

Análisis numérico con el método FDTD para estudiar el efecto láser en un sistema 3D con desorden y experimento con nanocristales de ZrO₂:Yb

Numerical Analysis with the FDTD Method to Study the Laser Effect in a 3D System with Disorder and Experiment with ZrO₂:Yb Nanocrystals

Jesús Jonathan Martínez-Ocampo^{1,*}, Alfredo Díaz-de-Anda², Gennadiy Burlak¹,
Rosmarbel Morales-Nava^{3,4}, María Eunice de-Anda-Reyes²,
Anabel Romero-López², Miguel Roque-Vargas²

¹CIICAp, Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Av. Universidad 1001, Cuernavaca, 62210, Morelos, México

²Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,

72570, Puebla, México

³Tecnológico de Monterrey, School of Engineering and Sciences, Campus Puebla,

Vía Atlixcáyotl 2301, 72453, Puebla, México

⁴Centro de Química, Instituto de Ciencias, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,

Edif. IC9, Complejo de Ciencias, C.U., 72570, Puebla, México

*jesusj@icf.unam.mx

PALABRAS CLAVE: RESUMEN

Nanoemisores,
Percolación, Láser

En este trabajo se estudia el campo óptico y el efecto láser sin espejos generado en un sistema desordenado en 3D que contiene nanoemisores. El sistema estudiado es no lineal, complejo y no tiene solución analítica. El objetivo es estudiar numérica y experimentalmente el efecto láser con percolación, lo que resalta la importancia de abordar el estudio de manera numérica utilizando el Método de Diferencias Finitas con Dominio del Tiempo (FDTD). Para complementar los resultados del análisis numérico, se lleva a cabo un experimento en el cual se incorporan nanoemisores de Yb en ZrO₂ estos nanoemisores se distribuyen de manera desordenada en el sistema y se excitan de forma no coherente mediante una fuente externa. Se obtiene el espectro de absorción y emisión del ZrO₂:Yb para diferentes concentraciones, y los resultados experimentales confirman las predicciones teóricas realizadas.

KEYWORDS: ABSTRACT

Nanoemitters,
Percolation, Laser

In this work, the optical field and the mirrorless laser effect generated in a 3D disordered system containing nanoemitters are studied. The studied system is non-linear, complex and has no analytical solution. The objective is to study the laser effect numerically and experimentally with percolation, which highlights the importance of approaching the study numerically using the Finite Differences with Time Domain (FDTD) Method. To complement the results of the numerical analysis, an experiment is carried out in which Yb nanoemitters are incorporated into ZrO₂. These nanoemitters are distributed in a disorderly manner in the system and are non-coherently excited by an external source. The absorption and emission spectrum of ZrO₂:Yb is obtained for different concentrations, and the experimental results confirm the theoretical predictions made.

• Recibido: 17 de octubre de 2024 • Aceptado: 16 de julio de 2025 • Publicado en línea: 1 de octubre de 2025

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, nuestro objetivo es investigar la localización de un campo óptico en un medio con percolación 3D, donde se encuentran grupos de poros que contienen nanoemisores de luz en estado excitado. Este medio de filtración se puede entender como una ampliación tridimensional del mecanismo de localización que se produce en una guía de ondas unidimensional en presencia de un medio desordenado controlado [1].

Se ha observado el transporte óptico en sistemas desordenados de percolación en 3D [2]. Es posible que se produzca un láser aleatorio generado por nano emisores incorporados en dicha estructura desordenada [3]. La teoría lineal de la localización del campo óptico en este tipo de sistema, que es válida para tiempos muy cortos (inferiores al tiempo de generación del láser), fue desarrollada en la referencia [4]. Sin embargo, al considerar solo los tiempos cortos, no es posible estudiar los efectos dinámicos no lineales que surgen en una escala de tiempo más larga, cerca del umbral de la generación láser.

Existen medios aleatorios físicamente relevantes, como los sistemas de percolación, en los cuales el desorden se define mediante un valor de probabilidad poblacional de poros p . Una característica esencial de este tipo de sistema es que, en una zona próxima al valor crítico o umbral, donde $p = p_{cr}$, ocurre la transición de fase conocida como percolación y da lugar a la aparición de conectividad desordenada de largo alcance, el fenómeno de percolación afecta las propiedades del sistema [5]. Los materiales fotónicos desordenados tienen la capacidad de transmitir y retener luz a través de un proceso de dispersión múltiple aleatoria, lo cual da lugar a la formación de modos electromagnéticos dependiendo de las correlaciones estructurales, la intensidad de dispersión y la dimensionalidad del sistema [6-14]. En este contexto, se predijo la

localización de Anderson como un efecto de interferencia lineal no interactivo [15].

El documento está organizado de la siguiente manera, en la sección 2, se muestran las ecuaciones básicas y se plantea el modelo. En la sección 3, se muestran los resultados numéricos de percolación óptica generada con nanoemisores incorporados en un sistema 3D. En la sección 4, se muestran los resultados del experimento en el cual se incorporan nanoemisores de Yb en ZrO₂. En la sección 5, se concluye el trabajo de esta investigación.

2. ECUACIONES BÁSICAS Y MODELO

Para llevar a cabo esta investigación, utilizamos las ecuaciones de Maxwell de la siguiente manera:

$$\Delta \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \Delta \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_k j(R_k, t) \sigma_{r_k} \quad (1)$$

Donde E es el campo eléctrico, H el campo magnético y $j(R_k, t)$ la densidad de corriente eléctrica del nanoemisor en la posición R_k . j se relaciona con la densidad de polarización $P_k = P(R_k, t)$ de la siguiente manera $j(R_k, t) = \frac{\partial P(R_k, t)}{\partial t}$. Para encontrar el campo óptico del sistema resolvemos numéricamente la ecuaciones que relacionan a ; P_k , E y H con los niveles poblacionales $N_{i,k}$ con $i, k = 0, 1, 2$ y 3 que representan los niveles de energía de los nanoemisores. Para el caso de nanoemisores desacoplados la ecuación a resolver es la siguiente [16];

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial t^2} + \delta \omega_a \frac{\partial P_k}{\partial t} + \omega_a^2 P_k = (6 \pi \epsilon_0 c^3 / t_{21} \omega_a^2) (N_{1,k} - N_{2,k}) E_k \quad (2)$$

definiendo a $\Delta \omega_a$ como la frecuencia de radiación donde $\Delta \omega_a = \tau_{21}^{-1} + 2T_2^{-1}$ donde T_2 es el tiempo medio entre el desfase de eventos, τ_{21} es el tiempo de decaimiento espontaneo del segundo nivel atómico al primero. Para átomos de cuatro niveles las ecuaciones de los niveles poblacionales se encuentran

desarrolladas en [17] y toman la forma que se muestra a continuación con $N_{i,k}=N_i(R_k,t)$, el código desarrollado en C# para las siguientes ecuaciones se puede consultar en el APÉNDICE A.

$$\frac{\partial N_{0,k}}{\partial t} = -A_r N_{0,k} + \frac{N_{1,k}}{\tau_{13}}, \frac{\partial N_{3,k}}{\partial t} = A_r N_{0,k} - \frac{N_{3,k}}{\tau_{02}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{1,k}}{\partial t} &= \frac{N_{2,k}(t)}{\tau_{(21),(32)}} - \frac{(j \cdot E)_k}{\hbar \omega_a} \frac{N_{1,k}}{\tau_{13}}, \\ \frac{\partial N_{2,k}}{\partial t} &= \frac{N_{1,k}(t)}{\tau_1} + \frac{(j \cdot E)_k}{\hbar \omega_a} \frac{N_{2,k}}{\tau_{02}} \end{aligned} \quad (4)$$

Una fuente externa excita a los nano emisores desde el nivel base $i=0$ hasta el tercer nivel a una tasa A_r , que es proporcional a la intensidad de bombeo. Después de un tiempo de vida τ_{32} , los emisores se transfieren de forma no radiativa al segundo nivel. El segundo nivel y el primer nivel son los niveles de láser superior e inferior respectivamente. Los emisores pueden decaer desde el nivel superior al inferior mediante emisión tanto espontánea como estimulada, siendo $j \cdot E / \hbar \omega_a$ la tasa de radiación estimulada. Por último, los emisores también pueden decaer de manera no radiativa desde el primer nivel hasta el nivel del estado base. Los tiempos de vida y los niveles de energía superior e inferior del láser son τ_{21} , E_2 y τ_{10} , E_1 . La frecuencia individual de radiación de cada emisor es $\omega_a = (E_2 - E_1) / \hbar$. Para estudiar la dinámica resolvimos las ecuaciones (1)-(4), en la siguiente sección se muestran los resultados numéricos obtenidos.

MODELO FDTD

El algoritmo de FDTD (Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo) fue desarrollado por Kane Yee en 1966 y se utiliza para resolver las ecuaciones de Maxwell. Este algoritmo utiliza diferencias centrales de segundo orden [18] y se lleva a cabo mediante los siguientes pasos:

- Se reemplazan las derivadas en las leyes de Ampere y Faraday por diferencias finitas, se

discretiza el espacio y el tiempo.

- Se resuelven las ecuaciones resultantes para obtener los campos futuros en función de los campos pasados.
- Los campos magnéticos se evalúan avanzando un paso de tiempo para conocer los valores presentes.
- Se repiten los pasos 2 y 3 hasta obtener los campos durante el intervalo de tiempo deseado. Este algoritmo puede aplicarse a sistemas unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D).

En la Figura 1, se presenta de manera gráfica el desarrollo del algoritmo para el caso 1D posteriormente se extienden los resultados obtenidos para el caso 3D [18].

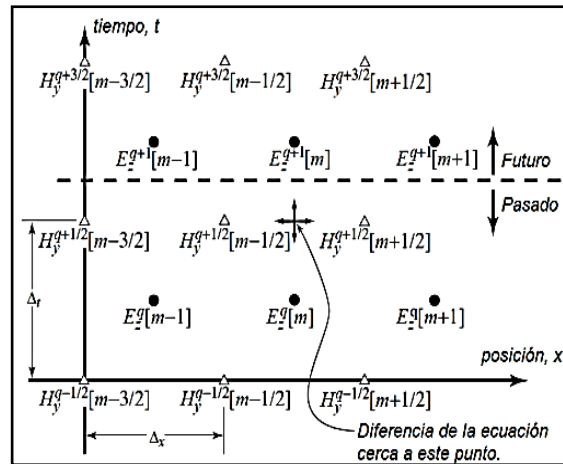


Figura 1. La imagen ilustra cómo se organizan los nodos en un arreglo unidimensional para los campos y . Los nodos del campo eléctrico se muestran con círculos, mientras que los nodos del campo magnético se representan con triángulos, esta es la manera en que discretiza el espacio y el tiempo en 1D.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

El clúster de conexión modifica las características del medio de percolación, por lo tanto resulta interesante investigar la estructura espacial tridimensional de los clústeres en las proximidades del umbral de percolación. La Figura 2, representa una distribución espacial de clústeres de percolación infinita del campo óptico para

una probabilidad P por encima de la probabilidad crítica $P_c = 0.317$, obtenida a partir de la simulación de una red 3D con un tamaño de $90 \times 90 \times 90$ (unidades arbitrarias) y un tiempo de ejecución $t=50$. Esta distribución (Apéndice A y B) nos permite visualizar de manera completa la solución al sistema no lineal de las ecuaciones (1)-(4) en 3D.

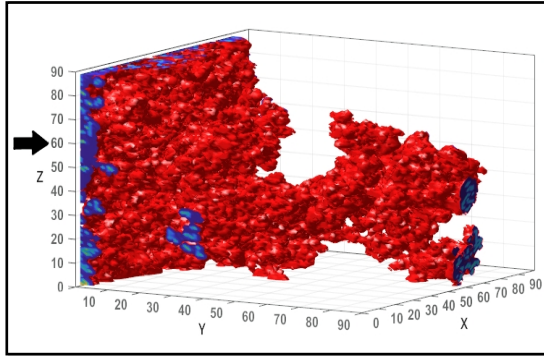


Figura 2. Se muestra la estructura espacial del campo de radiación E generado por el clúster percolación infinita. Para este análisis se utiliza un coeficiente de absorción $g=0.37$ y un tiempo de ejecución $t = 50$.

La superficie Z-X indicada por la flecha negra en la Figura 2, es excitada por una fuente externa y en ella se encuentran incorporado nano emisores de 4 niveles, después de cierto tiempo algunos de estos nano emisores decaen espontáneamente o por emisión estimulada a niveles de menor energía, generando fotones que se propagan al interior del sistema de filtración formando cúmulos de radiación en las diferentes superficies que limitan al sistema como se muestra en la Figura 3.

Como un segundo calculo numérico haciendo uso del método FDTD, implementamos una malla de $75 \times 75 \times 75$ y un tiempo de ejecución $t=5$, en la cual se produce una solución a las ecuaciones (1)-(4), las soluciones están representadas en la escala del tiempo ty de las coordenadas, r definidas como, $t \rightarrow \frac{tc_0}{l_0}$ y $r \rightarrow \frac{r}{l_0}$. Sin embargo, con el fin de facilitar las observaciones experimentales se establecieron los valores que se pueden medir en un laboratorio. Se

puede consultar en el APÉNDICE-B la interfaz de usuario. Nuestro objetivo es calcular la emisión promediada en el tiempo de energía de una muestra cúbica $(x, y, z) \in [0, l_0]$. El flujo de energía se puede escribir como:

$$I = \oint_S (K \cdot n) dS = I_x + I_y + I_z \quad (4)$$

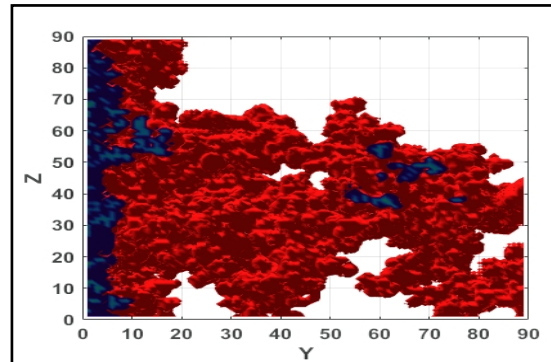
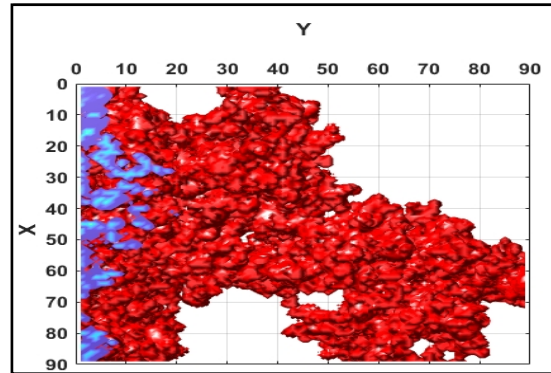


Figura 3. Se observan las direcciones de propagación espacial de radiación del campo E en los planos X-Y y Y-Z generada por los nano emisores que forman clústeres de percolación infinita para valores por encima del umbral P_{cr} .

En la ecuación (5) el vector K representa la dirección de propagación, el vector n es la normal a la superficie S del cubo, y donde $I_{x,y,z}$ indican los flujos que provienen de dos caras del cubo que son perpendiculares a una dirección específica. Para calcular el flujo de energía definido por la Ec. (5), resolvimos numéricamente las ecuaciones que acoplan la densidad de polarización \mathbf{P} , el campo eléctrico \mathbf{E} Figura 4 y los cuatro niveles poblacionales de los emisores Figura 5, obteniendo los siguientes resultados.

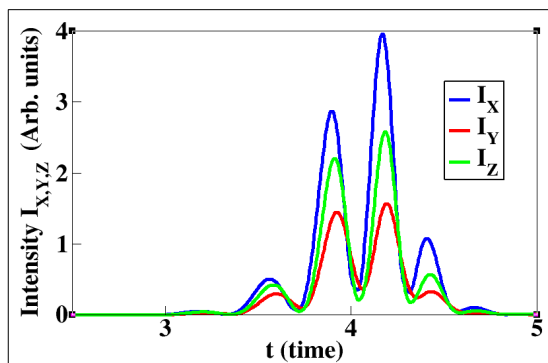


Figura 4. Se muestran las intensidades $I_{x,y,z}$ definidas por la ecuación 5 y podemos observar la evolución inicial de las intensidades en tiempos pequeños $t < 5$ para $P_c > 0.317$, la generación láser comienza en $t \approx 3.5$ posteriormente surgen efectos de una dinámica no lineal.

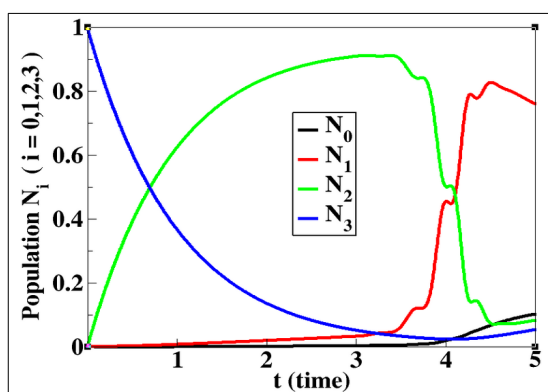


Figura 5. Podemos observar la evolución poblacional en el tiempo de los 4 niveles que se encuentran los nano emisores incorporados en clústeres de percolación, la gráfica tiene unidades arbitrarias y muestra un comportamiento oscilatorio complejo de la dinámica poblacional inversa, en esta figura podemos resaltar que la evolución de las poblaciones $N_{1,2}$ conduce a la generación del láser para un $P_{Cr} > 0.317$ [22] la generación láser comienza en $t \approx 3.5$.

4. EXPERIMENTO PARA ANALIZAR LOS ESPECTROS DE EMISIÓN

En esta sección se exponen los resultados experimentales de la radiación de nano emisores que han sido incorporados en una cerámica porosa de ZrO_2 . Se utiliza la técnica de síntesis denominada Sol-Gel para la fabricación de la cerámica. Esta técnica proporciona una vía coloidal para la síntesis de materiales cerámicos con una fase intermedia denominada sol.

El proceso implica disolver un precursor en un solvente y luego agregar agua y un ácido o una base para la hidrólisis y condensación. Esto conduce a la formación del gel, que se somete a un período de envejecimiento antes de pasar a un estado evaporativo. Finalmente, se logra la síntesis de ZrO_2 dopada con Yb^{3+} ver Figura 6. Esta técnica permite la incorporación de los nano emisores en un sistema tridimensional desordenado [21].



Figura 6. Síntesis de ZrO_2 dopada con Yb^{3+} posterior al proceso evaporativo donde obtiene como producto un polvo de color blanco en el fondo de los vasos de precipitados.

Un proceso fundamental en la producción de luz visible es la conversión ascendente (UC), en el cual al menos dos fotones excitados de baja energía, generalmente en el rango del infrarrojo cercano, se transforman en un fotón visible de emisión con una energía mayor, se puede conocer más sobre el proceso UC en [19]. Los nano emisores de Yb se introducen en ZrO_2 , donde se distribuyen de forma aleatoria en el sistema ver Figura 7 y se excitan de manera no coherente utilizando una fuente externa.

Debido a que la emisión de conversión ascendente se ve significativamente afectada por la presencia de iones Yb, los nano emisores incorporados generan una emisión aleatoria al ser excitados por un láser externo. Para conocer la banda de absorción de los iones de Yb Figura 8, se usó un espectrofotómetro de masas UV-vis-NIR AgilentCary 5000 Figura 9.

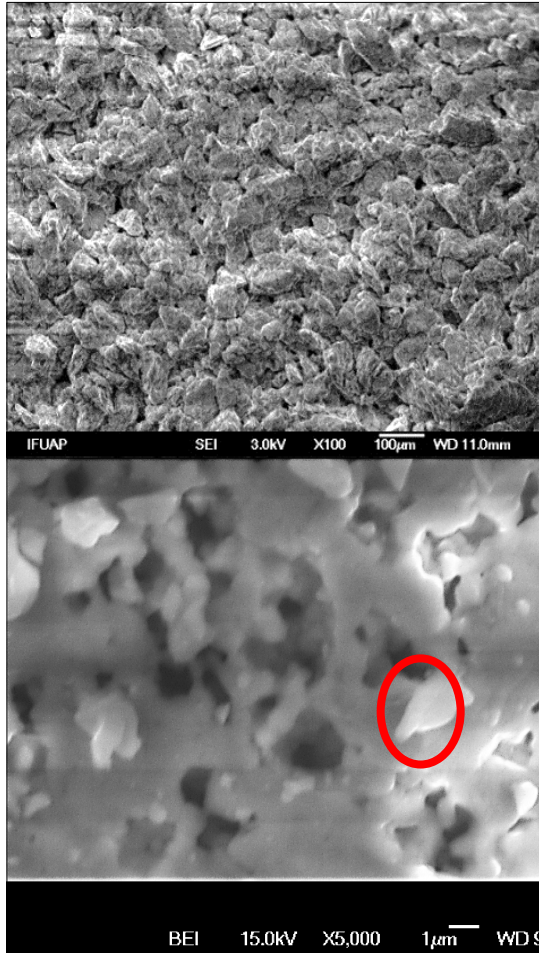


Figura 7. Las imágenes se obtienen por el SEM en $ZrO_2:Yb$ y se puede apreciar la estructura desordenada de poros, la imagen superior se obtiene a 3 kV, para mejorar la resolución de la imagen se enfoca en la región en rojo a 15 kV (imagen inferior) y se puede apreciar con mayor detalle el diámetro del poro que es aproximadamente 2 micrómetros y la estructura porosa tiene una distribución aleatoria.

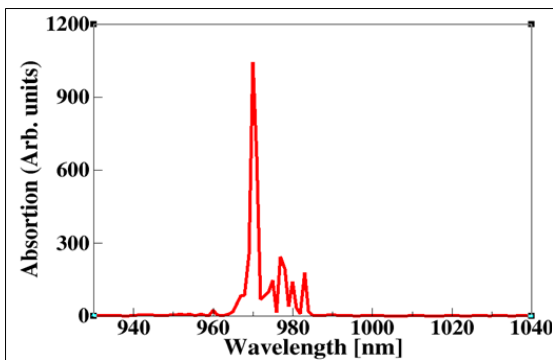


Figura 8. La gráfica representa la banda de absorción del Yb y está centrada en 970 nm, este valor es importante para poder excitar la muestra de $ZrO_2:Yb$.

La espectroscopia óptica comprende diversas técnicas empleadas en la ciencia de materiales para su análisis. Su principal objetivo es identificar la respuesta de un material ante la radiación electromagnética, siendo estas técnicas no invasivas y no destructivas. Dos de las técnicas más utilizadas son la Espectrometría de Absorción Óptica (EAO) y la Espectrofluorimetría (FL).



Figura 9. El espectrofotómetro UV-Vis-NIR Agilent Cary 5000 es un dispositivo de alta eficiencia que opera en los rangos de ultravioleta-visible y cercano al infrarrojo, ofreciendo un desempeño fotométrico en el intervalo de longitudes de onda de 175 a 3300 nm.

En la EAO, se realiza una comparación entre la intensidad de dos haces de luz: uno que sirve como referencia y otro que atraviesa la muestra. Se detecta la diferencia de intensidades según la longitud de onda, lo que permite identificar las especies que absorben energía. Para analizar muestras opacas, se emplea la Reflectancia Difusa (ERD) y la Reflectancia Especular (ERE) en conjunto con la EAO. La espectrofluorimetría (FL) es una técnica analítica que se utiliza para estudiar la fluorescencia de una muestra. La fluorescencia es un fenómeno óptico en el cual una sustancia absorbe energía en forma de luz y luego emite esa energía en forma de luz de mayor longitud de onda, es decir, a una longitud de onda más baja. En un experimento de espectrofluorimetría, se ilumina la muestra con luz de una longitud de onda específica y se mide la intensidad de la luz fluorescente que emite la muestra en diferentes longitudes de onda. Este proceso proporciona información sobre la estructura y composición de la muestra, así como sobre

sus propiedades moleculares y químicas. El Espectrómetro UV-Vis-NIR AgilentCary 5000 posibilita la realización de EAO, ERD y ERE con variaciones en polarización y ángulo. Su rango espectral abarca longitudes de onda desde 175 hasta 3300 nm, cubriendo la región de transiciones electrónicas en la mayoría de los materiales. La resolución espectral (0.05-0.2) permite una alta precisión, y los tiempos de integración disponibles (0.033-999 s) mejoran la confiabilidad y la velocidad de escaneo. Este equipo cuenta con diversos porta-muestras para sólidos y líquidos, convirtiéndolo en una herramienta esencial.

Para conocer la banda de emisión al ser irradiada la muestra de $ZrO_2:Yb$ con 970 nm, se empleó un Fluorómetro NanoLog FR3 de Horiba Jobin Yvon, Figura 10.

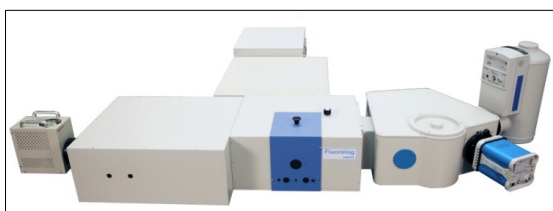


Figura 10. Fluorómetro NanoLog FR3 de Horiba Jobin Yvon utiliza una lámpara de xenón de alta potencia 450W para la excitación de la muestra con una alta resolución espectral.

El fluorómetro NanoLog FR3 es un equipo de laboratorio fabricado por la compañía Horiba Jobin Yvon, especializada en la medición de fluorescencia en muestras. La fluorescencia es un fenómeno óptico en el cual una muestra absorbe energía en forma de luz a una cierta longitud de onda y emite esta energía en forma de luz a una longitud de onda diferente, generalmente mayor.

El NanoLog FR3 permite estudiar y analizar la fluorescencia en muestras en diferentes rangos espectrales, incluyendo UV (ultravioleta), VIS (visible) y NIR (infrarrojo cercano). Puede medir tanto espectros de fluorescencia como tiempos de vida de fluorescencia, proporcionando información valiosa sobre la estructura y características de las moléculas presentes en la muestra. Usa

una lámpara de xenón de 450W para excitación del UV al cercano IR. Resolución de 0.06 nm con slit, red de 1200 líneas/mm, medida de tiempos de vida de 100 ps a 10 μ s.

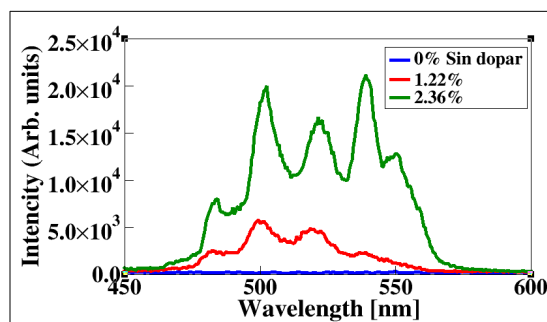


Figura 11. Para el estudio experimental de la emisión óptica se hicieron 3 muestras de ZrO_2 con diferentes concentraciones de Yb como se muestra en la gráfica; 0%, 1.22% y 2.36% respectivamente. Se obtiene una mayor intensidad para la concentración de 2.36% de Yb. Las intensidades de emisión se midieron con un espectro fluorómetro Horiba Jobinyvon NanoLog FR3 [20].

5 CONCLUSIONES

En este artículo, hemos llevado a cabo un estudio profundo que combina predicciones teóricas con experimentos para diseñar la localización del campo óptico en un sistema desordenado tridimensional con percolación. Utilizando métodos numéricos FDTD en $c\#$, hemos logrado resolver numéricamente y detallada la evolución del campo óptico a lo largo del tiempo para nanoemisores con 4 niveles de energía, recordemos que la solución semiclásica para las ecuaciones de Maxwell, la densidad de polarización y los 4 diferentes niveles de energía no tienen solución analítica, aquí radica la importancia de solución al problema propuesto.

Es importante mencionar que durante nuestro estudio, también hemos analizado la dinámica poblacional inversa, lo que ha demostrado ser fundamental para la generación de luz y ha mostrado características similares a un láser aleatorio sin espejos. Este interesante fenómeno revela que el desorden presente en el sistema ejerce un control determinante

sobre la coherencia y la frecuencia de la luz generada.

Se sugiere que la exploración experimental en el dominio temporal llevará a utilizar técnicas experimentales más avanzadas y especializadas. Este enfoque representa una dirección prometedora para futuras investigaciones, ya que permitirá adentrarse en una comprensión más profunda y completa de la dinámica y el comportamiento óptico generado en un sistema con puntos cuánticos distribuidos aleatoriamente.

Los resultados experimentales satisfacen las predicciones teóricas propuestas en el modelo, nos permite comprender la manera de solucionar el problema de la excitación de los nanoemisores, así como ver el efecto de emisión producido por emisión estimulada y espontánea. Se sugiere experimentalmente hacer combinaciones usando diferentes tierras raras, así como el uso de las mismas con diferentes concentraciones y estudiar los efectos de emisión que se producen.

Aspiramos a que estos avances abran nuevas perspectivas y oportunidades para aplicaciones prácticas, facilitando así un progreso sustancial en nuestro entendimiento y utilización de sistemas ópticos desordenados en diversos contextos. Este paso adicional en nuestra investigación es esencial para avanzar y contribuir de manera notable al desarrollo y futura aplicación de estas tecnologías, promoviendo así un futuro prometedor en este campo de estudio.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por CONACYT (México) a través de las subvenciones No. A1-S-9201, No. A1-S-8793.

Este trabajo fue apoyado por el proyecto VIEP 00270, Instituto de física, BUAP, Puebla, México.

Agradecimientos por el apoyo experimental

y que estuvo a cargo de la Dra. R. Morales-Nava, Dra. M.E. de-Anda-Reyes y Dra. A. Romero-López.

REFERENCIAS

- [1] Billy J, Josse V, Zuo Z, Bernard A, Hambrecht B, Lugan P, Clément D, Sanchez-Palencia L, Philippe Bouyer P, Aspect A. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*. 2008; 453(7197): 891-894. doi: [10.1038/nature07000](https://doi.org/10.1038/nature07000).
- [2] Burlak G, Vlasova M, Márquez Aguilar PA, Kakazey M, Xixitla-Cheron L. Optical percolation in ceramics assisted by porous clusters. *Optics Communications*. 2009; 282(14): 2850-2856. doi: [10.1016/j.optcom.2009.04.055](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2009.04.055).
- [3] Burlak G, Rubo YG. Mirrorless lasing from light emitters in percolating clusters. *Physical Review A*. 2015; 92:013812. doi: [10.1103/PhysRevA.92.013812](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.013812).
- [4] Burlak G, Martínez-Sánchez E. The optical Anderson localization in three-dimensional percolation system. *Optics Communications*. 2017; 387:426-431. doi: [10.1016/j.optcom.2017.01.027](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2017.01.027).
- [5] Stauffer D, Aharony A. *Introduction to percolation theory*. London: Taylor & Francis; 2003.
- [6] Riboli F, Caselli N, Vignolini S, Intonti F, Vynck K, Barthelemy P, Gerardino A, Balet L, Li LH, Fiore A, Gurioli M, Wiersma DS. Engineering of light confinement in strongly scattering disordered media. *Nature Materials*. 2014; 13(7):720-725. doi: [10.1038/nmat3966](https://doi.org/10.1038/nmat3966).
- [7] Vynck K, Burrese M, Riboli F, Wiersma DS. Photon management in two-dimensional disordered media. *Nature Materials*. 2012; 11(12):1017-1022. doi: [10.1038/nmat3433](https://doi.org/10.1038/nmat3433).
- [8] Flach S, Krimer DO, Skokos Ch. Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems. *Physical Review Letters*. 2009; 102:024101. doi: [10.1103/PhysRevLett.102.024101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.024101).
- [9] Sheng P. *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer; 2006. (Springer series in materials science; vol. 88). doi: [10.1007/3-540-29156-3](https://doi.org/10.1007/3-540-29156-3).
- [10] Wang J, Genack AZ. Transport through modes in random media. *Nature*. 2011; 471(7338): 345-348. doi: [10.1038/nature09824](https://doi.org/10.1038/nature09824).
- [11] Jendrzejewski F, Bernard A, Muller K, Cheinet P, Josse V, Piraud M, et al. Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics*. 2012; 8(5):398-403. doi: [10.1038/nphys2256](https://doi.org/10.1038/nphys2256).
- [12] Segev M, Silberberg Y, Christodoulides DN. Anderson localization of light. *Nature Photonics*. 2013; 7(3):197-204. doi: [10.1038/nphoton.2013.30](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.30).
- [13] Wiersma DS. Disordered photonics. *Nature Photonics*. 2013; 7(3):188-196. doi: [10.1038/nphoton.2013.29](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.29).
- [14] Matis BR, Liskey SW, Gangemi NT, Edmunds AD, Wilson WB, Wheeler VD, et al. Observation of a

- transition to a localized ultrasonic phase in soft matter. *Communications Physics*. 2022; 5:21. doi: [10.1038/s42005-022-00797-z](https://doi.org/10.1038/s42005-022-00797-z).
- [15] Anderson PW. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*. 1958; 109:1492-1505. doi: [10.1103/PhysRev.109.1492](https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492).
- [16] Siegman AE. *Lasers*. Mill Valley, California: University Science Books; 1986.
- [17] Jiang X, Soukoulis CM. Time dependent theory for random lasers. *Physical Review Letters*. 2000; 85:70-73. doi: [10.1103/PhysRevLett.85.70](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.70).
- [18] Taflove A, Hagness SC. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3rd ed. Norwood, MA: Artech House; 2005.
- [19] Solis D, De la Rosa E, Meza O, Diaz-Torres LA, Salas P, Angeles-Chavez C. Role of Yb³⁺ and Er³⁺ concentration on the tunability of green-yellow-red upconversion emission of codoped ZrO₂:Yb³⁺-Er³⁺ nanocrystals. *Journal of Applied Physics*. 2010; 108(2):023103. doi: [10.1063/1.3460813](https://doi.org/10.1063/1.3460813).
- [20] Horiba Scientific. *Steady state and lifetime nanotechnology EEM spectrofluorometer*. In: Modular nanolog spectrofluorometer is specifically designed for research in nanotechnology and nanomaterials. 2021 [cited 2024 May 15]. Available from: <https://www.horiba.com/int/scientific/products/fluorescence-spectrometers/steady-state-fluorescence>
- [21] Schmidt H, Klein LC. *Sol-gel optics: Processing and applications*. Boston: Kluwer Academic; 1994.
- [22] Burlak G, Díaz-de-Anda A, Malomed BA, Martínez-Sánchez E, Medina-Ángel G, Morales-Nava R, et al. Critical properties of the optical field localization in a three-dimensional percolating system: Theory and experiment. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023; 173:113649. doi: [10.1016/j.chaos.2023.113649](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113649).

ACERCA DE LOS AUTORES

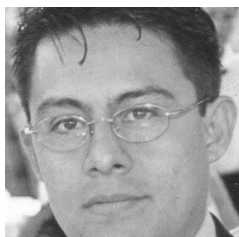


El Mtro. Jesús Jonathan Martínez Ocampo en el año 2018 obtiene el grado de Licenciatura en Ciencias con área terminal en Física en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, en el 2021 obtiene el grado de Maestría en Ingeniería y Ciencias Aplicadas con mención honorífica por la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, actualmente realiza una estancia de investigación en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dentro del Instituto de Física en las líneas de investigación; Medios Continuos, Óptica y Caracterización de materiales (silicio poroso). Colaboró como

docente en la preparatoria La Salle Cuernavaca, en la Universidad Americana de Morelos y en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Desde el año 2014 ha trabajado como docente logrando mención honorífica nacional para Morelos en el XXIV concurso nacional de aparatos y experimentos de física y se obtiene primer lugar estatal en el 5to. concurso de aparatos y experimentos de física en Morelos, México. Ha impartido cursos de física, cálculo, laboratorio de física y múltiples asignaturas de las ciencias exactas y naturales a nivel medio superior, superior y posgrado. Actualmente se encuentra inscrito y cursando el Doctorado en Ingeniería y Ciencias Aplicadas en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, su tema principal de investigación es el estudio del campo óptico generado en sistemas 3D con nano emisores distribuidos aleatoriamente.



El Dr. Gennadiy Burlak estudió en la Universidad Nacional de Kiev (KNU), Ucrania, en el Departamento de Física Teórica. El Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas. Trabajó como catedrático en el Departamento de Física Teórica de KNU. A partir de 1998 – a la fecha: Profesor Investigador Titular "C" del Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, tiene SNI nivel 3. El Dr. Burlak es Merito estatal en categoría Investigación científica 2022. El Dr. Burlak es autor y coautor de 12 libros y capítulos de libros, 175 artículos publicados en revistas internacionales, 186 ponencias en Congresos nacionales e internacionales. Bajo de su dirección han graduado: Doctorado: 8, de cuales 6 son miembros de SNI. Líneas principales de investigación son: la percolación óptica, teoría electromagnética, microesferas multicapas, radiación óptica de nanoestructuras, entrelazamiento cuántico, física no-lineal, inteligencia artificial.



El Dr. Alfredo Díaz de Anda es Profesor Investigador de Tiempo Completo Definitivo en el Instituto de Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Realizó sus estudios de licenciatura en Física en la Facultad de Ciencias de la UAEM bajo la dirección del Dr. Alejandro Morales, hizo estudios de maestría y doctorado en Ingeniería Eléctrica con el Dr. Gennady Burlak en la misma universidad. Realizó una estancia posdoctoral de dos años en el IFUNAM bajo la dirección del Dr. Guillermo Monsivais. Es miembro del SNII desde 2013 y actualmente tiene el nivel I. Tiene a su cargo dos laboratorios en la BUAP: uno de Opto-Acústica y otro de Óptica no Lineal. En estos laboratorios se han desarrollado sistemas para el estudio de lentes acústica, pinzas acústicas, antenas de parche, láseres de nitrógeno, un sistema para medir frecuencias de resonancia y funciones de onda de análogos cuánticos en sistemas elásticos, entre otros. Ha desempeñado roles institucionales importantes, tales como Coordinador de Seminarios, responsable de Biblioteca, responsable de los Laboratorios de uso común y, recientemente, fue Secretario de Investigación. Su producción científica consiste en más de 30 artículos de investigación publicados en revistas indexadas. Ha graduado a tres estudiantes de doctorado, tres de maestría y cuatro de licenciatura. Ha impartido 32 cursos en licenciatura y posgrado en diversas universidades, 10 seminarios especializados y participado en 10 talleres y pláticas de divulgación. Ha participado en más de 30 trabajos presentados en congresos.



La Dra. Rosmarbel Morales Nava es una destacada investigadora en el campo de las Ciencias Exactas, con un enfoque en el estudio de la actividad antibiótica de la Anfotericina B y sus

derivados sintéticos en entornos de membranas biológicas soportadas, así como en su actividad eléctrica en estudios de canal unitario. Además, se encuentra trabajando en el aislamiento y caracterización de compuestos derivados de productos naturales con actividad biológica. En ciencia de materiales, ha trabajado en el estudio de nuevos materiales nanocristalinos dopados con tierras raras para investigar su actividad óptica y su uso como láseres aleatorios. Ha realizado investigaciones sobre la síntesis de varios análogos de la Anfotericina B, un potente antifúngico, con el objetivo de reducir su citotoxicidad analizando el comportamiento espectroscópico y electrofisiológico, estudios con los que se obtuvieron una patente nacional y tres internacionales para un nuevo análogo denominado A21, que presenta el mismo efecto antifúngico que la Anfotericina B, pero con una toxicidad colateral reducida. Fue ganadora de la prestigiosa Beca Fulbright-García Robles, para realizar una estancia posdoctoral en The College of Pharmacy en la Universidad de Iowa, en Estados Unidos. Esta institución es reconocida a nivel internacional como una de las mejores en Ciencias de la Salud. Desde agosto 2019 se ha desempeñado como profesora en el Tecnológico de Monterrey en donde ha recibido diversos reconocimientos por la implementación de estrategias de innovación educativa así como el premio Profesor ECOA Sobresaliente por parte del Tecnológico de Monterrey. Desde diciembre 2022 se desempeña como Investigadora Posdoctoral en el Instituto de Ciencias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Cuenta con 7 artículos de investigación y 2 capítulos de libro publicados en revistas y editoriales de reconocido prestigio. Ha participado en la formación de recursos humanos de licenciatura en 5 universidades, impartiendo asignaturas en el área de química y biotecnología, y dirigiendo 13 tesis de licenciatura. Como parte de su actividad de divulgación, ha realizado 6 ponencias orales y ha participado en 9 congresos nacionales y 8 internacionales.



La Dra. Eunice de Anda actualmente trabaja como técnico académico Titular B, en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), en el Instituto de Física "LRT" desde el 2015 (IFUAP). Tiene

el grado de Maestría y Doctorado por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), desde el 2012. La Dra. de Anda trabaja en la caracterización superficial y magnética de los materiales, por medio de las técnicas de microscopía de barrido electrónico y magnetometría de muestra vibrante. Además, del apoyo a la investigación de la comunidad de la BUAP, imparte cursos de matemáticas a nivel licenciatura en la Facultad de Ciencias Biológicas de la BUAP. Sus temas principales de investigación son: Síntesis y estudio de los materiales magnéticos, degradación de compuestos orgánicos por medio de la Fotocatálisis y estudio de materiales termo conductores.



La Dra. Anabel Romero López, actualmente labora en el puesto de Técnica Académica Titular C TC en el Instituto de Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Obtuvo el grado de

Licenciada en Química en la Facultad de Ciencias Químicas en el 2008, posteriormente en el 2010 adquirió el grado de Maestra en Ciencias Químicas y en el 2014 concluyó sus estudios de Doctorado en Ciencias Químicas con la distinción Cum laude, dichos estudios se realizaron en el Laboratorio de Síntesis y Modificación de Productos Naturales en las instalaciones del posgrado en Ciencias Químicas de la BUAP. En el 2009 realizó una estancia de investigación en el Institut de Chimie des Substances Naturelles (ICSN-CNRS) localizado en Gif-sur-Yvette Francia, en 2016 realizó una estancia posdoctoral en la

Universidad de las Américas Puebla (UDLAP) realizando estudios de Síntesis Orgánica Asimétrica. La Dra. Romero ha impartido diversas asignaturas, principalmente de química general, química analítica y materias relacionadas con la química orgánica a diferentes programas educativos de licenciatura y posgrado. Ha participado como ponente en congresos nacionales e internacionales, como el Congreso Italo-Latinoamericano de Etnomedicina y en la Reunión Internacional de Investigación en Productos Naturales entre otros. Derivado de su investigación ha publicado diversos artículos científicos en revistas indizadas y ha participado como coautor de un capítulo de libro. Actualmente sus intereses involucran el estudio de las propiedades catalíticas, fotocatalíticas y fotovoltaicas de composites formados de nanopartículas metálicas plasmónicas y óxidos metálicos con compuestos con propiedades semiconductoras o dieléctricas con aplicación en remediación ambiental y detección y cuantificación de compuestos orgánicos dañinos en organismos vivos.



Mtro. Miguel Roque Vargas Nació el 10 de abril de 1995 en Tehuacán, Puebla, México, destacando desde temprana edad por su pasión por el conocimiento y su espíritu incansable de superación. Formado

académicamente en el campo de las ciencias exactas, Miguel es Licenciado en Física Aplicada y Maestro en Ciencias Físicas, con estudios de doctorado en la misma disciplina, lo que refleja su profundo compromiso con la investigación y el avance científico. Su trayectoria académica no solo demuestra su excelencia intelectual, sino también su dedicación para contribuir al desarrollo de la física y las matemáticas, áreas en las que ha mostrado un talento excepcional. Ha impartido clases a nivel medio superior y superior en áreas de ciencias exactas y ha participado en congresos nacionales e internacionales.

APÉNDICE - A

En este apartado se muestra parte del código desarrollado en C# que nos permite encontrar la dinámica poblacional de los nanoemisores para átomos de 4 niveles de energía.

```

using System;

namespace FinElemTime
{
    class TEquation4lvl
    {
        #region User
        double _gammaA = 0, _omegaA = 0, _zetaA = 0;
        double _gammaB = 0, _omegaB = 0, _zetaB = 0;
        double _gammaE = 0, _omegaE = 0, _zetaE = 0;
        double _gammaH = 0, _omegaH = 0, _zetaH = 0;
        double _tau32 = 0, _tau30 = 0, _tau21 = 0, _tau10 = 0;
        double _coeffPauli = 1;
        double _twoLvlCoeff = 0;
        double _PrEqs0 = 1, _timeRandPhase0=0, _widthPump0=100;
        double N0, N1, N2, N3;
        bool _isUsesoukoulEqs0 = true;
        #endregion
        // - - - - - set_initPopulations - - - - -
        public void set_initPopulations(double N0, double N1, double N2, double N3)
        {
            N0 = N0; N1 = N1; N2 = N2; N3 = N3;
        }
        // - - - - - set_isUseSokoulEqs - - - - -
        public void set_isUseSokoulEqs0(bool b) { _isUseSokoulEqs0 = b; }
        // - - - - - set_PrEqs - - - - -
        public void set_PrEqs0(double d) { _PrEqs0 = d; }
        // - - - - - set_timeRandPhase0 - - - - -
        public void set_timeRandPhase0(double d) { _timeRandPhase0 = d; }
        // - - - - - set_widthPump0 - - - - -
        public void set_widthPump0(double d) { _widthPump0 = d; }
        // - - - - - SetParamsDensity - - - - -
        public void SetParamsDensity(double tau32, double tau30, double tau21, double tau10)
        {
            _tau32 = tau32; _tau30 = tau30;
            _tau21 = tau21; _tau10 = tau10;
        }
        // - - - - - SetParamsPolaris - - - - -
        public void SetParamsPolaris(double gammaA, double omegaA, double zetaA, double gammaB, double omegaB, double zetaB)
        {
            _gammaA = gammaA; _omegaA = omegaA;
            _zetaA = zetaA;
            _gammaB = gammaB; _omegaB = omegaB;
            _zetaB = zetaB;
            _gammaE = gammaA; _omegaE = omegaA;
            _zetaE = zetaA;
            _gammaH = gammaB; _omegaH = omegaB;
            _zetaH = zetaB;
        }
        // - - - - - OdeDiffEqSyst4Lvl - - - - -
        public double[] OdeDiffEqSyst4Lvl(double t, double[] XValue, double[] E, int nVar)
        {
            #region info P, i
            #endregion

            double h = 1;
            double P_aXPrim = 0, P_aYPrim = 0, P_aZPrim = 0;
            double P_aX = XValue[0], P_aY = XValue[2], P_aZ = XValue[4];

            double i_aXPrim = 0, i_aYPrim = 0, i_aZPrim = 0;
            double i_aX = XValue[1], i_aY = XValue[3], i_aZ = XValue[5];

            double P_bXPrim = 0, P_bYPrim = 0, P_bZPrim = 0;
            double P_bX = XValue[6], P_bY = XValue[8], P_bZ = XValue[10];

            double i_bXPrim = 0, i_bYPrim = 0, i_bZPrim = 0;
            double i_bX = XValue[7], i_bY = XValue[9], i_bZ = XValue[11];

            double N0Prim = 0, N1Prim = 0, N2Prim = 0, N3Prim = 0;
            double N0 = XValue[12], N1 = XValue[13], N2 = XValue[14], N3 = XValue[15];
            // N0 = N0; N1 = N1; N2 = N2; N3 = N3;

            double Ex = E[0], Ey = E[1], Ez = E[2];
            double coeffPauli = E[3]; //coeffPauli
            double twoLvlCoeff = E[4]; // two level
            _coeffPauli = coeffPauli;

            _twoLvlCoeff = twoLvlCoeff;

            #region info: Equations for P, i
            #endregion

            double om_a2 = _omegaA * _omegaA;
            double om_b2 = _omegaB * _omegaB;

            #region Taflove
            if (_isUseSokoulEqs0 == false)/* FDTD, Taflove, 2004*/
            {
                // a
                P_aXPrim = i_aX; //X
                i_aXPrim = -_gammaA * i_aX - om_a2 * P_aX + _zetaA * (N2 - N1) * Ex;

                P_aYPrim = i_aY; //Y
                i_aYPrim = -_gammaA * i_aY - om_a2 * P_aY + _zetaA * (N2 - N1) * Ey;

                P_aZPrim = i_aZ; //Z
                i_aZPrim = -_gammaA * i_aZ - om_a2 * P_aZ + _zetaA * (N2 - N1) * Ez;
            }
            // b
            P_bXPrim = i_bX; //X
            i_bXPrim = -_gammaB * i_bX - om_b2 * P_bX + _zetaB * (N3 - N0) * Ex;

            P_bYPrim = i_bY; //Y
            i_bYPrim = -_gammaB * i_bY - om_b2 * P_bY + _zetaB * (N3 - N0) * Ey;

            P_bZPrim = i_bZ; //Z
            i_bZPrim = -_gammaB * i_bZ - om_b2 * P_bZ + _zetaB * (N3 - N0) * Ez;
            #endregion

            #region Soukoul
            if (_isUseSokoulEqs0 == true)
            {
                P_aXPrim = i_aX; //X
                i_aXPrim = -_gammaA * i_aX - om_a2 * P_aX + _zetaA * (N2 - N1) * Ex;

                P_aYPrim = i_aY; //Y
                i_aYPrim = -_gammaA * i_aY - om_a2 * P_aY + _zetaA * (N2 - N1) * Ey;

                P_aZPrim = i_aZ; //Z
                i_aZPrim = -_gammaA * i_aZ - om_a2 * P_aZ + _zetaA * (N2 - N1) * Ez;
            }
            // b
            P_bXPrim = 0; //X
            i_bXPrim = 0;

            P_bYPrim = 0; //Y
            i_bYPrim = 0;

            P_bZPrim = 0; //Z
            i_bZPrim = 0;
            #endregion

            double[] XDeriv = new double[nVar];

            XDeriv[0] = P_aXPrim;
            XDeriv[1] = i_aXPrim;
            XDeriv[2] = P_aYPrim;
            XDeriv[3] = i_aYPrim;
            XDeriv[4] = P_aZPrim;
            XDeriv[5] = i_aZPrim;

            XDeriv[6] = P_bXPrim;
            XDeriv[7] = i_bXPrim;
            XDeriv[8] = P_bYPrim;
            XDeriv[9] = i_bYPrim;
            XDeriv[10] = P_bZPrim;
            XDeriv[11] = i_bZPrim;

            #region info: Equations for N
            #endregion

            double nonlScalProd_Ei_a = -(Ex * i_aX + Ey * i_aY + Ez * i_aZ);
            double nonlScalProd_Ei_b = -(Ex * i_bX + Ey * i_bY + Ez * i_bZ);
        }
    }
}

```

```

#region Taflove
if (_isUseSoukoulEqs0 == false)/* FTED, Taflove, 2004*/
{
N3Prim = -twoLvlCoeff * N3 * (1 - coeffPauli * N2) / _tau32
- N3 * (1 - coeffPauli * N0) / _tau30 + nonlScalProd_Ei_b /
(h * _omegaB);

N2Prim = twoLvlCoeff * (N3 * (1 - coeffPauli * N2) / _tau32
- N2 * (1 - coeffPauli * N1) / _tau21 + nonlScalProd_Ei_a /
(h * _omegaA));

N1Prim = twoLvlCoeff * (N2 * (1 - coeffPauli * N1) / _tau21
- N1 * (1 - coeffPauli * N0) / _tau10 - nonlScalProd_Ei_a /
(h * _omegaA));

N0Prim = N3 * (1 - coeffPauli * N0) / _tau30
+ twoLvlCoeff * N1 * (1 - coeffPauli * N0) / _tau10 -
nonlScalProd_Ei_b / (h * _omegaB);
}

#endregion

if (_isUseSoukoulEqs0 == true)/* Soukoulis, PLR, 2000 */
{
double P_r = PrEqs0, w = _widthPump0;
//double pmp = P_r * (w >= 100 ? 1 : Pump4Lvl0(t, w));
double pmp = P_r * Pump4Lvl0(t, w);

N3Prim = pmp * N0 - N3 / _tau32;
N2Prim = N3 / _tau32 + nonlScalProd_Ei_a / (h * _omegaA) -
N2 / _tau21;
N1Prim = N2 / _tau21 - nonlScalProd_Ei_a / (h * _omegaA) -
N1 / _tau10;
N0Prim = N1 / _tau10 - pmp * N0;
}

XDeriv[12] = N0Prim; XDeriv[13] = N1Prim; XDeriv[14] =
N2Prim; XDeriv[15] = N3Prim;

return XDeriv;
}

//OdeDiffEqSyst4Lvl
// - - - - - Pump4Lvl0 - - - - -
public double Pump4Lvl0(double t, double w)
{
double d = w >= 100 ? 1 : Math.Exp(-t * t / (w * w));
return d;
}

// - - - - - diffEqSystNonlMetamat - - - - -
public double[] diffEqSystNonlMetamat(double t, double[]
XValue, double[] E, int nVar)
{
#region info P, i
#endregion

double h = 1;
double P_eXPrim = 0, P_eYPrim = 0, P_eZPrim = 0;
double P_eX = XValue[0], P_eY = XValue[2], P_eZ = XValue[4];

double i_eXPrim = 0, i_eYPrim = 0, i_eZPrim = 0;
double i_eX = XValue[1], i_eY = XValue[3], i_eZ = XValue[5];

double P_hXPrim = 0, P_hYPrim = 0, P_hZPrim = 0;
double P_hX = XValue[6], P_hY = XValue[8], P_hZ =
XValue[10];

double i_hXPrim = 0, i_hYPrim = 0, i_hZPrim = 0;
double i_hX = XValue[7], i_hY = XValue[9], i_hZ =
XValue[11];

double N0Prim = 0, N1Prim = 0, N2Prim = 0, N3Prim = 0;
double N0 = XValue[12], N1 = XValue[13], N2 = XValue[14], N3
= XValue[15];

double Ex = E[0], Ey = E[1], Ez = E[2];
double twoLvlCoeff = E[4]; // two level
double Hx = E[5], Hy = E[6], Hz = E[7];

#region info: Equations for P, i
#endregion

double om_e2 = _omegaA * _omegaA;
double om_h2 = _omegaB * _omegaB;
// e
P_eXPrim = i_eX; //X
i_eXPrim = -_gammaE * i_eX - om_e2 * P_eX + _zetaE * (N2 -
N1) * Ex;

P_eYPrim = i_eY; //Y
i_eYPrim = -_gammaE * i_eY - om_e2 * P_eY + _zetaE * (N2 -
N1) * Ey;

P_eZPrim = i_eZ; //Z
i_eZPrim = -_gammaE * i_eZ - om_e2 * P_eZ + _zetaE * (N2 -
N1) * Ez;

// h
P_hXPrim = i_hX; //X
i_hXPrim = -_gammaH * i_hX - om_h2 * P_hX + _zetaH * Hx;

P_hYPrim = i_hY; //Y
i_hYPrim = -_gammaH * i_hY - om_h2 * P_hY + _zetaH * Hy;

P_hZPrim = i_hZ; //Z
i_hZPrim = -_gammaH * i_hZ - om_h2 * P_hZ + _zetaH * Hz;

double[] XDeriv = new double[nVar];

XDeriv[0] = P_eXPrim;
XDeriv[1] = i_eXPrim;
XDeriv[2] = P_eYPrim;
XDeriv[3] = i_eYPrim;
XDeriv[4] = P_eZPrim;
XDeriv[5] = i_eZPrim;

XDeriv[6] = P_hXPrim;
XDeriv[7] = i_hXPrim;
XDeriv[8] = P_hYPrim;
XDeriv[9] = i_hYPrim;
XDeriv[10] = P_hZPrim;
XDeriv[11] = i_hZPrim;

#region info: Equations for N
#endregion

//double nonlScalProd_Ei_e = -(Ex * i_eX + Ey * i_eY + Ez *
i_eZ);
double nonlScalProd_Ei_e = (Ex * i_eX + Ey * i_eY + Ez *
i_eZ);

N3Prim = 0;

N2Prim = -N2 * (1 - N1) / _tau21 + nonlScalProd_Ei_e / (h *
_omegaE);

N1Prim = N2 * (1 - N1) / _tau21 - nonlScalProd_Ei_e / (h *
_omegaE);

N0Prim = 0;

XDeriv[12] = N0Prim;
XDeriv[13] = N1Prim;
XDeriv[14] = N2Prim;
XDeriv[15] = N3Prim;
return XDeriv;
}

// - - - - - ToString - - - - -
public override string ToString()
{
string sout =
"gammaA = " + _gammaA
+ "\nomegaA = " + _omegaA
+ "\nzetaA = " + _zetaA
+ "\ngammaB = " + _gammaB
+ "\nomegaB = " + _omegaB
+ "\nzetaB = " + _zetaB
+ "\ntau32 = " + _tau32
+ "\ntau30 = " + _tau30
+ "\ntau21 = " + _tau21
+ "\ntau10 = " + _tau10
+ "\ncoeffPauli = " + _coeffPauli
+ "\ntwoLvlCoeff = " + _twoLvlCoeff
+ "\nPrEqs = " + PrEqs0
+ "\ntimeRandPhase0 = " + timeRandPhase0
+ "\nisUseSoukoulEqs = " + _isUseSoukoulEqs0
+ "\nN0 = " + N0
+ "\nN1 = " + N1
+ "\nN2 = " + N2
+ "\nN3 = " + N3
+ "\nwidthPump0 = " + _widthPump0
;

return sout;
}

}

}

}

```

