

La inestabilidad del tipo Kelvin-Helmholtz ya es bastante conocida, siguiendo el análisis de acuerdo con la literatura [31]. Esta describe la interfaz entre dos corrientes de fluidos paralelas horizontales con diferentes velocidades y densidades. Si la discontinuidad existe sólo en las velocidades (teniendo la misma densidad), se le conoce como “hoja de vórtice”. Investiguemos el movimiento de la superficie de discontinuidad localizada en  $y = 0$  en el estado no perturbado (ver Figura A.1). Se asume que las capas tienen profundidad infinita y que la interfaz tiene espesor cero. Sean  $\vec{U}_1$  y  $\rho_1$  la velocidad y densidad de la capa superior del plano  $(x, y)$  en estado base (i.e.  $y > 0$ ) y  $\vec{U}_2$  y  $\rho_2$  las de la capa inferior ( $y < 0$ ).

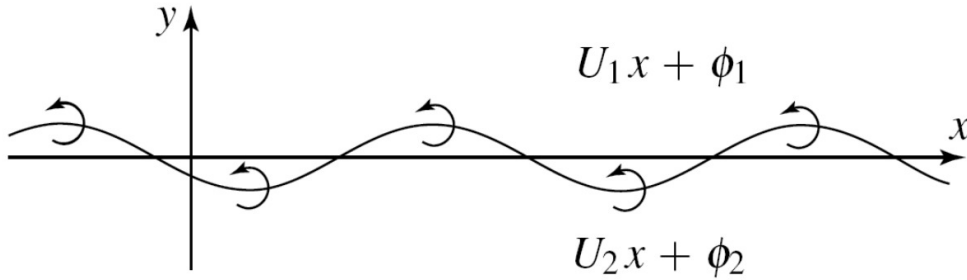


Figura A.1: Interfaz entre dos partes de un fluido con velocidades diferentes en un estado inicial perturbado [31].

Un flujo potencial es un tipo de flujo en el que se asume que no hay viscosidad en el fluido y que el flujo es irrotacional. Esto implica que el campo de velocidad puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar. Para llegar a un flujo potencial a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, se deben cumplir ciertas condiciones y simplificaciones. Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible en tres dimensiones son:

Conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Conservación del momento:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\vec{U}$  es el campo de velocidad,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $P$  es la presión,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $\vec{g}$  es la aceleración debida a la gravedad. Para llegar a un flujo potencial, se asume que el flujo es irrotacional, lo que significa que el rotacional del campo de velocidad es cero ( $\nabla \times \vec{U} = 0$ ). Esto implica que el campo de velocidad puede expresarse como el gradiente de un potencial escalar, es decir,  $\vec{U} = \nabla\phi$ . Si reemplazamos esta expresión en las ecuaciones de Navier-Stokes, obtenemos:

Conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0. \quad (\text{A.3})$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Laplace para el potencial  $\phi$  y se satisface en un flujo potencial.

Conservación del momento:

$$\rho \left( \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + ((\nabla\phi) \cdot \nabla)(\nabla\phi) \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2(\nabla\phi) + \rho \vec{g}. \quad (\text{A.4})$$

Cuando un fluido experimenta ondas de superficie, el movimiento inducido por las ondas puede considerarse irrotacional, por lo que el vector de velocidad  $\vec{U}$  puede expresarse en términos del gradiente de un potencial de velocidad  $\phi$ , que debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\nabla \times \vec{U} = 0 \quad \implies \quad \vec{U} = \nabla\phi.$$

Consideremos la ecuación que gobierna el flujo, incluyendo cualquier perturbación. El flujo por encima de la hoja de vórtice tiene un potencial de velocidad  $\phi_1$  y el flujo por debajo de la hoja tiene un potencial de velocidad  $\phi_2$ . Por lo que se debe cumplir:

$$\nabla \times \vec{U}_1 = 0 \quad \implies \quad \vec{U}_1 = \nabla\phi_1,$$

$$\nabla \times \vec{U}_2 = 0 \quad \implies \quad \vec{U}_2 = \nabla\phi_2.$$

Los potenciales de flujos incompresibles e irrotacionales cumplen que:

$$\nabla^2\phi_1 = 0, \quad \text{y} \quad \nabla^2\phi_2 = 0, \quad (\text{A.5})$$

Con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \nabla\phi_1 &= \vec{U}_1 & \text{cuando} & \quad Y \longrightarrow \infty, \\ \nabla\phi_2 &= \vec{U}_2 & \text{cuando} & \quad Y \longrightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Estas condiciones indican que la perturbación muere muy lejos de la interfase. Si se supone que debido a una perturbación la interfase es deformada y se describe por la ecuación  $y = \eta(x, t)$ . La interfaz perturbada también puede ser representada por una ecuación paramétrica de la forma  $f(x, y, t) = 0$ . Dado que  $y = \eta(x, t)$  para cada punto  $(x, y)$  en la interfase en cualquier tiempo  $t$ , está claro que:

$$f(x, y, t) = y - \eta(x, t). \quad (\text{A.7})$$

Si la interfaz se mueve a una velocidad  $\vec{V}_{int}$ , la condición cinemática está dada por:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}_{int} \cdot \nabla f = 0. \quad (\text{A.8})$$

Usando (A.7), la ecuación (A.8) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + V_{int} \cdot \nabla f &= \frac{\partial y - \eta(x, t)}{\partial t} + \vec{V}_{int} \cdot \nabla (y - \eta(x, t)) \\ &= -\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial (y - \eta(x, t))}{\partial x} \hat{x} + v \frac{\partial (y - \eta(x, t))}{\partial y} \hat{y} + w \frac{\partial (y - \eta(x, t))}{\partial z} \hat{z} \\ &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\eta \quad \text{en} \quad y = \eta(x, t), \quad (\text{A.9})$$

donde  $v_\eta$  es la componente vertical de la velocidad de fluido en la interfaz. La ecuación (A.9) es la condición de frontera cinemática, que establece que la interfaz se mueve hacia arriba y hacia abajo con una velocidad igual a la componente vertical de la velocidad del fluido.

Considerando partículas justo por encima de la interfaz, la condición de frontera cinemática requiere que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_1 + u'_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v'_1 \quad \text{en} \quad y = \eta(x, t),$$

donde  $u'_1$  y  $v'_1$  son las componentes de la velocidad perturbada en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. Dado que el flujo base está en la dirección  $x$ , tenemos que  $v'_1 = \partial \phi_1 / \partial y$  (i.e. la componente en  $y$  para la velocidad está totalmente dada por  $v'_1$ ). Por lo tanto, la ecuación de arriba puede ser reordenada como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_1 + u'_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \partial \phi_1 / \partial y' \quad \text{en} \quad y = \eta(x, t). \quad (\text{A.10})$$

Un argumento similar puede hacerse para la capa inferior ( $v'_2 = \partial \phi_2 / \partial y$ ):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_2 + u'_2) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \partial \phi_2 / \partial y' \quad \text{en} \quad y = \eta(x, t). \quad (\text{A.11})$$

Esto da una condición de frontera para  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . La condición de frontera dinámica surge de la ecuación de inestabilidad de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gy = C(t).$$

Que, en términos del potencial de velocidad, queda como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + gy = C(t). \quad (\text{A.12})$$

Dado que (A.12) contiene ambos lados de la superficie, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(\nabla \phi_1)^2}{2} + gy &= C_1, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{(\nabla \phi_2)^2}{2} + gy &= C_2.\end{aligned}\tag{A.13}$$

En la interfaz, la presión debe ser la misma si nos aproximamos por arriba o por abajo, por lo que  $p_1 = p_2$  en  $y = \eta$ . Despejando las presiones en ambas ecuaciones en (A.13) queda:

$$\begin{aligned}-p_1 &= \rho_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_1)^2}{2} + g\eta - C_1 \right), \\ -p_2 &= \rho_2 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_2)^2}{2} + g\eta - C_2 \right),\end{aligned}$$

e igualando las ecuaciones, nos da:

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_1)^2}{2} - C_1 \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_2)^2}{2} - C_2 \right).\tag{A.14}$$

Las ecuaciones (A.5), (A.6), (A.10), (A.11) y (A.14) gobiernan el movimiento no viscoso de la interfaz de deslizamiento y los flujos en ambos lados.

El flujo básico  $U_1$  y  $U_2$  satisfacen el problema con  $\eta = 0$ , la dinámica de la condición de frontera se reduce entonces a:

$$\begin{aligned}\rho_1 \left( \cancel{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}} + \frac{(U_1)^2}{2} - C_1 \right) &= \rho_2 \left( \cancel{\frac{\partial \phi_2}{\partial t}} + \frac{(U_2)^2}{2} - C_2 \right), \\ \rho_1 \left( \frac{1}{2} U_1^2 - C_1 \right) &= \rho_2 \left( \frac{1}{2} U_2^2 - C_2 \right).\end{aligned}\tag{A.15}$$

El flujo se descompone en el estado básico y en perturbaciones. Entonces, los potenciales son:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= U_1 x + \phi'_1, \\ \phi_2 &= U_2 x + \phi'_2,\end{aligned}\tag{A.16}$$

donde los primeros términos del lado derecho representan el flujo básico de corrientes uniformes. Cuando estas relaciones son sustituidas en la ecuación (A.5) encontramos que:

$$\nabla^2 (U_1 \cancel{x} + \phi'_1) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 (U_2 \cancel{x} + \phi'_2) = 0,$$

$$\nabla^2 \phi'_1 = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \phi'_2 = 0.\tag{A.17}$$

Mientras que la ecuación (A.6) muestra que la perturbación muere al infinito:

$$\begin{aligned}\nabla\phi'_1 &= 0 & \text{cuando } y \rightarrow \infty, \\ \nabla\phi'_2 &= 0 & \text{cuando } y \rightarrow -\infty.\end{aligned}\tag{A.18}$$

Las condiciones de superficie (A.10) y (A.11) pueden ser linealizadas aplicándolas en  $y = 0$  en lugar de en  $y = \eta$  y despreciando los términos cuadráticos (en  $y = 0$ ,  $u'_1 = 0$  y  $u'_2 = 0$ ).

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi'_1}{\partial y} &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial\eta}{\partial x} & \text{cuando } y = 0, \\ \frac{\partial\phi'_2}{\partial y} &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + U_2 \frac{\partial\eta}{\partial x} & \text{cuando } y = 0.\end{aligned}\tag{A.19}$$

Introduciendo la descomposición (A.16) en la condición dinámica de frontera (A.13), y requiriendo  $p_1 = p_2$  en  $y = \eta$  (equilibrio en las presiones), realizamos el siguiente ejercicio para obtener una condición en la interfaz:

La primera ecuación en (A.13) se convierte en

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(U_1 x + \phi'_1) + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}[\nabla(U_1 x + \phi_1)]^2 + g\eta &= C_1, \\ \frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(U_1 x + \phi'_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(U_1 x + \phi'_1)\right)^2\right] + g\eta &= C_1, \\ \frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\left[\left(U_1 + \frac{\partial\phi'_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi'_1}{\partial y}\right)^2\right] + g\eta &= C_1,\end{aligned}$$

linealizamos la ecuación anterior, despreciando los productos de cantidades con primos; obtenemos.

$$\frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\left(U_1^2 + 2U_1 \frac{\partial\phi'_1}{\partial x}\right) + g\eta = C_1,$$

Resolviendo para la presión

$$-p_1 = \rho_1 \left( \frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + \frac{1}{2}U_1^2 + U_2 \frac{\partial\phi'_1}{\partial x} + g\eta - C_1 \right),$$

Una transformación similar puede hacerse para la segunda ecuación en (A.13) para obtener

$$-p_2 = \rho_2 \left( \frac{\partial\phi'_2}{\partial t} + \frac{1}{2}U_2^2 + U_2 \frac{\partial\phi'_2}{\partial x} + g\eta - C_2 \right).$$

Dado que  $\phi_1 = \phi_2$  en  $y = \eta$ , las dos ecuaciones de arriba pueden combinarse y la condición de flujo estacionario (A.15) se sustituye para obtener

$$\rho_1 \left( \frac{\partial\phi'_1}{\partial t} + U_2 \frac{\partial\phi'_1}{\partial x} + g\eta \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial\phi'_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial\phi'_2}{\partial x} + g\eta \right) \quad \text{en } y = 0.\tag{A.20}$$

El problema matemático para  $\eta$ ,  $\phi'_1$  y  $\phi'_2$  consiste en las ecuaciones (A.17), (A.18) y (A.19).

Uno puede resolver 3 ecuaciones lineales (A.19) (que son dos ecuaciones) y (A.20), y determinar las 3 funciones  $\eta$ ,  $\phi'_1$  y  $\phi'_2$ , de donde se encuentra la estabilidad del sistema. Todos los

coeficientes de las 3 ecuaciones son constantes, y por lo tanto, podemos llevar a cabo el análisis de modo normal.

El flujo ha sido dividido en un flujo básico constante y una perturbación dependiente del tiempo. La perturbación puede ser representada por una composición de los siguientes modos normales aproximados:

$$\eta = \hat{\eta} e^{ik(x-ct)}, \quad (\text{A.21})$$

$$\phi'_1 = \hat{\phi}_1(y) e^{ik(x-ct)}, \quad \phi'_2 = \hat{\phi}_2(y) e^{ik(x-ct)}, \quad (\text{A.22})$$

donde  $k$  es real (y puede ser tomado como positivo sin ninguna pérdida de generalidad),  $c = c_r + ic_i$  es una velocidad de onda compleja. Notar que  $\hat{\eta}$  es la amplitud original del desplazamiento de la interfase y es una constante. especifica el tamaño de todas las cantidades perturbadas. Cuando  $c_i > 0$ , este desplazamiento es inestable y crece exponencialmente en el tiempo.

La sustitución de los modos normales de la ecuación (A.22) en las ecuaciones de Laplace (A.17) podría permitirnos determinar las formas de las funciones de la amplitud  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$ . Por ejemplo,  $\nabla^2 \phi'_1 = 0$  da

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \hat{\phi}_1 e^{ik(x-ct)} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \hat{\phi}_1 e^{ik(x-ct)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \hat{\phi}_1 e^{ik(x-ct)} \right) &= 0, \\ \hat{\phi}_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( e^{ik(x-ct)} \right) + \left( e^{ik(x-ct)} \right) \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial y^2} &= 0, \\ -k^2 \hat{\phi}_1 e^{ik(x-ct)} + e^{ik(x-ct)} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial y^2} &= 0, \\ e^{ik(x-ct)} \left[ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial y^2} - k^2 \hat{\phi}_1 \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \hat{\phi}_1}{dy^2} &= k^2 \hat{\phi}_1. \end{aligned}$$

La ecuación de arriba es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su solución general es

$$\hat{\phi}_1 = Ae^{-ky} + Ce^{ky},$$

y de una manera similar,  $\nabla^2 \phi'_2 = 0$  da

$$\hat{\phi}_2 = De^{-ky} + Be^{ky},$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes de integración. Se puede notar que, para satisfacer las condiciones de frontera (A.18), las constantes  $C$  y  $D$  deben ser cero. Por lo tanto, las funciones de amplitud son de la forma:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 &= Ae^{-ky}, \\ \hat{\phi}_2 &= Be^{ky}.\end{aligned}\tag{A.23}$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.23) en las ecuaciones (A.22) para modos normales para  $\phi'_1$  y  $\phi'_2$  da (la ecuación de  $\eta$  es representada abajo por conveniencia)

$$\eta = \hat{\eta}e^{ik(x-ct)},\tag{A.24}$$

$$\phi_1 = Ae^{-ky}e^{ik(x-ct)}, \quad \phi_2 = Be^{-ky}e^{ik(x-ct)}.\tag{A.25}$$

Sustituyendo los modos normales (A.24) y (A.25) en las condiciones de interfaz cinemática (A.19) se llega a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(Ae^{-ky}e^{ik(x-ct)}) &= \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\eta}e^{ik(x-ct)}) + U_1 \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\eta}e^{ik(x-ct)}), \\ -kAe^{-ky}e^{ik(x-ct)} &= -ikc\hat{\eta}e^{ik(x-ct)} + ikU_1\hat{\eta}e^{ik(x-ct)}, \\ Ae^{-ky} &= -i\hat{\eta}(U_1 - c).\end{aligned}$$

La ecuación de arriba, evaluada en  $y = 0$ , provee una ecuación para  $A$ . Una ecuación para  $B$  también puede ser obtenida usando el mismo procedimiento de arriba. Tenemos así

$$\begin{aligned}A &= -i(U_1 - c)\hat{\eta}, \\ B &= i(U_2 - c)\hat{\eta}.\end{aligned}\tag{A.26}$$

La ecuación final se obtiene sustituyendo las ecuaciones (A.24) y (A.25) en la condición de interfaz dinámica (ecuación de Bernoulli) (A.20). Esto da

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x} + g\eta \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} + g\eta \right),$$

$$\rho_1 e^{ik(x-ct)} (-ikcAe^{-ky} + ikU_1Ae^{-ky} + g\hat{\eta}) = \rho_2 e^{ik(x-ct)} (-ikcAe^{-ky} + ikU_2Ae^{-ky} + g\hat{\eta}).$$

En  $y = 0$

$$\rho_1 [ikA(U_1 - c) + g\hat{\eta}] = \rho_2 [ikA(U_2 - c) + g\hat{\eta}].$$

Sustituyendo A y B para obtener

$$\rho_1 [k(U_1 - c)^2\hat{\eta} + g\hat{\eta}] = \rho_2 [-k(U_2 - c)^2\hat{\eta} + g\hat{\eta}].$$

Reacomodando

$$\rho_1 k(U_1 - c)^2 + \rho_2 k(U_2 - c)^2 = g(\rho_2 - \rho_1).\tag{A.27}$$

La ecuación (A.27) da los eigenvalores para  $c(k)$ . Resolviendo esta ecuación para la velocidad de onda compleja:

$$c = c_r + ic_i = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[ \frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \rho_1 \rho_2 \left( \frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{A.28})$$

Se puede ver que la velocidad de la onda  $c$  es real ( $c_i = 0$ ) si el término dentro de la raíz cuadrada es positivo. Por lo tanto, ambas soluciones son neutralmente estables si

$$\begin{aligned} \frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} &\geq \rho_1 \rho_2 \left( \frac{U_1 - U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2, \\ k &\leq \frac{g}{\rho_1 \rho_2} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(U_1 - U_2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Lo que da las ondas estables del sistema. Por otro lado, el seguimiento (solución) es inestable si  $c_i > 0$ . Esto es,

$$k > \frac{g}{\rho_1 \rho_2} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(U_1 - U_2)^2}. \quad (\text{A.30})$$

La ecuación (A.28) muestra que, para cada solución (inestable) amplificada, existe una solución (estable) amortiguada. Este comportamiento se debe al hecho de que el coeficiente de la ecuación diferencial de perturbación y las condiciones de frontera son todas reales. Si  $U_1 \neq U_2$ . Entonces, uno siempre puede encontrar un  $k$  suficientemente largo que satisface el requerimiento para la inestabilidad. Debido a que se debe permitir toda la longitud de onda en un análisis de inestabilidad, podemos decir que el flujo es siempre inestable a las ondas cortas si  $U_1 \neq U_2$ .

Es instructivo notar que la relación de dispersión de las ondas en la interfaz entre dos líquidos inmiscibles de diferentes densidades puede obtenerse de la ecuación (A.28) estableciendo  $U_1 = U_2 = 0$ :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (\text{A.31})$$

o la frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{gkAt}, \quad (\text{A.32})$$

donde  $At = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2)$ , es el número de Atwood. Considerando ahora el caso de una hoja de vórtice, i.e., el flujo de un fluido homogéneo ( $\rho_1 = \rho_2$ ) con una velocidad discontinua. Escogiendo  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  en la ecuación (A.28) se obtiene (de manera ya reducida)

$$c = c_r + ic_i = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \pm i \frac{1}{2}|U_1 - U_2|. \quad (\text{A.33})$$

Como se ha discutido anteriormente, un flujo de hoja de vórtice con  $c_1 > 0$  es inestable. De este modo, la hoja de vórtice (sólo la capa) de un salto de velocidad en la interfaz es inestable para todas las longitudes de onda.

También se puede ver que las ondas de perturbación se mueven con una velocidad de fase igual a la velocidad media del flujo básico  $\frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ . Esto debe ser cierto para consideraciones

simétricas. En un sistema de referencia que se mueve con la velocidad media, el flujo básico es simétrico y la onda, entonces, no debería tener preferencias entre la dirección negativa o positiva. La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es causada por el efecto desestabilizador de la fricción, que se superpone al efecto de estabilización de la estratificación de densidad. La inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz se encuentra comúnmente en la atmósfera terrestre y el océano.



# Bibliografia

- [1] Helmholtz 1868 Xliii. on discontinuous movements of fluids. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 36 (244), 337–346, <https://doi.org/10.1080/14786446808640073>.
- [2] Ludlam, F. H. 1967 Characteristics of billow clouds and their relation to clear-air turbulence. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 93 (398), 419–435, <https://doi.org/10.1002/qj.49709339803>.
- [3] Woods, J. D. 1968 Wave-induced shear instability in the summer thermocline. Journal of Fluid Mechanics 32 (4), 791–800, 10.1017/S0022112068001035.
- [4] Fleck, R. C. 1989 The kelvin-helmholtz interface instability in the interstellar environment. ii. interstellar cloud rotation. Astronomical Journal. 97, 783, 10.1086/115023.
- [5] Hwang, K.-J., Goldstein, M. L., Kuznetsova, M. M., Wang, Y., Viñas, A. F. & Sibeck, D. G. 2012 The first in situ observation of kelvin-helmholtz waves at high-latitude magnetopause during strongly dawnward interplanetary magnetic field conditions. Journal of Geophysical Research: Space Physics 117 (A8), <https://doi.org/10.1029/2011JA017256>.
- [6] Masson, A. & Nykyri, K. 2018 Kelvin–helmholtz instability: Lessons learned and ways forward. Space Science Reviews 214 (4), 1–18, <https://doi.org/10.1007/s11214-018-0505-6>.
- [7] Ofman, L. & Thompson, B. J. 2011 Sdo/aia observation of kelvin–helmholtz instability in the solar corona. The Astrophysical Journal Letters 734 (1), L11, <https://doi.org/10.1088/2041-8205/734/1/L11>.
- [8] Li, Xiaohong, Zhang, Jun, Yang, Shuhong, Hou, Yijun & Erdélyi, Robert 2018 Observing kelvin–helmholtz instability in solar blowout jet. Scientific Reports 8, 8136, <https://doi.org/10.1038/s41598-018-26581-4>.
- [9] Kundu, P.K., Cohen, I.M. & Dowling, D.R. 2012 Fluid Mechanics. London: Elsevier Science.
- [10] Gordon, R. (2022). Kelvin-Helmholtz instability waves outlined with clouds on Tuesday afternoon in northern Wyoming [Photograph]. The Washington Post.
- [11] NASA/JPL-Caltech/SwRI/MSSS/Gerald Eichstädt/Seán Doran. (2018). Jupiter’s Great Red Spot [Fotografia]. NASA. <https://www.nasa.gov/image-article/jupiters-great-red-spot-spotted/>
- [12] Thorpe, S. A. 1971 Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids. Journal of Fluid Mechanics 46 (2), 299–319, 10.1017/S0022112071000557.
- [13] Jia, Bo-qi, Xie, Luo, Deng, Xiang-dong, He, Bo-shu, Yang, Li-jun & Fu, Qing-fei 2023 Experimental study on the oscillatory kelvin–helmholtz instability of a planar liquid

- sheet in the presence of axial oscillating gas flow. *Journal of Fluid Mechanics* 959, A18, 10.1017/jfm.2023.19.
- [14] Korlimarla, A. & Vorobieff, P. 2020 Evolution of a quasi-two-dimensional shear layer in a soap film flow. *Physics of Fluids*. 32 (12), 124112, <https://doi.org/10.1063/5.0030319>.
  - [15] Liu, Y., Tan, P. & Xu, L. 2015 Kelvin–helmholtz instability in an ultrathin air film causes drop splashing on smooth surfaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 112 (11), 3280–3284, <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.1417718112>.
  - [16] Jha, N. K. & Steinberg, V. 2021 Elastically driven kelvin–helmholtz-like instability in straight channel flow. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118 (34), e2105211118, <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.2105211118>.
  - [17] Lee, H. G. & Kim, J. 2015 Two-dimensional kelvin–helmholtz instabilities of multi-component fluids. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 49, 77–88.
  - [18] Sohn, S.-I. & Baek, S. 2026 Suppression of kelvin–helmholtz instability by an electric field. *Physics of Fluids*. 38 (1), 014108, <https://doi.org/10.1063/5.0307658>.
  - [19] Caldara, M., Richaud, A., Capone, M. & Massignan, P. 2024 Suppression of the superfluid Kelvin-Helmholtz instability due to massive vortex cores, friction and confinement. *SciPost Physics*. 17,076, 10.21468/SciPostPhys.17.3.076.
  - [20] Kumar, K., Bandyopadhyay, P., Singh, S., Dharodi, V. S. & Sen, A. 2023 Kelvin-helmholtz instability in a compressible dust fluid flow. *Scientific Reports*. 13, 3979, <https://doi.org/10.1038/s41598-023-30992-3>.
  - [21] Hwang, K.-J., Wang, C.-P., Nykyri, K., Hasegawa, H., Tapley, M. B., Burch, J. L., Fuselier, S. A., Goldstein, J., Dokgo, K., Nakamura, T., Sitnov, M., Ma, X., Lin, Y. & Wang, X. 2023 Kelvin-helmholtz instability-driven magnetopause dynamics as turbulent pathway for the solar wind- magnetosphere coupling and the flank-central plasma sheet communication. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. 10, 10.3389/fspas.2023.1151869.
  - [22] Cuevas, S., Suslov, S. A. & Figueroa, A. 2026 Electromagnetically forced flows in shallow electrolyte layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 58, 29–53, <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-112723-051243>.
  - [23] Dovzhenko, V. A., Obukhov, A. M. & Ponomarev, V. M. 1981 Generation of vortices in an axisymmetric shear flow. *Fluid Dynamics*. 16, 510–518, <https://doi.org/10.1007/BF01094592>.
  - [24] Dolzhanskii, F. V., Krymov, V. A. & Manin, D. Yu. 1992 An advanced experimental investigation of quasi-two-dimensional shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 241, 705–722, 10.1017/S0022112092002209.
  - [25] Pototsky, A., Figueroa, A., Olvera-Orozco, J., Álvarez-Jiménez, M., Cuevas, S. & Suslov, S. A. 2025 Annular flow instabilities and large-scale vortices in electromagnetically driven horizontal soap films. *Physical Review Fluids*. 10, 034802, 10.1103/PhysRevFluids.10.034802.
  - [26] Manin, D. Yu. 1992 A study of repeated vortex mergers in a forced quasi-2-d shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 4 (8), 1715–1723, <https://doi.org/10.1063/1.858392>.
  - [27] González Vera, A. S. & Zavala Sansón, L. 2015 The evolution of a continuously forced shear flow in a closed rectangular domain. *Physics of Fluids* 27 (3), 034106, <https://doi.org/10.1063/1.4915300>.

- [28] López Zazueta, A. & Zavala Sansón, L. 2018 Self-oscillations of a two-dimensional shear flow with forcing and dissipation. *Physics of Fluids* 30 (4), 044101, <https://doi.org/10.1063/1.5020130>.
- [29] Thielicke, W. (2019). PIVlab - particle image velocimetry (PIV) tool with GUI. PIVlab - Particle Image Velocimetry (PIV) Tool with GUI - File Exchange - MATLAB CentralFile Exchange - MATLAB Central. Recuperado 20 de febrero de 2020, de <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27659-pivlab-particle-image-velocimetry-piv-tool-with-gui>
- [30] Atkins, P., & Jones, L. (2018). Principios de química: Los caminos del descubrimiento. México: Editorial Médica Panamericana.
- [31] Kelvin–Helmholtz Instability A. Salih Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram – November 2010.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS  
Instituto de Investigación en  
Ciencias  
Básicas y  
Aplicadas

## INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

POSGRADO EN CIENCIAS



Cuernavaca, Mor., a 30 de junio de 2026

**DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO**  
**COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS**  
**PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: Flujos en contrasentido generados por fuerzas magnéticas que presenta el L. en C. Dariel Jondalar Rodríguez Proal (10062680), para obtener el título de Maestra en Ciencias.

Dirección de tesis: Dr. Aldo Figueroa Lara

Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

| NOMBRE                                           | DICTAMEN |
|--------------------------------------------------|----------|
| Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos<br>CInC – UAEM     | APROBADO |
| Dr. Rolando Pérez Álvarez<br>CInC – UAEM         | APROBADO |
| Dr. Sergio Cuevas García<br>IER – UNAM           | APROBADO |
| Dr. Marco Antonio Rivera Islas<br>CInC – UAEM    | APROBADO |
| Dr. Michel Alejandro Rivero Corona<br>IIM - UNAM | APROBADO |





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento con firma electrónica UAEM, soportada por el certificado vigente a la fecha de su elaboración y con efectos plenos de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS PUBLICADOS en el ÓRGANO INFORMATIVO UNIVERSITARIO "ADOLFO MENÉNDEZ SAMARÁ" número 117 de fecha 20 de abril de 2021.

#### Sello electrónico

**MICHEL ALEJANDRO RIVERO CORONA | Fecha:2026-07-01 10:03:38 | FIRMANTE**

RkI5C17+v05MW6h85nP8OXkovi2OWMeZklzrL0sDsWSzloeEO7Vqw34pWWBm/hfN6Ym+Q5OM84MA1DYsg42cDb3wHUyHEcgZeOr3NJYVHjffgqIf9In+9H9RsNk1SP4LXKFx  
xT50ODr0fNracYzo8M5PCNgh2oYmYZrLIFyZGG1zsXr0umvRkiHrKbTz77aimFIKuq4NJtFcVQJRfTo34Nfs+frK8TzoiYj6pVnw13gOG77rSqoPedgHVBhhyIRDPwTEJhS+vtgT5X  
kVLu+65EQa2J1rvArW3oDImQb9LNjkoYaWxOcSsB4AlDmvzgDWxpBJo61vhi0cAqZeKkBVg==

**ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2026-07-01 10:06:06 | FIRMANTE**

GLAwPKAbZrLGXR3+q8ik3xb/Wm/xwygXRCa9Ppq3kKO0qowKcYRONqZrVUNePaS/LCdkLelJ3QNkasfXs4Rz/nAU6pByif13qZ1pywdoyNBxwwkRHuaOP/HK94bOyuYg3Fh9vd  
3mmWyd8FvNg/C7O2CjucXql8WZRV648hx8qv9zpTctoeSW8jVQKaHomTkCHTYgQ2KG42GJAe+wKyDq9YbZfydr+vURK8H7Auxf51p+1Wkfa1AB1YcvytSeVc9ez0a6EiVHzVg  
WBGsXnlkuQqFSWuvHgoQa9lV8Vu0XWt4AXUfl2cLeD/4mdGlaZgcvUEyU1CAvB2Dt3UXKDptew==

**SERGIO CUEVAS GARCÍA | Fecha:2026-07-01 10:37:03 | FIRMANTE**

gVRB2y61VaTk6DE8i1qlzPsERdYmkFgMMxVCHo/YZ3OAI0DY/7W9PXAxarg0tMFIYX+zy7fSkEdtgWE2mq9Pbh5zvxytUC6H+yisxqRWQtqSCFD79M1yJhOPbWugVY9vGDR  
OYn3YDpdnr87QN9QEZ17IX9yXaUog/6uQehXXDnOhvkQjgfvLZmvUsumfi/f9aQwQ388KZoMF5jEFJgstcmAvkxYK67Ek83X0Vd0YH5YHemYcryUrGhgsU0Qtlf61xquht5BGy1qr  
RPjzxdhflmcnJQa9tnqzFEG22HxWaRqLOsvtLPrPCyyRHxdmWGacLc1mix7yLji3r1YInOw==

**MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS | Fecha:2026-07-01 11:18:05 | FIRMANTE**

ojqGGxC1H0DNqyyFAgezhOFAYumsJys8SWB3j6KYyJgJoDyUUu8OruwV5oLnZNYvtw8zQDSfz4MprJuiFnZYuj0KJqZ7MTQ3/9eQj7ilg6iibGY1mc1dw2FYQgeI8l+3jC/FJAs3u  
CspFYQVxo9F3PuKwZGRnOaXJWpnBI+rW3YHIZ51kxG/kcxWQnLTp+KtN3YDZwHskCFr8r7rIA24mvsidSFa8WtrNvzKEQZcvCauPht+dCfUm5TQaEKpB0lWH+1ZYB2+pVtsas  
WYmullCUkBC0qSW2l4n0WCvVizFGH5BFnhNS6+IGPisHyj0UYB3wA4hZJ3GtwTy3ZJfmxXQ==

**MIGUEL EDUARDO MORA RAMOS | Fecha:2026-07-01 14:39:43 | FIRMANTE**

L8Vp4BtvqKck+n5gnY1fBVZviykj8rgwFoPpTDb+B5G0byMPIobd6OdXWfrDimZ2M5khv96cNev9aG6cl846ErDulqfazeVoO/7OtCC26dkKD4VOwh5l4hxmHUVmyyibjRhPKRhDG  
12Fgg546soQFp+Oy+8iCUmv31RBNQ75G3U3cY9DEWtb/p5OGhRRWOKkpF7OoDuZkOhgRhvhGH3wE3irkJRq1vyVnkmRC0hWtZCI7G5BAbXNC0J4Ejg3/PKcRcd2yHqfcBLAQ  
IIRPPmOhYGELiyl++Jvb3bprBpeqb7/kWDzAhtxqjIX+QKWDrTS0tMVqYyO3xZFZi9seQmeg==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o  
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



m7CQh26F0

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/9eybESz0R2gDTEh2Txhr2jAR5jtloZCV>



UAEM  
RECTORÍA  
2023-2029