

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Generalizaciones al modelo de Jaynes-Cummings

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

DIEGO ARANDA LOZANO

DIRECTOR: DR. JOSÉ FRANCISCO RÉCAMIER ANGELINI

CUERNAVACA, MORELOS

Enero, 2024

Jurado revisor

	NOMBRE	ADSCRIPCIÓN
Presidente	Dr. Markus Müller Bender	CInC - UAEM
Secretario	Dr. Rolando Pérez Álvarez	CInC - UAEM
Vocal	Dr. Wolf Luis Mochán Backal	ICF-UNAM
Suplente	Dr. José Francisco Récamier Angelini	ICF-UNAM
Suplente	Dr. Héctor Manuel Castro Beltrán	CIICAP-UAEM

Resumen

Dado que el modelo de Jaynes-Cummings (JCM) es un modelo estándar en la óptica cuántica, su extensión en diferentes direcciones es de interés general. El modelo ha sido generalizado de muchas maneras, entre las más representativas, existen generalizaciones del JCM en las que la interacción entre el átomo y el campo ya no es lineal en las variables del campo [8, 10, 11, 31], es decir, un acoplamiento dependiente de la intensidad del campo; otro tipo de generalización es el modelo Tavis-Cummings [41], en el que se considera la interacción entre un campo y un grupo de átomos de dos niveles; y, por otro lado, existen modelos que incorporan términos no lineales en el operador de número de fotones para investigar la evolución del campo en presencia de un medio tipo Kerr [5, 18, 45].

En esta tesis estudiamos dos posibles generalizaciones del JCM. Primero estudiaremos el acoplamiento entre dos cavidades estándar de Jaynes-Cummings [29]. Después estudiaremos el caso de una sola cavidad de JCM con un campo f -deformado [24], en donde la interacción átomo-campo ya no es lineal y aparece un término que corresponde a un medio tipo Kerr [45].

Para ambos sistemas encontraremos su operador de evolución temporal utilizando el método de Algebras de Lie y analizaremos la evolución de algunas variables dinámicas como el número promedio de fotones, inversión atómica, número total de excitaciones.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM (ICF) por brindarme espacio, acceso al software necesario y un valioso respaldo durante la realización de mi tesis. También, mi agradecimiento al proyecto DGAPA-UNAM, especialmente al proyecto PAPIIT IN109822, por el respaldo económico que ha sido fundamental para el éxito de mi investigación.

Quiero destacar la orientación, dedicación y apoyo del Dr. José Francisco Récamier Angelini, mi asesor, cuya guía ha sido esencial en todo el proceso de investigación. El compromiso y colaboración del grupo de trabajo han enriquecido mi experiencia, permitiéndonos alcanzar nuestros objetivos de manera conjunta.

Expreso mi gratitud a CONAHCyT por el apoyo financiero esencial que ha posibilitado la realización completa y efectiva de este proyecto. También, agradezco a los miembros de mi comité de tesis por sus valiosas sugerencias y críticas constructivas, que han mejorado significativamente la calidad de mi trabajo. Su dedicación y tiempo dedicado son apreciados profundamente.

Índice general

1. Antecedentes	10
1.1. Evolución temporal de un sistema	10
1.2. Teorema de Wei-Norman	11
1.3. Cuantización del campo electromagnético de un solo modo	11
1.4. Estados coherentes de Glauber	14
1.5. Efecto electro-óptico cuadrático (Efecto Kerr)	15
2. Modelo Jaynes-Cummings	16
2.1. Valores propios y vectores propios	18
2.2. Oscilaciones de Rabi inducidas por n fotones	19
2.3. Colapsos y reavivamientos inducidos por un campo coherente	20
2.4. Operador de evolución temporal para el modelo de Jaynes-Cummings por el método de algebras de Lie	21
3. Dos Hamiltonianos de Jaynes-Cummings acoplados	26
3.1. Operador de evolución temporal	27
3.2. Evaluación de observables	31
3.3. Oscilaciones inducidas por estados coherentes	33
4. Modelo de Jaynes-Cummings deformado	38
4.1. susceptibilidad no lineal de tercer orden $\chi^{(3)}$ e índice refracción dependiente de la intensidad del campo	38
4.2. Operadores f-deformados	39
4.3. Modelo de Jaynes-Cummings deformado	40
4.4. Evaluación de observables	43
5. Conclusiones	46

Índice de figuras

1.1. Cavity con paredes perfectamente conductoras en $Z = 0$ y $Z = L$ con un campo eléctrico polarizado a lo largo del eje X.	12
2.1. Niveles de energía para el átomo de dos niveles y para un campo tipo oscilador armónico de un solo modo. ω_{eg} es la frecuencia de transición atómica y ω_c es la frecuencia del campo electromagnético.	17
2.2. Estados de energía átomo-cavidad no acoplados en el caso de $\Delta_c > 0$. Además del estado fundamental $ g, 0\rangle$, éstos forman una escalera infinita de dobletes. En cada doblete, los estados $ e, n\rangle$ y $ g, n + 1\rangle$ están separados por $\hbar\Delta_c$.	18
2.3. Oscilaciones de Rabi para la probabilidad de encontrar al átomo excitado en el tiempo $P_e(t)$, con un número de $n = 15$ fotones en el campo. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_c$.	20
2.4. Colapsos y reavivamientos: probabilidad $P_e(t)$ de encontrar el átomo en el estado excitado $ e\rangle$ al tiempo t . La cavidad contiene inicialmente un campo coherente con un promedio de $\bar{n} = 15$ fotones. (a) Comportamiento en una escala de tiempo larga. (b) Acercamiento al colapso y el inicio del primer reavivamiento. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_c$.	21
2.5. Probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado $P_e(t)$ al tiempo t obtenida a partir de la diagonalización del Hamiltoniano (izquierda). Probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado $P_e(t)$ al tiempo t obtenida a partir de método de álgebras de Lie (derecha). La cavidad contiene inicialmente un campo coherente con un promedio de $\bar{n} = 15$ fotones.	25
3.1. Dos cavidades con un espejo parcialmente reflectante común, cada una de ellas conteniendo un átomo de dos niveles en el régimen de acoplamiento fuerte.	26
3.2. Solución para $\gamma_p(t)$. En color azul podemos observar la parte real y en naranja la parte imaginaria. Podemos observar que γ_p comienza en cero y toma valores del orden de 10^{-2} .	30

3.3. Caso en resonancia: Valor promedio de fotones en la cavidad 1 $\langle n_1(t) \rangle$. De lado izquierdo: solución analítica utilizando el método de algebras de Lie. De lado derecho: valor obtenido al resolver la ecuación de Schrödinger de manera numérica. Con los parámetros: $\omega_1/2\pi = 1GHz$, $\omega_2/2\pi = 0.8GHz$, $\Omega_1 = 0.99\omega_1$, $\Omega_2 = 0.99\omega_2$, $g_1 = 0.041\omega_1$, $g_2 = 0.041\omega_2$, $\lambda = 0.001\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.	32
3.4. Valor promedio del número total de excitaciones en la cavidad uno $\langle \hat{M}_1 \rangle$ en azul, en la cavidad dos $\langle \hat{M}_2 \rangle$ en naranja y en el sistema completo $\langle \hat{M}_1 + \hat{M}_2 \rangle$ en verde . Con el conjunto de parámetros: $\Omega_1 = 0.999\omega_1$, $\Omega_2 = 0.999\omega_2$, $\frac{\omega_1}{2\pi} = 4GHz$, $\frac{\omega_2}{2\pi} = 5GHz$, $g_1 = 0.001\omega_1$, $g_2 = 0.001\omega_2$, y $\lambda = 0.25\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.	33
3.5. De lado izquierdo (cavidad 1): número promedio de fotones $\langle n_1(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ (abajo). De lado derecho (cavidad 2): número promedio de fotones $\langle n_2(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ (abajo). Con los parámetros $\omega_1/2\pi = 1GHz$, $\omega_2/2\pi = 0.8GHz$ $g_1 = 0.04\omega_1$, $g_2 = 0.04\omega_2$, $\lambda = 0.001\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.	35
3.6. De lado izquierdo (cavidad 1): número promedio de fotones $\langle n_1(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ (abajo). De lado derecho (cavidad 2): número promedio de fotones $\langle n_2(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ (abajo). Con los parámetros $g_1 = 0.001\omega_1$, $g_2 = 0.001\omega_2$, $\lambda = 0.25\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.	36
3.7. De lado izquierdo (cavidad 1): número promedio de fotones $\langle n_1(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ (abajo). De lado derecho (cavidad 2): número promedio de fotones $\langle n_2(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ (abajo). Con los parámetros $g_1 = 0.01\omega_1$, $g_2 = 0.01\omega_2$, $\lambda = 0.02\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.	37
4.1. Generación de terceros armónicos. (a) Geometría de la interacción. (b) representación de los niveles de energía.	39
4.2. Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica. Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = 0.00001\omega$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.	44
4.3. Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica. Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = 0.0001\omega$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.	44
4.4. Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica. Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = 0.001\omega$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.	44

4.5. Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica	
y de lado derecho la solución analítica. Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = g/3$. El tiempo	
está medido en unidades de $1/\omega$	45

Introducción

El modelo Jaynes-Cummings (JCM) es probablemente el modelo teórico más fundamental en óptica cuántica [21]. También es el modelo soluble más simple que describe la interacción entre la materia y la radiación electromagnética. El JCM consiste en un solo átomo de dos niveles que interactúa con un solo modo del campo electromagnético cuantizado en una cavidad cerrada (sin pérdidas), bajo la aproximación onda rotante [38]. Este modelo es capaz de describir los aspectos mecano-cuánticos de la interacción entre la luz y la materia. Ha llevado a predicciones no triviales, como la existencia de colapsos y reavivamientos en la excitación atómica [12, 14, 27], que han sido corroborados experimentalmente [7, 19]. El JCM ha permitido la generación de varios estados no clásicos, entre ellos, superposiciones de estados coherentes [17], también llamados "gatos de Schrödinger" [37, 42], estados de número [19] y estados comprimidos [23].

A lo largo de los años, el JCM ha sido exhaustivamente estudiado, extendido y generalizado. Estas generalizaciones tienden a abordar aspectos más complejos y realistas de la interacción entre átomos y campos, más allá de las simplificaciones del modelo original [4, 16, 43]. Estas incluyen el JCM generalizado (que incorpora múltiples niveles atómicos [3, 9, 22] o modos de campo [2, 40]), el JCM dispersivo [48], modelos que incluyen efectos no lineales [1, 13, 32] y pérdidas [33, 35], entre otros.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo, abordaremos conceptos fundamentales para el entendimiento del modelo de Jaynes-Cummings, como lo son la cuantización del campo electromagnético y la evolución temporal de sistemas cuánticos.

La cuantización del campo electromagnético constituye la base esencial para comprender cómo la radiación interactúa con sistemas cuánticos, mientras que el operador de evolución temporal nos permite analizar la evolución de dichos sistemas en el tiempo. Además, exploraremos el teorema de Wei-Norman, el cual nos permite, bajo ciertas condiciones, escribir el operador de evolución temporal de un sistema en forma de un producto de exponenciales. Al comprender estos conceptos, podremos desarrollar e interpretar las posibles generalizaciones del JCM que proponemos.

1.1. Evolución temporal de un sistema

Un sistema cuántico $|\Psi\rangle$ aislado de cualquier influencia externa evoluciona en el tiempo de manera exactamente predecible. Sea $|\Psi(t_0)\rangle$ el ket que representa a un estado en el tiempo t_0 ; el ket $|\Psi(t)\rangle$ que representa el estado al tiempo $t > t_0$ puede ser determinado exactamente a partir del estado inicial $|\Psi(t_0)\rangle$.

Primero postularemos que la superposición lineal de estados se conserva en el tiempo, en consecuencia, la correspondencia entre $|\Psi(t_0)\rangle$ y $|\Psi(t)\rangle$ es lineal y define cierto operador lineal $\hat{U}(t, t_0)$, el cual se llama operador de evolución temporal [26]

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (1.1)$$

donde el operador de evolución temporal \hat{U} es solución a la ecuación de Schrödinger con condición inicial

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}(t = t_0) = \hat{\mathbb{I}}. \quad (1.2)$$

Si el sistema es conservativo, es decir, su Hamiltoniano \hat{H} no tiene una dependencia temporal explícita, entonces $\hat{U}(t, t_0)$ puede ser encontrado integrando directamente la ecuación (1.2)

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)}. \quad (1.3)$$

1.2. Teorema de Wei-Norman

Consideremos un operador lineal $\hat{A}(t)$ dado por

$$\hat{A}(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \hat{X}_i, \quad m \text{ finita.} \quad (1.4)$$

donde las $a_i(t)$ son funciones escalares del tiempo y $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$ son operadores linealmente independientes en la representación de Schrödinger. Sea \mathcal{L} el algebra de Lie con dimensión finita l generada por los operadores $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$ bajo el conmutador $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \hat{X}_i \hat{X}_j - \hat{X}_j \hat{X}_i$.

Teorema 1 (Teorema de Wei-Norman). *Sea $\hat{A}(t)$ dado por la ecuación (1.4), y sea \mathcal{L} el algebra de Lie generada por $\hat{A}(t)$ de dimensión finita l . La solución a la ecuación*

$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{A}(t)\hat{U}(t), \quad U(t=0) = \hat{\mathbb{I}}, \quad (1.5)$$

en donde \hat{A} y \hat{U} son operadores lineales puede ser escrita de la forma

$$\hat{U}(t) = e^{g_1(t)\hat{X}_1} e^{g_2(t)\hat{X}_2} \dots e^{g_l(t)\hat{X}_l}, \quad (1.6)$$

donde las $g_i(t)$ son funciones escalares del tiempo y satisfacen un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen al sustituir el ansatz en la ecuación de Schrödinger. Esta representación es global para todas las algebras de Lie solubles. [44]

1.3. Cuantización del campo electromagnético de un solo modo

En esta sección se presenta una breve discusión de la cuantización del campo electromagnético de un solo modo y se discuten algunas de sus propiedades enfatizando la interpretación del fotón como una excitación elemental de un modo normal del campo. Nos limitamos al caso de un campo con un solo modo confinado por paredes conductoras perfectas en una cavidad unidimensional

Consideremos una cavidad unidimensional a lo largo del eje Z , con paredes en $Z = 0$ y $Z = L$ (tal como se muestra en la figura (1.1)) [16] El campo eléctrico debe desvanecerse en las fronteras y debe tomar la forma de una onda estacionaria. Asumimos que en la cavidad no hay ninguna fuente de radiación, es decir no hay corrientes, cargas, ni algún medio dieléctrico. Asumimos también que el campo está polarizado en la dirección X

$$\vec{E}(r, t) = \hat{e}_x E_x(z, t),$$

donde \hat{e}_x es el vector unitario de polarización.

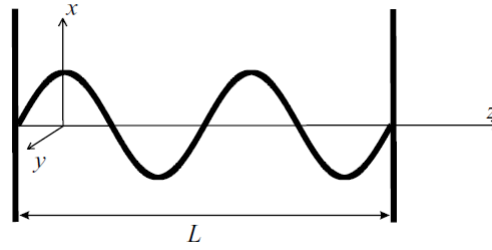


Figura 1.1: Cavidad con paredes perfectamente conductoras en $Z = 0$ y $Z = L$ con un campo eléctrico polarizado a lo largo del eje X.

Partiendo de ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.10)$$

un campo de un solo modo que satisface las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera $\vec{E}(0) = \vec{E}(L) = 0$ está dado por

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz), \quad (1.11)$$

donde ω es la frecuencia del modo, $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda, c la velocidad de la luz en el vacío, V es el volumen de la cavidad y $q(t)$ es un factor dependiente del tiempo con unidades de longitud el cual actúa como la coordenada canónica de posición. El campo magnético en la cavidad lo calculamos a partir de las ecuaciones (1.8), (1.11)

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right) \dot{q}(t) \cos(kz). \quad (1.12)$$

Aquí $\dot{q}(t)$ toma el rol de la variable canónica de momento, es decir $p(t) = \dot{q}(t)$. La energía o Hamiltoniano H de un campo de un solo modo está dada por

$$H = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 E_x^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(\vec{r}, t) \right],$$

$$H = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right], \quad (1.13)$$

a partir de las ecuaciones (1.11) y (1.12) es sencillo mostrar que

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (1.14)$$

Podemos observar que un campo de un solo modo es formalmente equivalente a un oscilador armónico de masa unitaria, donde los campos eléctrico y magnético toman el papel de las

variables canónicas de posición y momento respectivamente. Hasta el momento tenemos el Hamiltoniano para un campo clásico de un solo modo. Para cuantizarlo basta con proponer que las variables canónicas conjugadas ahora sean operadores, es decir $p \rightarrow \hat{p}$ y $q \rightarrow \hat{q}$ y además satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Con esto obtenemos el Hamiltoniano de un campo electromagnético (de un solo modo) cuantizado

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (1.15)$$

Los operadores \hat{q} y \hat{p} son Hermitianos y, por lo tanto, corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente y tradicional introducir los operadores de aniquilación \hat{a} y creación \hat{a}^\dagger , que no son Hermitianos (y, por lo tanto, no son observables), a través de la combinación de los operadores \hat{q} y \hat{p} :

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (1.16)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (1.17)$$

Los operadores de campo eléctrico y magnético se convierten, respectivamente, en:

$$\hat{E}(z) = \mathcal{E}_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \quad (1.18)$$

$$\hat{B}(z) = -iB_0 (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz), \quad (1.19)$$

donde $\mathcal{E}_0 = \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2}$ y $B_0 = \frac{\mu_0}{k} \left(\frac{\epsilon_0 \hbar \omega^3}{V}\right)^{1/2}$.

Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (1.20)$$

y como resultado, el Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.21)$$

Definimos \hat{n} como $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ y entonces obtenemos el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.22)$$

Los eigenestados del operador de número \hat{n} son conocidos como estados de número o estados de Fock, los cuales representan el número de fotones en un modo,

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (1.23)$$

Aplicando los operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger en los estados de la base (estados de número) tenemos

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (1.24)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.25)$$

1.4. Estados coherentes de Glauber

En la óptica cuántica, los estados coherentes son estados cuánticos del campo electromagnético, los cuales tienen un número indefinido de fotones, lo que les permite tener una fase más precisamente definida que un estado de número donde la fase es completamente aleatoria. El producto de la incertidumbre en amplitud y fase para un estado coherente es el mínimo permitido por el principio de incertidumbre de Heisenberg. En este sentido, son los estados cuánticos más cercanos a una descripción clásica del campo [43]. Erwin Schrödinger lo derivó como un paquete de ondas gaussiano de ‘mínima incertidumbre’ en 1926, buscando soluciones que satisfagan el principio de correspondencia [36].

Aunque los paquetes de ondas gaussianos de mínima incertidumbre eran bien conocidos, no atrajeron la atención de la comunidad hasta que Roy J. Glauber, en 1963, proporcionó una descripción cuántica de la coherencia en el campo electromagnético [17].

Glauber demostró que dichos estados son enormemente útiles para describir la física de la óptica cuántica. Desde el punto de vista físico, resulta que son estados propios de la función de coherencia (correlación) del campo electromagnético. En consecuencia, él denominó a estos estados como estados coherentes del campo electromagnético.

Según Glauber, los estados coherentes del campo se pueden construir a partir de cualquiera de las siguientes tres definiciones:

- *Definición 1:* Los estados coherentes $|\alpha\rangle$ son eigen-estados del operador de aniquilación del oscilador armónico \hat{a}

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.26)$$

donde α es un número complejo.

- *Definición 2:* Los estados coherentes $|\alpha\rangle$ pueden ser obtenidos al aplicar el operador de desplazamiento $\hat{D}(\alpha)$ en el estado de vacío del oscilador armónico,

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (1.27)$$

donde el operador de desplazamiento $\hat{D}(\alpha)$ está definido como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\}. \quad (1.28)$$

- *Definición 3:* Los estados coherentes son los estados cuánticos que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg,

$$\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} = \frac{\hbar}{2}. \quad (1.29)$$

Donde los operadores de coordenadas y de momento (\hat{q}, \hat{p}) están definidos como

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (1.30)$$

$$\hat{p} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.31)$$

y

$$(\Delta f)^2 \equiv \langle\alpha|(\hat{f} - \langle\hat{f}\rangle)^2|\alpha\rangle, \quad (1.32)$$

$$\langle\hat{f}\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{f}|\alpha\rangle. \quad (1.33)$$

Por supuesto, no todos los sistemas físicos pueden ser descritos por osciladores armónicos. Por lo tanto, desde la aparición de los artículos de Glauber, ha existido una necesidad real de generalizar estos estados coherentes del campo a otros sistemas que puedan poseer propiedades dinámicas diferentes. Basta con mencionar en este punto que la generalización de cada una de las definiciones matemáticas, a diferencia del caso de los estados coherentes del campo electromagnético, no dará lugar a estados coherentes equivalentes.

1.5. Efecto electro-óptico cuadrático (Efecto Kerr)

Descubierto por el físico escocés John Kerr en 1875 [20]. Encontró que una sustancia transparente isotrópica se vuelve birrefringente al colocarse en un campo eléctrico \vec{E} . El medio adquiere las propiedades de un cristal uniaxial cuyo eje óptico corresponde a la dirección del campo aplicado. Los dos índices de refracción n_{\parallel} y n_{\perp} , están asociados con las dos orientaciones del plano de vibración de la onda, esto es, paralela y perpendicular al campo eléctrico aplicado respectivamente. Su diferencia, Δn , constituye la birrefringencia que equivale a

$$\Delta n = \lambda_0 K E^2, \quad (1.34)$$

donde K es la constante de Kerr. Obsérvese que el efecto Kerr es proporcional al cuadrado del campo, denominándose a menudo como efecto electro-óptico cuadrático.

Capítulo 2

Modelo Jaynes-Cummings

Propuesto por Jaynes y Cummings en 1963 [21], el modelo consiste en un átomo de dos niveles interactuando con un solo modo de una cavidad, las frecuencias de transición atómica y de la cavidad son cercanas. El modelo se utilizó por primera vez para examinar los aspectos clásicos de la emisión espontánea. También se encontró que el campo de la cavidad, una vez modificado por la interacción con el átomo, tenía propiedades estadísticas que no se encuentran en campos clásicos.

El Hamiltoniano completo del sistema es

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{ac}, \quad (2.1)$$

donde \hat{H}_a es el Hamiltoniano del átomo, \hat{H}_c es el Hamiltoniano del campo y \hat{H}_{ac} es el término de acoplamiento átomo-campo.

$$\hat{H}_a = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\hat{\sigma}_z, \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_c = \hbar\omega_c\hat{n}, \quad (2.3)$$

$$\hat{H}_{ac} = -\vec{D} \cdot \vec{E}_c, \quad (2.4)$$

donde ω_{eg} es la frecuencia de transición atómica, ω_c es la frecuencia del campo, \vec{D} es el operador dipolar atómico y \vec{E}_c es el operador de campo eléctrico de la cavidad,

$$\hat{D} = d(\epsilon_a\hat{\sigma}_- + \epsilon_a^*\hat{\sigma}_+), \quad (2.5)$$

$$\vec{E}_c = i\mathcal{E}_0(\epsilon_c\hat{a} - \epsilon_c^*\hat{a}^\dagger), \quad (2.6)$$

En la ecuación (2.5) d es el elemento de matriz dipolar de la transición atómica, ϵ_a y ϵ_c son los vectores unitarios de polarización, \mathcal{E}_0 es la amplitud del campo eléctrico, los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} son los operadores de creación y aniquilación respectivamente, los cuales satisfacen la relación de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Finalmente, $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_\pm$ son los operadores de transición atómica de dos niveles, que obedecen las relaciones de conmutación $[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z$ y $[\hat{\sigma}_\pm, \hat{\sigma}_z] = \mp 2\hat{\sigma}_\pm$. Usando la notación

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (2.7)$$

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (2.8)$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|. \quad (2.9)$$

Estos operadores actúan sobre los niveles atómicos $|g\rangle$ (estado base) y $|e\rangle$ (estado excitado) de la siguiente manera: $\hat{\sigma}_+ |g\rangle = |e\rangle$, $\hat{\sigma}_- |e\rangle = |g\rangle$, $\hat{\sigma}_z |g\rangle = -|g\rangle$ y $\hat{\sigma}_z |e\rangle = |e\rangle$

los operadores $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ son los operadores de ascenso y descenso y están definidos como:

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y), \quad (2.10)$$

$$\hat{\sigma}_- = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y). \quad (2.11)$$

Reescribiendo \hat{H}_{ac} y desarrollando el producto escalar tenemos:

$$\hat{H}_{ac} = -d [\epsilon_a \hat{\sigma}_- + \epsilon_a^* \hat{\sigma}_+] \cdot i\mathcal{E}_0 [\epsilon_c \hat{a} - \epsilon_c^* \hat{a}^\dagger] \quad (2.12)$$

$$\hat{H}_{ac} = -id\mathcal{E}_0 [\epsilon_a \cdot \epsilon_c \hat{\sigma}_- \hat{a} - \epsilon_a \cdot \epsilon_c^* \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \epsilon_a^* \cdot \epsilon_c \hat{\sigma}_+ \hat{a} - \epsilon_a^* \cdot \epsilon_c^* \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger]. \quad (2.13)$$

El desarrollo de este producto escalar incluye cuatro términos. Dos de ellos son proporcionales a $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ y $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$. El primero corresponde a una transición del estado excitado $|e\rangle$ al estado base $|g\rangle$, junto con la aniquilación de un fotón. El segundo describe el proceso contrario: la creación de un fotón y una transición del estado $|g\rangle$ al estado $|e\rangle$. Cuando las frecuencias de modo de

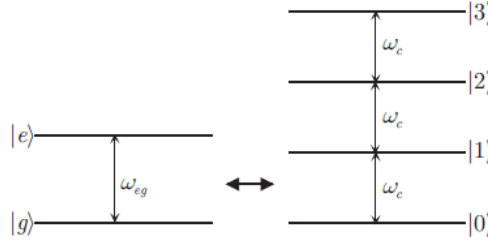


Figura 2.1: Niveles de energía para el átomo de dos niveles y para un campo tipo oscilador armónico de un solo modo. ω_{eg} es la frecuencia de transición atómica y ω_c es la frecuencia del campo electromagnético.

cavidad y de transición atómica, ω_c y ω_{eg} , están cerca, estos términos corresponden a procesos altamente no resonantes y juegan un papel menor en la evolución, en comparación con los otros dos términos, proporcionales a $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ y $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$, que corresponden a los procesos habituales de absorción o emisión de fotones. Descartar los dos términos contra-rotantes equivale a realizar la aproximación de onda rotante. Con esta aproximación, el acoplamiento átomo-cavidad se reduce a

$$\hat{H}_{ac} = -i\hbar \frac{\Omega_0}{2} [\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-], \quad (2.14)$$

donde

$$\Omega_0 = \frac{2d\mathcal{E}_0 \epsilon_a^* \epsilon_c}{\hbar} \quad (2.15)$$

es la frecuencia de Rabi del vacío, la cual mide la intensidad del acoplamiento átomo – campo. Con esto, el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings es

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \frac{\omega_{eg}}{2} \hat{\sigma}_z - i\hbar \frac{\Omega_0}{2} (\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-). \quad (2.16)$$

2.1. Valores propios y vectores propios

Los estados propios de $\hat{H}_a + \hat{H}_c$ son productos tensoriales de $|e, n\rangle$ y $|g, n + 1\rangle$ y sus energías son $\hbar \left(\frac{\omega_{eg}}{2} + n\omega_c \right)$ y $\hbar \left(-\frac{\omega_{eg}}{2} + (n + 1)\omega_c \right)$.

Cuando el desentonamiento átomo-cavidad

$$\Delta = \omega_{eg} - \omega_c, \quad (2.17)$$

es igual a cero (en resonancia) los estados desacoplados $|e, n\rangle$ y $|g, n + 1\rangle$ son degenerados. Si el desentonamiento es pequeño comparado con ω_c (cerca de resonancia) los estados desacoplados son casi degenerados. Los estados excitados de $\hat{H}_a + \hat{H}_c$ están organizados como una escalera de dobletes, separados cada uno por una energía $\hbar\Delta_c$ (ver figura 2.2). El estado $|g, 0\rangle$ representa al átomo en el estado base y a la cavidad en el estado de vacío, este estado es el único estado desacoplado en la escalera.

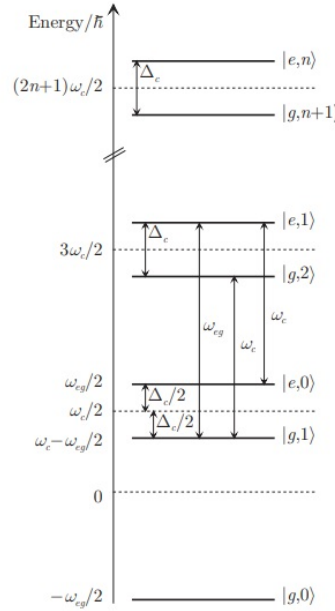


Figura 2.2: Estados de energía átomo-cavidad no acoplados en el caso de $\Delta_c > 0$. Además del estado fundamental $|g, 0\rangle$, éstos forman una escalera infinita de dobletes. En cada doblete, los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n + 1\rangle$ están separados por $\hbar\Delta_c$.

El n -ésimo doblete almacena $n + 1$ excitaciones elementales, ya sea como $n + 1$ cuantos de campo $|g, n + 1\rangle$ o como la suma de n fotones agregados a una excitación atómica $|e, n\rangle$. El operador

$$\hat{M} = a^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-, \quad (2.18)$$

representa el número total de excitaciones atómicas y de campo. Este operador conmuta con el Hamiltoniano por lo que es una constante de movimiento. Dado que el número de excitaciones se conserva, el acoplamiento átomo-campo \hat{H}_{ac} conecta solo estados dentro de cada doblete. La diagonalización del Hamiltoniano completo equivale, por lo tanto, a resolver N problemas de dos niveles independientes.

Llamemos \hat{H}_n a la restricción del Hamiltoniano total de Jaynes-Cummings al n -ésimo do-

blete. Introduciendo la 'frecuencia de Rabi de n fotones'

$$\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}, \quad (2.19)$$

podemos escribir \hat{H}_n de forma matricial como

$$\hat{H}_n = \hbar\omega_c \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \hat{\mathbb{I}} + \hat{V}_n, \quad (2.20)$$

con

$$\hat{V}_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta_c & -i\Omega_n \\ i\Omega_n & -\Delta_c \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (\Delta_c \hat{\sigma}_z + \Omega_n \hat{\sigma}_y), \quad (2.21)$$

La diagonalización de \hat{H}_n es formalmente idéntica a la determinación de los estados propios de un espín colocado en un campo magnético cuyas componentes a lo largo de OZ y OY son proporcionales a Δ_c y Ω_n [28]. Este campo ficticio forma un ángulo θ_n con respecto a Z , definido por

$$\tan(\theta_n) = \frac{\Omega_n}{\Delta_c}, \quad (2.22)$$

A partir de esta sencilla analogía, deducimos inmediatamente que los valores propios de \hat{H}_n son

$$E_n^\pm = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + \Omega_n^2}, \quad (2.23)$$

con los correspondientes eigenvectores:

$$|+, n\rangle = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |e, n\rangle + i \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |g, n+1\rangle; \quad (2.24)$$

$$|-, n\rangle = \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |e, n\rangle - i \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) |g, n+1\rangle. \quad (2.25)$$

Estos estados, que están entrelazados, se llaman los “estados vestidos” del sistema átomo-campo [28].

2.2. Oscilaciones de Rabi inducidas por n fotones

En el caso resonante, el ángulo de mezcla es $\theta_n = \pi/2$ para todos los valores de n . Los estados vestidos, separados por $\hbar\Omega_n$, son los siguientes

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e, n\rangle \pm i |g, n+1\rangle]. \quad (2.26)$$

Consideremos el caso simple de un átomo inicialmente ($t_0 = 0$) en el estado excitado $|e\rangle$, dentro de una cavidad que contiene n fotones. El estado inicial, $|\Psi_e(0)\rangle = |e, n\rangle$, expresado en la base de estados vestidos, es el siguiente

$$|\Psi_e(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+, n\rangle + |-, n\rangle], \quad (2.27)$$

Describiremos la evolución de este estado en la representación de interacción con respecto al término $\hbar\omega_c(\hat{n} + \frac{1}{2})\hat{\mathbb{I}}$ en un tiempo $t > t_0$. $|\Psi_e(0)\rangle$ se convierte en:

$$|\Psi_e(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+, n\rangle e^{-i\frac{\Omega_n t}{2}} + |-, n\rangle e^{i\frac{\Omega_n t}{2}} \right] \quad (2.28)$$

$$|\Psi_e(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e, n\rangle + \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |g, n+1\rangle. \quad (2.29)$$

La probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado $|e\rangle$ es:

$$\begin{aligned} P_e(t) &= |\langle e|\Psi_e(t)\rangle|^2, \\ P_e(t) &= \cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

El acoplamiento átomo-campo da como resultado un intercambio de energía entre $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ a una frecuencia Ω_n .

Un átomo inicialmente en el estado excitado $|e\rangle$ emite un fotón mientras realiza una transición al estado base $|g\rangle$. En el espacio libre, el fotón escapa y el átomo permanece en el estado $|g\rangle$. En la cavidad, por el contrario, el fotón emitido por el átomo queda atrapado. Puede ser absorbido y luego emitido nuevamente, y así sucesivamente.

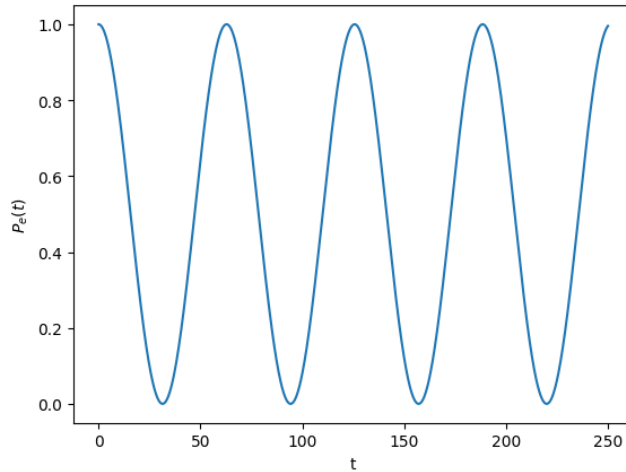


Figura 2.3: Oscilaciones de Rabi para la probabilidad de encontrar al átomo excitado en el tiempo $P_e(t)$, con un número de $n = 15$ fotones en el campo. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_c$.

2.3. Colapsos y reavivamientos inducidos por un campo coherente

Supongamos que el átomo se encuentra inicialmente en el estado excitado estado $|e\rangle$ e interactúa con un campo coherente [17]

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.31)$$

cuyo número promedio de fotones es $\bar{n} = |\alpha|^2$. A partir de la ecuación (2.29) podemos encontrar la función de onda al tiempo t

$$|\Psi_e(t)\rangle = \sum_n \left[c_n \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e, n\rangle + c_n \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |g, n+1\rangle \right]. \quad (2.32)$$

La probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado $|e\rangle$ es

$$P_e(t) = \sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{1 + \cos(\Omega_n t)}{2}. \quad (2.33)$$

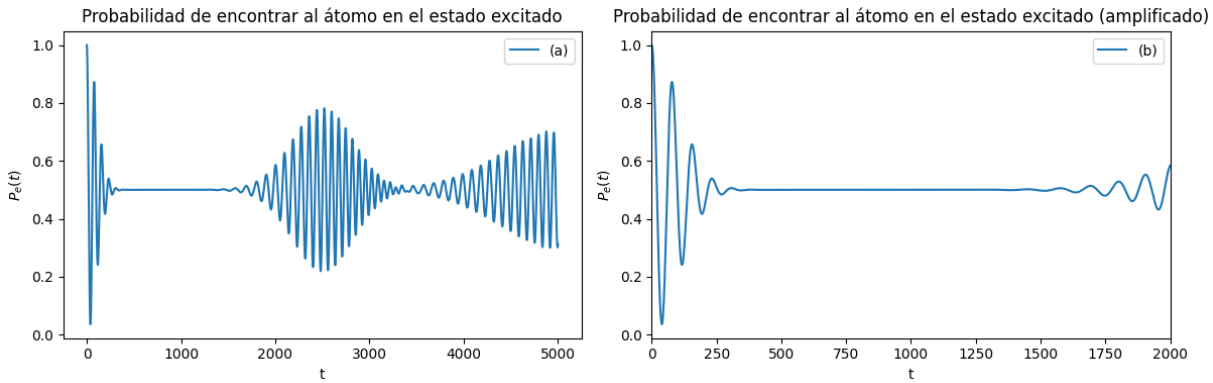


Figura 2.4: Colapsos y reavivamientos: probabilidad $P_e(t)$ de encontrar el átomo en el estado excitado $|e\rangle$ al tiempo t . La cavidad contiene inicialmente un campo coherente con un promedio de $\bar{n} = 15$ fotones. (a) Comportamiento en una escala de tiempo larga. (b) Acercamiento al colapso y el inicio del primer reavivamiento. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_c$.

Dado que la frecuencia de Rabi es una función del número de fotones del campo, ver la Ec. (2.19), y dado que el estado coherente es una superposición de estados número ver Ec. (2.31). Al tener un estado coherente como estado inicial obtenemos una superposición de las oscilaciones de Rabi con frecuencias diferentes. Esta superposición da lugar a patrones de interferencias constructivas y destructivas, ya que las oscilaciones se desfazan entre sí.

2.4. Operador de evolución temporal para el modelo de Jaynes-Cummings por el método de álgebras de Lie

Un método alternativo y más general para resolver el problema, es utilizando el método de álgebras de Lie, en donde a partir del teorema de Wei-Norman [44] podemos escribir el operador de evolución temporal del sistema en forma de un producto de exponenciales cuando los operadores presentes en el Hamiltoniano cierran un álgebra de Lie bajo la conmutación.

En esta sección encontraremos el operador de evolución temporal para el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings y verificaremos la equivalencia entre las soluciones obtenidas al diagonalizar el Hamiltoniano y las soluciones obtenidas a partir de este método.

Partimos del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings dado en la ecuación (2.16) y lo escribimos

como una parte sin perturbar \hat{H}_0 y una perturbación \hat{V}

$$\hat{H} = \underbrace{\hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\frac{\omega_{eg}}{2}\hat{\sigma}_z}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)}_{\hat{V}}, \quad (2.34)$$

en donde hemos escrito la interacción en términos de una constante real $\lambda = \Omega_0/2$ y hemos tomado la suma de los operadores para que el Hamiltoniano sea hermitiano. Podemos escribir el operador de evolución temporal del sistema como

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_0(t, t_0)\hat{U}_I(t, t_0), \quad (2.35)$$

donde $\hat{U}_0(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal correspondiente a \hat{H}_0 y $\hat{U}_I(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal correspondiente a la interacción.

Primero, encontraremos el operador de evolución temporal para \hat{H}_0 .

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}_0(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}_0\hat{U}_0(t, t_0),$$

como \hat{H}_0 es independiente del tiempo podemos integrar directamente la ecuación anterior y obtenemos la expresión correspondiente al operador $\hat{U}_0(t, t_0)$

$$\hat{U}_0(t, t_0) = e^{-i\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}(t-t_0)}e^{-i\frac{\omega_{eg}}{2}\hat{\sigma}_z(t-t_0)}. \quad (2.36)$$

Ya que conocemos la expresión para el operador $\hat{U}_0(t, t_0)$, podemos encontrar el Hamiltoniano en la representación de interacción, que está dado por

$$\hat{H}_I(t) = \left[\hat{U}_0^\dagger(t, t_0)\hat{V}\hat{U}_0(t, t_0) \right], \quad (2.37)$$

y su correspondiente operador de evolución temporal $\hat{U}_I(t, t_0)$ que satisface la ecuación

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}_I(t)\hat{U}_I(t, t_0), \quad (2.38)$$

con la condición inicial $\hat{U}_I(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{I}}$.

Para poder resolver la ecuación para $\hat{U}_I(t, t_0)$, primero debemos encontrar la forma explícita del Hamiltoniano de interacción $\hat{H}_I(t)$ (ec. 2.38):

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \left[\hat{U}_0^\dagger(t, t_0)\hat{V}\hat{U}_0(t, t_0) \right], \\ \hat{H}_I(t) &= e^{i\frac{\omega_{eg}}{2}\hat{\sigma}_z t}e^{i\omega_c\hat{n}t} \left[\hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \right] e^{-i\omega_c\hat{n}t}e^{-i\frac{\omega_{eg}}{2}\hat{\sigma}_z t}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

en donde hemos elegido el tiempo inicial $t_0 = 0$. Utilizando el lema de Baker–Hausdorff [34, p.96] para realizar las transformaciones correspondientes, obtenemos:

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\lambda \left[\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{-i(\omega_c-\omega_{eg})t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{i(\omega_c-\omega_{eg})t} \right], \quad (2.40)$$

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\lambda \left[\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{-i\Delta ct} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{i\Delta ct} \right], \quad (2.41)$$

donde $\Delta_c = \omega_c - \omega_{eg}$ es la frecuencia de desentonamiento. Definimos el operador \hat{M} de la siguiente manera

$$\hat{M} = \hat{n} + \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_z), \quad (2.42)$$

donde \hat{M} es el operador que representa el número total de excitaciones. Aplicando \hat{M} a los elementos de la base, tenemos:

$$\hat{M}|n, e\rangle = (n + 1)|n, e\rangle, \quad (2.43)$$

$$\hat{M}|n + 1, g\rangle = (n + 1)|n + 1, g\rangle. \quad (2.44)$$

Ahora definimos los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger de la siguiente manera:

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{\hat{M}}}\hat{a}\hat{\sigma}_+, \quad (2.45)$$

$$\hat{b}^\dagger = \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\frac{1}{\sqrt{\hat{M}}}. \quad (2.46)$$

Aplicando estos nuevos operadores a los elementos de la base:

$$\hat{b}|n, e\rangle = 0, \quad (2.47)$$

$$\hat{b}^\dagger|n, e\rangle = |n + 1, g\rangle, \quad (2.48)$$

$$\hat{b}|n + 1, g\rangle = |n, e\rangle, \quad (2.49)$$

$$\hat{b}^\dagger|n + 1, g\rangle = 0. \quad (2.50)$$

Usando la forma en que los operadores \hat{b} , \hat{b}^\dagger actúan sobre los estados de la base, encontramos las relaciones de conmutación:

$$[\hat{b}, \hat{\sigma}_z] = -2\hat{b}, \quad (2.51)$$

$$[\hat{b}^\dagger, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{b}^\dagger, \quad (2.52)$$

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{\sigma}_z, \quad (2.53)$$

y vemos que el conjunto de operadores que aparece en el Hamiltoniano $\hat{H}_I(t)$ es cerrado ante conmutación. Ahora reescribimos el Hamiltoniano de interacción (ec. 2.41) en términos de los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger :

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \lambda \left(\sqrt{\hat{M}}\hat{b}e^{-i\Delta_c t} + \hat{b}^\dagger e^{i\Delta_c t} \sqrt{\hat{M}} \right), \\ \hat{H}_I(t) &= \lambda \sqrt{n + 1} \left(\hat{b}e^{-i\Delta_c t} + \hat{b}^\dagger e^{i\Delta_c t} \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dado que los operadores \hat{b} , \hat{b}^\dagger y $\hat{\sigma}_z$ cierran un álgebra de Lie, podemos utilizar el teorema de Wei-Norman [44] para escribir el operador de evolución temporal $\hat{U}_I(t, t_0)$ como un producto de exponenciales

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{\eta(t)\hat{\sigma}_z} e^{\beta(t)\hat{b}} e^{\gamma(t)\hat{b}^\dagger}; \quad \hat{U}_I(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{I}}. \quad (2.55)$$

Para determinar las funciones complejas $\eta(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, sustituiremos en la ecuación de Schrödinger la expresión para $\hat{U}_I(t, t_0)$ dada en la ecuación (2.55), con esto encontramos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con condiciones iniciales $\eta(t_0) = \gamma(t_0) = \beta(t_0) = 0$.

$$\dot{\gamma}(t) = -if^*(t)e^{2\eta(t)}, \quad (2.56)$$

$$\dot{\eta}(t) = if^*(t)e^{2\eta(t)}\beta(t), \quad (2.57)$$

$$\dot{\beta}(t) = -i \left[f(t)e^{-2\eta(t)} + f^*(t)e^{2\eta(t)}\beta^2(t) \right], \quad (2.58)$$

$$(2.59)$$

donde $f(t) = \lambda\sqrt{n+1}e^{-i\Delta_c t}$ y $f^*(t) = \lambda\sqrt{n+1}e^{i\Delta_c t}$.

Una vez que conocemos $\hat{U}_0(t, t_0)$ y $\hat{U}_I(t, t_0)$, podemos escribir el operador de evolución temporal del sistema completo

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \hat{U}_0(t)\hat{U}_I(t), \\ \hat{U}(t) &= e^{-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} e^{-i\omega_{eg} \hat{\sigma}_z t} e^{\eta(t) \hat{\sigma}_z} e^{\beta(t) \hat{b}} e^{\gamma(t) \hat{b}^\dagger}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Con la expresión exacta del operador de evolución temporal por este método, podemos evaluar observables, por ejemplo, la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado. Consideremos el estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |e\rangle$, donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente del campo (ver ec. 2.31) con un número promedio de fotones de $\bar{n} = 15$ y el átomo está en el estado excitado. La probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado a un tiempo $t > 0$ está dada por:

$$P_e(t) = |\langle e|\Psi(t)\rangle|^2,$$

donde

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \gamma(t)\beta(t)) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{\alpha(t)} e^{-i\omega_{eg}t} e^{-\omega_c t n} |n, e\rangle \right) \right] + \\ &e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma(t) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\alpha(t)} e^{i\omega_{eg}t} e^{-\omega_c t n} |n+1, g\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Con esto, la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado es

$$P_e(t) = |\langle e|\Psi(t)\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| 1 + \gamma(t)\beta(t) \right|^2 \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{2\text{Re}\{\alpha(t)\}}. \quad (2.62)$$

2.4. OPERADOR DE EVOLUCIÓN TEMPORAL PARA EL MODELO DE JAYNES-CUMMINGS POR EL MÉTODO DE ALGEBRAS DE LIE

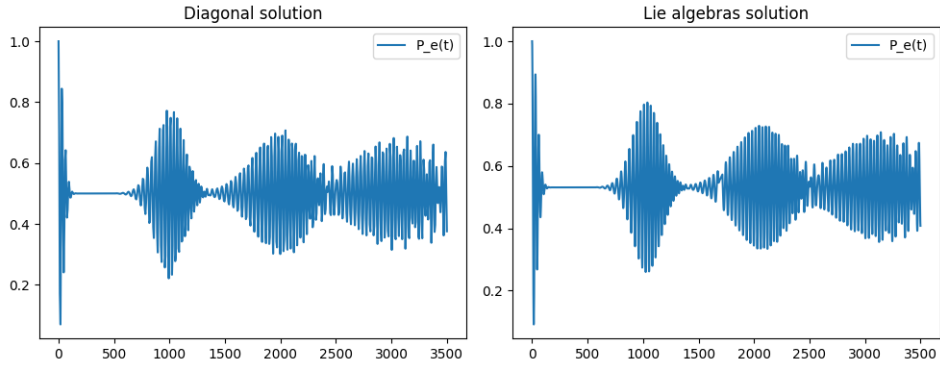


Figura 2.5: Probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado $P_e(t)$ al tiempo t obtenida a partir de la diagonalización del Hamiltoniano (izquierda). Probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado $P_e(t)$ al tiempo t obtenida a partir de método de álgebras de Lie (derecha). La cavidad contiene inicialmente un campo coherente con un promedio de $\bar{n} = 15$ fotones.

En la figura [2.5](#), se pueden apreciar los colapsos y reavivamientos, un resultado idéntico al obtenido con el método de diagonalización del Hamiltoniano. Como era de esperar, la resolución del problema a través del operador de evolución temporal mediante el método de álgebras de Lie reproduce precisamente el mismo comportamiento, incluyendo las oscilaciones de Rabi, así como los colapsos y reavivamientos. Esta coincidencia era de esperar ya que estamos resolviendo el mismo problema de forma exacta, pero empleando un método diferente. Vale la pena destacar que el método de álgebras de Lie no solo es equivalente, sino también más general, lo cual aporta una perspectiva adicional a la resolución del problema.

Capítulo 3

Dos Hamiltonianos de Jaynes-Cummings acoplados

En esta sección, estudiaremos una generalización al modelo de Jaynes-Cummings considerando el acoplamiento de dos cavidades la cuales comparten un espejo parcialmente reflejante que oscila debido a la presión de radiación, de modo que los fotones pueden pasar de una cavidad a la otra (ver figura [3.1](#) [\[15\]](#)). Cada cavidad contiene un átomo de dos niveles y un campo electromagnético cuantizado en su interior. Estos sistemas son de interés ya que pueden usarse para transferir información cuántica y, por lo tanto, ser el bloque de construcción más pequeño de una posible cadena. Mostraremos cómo obtener un operador de evolución temporal aproximado que pueda escribirse en una forma de producto de exponenciales. Para hacerlo, realizaremos algunas aproximaciones en el Hamiltoniano de interacción.

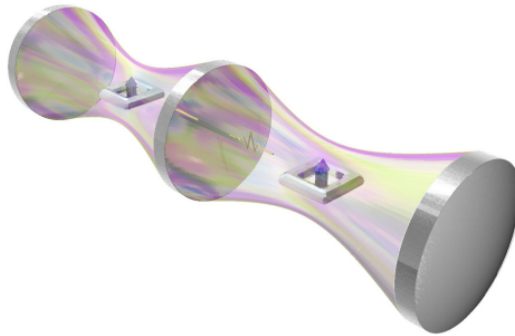


Figura 3.1: Dos cavidades con un espejo parcialmente reflectante común, cada una de ellas conteniendo un átomo de dos niveles en el régimen de acoplamiento fuerte.

El Hamiltoniano de este sistema es [\[15\]](#)

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_{JC}^{(1)} + \hat{H}_{JC}^{(2)} + \hbar\zeta(t)(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger), \quad (3.1)$$

donde $\hat{H}_{JC}^{(i)}$ son los Hamiltonianos de Jaynes-Cummings (Ec. [2.16](#)) para la cavidad 1 y la

cavidad 2 respectivamente y el tercer término describe el acoplamiento entre las dos cavidades.

$$\hat{H}(t) = \hbar \sum_{i=1}^2 \left[\omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{\Omega_i}{2} \hat{\sigma}_z^{(i)} + g_i \left(\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{a}_i + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{a}_i^\dagger \right) \right] + \hbar \zeta(t) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger). \quad (3.2)$$

Cuando la longitud efectiva de la cavidad oscila con una amplitud pequeña, el parámetro de acoplamiento cavidad-cavidad es una función dependiente del tiempo $\zeta(t) = \zeta_0 \cos(\omega_d t)$ con $\zeta_0/\omega_i \ll 1$, donde ω_d es la frecuencia de oscilación del espejo compartido por las cavidades.

Estamos interesados en la mezcla de modos. En este caso, elegimos la frecuencia del espejo como $\omega_d \simeq \omega_1 - \omega_2$, lo que nos proporciona una aproximación de la interacción entre las cavidades donde podemos despreciar los términos contra-rotantes y nos quedamos con los que conservan el número total de excitaciones [29].

3.1. Operador de evolución temporal

Escribimos el Hamiltoniano separándolo en dos términos, el primero como un Hamiltoniano sin perturbar \hat{H}_0 y el otro como una perturbación $\hat{V}(t)$

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \hbar(\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\Omega_1}{2} \hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{\Omega_2}{2} \hat{\sigma}_z^{(2)}) \\ &+ \hbar(g_1(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)}) + g_2(\hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)})) \\ &+ \hbar \zeta(t) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tomando como Hamiltoniano no perturbado a

$$\hat{H}_0 = \hbar(\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\Omega_1}{2} \hat{\sigma}_z^{(1)} + \frac{\Omega_2}{2} \hat{\sigma}_z^{(2)}), \quad (3.4)$$

cuyo operador de evolución temporal es

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\omega_1 t \hat{n}_1} e^{-i\frac{\Omega_1}{2} t \hat{\sigma}_z^{(1)}} e^{-i\omega_2 t \hat{n}_2} e^{-i\frac{\Omega_2}{2} t \hat{\sigma}_z^{(2)}}, \quad (3.5)$$

en donde hemos tomado $t_0 = 0$.

Obtenemos el Hamiltoniano en la representación de interacción

$$\hat{H}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{V}(t) \hat{U}_0(t),$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \hbar g_1 (\hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(1)} e^{-i(\omega_1 - \Omega_1)t} + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} e^{i(\omega_1 - \Omega_1)t}) + \hbar g_2 (\hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(2)} e^{-i(\omega_2 - \Omega_2)t} + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} e^{i(\omega_2 - \Omega_2)t}) \\ &+ \hbar \frac{\zeta_0}{2} (e^{i\omega_d t} + e^{-i\omega_d t}) (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \\ &\quad + \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Separamos el Hamiltoniano de interacción $\hat{H}_I(t)$ como $\hat{H}_I(t) = \hat{V}_{(1)}(t) + \hat{V}_{(2)}(t)$ siendo

$$\begin{aligned} \hat{V}_{(1)}(t) &= \hbar \frac{\zeta_0}{2} (e^{i\omega_d t} + e^{-i\omega_d t}) (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}), \\ &\simeq \hbar \frac{\zeta_0}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{-i(\omega_d - (\omega_1 - \omega_2))t} + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{i(\omega_d - (\omega_1 - \omega_2))t} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{(2)}(t) &= \hbar g_1 (\hat{a}_1 \hat{\sigma}_1^{(+)} e^{-i(\omega_1 - \Omega_1)t} + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_1^{(-)} e^{i(\omega_1 - \Omega_1)t}) \\ &\quad + \hbar g_2 (\hat{a}_2 \hat{\sigma}_2^{(+)} e^{-i(\omega_2 - \Omega_2)t} + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_2^{(-)} e^{i(\omega_2 - \Omega_2)t}), \end{aligned}$$

en donde hemos descartado los términos que oscilan rápidamente. El operador de evolución temporal de todo el sistema lo podemos escribir como $\hat{U} = \hat{U}_0 \hat{U}_I = \hat{U}_0 \hat{U}_I^{(1)} \hat{U}_I^{(2)}$.

Definiendo ahora los operadores:

$$\hat{J}_+ = \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger, \quad (3.8)$$

$$\hat{J}_- = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \quad (3.9)$$

$$\hat{J}_z = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \quad (3.10)$$

cuya tabla de conmutación es

	\hat{J}_+	\hat{J}_-	\hat{J}_z
\hat{J}_+	0	\hat{J}_z	$-2\hat{J}_+$
\hat{J}_-	$-\hat{J}_z$	0	$2\hat{J}_-$
\hat{J}_z	$2\hat{J}_+$	$-2\hat{J}_-$	0

Escribimos el Hamiltoniano de interacción $\hat{V}_{(1)}(t)$ en términos de estos nuevos operadores

$$\hat{V}_{(1)}(t) = \hbar \frac{\zeta_0}{2} \left(e^{i(\omega_d - (\omega_1 - \omega_2))t} \hat{J}_+ + e^{-i(\omega_d - (\omega_1 - \omega_2))t} \hat{J}_- \right), \quad (3.11)$$

$$\hat{V}_{(1)}(t) = \hbar \frac{\zeta_0}{2} \left(e^{i\Delta t} \hat{J}_+ + e^{-i\Delta t} \hat{J}_- \right), \quad (3.12)$$

con $\Delta = \omega_d - (\omega_1 - \omega_2)$.

Dado que los operadores que contiene $\hat{V}_{(1)}(t)$ cierran un algebra de Lie, podemos utilizar el teorema de Wei-Norman [\[44\]](#) para escribir su operador de evolución temporal como un producto

$$\hat{U}_I^{(1)}(t) = e^{\gamma_+(t)\hat{J}_+} e^{\gamma_-(t)\hat{J}_-} e^{\gamma_z(t)\hat{J}_z}, \quad (3.13)$$

donde los coeficientes $\gamma_i(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{\gamma}_+(t) = -i \frac{\zeta_0}{2} (e^{i\Delta t} - \gamma_+^2 e^{-i\Delta t}), \quad (3.14)$$

$$\dot{\gamma}_-(t) = -i \frac{\zeta_0}{2} (1 + 2\gamma_+ \gamma_-) e^{-i\Delta t}, \quad (3.15)$$

$$\dot{\gamma}_z(t) = i \frac{\zeta_0}{2} \gamma_+ e^{-i\Delta t}. \quad (3.16)$$

El operador de evolución temporal $\hat{U}_I^{(2)}(t)$ satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_I^{(2)}(t)}{\partial t} = \left[\hat{U}_I^{(1)\dagger}(t) \hat{V}_{(2)}(t) \hat{U}_I^{(1)}(t) \right] \hat{U}_I^{(2)}(t) \equiv \hat{H}_I^{(2)}(t) \hat{U}_I^{(2)}(t).$$

Debemos ahora transformar el $\hat{V}_{(2)}(t)$ para pasar a una nueva representación de interacción.

Primero escribimos $\hat{V}_{(2)}(t) = \hat{H}_{JC}^{(1)}(t) + H_{JC}^{(2)}(t)$ con:

$$\hat{H}_{JC}^{(1)}(t) = \hbar g_1 (\hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(1)} e^{-i(\omega_1 - \Omega_1)t} + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} e^{i(\omega_1 - \Omega_1)t}), \quad (3.17)$$

$$\hat{H}_{JC}^{(2)}(t) = \hbar g_2 (\hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(2)} e^{-i(\omega_2 - \Omega_2)t} + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} e^{i(\omega_2 - \Omega_2)t}), \quad (3.18)$$

donde al aplicar las transformaciones se obtiene

$$\begin{aligned} U_1^\dagger(t) H_{JC}^{(1)}(t) U_1(t) &= \hbar g_1 \left((1 + \gamma_+(t) \gamma_-(t)) e^{-\gamma_z(t) - i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + e^{\gamma_z(t) + i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(1)} \right) + \\ &\quad \hbar g_1 \left[\gamma_2(t) e^{-\gamma_3(t) + i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(1)} - \gamma_1(t) e^{\gamma_3(t) - i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} U_1^\dagger(t) H_{JC}^{(2)}(t) U_1(t) &= \hbar g_2 \left(e^{\gamma_z(t) - i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} + (1 + \gamma_+(t) \gamma_-(t)) e^{-\gamma_z(t) + i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(2)} \right) + \\ &\quad \hbar g_2 \left[\gamma_2(t) e^{-\gamma_3(t) - i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} + \gamma_1(t) e^{\gamma_3(t) + i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Entonces el Hamiltoniano correspondiente en la representación de interacción es

$$\begin{aligned} H_I^{(2)}(t) &= \hbar g_1 \left((1 + \gamma_+(t) \gamma_-(t)) e^{-\gamma_z(t) - i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} + e^{\gamma_z(t) + i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(1)} \right) + \\ &\quad + \hbar g_2 \left(e^{\gamma_z(t) - i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} + (1 + \gamma_+(t) \gamma_-(t)) e^{-\gamma_z(t) + i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(2)} \right) + \\ &\quad \hbar g_1 \left[\gamma_2(t) e^{-\gamma_3(t) + i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+^{(1)} - \gamma_1(t) e^{\gamma_3(t) - i(\Omega_1 - \omega_1)t} \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_-^{(1)} \right] + \\ &\quad \hbar g_2 \left[\gamma_2(t) e^{-\gamma_3(t) - i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-^{(2)} + \gamma_1(t) e^{\gamma_3(t) + i(\Omega_2 - \omega_2)t} \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Los primeros dos términos corresponden a dos Hamiltonianos de JC generalizados, uno para cada cavidad y átomo. Los otros dos términos, que son de primer orden en los coeficientes γ^i , involucran la interacción entre la cavidad dos y el átomo en la cavidad uno, y la la cavidad uno y el átomo en la cavidad dos. Estos términos de mezcla tienen una importancia menor en la dinámica del sistema, por lo cual los despreciaremos. En la figura [3.2](#) ilustramos el comportamiento de las funciones $\gamma_i(t)$ tomando como ejemplo $\gamma_p(t)$, con el fin de demostrar que en general los valores que toman las $\gamma_i(t)$ son pequeños, por lo cual es razonable despreciar estas interacciones.

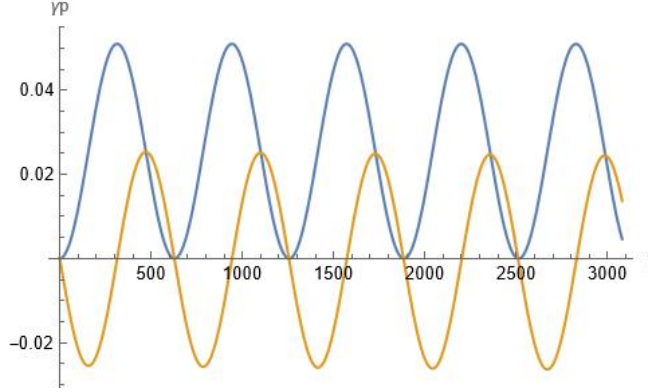


Figura 3.2: Solución para $\gamma_p(t)$. En color azul podemos observar la parte real y en naranja la parte imaginaria. Podemos observar que γ_p comienza en cero y toma valores del orden de 10^{-2} .

Manteniendo solo los términos correspondientes a los Hamiltonianos JC generalizados, llegamos al Hamiltoniano aproximado

$$H_I^{(2)}(t) = \hbar g_1 \left((1 + \gamma_+(t)\gamma_-(t))e^{-\gamma_z(t)-i(\Omega_1-\omega_1)t}\hat{a}_1^\dagger\sigma_-^{(1)} + e^{\gamma_z(t)+i(\Omega_1-\omega_1)t}\hat{a}_1\sigma_+^{(1)} \right) + \hbar g_2 \left(e^{\gamma_z(t)-i(\Omega_2-\omega_2)t}\hat{a}_2^\dagger\sigma_-^{(2)} + (1 + \gamma_+(t)\gamma_-(t))e^{-\gamma_z(t)+i(\Omega_2-\omega_2)t}\hat{a}_2\sigma_+^{(2)} \right), \quad (3.22)$$

el cual lo podemos reescribir como

$$H_I^{(2)}(t) = \hbar g_1 \sqrt{n_1 + 1} \left(\phi_{11}(t)b_1^\dagger + \phi_{12}(t)\hat{b}_1 \right) + \hbar g_2 \sqrt{n_2 + 1} \left(\phi_{21}(t)\hat{b}_2^\dagger + \phi_{22}(t)\hat{b}_2 \right), \quad (3.23)$$

en donde $\hat{b}_1^\dagger = \hat{a}_1^\dagger\sigma_-^{(1)}/\sqrt{\hat{M}_1}$, $\hat{b}_1 = \hat{a}_1\sigma_+^{(1)}/\sqrt{\hat{M}_1}$, $\hat{b}_2^\dagger = \hat{a}_2^\dagger\sigma_-^{(2)}/\sqrt{\hat{M}_2}$, $\hat{b}_2 = \hat{a}_2\sigma_+^{(2)}/\sqrt{\hat{M}_2}$ y $\hat{M}_1 = \hat{n}_1 + (1/2)(1 + \hat{\sigma}_z^{(1)})$, $\hat{M}_2 = \hat{n}_2 + (1/2)(1 + \hat{\sigma}_z^{(2)})$ el número total de excitaciones en cada sistema. El número $M = M_1 + M_2$ es una constante de movimiento. Los operadores definidos arriba cumplen la tabla de conmutación:

	\hat{b}_i	\hat{b}_i^\dagger	$\hat{\sigma}_z^{(i)}$
\hat{b}_i	0	$\hat{\sigma}_i^{(z)}$	$-2\hat{b}_i$
\hat{b}_i^\dagger	$-\hat{\sigma}_i^{(z)}$	0	$2\hat{b}_i^\dagger$
$\hat{\sigma}_z^{(i)}$	$2\hat{b}_i$	$-2\hat{b}_i^\dagger$	0

Notemos que en la ecuación (3.23) se tiene la estructura de dos Hamiltonianos tipo Jaynes-Cummings con coeficientes que dependen del tiempo y del acoplamiento entre las dos cavidades. El conjunto de operadores $\{\sigma_z^{(i)}, \hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger\}$ es cerrado ante conmutación y el operador de evolución temporal se puede obtener de forma exacta para cada uno de ellos y el resultado es

$$\hat{U}_{JC}^{(1)}(t) = e^{\beta_1^{(z)}(t)\hat{\sigma}_z^{(1)}} e^{\beta_1^{(+)}(t)\hat{b}_1^\dagger} e^{\beta_1^{(-)}(t)\hat{b}_1}, \quad (3.24)$$

$$\hat{U}_{JC}^{(2)}(t) = e^{\beta_2^{(z)}(t)\hat{\sigma}_z^{(2)}} e^{\beta_2^{(+)}(t)\hat{b}_2^\dagger} e^{\beta_2^{(-)}(t)\hat{b}_2}, \quad (3.25)$$

con las funciones $\beta_i(t)$ tales que:

$$\dot{\beta}_1^{(-)}(t) = -ig_1\sqrt{n_1+1}\phi_{12}(t)e^{-2\beta_1^{(z)}(t)} \quad (3.26)$$

$$\dot{\beta}_1^{(z)}(t) = -ig_1\sqrt{n_1+1}\phi_{12}(t)\beta_1^{(+)}(t)e^{-2\beta_1^{(z)}(t)} \quad (3.27)$$

$$\dot{\beta}_1^{(+)}(t) = -ig_1\sqrt{n_1+1}\left(\phi_{11}(t)e^{2\beta_1^{(z)}(t)} + \phi_{12}(t)\beta_1^{(+)}(t)e^{-2\beta_1^{(z)}(t)}\right) \quad (3.28)$$

$$\dot{\beta}_2^{(-)}(t) = -ig_2\sqrt{n_2+1}\phi_{22}(t)e^{-2\beta_2^{(z)}(t)} \quad (3.29)$$

$$\dot{\beta}_2^{(z)}(t) = -ig_2\sqrt{n_2+1}\phi_{22}(t)\beta_2^{(+)}(t)e^{-2\beta_2^{(z)}(t)} \quad (3.30)$$

$$\dot{\beta}_2^{(+)}(t) = -ig_2\sqrt{n_2+1}\left(\phi_{21}(t)e^{2\beta_2^{(z)}(t)} + \phi_{22}(t)\beta_2^{(+)}(t)e^{-2\beta_2^{(z)}(t)}\right) \quad (3.31)$$

El operador de evolución temporal completo es entonces

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t)\hat{U}_{JC}^{(1)}(t)\hat{U}_{JC}^{(2)}(t). \quad (3.32)$$

3.2. Evaluación de observables

Consideremos el estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |n_1, e_1\rangle \otimes |n_2 + 1, g_2\rangle$. El valor esperado de un operador \hat{O} está dado por

$$\langle\Psi(t)|\hat{O}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{O}\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Psi_1(t)|\hat{U}_1^\dagger(t)\hat{U}_0^\dagger(t)\hat{O}\hat{U}_0(t)\hat{U}_1(t)|\Psi_1(t)\rangle, \quad (3.33)$$

en donde

$$|\Psi_1(t)\rangle = \hat{U}_{JC}^{(1)}(t)\hat{U}_{JC}^{(2)}(t)|\Psi(0)\rangle. \quad (3.34)$$

Aplicando los operadores $\hat{U}_{JC}^{(1)}(t)\hat{U}_{JC}^{(2)}(t)$ al estado inicial obtenemos:

$$\hat{U}_{JC}^{(1)}(t)|n_1, e_1\rangle = e^{\beta_1^{(z)}}|n_1, e_1\rangle + \beta_1^{(+)}e^{-\beta_1^{(z)}}|n_1 + 1, g_1\rangle = t_1|n_1, e_1\rangle + t_2|n_1 + 1, g_1\rangle, \quad (3.35)$$

$$\hat{U}_{JC}^{(2)}(t)|n_2 + 1, g_2\rangle = (1 + \beta_2^{(-)}\beta_2^{(+)})e^{-\beta_2^{(z)}}|n_2 + 1, g_2\rangle + \beta_2^{(-)}e^{\beta_2^{(z)}}|n_2, e_2\rangle = t_3|n_2, e_2\rangle + t_4|n_2 + 1, g_2\rangle, \quad (3.36)$$

al realizar el producto podemos escribir la forma explícita de $|\Psi_1(t)\rangle$

$$\begin{aligned} |\Psi_1(t)\rangle &= \hat{U}_{JC}^{(1)}(t)|n_1, e_1\rangle\hat{U}_{JC}^{(2)}(t)|n_2 + 1, g_2\rangle, \\ |\Psi_1(t)\rangle &= C_{e_1, e_2}|n_1, n_2\rangle|e_1, e_2\rangle + C_{e_1, g_2}|n_1, n_2 + 1\rangle|e_1, g_2\rangle \\ &\quad + C_{g_1, g_2}|n_1 + 1, n_2 + 1\rangle|g_1, g_2\rangle + C_{g_1, e_2}|n_1 + 1, n_2\rangle|g_1, e_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde los coeficientes $C_{i,j}$ son:

$$\begin{aligned} C_{e_1, e_2} &= e^{\beta_1^{(z)}(t)}e^{\beta_2^{(z)}(t)}\beta_2^{(-)}(t), & C_{e_1, g_2} &= \left(1 + \beta_2^{(-)}(t)\beta_2^{(+)}(t)\right)e^{\beta_1^{(z)}(t)}e^{-\beta_2^{(z)}(t)}, \\ C_{g_1, g_2} &= \beta_1^{(+)}(t)\left(1 + \beta_2^{(-)}(t)\beta_2^{(+)}(t)\right)e^{-\beta_1^{(z)}(t)}e^{-\beta_2^{(z)}(t)}, & C_{g_1, e_2} &= \beta_1^{(+)}(t)\beta_2^{(-)}(t)e^{-\beta_1^{(z)}(t)}e^{\beta_2^{(z)}(t)}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tomemos el caso en que $\hat{O} = \hat{n}_1$, entonces,

$$\hat{U}_1^\dagger(t)\hat{n}_1\hat{U}_1(t) = \hat{n}_1 + \gamma_-(t)(1 + \gamma_+(t)\gamma_-(t))e^{2\gamma_z(t)}\hat{J}_- - \gamma_+(t)e^{-2\gamma_z(t)}\hat{J}_+ - \gamma_+(t)\gamma_-(t)\hat{J}_z, \quad (3.39)$$

y el valor esperado para el número de fotones en la cavidad 1 es

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_1(t) \rangle &= (1 + \gamma_+(t)\gamma_-(t))(n_1(|C_{e_1,e_2}|^2 + |C_{e_1,g_2}|^2) + (n_1 + 1)(|C_{g_1,e_2}|^2 + |C_{g_1,g_2}|^2)) \\ &\quad - \gamma_+(t)\gamma_-(t)(n_2(|C_{e_1,e_2}|^2 + |C_{g_1,e_2}|^2) + (n_2 + 1)(|C_{e_1,g_2}|^2 + |C_{g_1,g_2}|^2)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Para el promedio de fotones en la cavidad 2 obtenemos

$$\hat{U}_1^\dagger(t)\hat{n}_2\hat{U}_1(t) = \hat{n}_2 - \gamma_-(t)(1 + \gamma_+(t)\gamma_-(t))e^{2\gamma_z(t)}\hat{J}_- + \gamma_+(t)e^{-2\gamma_z(t)}\hat{J}_+ + \gamma_+(t)\gamma_-(t)\hat{J}_z, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_2(t) \rangle &= (1 + \gamma_+(t)\gamma_-(t))(n_2(|C_{e_1,e_2}|^2 + |C_{g_1,e_2}|^2) + (n_2 + 1)(|C_{e_1,g_2}|^2 + |C_{g_1,g_2}|^2)) \\ &\quad - \gamma_+(t)\gamma_-(t)(n_1(|C_{e_1,e_2}|^2 + |C_{e_1,g_2}|^2) + (n_1 + 1)(|C_{g_1,e_2}|^2 + |C_{g_1,g_2}|^2)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para los valores esperados $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ y $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ obtenemos

$$\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle = |C_{e_1,e_2}|^2 + |C_{e_1,g_2}|^2 - |C_{g_1,e_2}|^2 - |C_{g_1,g_2}|^2, \quad (3.43)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle = |C_{e_1,e_2}|^2 + |C_{g_1,e_2}|^2 - |C_{e_1,g_2}|^2 - |C_{g_1,g_2}|^2. \quad (3.44)$$

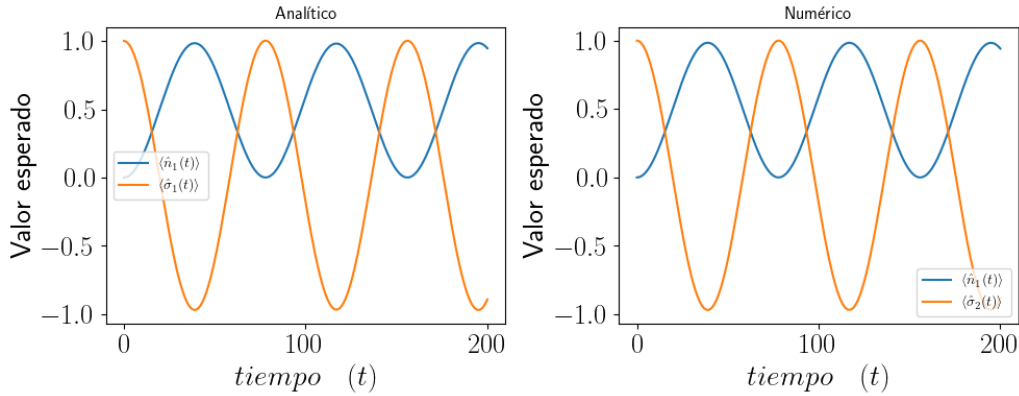


Figura 3.3: **Caso en resonancia:** Valor promedio de fotones en la cavidad 1 $\langle n_1(t) \rangle$. **De lado izquierdo:** solución analítica utilizando el método de algebras de Lie. **De lado derecho:** valor obtenido al resolver la ecuación de Schrödinger de manera numérica. Con los parámetros: $\omega_1/2\pi = 1GHz$, $\omega_2/2\pi = 0.8GHz$, $\Omega_1 = 0.99\omega_1$, $\Omega_2 = 0.99\omega_2$, $g_1 = 0.041\omega_1$, $g_2 = 0.041\omega_2$, $\lambda = 0.001\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.

En la figura 3.3 se muestran para la cavidad 1 el número promedio de fotones $\langle n_1 \rangle$ y el valor esperado del operador $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$, con un estado inicial $|n_1, e\rangle = |0, e\rangle$, $|n_2 + 1, g\rangle = |1, g\rangle$. Al tener un acoplamiento cavidad-cavidad muy pequeño, las dos cavidades se comportan como dos Jaynes-Cummings independientes, mostrando las oscilaciones de Rabi en cada una. En la figura comparamos los resultados obtenidos con el método analítico (ecs. 3.40 y 3.43), con el cálculo puramente numérico. Podemos notar que los resultados en este caso, cuando tenemos estados de Fock (estados de número) como estados iniciales los resultados numéricos y analíticos son idénticos, por lo que podemos concluir que los resultados analíticos son confiables. Para el cálculo numérico usamos la frecuencia de forzamiento $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$, con lo cual el término de interacción cavidad-cavidad, puede aproximarse como

$$\hbar\alpha(t) \left(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \right) \left(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \right) \approx \hbar\frac{\alpha_0}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right). \quad (3.45)$$

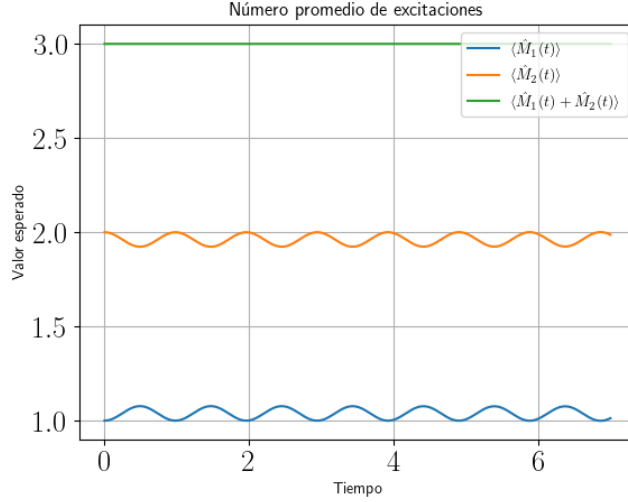


Figura 3.4: Valor promedio del número total de excitaciones en la cavidad uno $\langle \hat{M}_1 \rangle$ en azul, en la cavidad dos $\langle \hat{M}_2 \rangle$ en naranja y en el sistema completo $\langle \hat{M}_1 + \hat{M}_2 \rangle$ en verde. Con el conjunto de parámetros: $\Omega_1 = 0.999\omega_1$, $\Omega_2 = 0.999\omega_2$, $\frac{\omega_1}{2\pi} = 4$ GHz, $\frac{\omega_2}{2\pi} = 5$ GHz, $g_1 = 0.001\omega_1$, $g_2 = 0.001\omega_2$, y $\lambda = 0.25\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.

Con esta aproximación en la interacción resolvemos numéricamente el Hamiltoniano dado por

$$\frac{\hat{H}}{\hbar} = \sum_{j=1,2} \left[\omega_j \hat{n}_j + \frac{\Omega_j}{2} \sigma_z^{(j)} + g_j (\hat{a}_j \hat{\sigma}_+^{(j)} + \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_-^{(j)}) \right] + \frac{\zeta_0}{2} (\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2). \quad (3.46)$$

En la figura [3.4](#) se muestra el promedio del número total de excitaciones $\langle \hat{M}_i \rangle$, con $i = 1, 2$ para las cavidades 1 y 2 y la suma de los promedios $\langle \hat{M}_1 + \hat{M}_2 \rangle$. Podemos observar que para cada cavidad individual el número de excitaciones no permanece constante, sin embargo para el sistema completo, es decir para ambas cavidades, el número total de excitaciones sí permanece constante.

3.3. Oscilaciones inducidas por estados coherentes

En esta sección ilustramos el comportamiento del sistema cuando tenemos estados coherentes como estados iniciales. Debido a las limitantes computacionales para desarrollar los cálculos analíticos, mostraremos resultados puramente numéricos. Como vimos arriba, en el caso cuando tenemos estados de Fock los resultados numéricos empatan perfectamente con los resultados analíticos. Considerando que los estados coherentes son una superposición de estados de Fock, es razonable pensar que los resultados analíticos mostrarán un comportamiento similar al numérico.

Para ilustrar la metodología, consideremos el estado inicial dado por $|\Psi(0)\rangle = |\alpha, e_1\rangle \otimes |\beta, g_2\rangle$, donde $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son estados coherentes y en la cavidad uno el átomo está en su estado excitado, y en la cavidad dos el átomo se encuentra en el estado base. El estado $|\Psi_1(t)\rangle$ después de aplicar los operadores $\hat{U}_{JC_1} \hat{U}_{JC_2}$ al estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ es

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(t)\rangle &= \hat{U}_{JC_1}|\alpha, e_1\rangle\hat{U}_{JC_2}|\beta, g_2\rangle, \\
&= \left(e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{U}_{JC}^{(1)}|n, e_1\rangle \right) \left(e^{-|\beta|^2/2} \sum_m \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \hat{U}_{JC}^{(2)}|m, g_2\rangle \right), \quad (3.47)
\end{aligned}$$

usando las expresiones [3.35](#), [3.36](#) obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(t)\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} (C_{n,m}|n, m\rangle|e_1, e_2\rangle + C_{n+1,m}|n+1, m\rangle|g_1, e_2\rangle \\
&\quad + C_{n+1,m+1}|n+1, m+1\rangle|g_1, g_2\rangle + C_{n,m+1}|n, m+1\rangle|e_1, g_2\rangle), \quad (3.48)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes $C_{i,j}$ están dados en el conjunto de ecuaciones [3.38](#).

Con esto, encontramos las expresiones para los valores esperados del número de fotones en la cavidad 1 $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ y en la cavidad 2 $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_1(t) \rangle &= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \sum_{n,m} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\beta|^{2m}}{m!} ((1 + \gamma_+\gamma_-)(n(|C_{n,m}|^2 + |C_{n,m+1}|^2) \\
&\quad + (n+1)(|C_{n+1,m}|^2 + |C_{n+1,m+1}|^2)) - \gamma_+\gamma_-(m(|C_{n,m}|^2 + |C_{n+1,m}|^2) \\
&\quad + (m+1)(|C_{n,m+1}|^2 + |C_{n+1,m+1}|^2))), \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_2(t) \rangle &= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \sum_{n,m} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\beta|^{2m}}{m!} ((1 + \gamma_+\gamma_-)(m(|C_{n,m}|^2 + |C_{n+1,m}|^2) \\
&\quad + (m+1)(|C_{n,m+1}|^2 + |C_{n+1,m+1}|^2)) - \gamma_+\gamma_-(n(|C_{n,m}|^2 + |C_{n,m+1}|^2) \\
&\quad + (n+1)(|C_{n+1,m}|^2 + |C_{n+1,m+1}|^2))). \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Analizaremos el comportamiento de estas observables considerando tres casos: Los acoplamientos átomo-cavidad individuales son mayores que el acoplamiento cavidad-cavidad ($g_i \gg \lambda$), el acoplamiento cavidad-cavidad es mayor que los acoplamientos átomo-cavidad individuales ($\lambda \gg g_i$), los acoplamientos átomo-cavidad individuales son del mismo orden que el acoplamiento átomo-cavidad, con $\lambda = \zeta_0/2$. Los parámetros del hamiltoniano para el acoplamiento átomo-campo y el acoplamiento cavidad-cavidad se tomaron de [15](#) y corresponden a posibilidades experimentales.

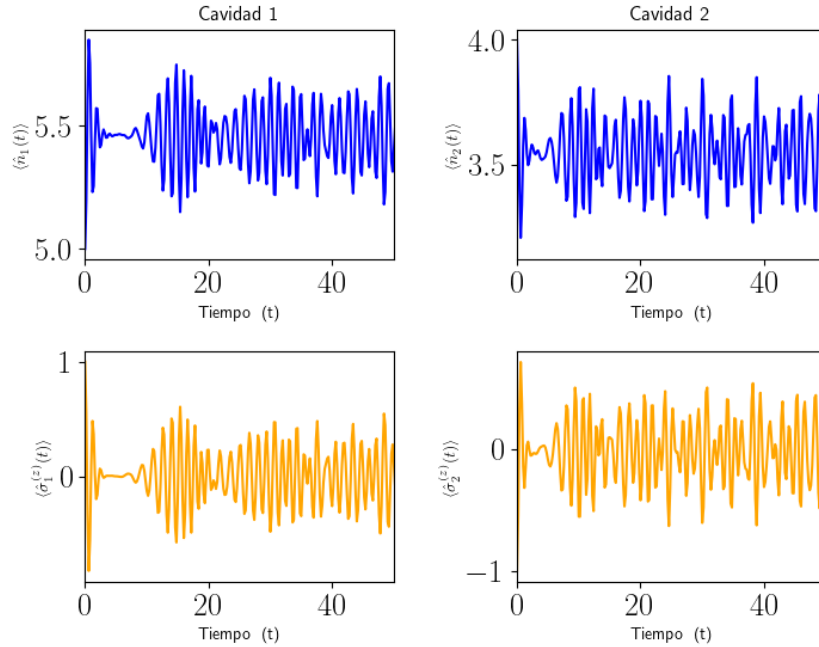


Figura 3.5: **De lado izquierdo (cavidad 1):** número promedio de fotones $\langle n_1(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ (abajo). **De lado derecho (cavidad 2):** número promedio de fotones $\langle n_2(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ (abajo). Con los parámetros $\omega_1/2\pi = 1\text{GHz}$, $\omega_2/2\pi = 0.8\text{GHz}$, $g_1 = 0.04\omega_1$, $g_2 = 0.04\omega_2$, $\lambda = 0.001\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.

En la figura [3.5](#) podemos observar que al tener los acoplamientos átomo-cavidad individuales mayores que el acoplamiento cavidad-cavidad ($g_i \gg \lambda$), las dos cavidades se comportan de forma similar a dos Jaynes-Cummings independientes, con colapsos y reavivamientos, tal como sucede en el JCM con estados coherentes, sin embargo, el comportamiento se ve afectado por el acoplamiento cavidad-cavidad.

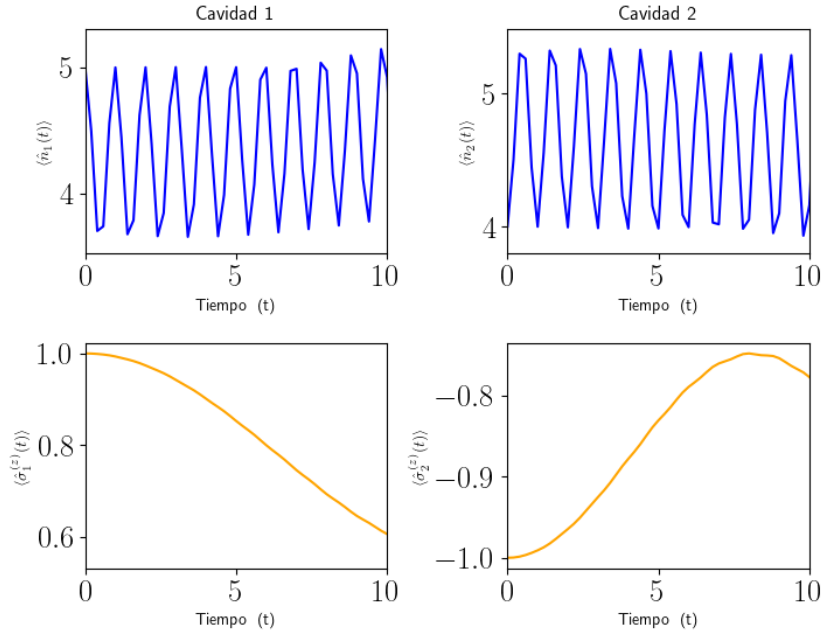


Figura 3.6: **De lado izquierdo (cavidad 1):** número promedio de fotones $\langle n_1(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ (abajo). **De lado derecho (cavidad 2):** número promedio de fotones $\langle n_2(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ (abajo). Con los parámetros $g_1 = 0.001\omega_1$, $g_2 = 0.001\omega_2$, $\lambda = 0.25\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.

En la figura [3.6](#) observamos un comportamiento muy distinto al del JCM estándar con estados coherentes, ya que no se presentan colapsos ni reavivamientos, el comportamiento es más parecido a las oscilaciones de Rabi. Debido a que el acoplamiento átomo-cavidad es muy pequeño comparado con el acoplamiento cavidad-cavidad, el intercambio de fotones es más notorio entre cavidades, mientras la cavidad 1 pierde un fotón, la cavidad dos lo gana. Por otro lado las transiciones atómicas son más lentas.

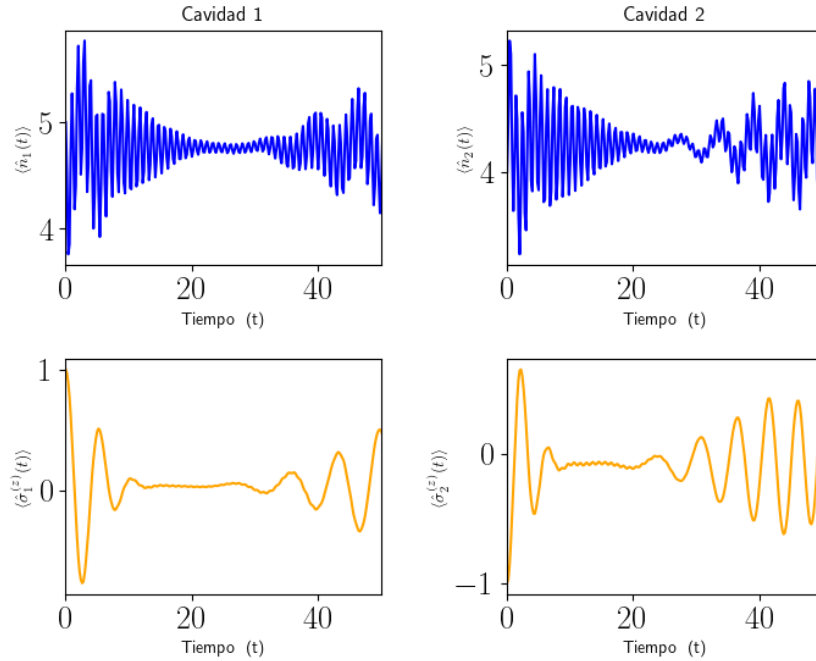


Figura 3.7: **De lado izquierdo (cavidad 1):** número promedio de fotones $\langle n_1(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(1)} \rangle$ (abajo). **De lado derecho (cavidad 2):** número promedio de fotones $\langle n_2(t) \rangle$ (arriba) y valor esperado de la inversión atómica $\langle \hat{\sigma}_z^{(2)} \rangle$ (abajo). Con los parámetros $g_1 = 0.01\omega_1$, $g_2 = 0.01\omega_2$, $\lambda = 0.02\omega_1$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega_1$.

En la figura 3.7 tenemos los acoplamientos átomo-cavidad individuales del mismo orden del acoplamiento cavidad-cavidad. En los promedios de fotones para cada cavidad podemos observar un colapso y un reavivamiento menos pronunciados que en el JCM estándar, mientras que en las inversiones atómicas es más marcado el colapso y el reavivamiento. Cabe destacar que una condición para que se presenten los colapsos y reavivamientos en el Hamiltoniano de JC requiere que valor del acoplamiento átomo-cavidad sea fuerte, del orden de $\omega_i/100$ mientras que el acoplamiento cavidad-cavidad suele ser al menos un orden de magnitud menor [15].

Capítulo 4

Modelo de Jaynes-Cummings deformado

En esta sección haremos una extensión al modelo Jaynes-Cummings habitual introduciendo un término no lineal adicional tipo Kerr en el Hamiltoniano el campo electromagético. El medio lo modelaremos como un oscilador f-deformado [5, 18, 45] a partir del formalismo de operadores f- deformados introducidos por Man'ko, *et al* [24].

4.1. susceptibilidad no lineal de tercer orden $\chi^{(3)}$ e índice refracción dependiente de la intensidad del campo

En la óptica convecional (lineal) la polarización inducida depende linealmente de la intensidad del campo eléctrico y está descrita por la relación

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(t), \quad (4.1)$$

donde la constante de proporcionalidad $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad lineal y ϵ_0 es la permitividad del vacío. En la óptica no lineal la respuesta óptica puede ser descrita al generalizar la ecuación (4.1) expresando la polarización $\vec{P}(t)$ como una serie de potencias del campo $\vec{E}(t)$

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} \vec{E}(t) + \chi^{(2)} \vec{E}^2(t) + \chi^{(3)} \vec{E}^3(t) + \dots \right]. \quad (4.2)$$

Las cantidades $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ son las susceptibilidades ópticas no lineales de segundo y tercer orden respectivamente. En general las susceptibilidades no lineales dependen de las frecuencias de los campos aplicados, pero asumiendo que el medio responde instantáneamente, las tomaremos como constantes [6]:

$$\chi^{(2)} \approx 1.94 \times 10^{-12} \text{m/V}, \quad (4.3)$$

$$\chi^{(3)} \approx 3.78 \times 10^{-24} \text{m}^2/\text{V}^2. \quad (4.4)$$

Ahora consideremos la contribución de la polarización no lineal a tercer orden

$$\vec{P}^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}^3(t). \quad (4.5)$$

Consideremos el caso simple en donde es aplicado un campo monocromático dado por

$$\vec{E}(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t), \quad (4.6)$$

utilizando la identidad $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t)$, podemos expresar la polarización no lineal como

$$\vec{P}^{(3)} = \frac{1}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathcal{E}^3 \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathcal{E}^3 \cos(\omega t). \quad (4.7)$$

El primer término de la ecuación (4.7) describe la respuesta a una frecuencia 3ω que es creada por un campo aplicado de frecuencia ω . Este término conduce al proceso de la generación de terceros armónicos, tal como se muestra en la figura 4.1 [39]. De acuerdo con este proceso, se destruyen tres fotones de frecuencia ω y se crea un fotón de frecuencia 3ω .

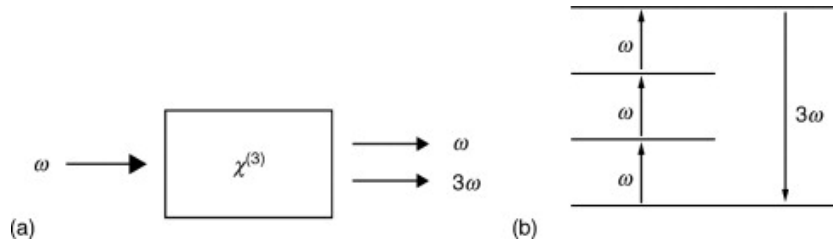


Figura 4.1: Generación de terceros armónicos. (a) Geometría de la interacción. (b) representación de los niveles de energía.

El segundo término de la ecuación (4.7) describe una contribución no lineal a la polarización con la frecuencia del campo incidente; este término conduce a una contribución no lineal del índice de refracción experimentado por una onda con frecuencia ω . Este índice de refracción puede ser representado como

$$n = n_0 + n_2 I, \quad (4.8)$$

donde n_0 es el índice de refracción usual (lineal), $I = \frac{1}{2} n_0 \epsilon_0 c \mathcal{E}^2$ es la intensidad de la onda incidente y

$$n_2 = \frac{3}{2 n_0 \epsilon_0 c} \chi^{(3)}, \quad (4.9)$$

es una constante óptica que caracteriza la potencia de la no linealidad óptica. El cambio en este índice de refracción es conocido como el efecto Kerr.

4.2. Operadores f-deformados

Los operadores f-deformados \hat{A} y \hat{A}^\dagger los obtenemos al agregar una deformación a los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger de la forma:

$$\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1) \hat{a}, \quad (4.10)$$

$$\hat{A}^\dagger = f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1), \quad (4.11)$$

donde $f(\hat{n})$ es una función de deformación que depende del operador de número \hat{n} , toma valores continuos y satisface la condición $f(\hat{0}) = 1$, es decir, recuperamos el caso no deformado.

Recordando la estructura algebraica de los operadores del oscilador armónico \hat{a} y \hat{a}^\dagger , cuya

relación de conmutación es $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Podemos escribir las relaciones de conmutación para los operadores deformados:

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = (\hat{n} + 1)f^2(\hat{n} + 1) - \hat{n}f^2(\hat{n}), \quad (4.12)$$

$$[\hat{A}, \hat{n}] = \hat{A}, \quad (4.13)$$

$$[\hat{A}^\dagger, \hat{n}] = -\hat{A}^\dagger, \quad (4.14)$$

y el producto entre estos operadores al aplicarlo a los elementos de la base resulta de la siguiente forma:

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{n}f^2(\hat{n}), \quad (4.15)$$

$$\hat{A} \hat{A}^\dagger = (\hat{n} + 1)f^2(\hat{n} + 1). \quad (4.16)$$

Los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger representan las variables dinámicas que se asocian con los osciladores f -deformados (f -osciladores) [24]. En el espacio de Fock con el operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, la base está dada por las funciones propias de \hat{n}

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle; \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.17)$$

y satisface la relación de completitud:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{\mathbb{I}}; \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m}. \quad (4.18)$$

Con lo anterior podemos escribir una función arbitraria del operador de número $f(\hat{n})$ como:

$$f(\hat{n}) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) |j\rangle \langle j|. \quad (4.19)$$

Si estamos interesados en estudiar la dinámica de una interacción no lineal en particular, entonces se debe especificar la forma explícita de la función de deformación.

4.3. Modelo de Jaynes-Cummings deformado

Comenzamos recordando el modelo de Jaynes-Cummings estándar para un solo átomo de dos niveles acoplado a un campo electromagnético cuantizado de un solo modo. El Hamiltoniano del JCM está dado por

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) + \hbar\frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-). \quad (4.20)$$

Ahora, generalicemos el JCM escribiendo el Hamiltoniano en la siguiente forma

$$\hat{H}_{\text{NJCM}} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \hat{A} \hat{A}^\dagger) + \frac{1}{2}\hbar\Omega\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}_+ \hat{A} + \hat{A}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (4.21)$$

donde, de acuerdo con (4.20), hemos reemplazado los operadores de aniquilación y creación del oscilador armónico \hat{a} y \hat{a}^\dagger por los operadores deformados \hat{A} y \hat{A}^\dagger definidos como:

$$\hat{A} = af(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1)\hat{a}, \quad \hat{A}^\dagger = f(\hat{n})\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1).$$

El acoplamiento con un medio de Kerr puede ser modelado por un oscilador anarmónico [46,47] al agregar un término cuadrático del operador de número \hat{n} en el hamiltoniano (4.21). También se puede incorporar dicho término mediante la elección de una función de deformación $f(\hat{n})$ apropiada. Si elegimos

$$f^2(\hat{n}) = 1 + \frac{\chi}{\omega}\hat{n}, \quad f^2(0) = 1, \quad (4.22)$$

donde χ es un parámetro de anarmonicidad ($0 \leq \chi \leq \omega$) relacionado con las propiedades ópticas de un medio tipo Kerr [6]. Es un hecho bien conocido que un medio exhibe el efecto Kerr si su índice de refracción varía con la intensidad del campo. Este es el fenómeno más simple de la óptica no lineal.

Entonces el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings deformado toma la forma

$$\hat{H}_{DJC} = \hbar\omega\left(1 + \frac{\chi}{\omega}\right)\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\chi\hat{n}^2 + \hbar\frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda\left(\hat{a}\sqrt{1 + \frac{\chi}{\omega}\hat{n}}\hat{\sigma}_+ + \sqrt{1 + \frac{\chi}{\omega}\hat{n}}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right), \quad (4.23)$$

Como podemos ver en la ecuación (4.23), la función de deformación tiene dos características. Por un lado, está asociada con un acoplamiento dependiente de la intensidad del campo de radiación, es decir, el acoplamiento ya no es lineal en las variables del campo. Por otro lado, el Hamiltoniano f-deformado para el campo, $\hat{H} = \hbar\omega\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hbar\omega\hat{n}f^2(\hat{n})$, puede a su vez interpretarse como un subsistema que rige el comportamiento del campo rodeado por un medio no lineal contenido dentro de una cavidad. Esta forma del Hamiltoniano se considera normalizada del Hamiltoniano de Man'ko et al., $\hat{H}_f = \frac{1}{2}\hbar\nu(\hat{A}^\dagger\hat{A} + \hat{A}\hat{A}^\dagger)$, que corresponde al oscilador cuántico f-deformado [25,30]. En resumen, podemos decir que la función f determina la no linealidad del sistema átomo-campo.

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings deformado lo escribiremos como un Hamiltoniano no perturbado \hat{H}_0 y una perturbación \hat{V}

$$\hat{H}_{JCD} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Tomando como hamiltoniano no perturbado

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(1 + \frac{\chi}{\omega}\right)\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\chi\hat{n}^2 + \hbar\frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_z \equiv \hbar\left(\omega_{ef}\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) + \chi\hat{n}^2 + \frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_z\right), \quad (4.24)$$

con $\omega_{ef} = \omega\left(1 + \frac{\chi}{\omega}\right)$.

Tomando como la perturbación al término restante

$$\hat{V} = \hbar\lambda\left(\hat{a}f(\hat{n})\hat{\sigma}_+ + f(\hat{n})\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\right). \quad (4.25)$$

El operador de evolución correspondiente a \hat{H}_0 es:

$$\begin{aligned} \hat{U}_0(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}, \\ \hat{U}_0(t) &= e^{-i(\omega_{ef}(\hat{n} + \frac{1}{2}) + \chi\hat{n}^2 + \frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_z)t}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

en donde hemos elegido el tiempo inicial $t_0 = 0$.

El Hamiltoniano en la representación de interacción es

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\lambda\hat{U}_0^\dagger(t) \left(\hat{a}f(\hat{n})\hat{\sigma}_+ + f(\hat{n})\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- \right) \hat{U}_0(t) \quad (4.27)$$

aplicando las transformaciones obtenemos

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\lambda \left[e^{-i(\omega_{ef}-\Omega)t} e^{-i\chi t(2\hat{n}+1)} f(\hat{n}+1)\hat{a}\hat{\sigma}_+ + e^{i(\omega_{ef}-\Omega)t} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{i\chi t(2\hat{n}+1)} f(\hat{n}+1) \right]. \quad (4.28)$$

Notemos que en el Hamiltoniano de interacción aparece el operador de número en el exponente y depende del tiempo, entonces los operadores que aparecen en $\hat{H}_I(t)$ no cumplen las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Wei-Norman por lo que es necesario hacer aproximaciones. La primera opción es despreciar los efectos debidos al término $\chi(2\hat{n}+1)$ comparados con $\omega_{ef} - \Omega$. Esto será válido para casos cuando ω_{ef} no sea cercana a Ω . Cuando estas frecuencias son cercanas, el término proveniente de la no linealidad debe ser tomado en consideración. Para ello tomaremos el valor esperado de las exponenciales entre estados coherentes $|\alpha\rangle$. Al hacerlo obtenemos un Hamiltoniano aproximado dado por

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I(t) = \hbar\lambda & \left(f(\hat{n}+1)\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega_{ef}-\Omega)t} \langle \alpha | e^{-i\chi t(2\hat{n}+1)} | \alpha \rangle \right) \\ & + \hbar\lambda \left(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- f(\hat{n}+1) e^{i(\omega_{ef}-\Omega)t} \langle \alpha | e^{i\chi t(2\hat{n}+1)} | \alpha \rangle \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde los valores esperados son:

$$\langle \alpha | e^{i\chi t(2\hat{n}+1)} | \alpha \rangle = e^{i\chi t} e^{|\alpha|^2(e^{2i\chi t}-1)}, \quad (4.30)$$

$$\langle \alpha | e^{-i\chi t(2\hat{n}+1)} | \alpha \rangle = e^{-i\chi t} e^{|\alpha|^2(e^{-2i\chi t}-1)}. \quad (4.31)$$

Entonces, en esta aproximación, el Hamiltoniano en la representación de interacción queda

$$\tilde{H}_I(t) = \hbar\lambda \left(\phi(t)f(\hat{n}+1)\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \phi^*(t)\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- f(\hat{n}+1) \right), \quad (4.32)$$

con la función

$$\phi(t) = e^{-i(\omega_{ef}-\Omega)t} e^{-i\chi t} e^{|\alpha|^2(e^{-2i\chi t}-1)}. \quad (4.33)$$

Si ahora sustituimos la función de deformación obtenemos

$$\tilde{H}_I(t) = \hbar\lambda \left(\phi(t) \sqrt{1 + \frac{\chi}{\omega}(\hat{n}+1)} \hat{a}\hat{\sigma}_+ + \phi^*(t) \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- \sqrt{1 + \frac{\chi}{\omega}(\hat{n}+1)} \right), \quad (4.34)$$

usando ahora que, para valores del eigenvalor n pequeños comparados con ω/χ podemos tomar la aproximación

$$\sqrt{1 + \frac{\chi}{\omega}(\hat{n}+1)} \simeq 1,$$

se obtiene finalmente el Hamiltoniano de interacción

$$\tilde{H}_I(t) = \hbar\lambda \left(\phi(t)\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \phi^*(t)\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- \right), \quad (4.35)$$

cuyo operador de evolución es de la forma

$$\hat{U}_I(t) = e^{\beta_z(t)\hat{\sigma}_z} e^{\beta_+(t)\hat{b}^\dagger} e^{\beta_-(t)\hat{b}}, \quad (4.36)$$

con los operadores \hat{b} , \hat{b}^\dagger definidos anteriormente.

El operador de evolución para el Hamiltoniano de JC deformado es entonces:

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \hat{U}_0(t)\hat{U}_I(t), \\ \hat{U}(t) &= e^{-i(\omega_{ef}(\hat{n}+\frac{1}{2})+\chi\hat{n}^2+\frac{g}{2}\hat{\sigma}_z)t} e^{\beta_z(t)\hat{\sigma}_z} e^{\beta_+(t)\hat{b}^\dagger} e^{\beta_-(t)\hat{b}}.\end{aligned}\quad (4.37)$$

4.4. Evaluación de observables

El valor esperado del operador de número de fotones es

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{n} \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}_I^\dagger(t) \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{n} \hat{U}_0(t) \hat{U}_I(t) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi_I(t) | \hat{n} | \Psi_I(t) \rangle$$

ya que $\hat{U}_0(t)$ conmuta con \hat{n} . Si el estado inicial es $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |e\rangle$, donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente. El estado en la representación de interacción al tiempo t está dado por

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_k \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \left(e^{\beta_z(t)} |k, e\rangle + \beta_+(t) e^{-\beta_z(t)} |k+1, g\rangle \right), \quad (4.38)$$

al tomar la proyección $\langle n | \Psi_I(t) \rangle$ obtenemos

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \left(k e^{2\text{Re}(\beta_z(t))} + (k+1) |\beta_+(t)|^2 e^{-2\text{Re}(\beta_z(t))} \right). \quad (4.39)$$

El valor esperado del operador $\hat{\sigma}_z$ está dado por

$$\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \left(e^{2\text{Re}(\beta_z(t))} - |\beta_+(t)|^2 e^{-2\text{Re}(\beta_z(t))} \right). \quad (4.40)$$

Compararemos los resultados analíticos obtenidos en las expresiones (4.39), (4.40) y los resultados obtenidos al resolver la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano dado en la expresión (4.23) de manera numérica.

Consideraremos el estado inicial dado por un estado coherente para el campo, y el átomo en el estado excitado $|\Psi(0)\rangle = |\alpha, e\rangle$, con un promedio de fotones de $\bar{\alpha} = 20$.

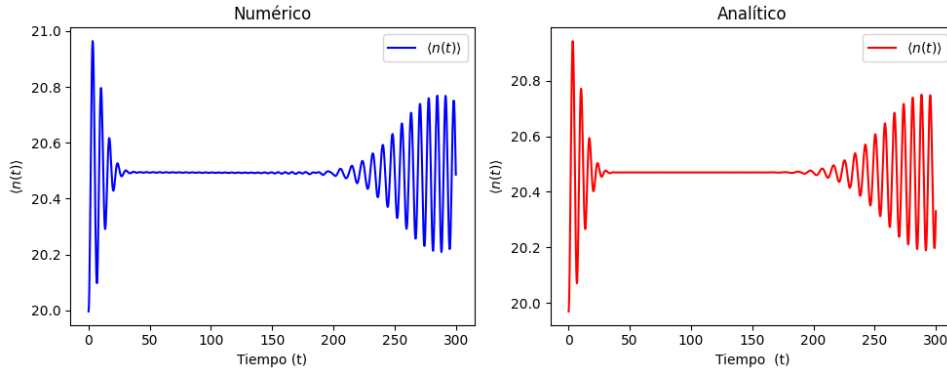


Figura 4.2: Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica.

Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = 0.00001\omega$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.

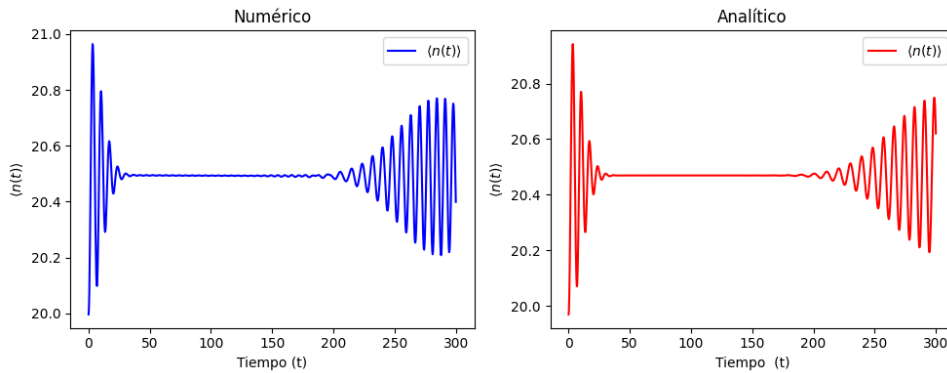


Figura 4.3: Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica.

Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = 0.0001\omega$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.

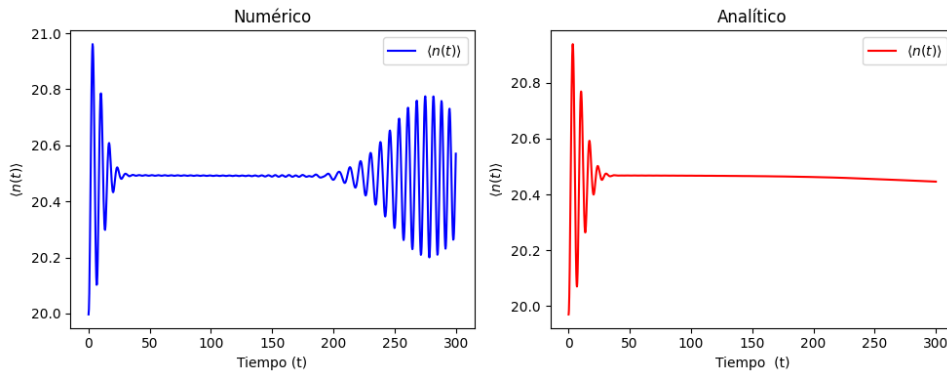


Figura 4.4: Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica.

Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = 0.001\omega$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.

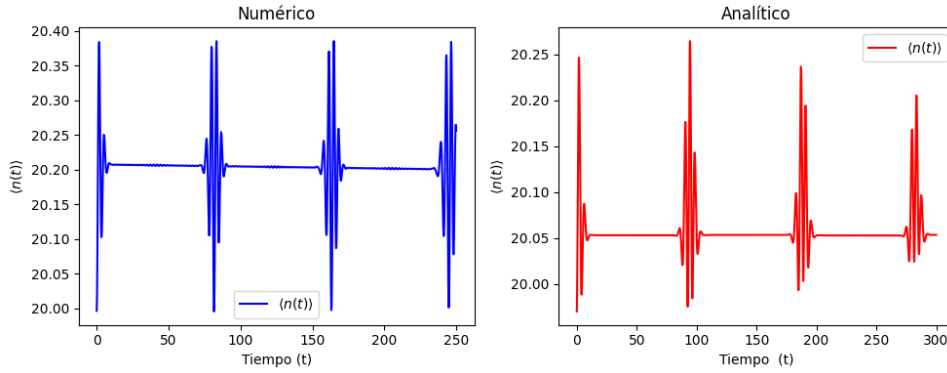


Figura 4.5: Número promedio de fotones. De lado izquierdo se muestra la solución numérica y de lado derecho la solución analítica.

Parámetros: $g = 0.1\omega$, $\chi = g/3$. El tiempo está medido en unidades de $1/\omega$.

En las figuras 4.2 y 4.3 para valores de χ pequeños ($1 \times 10^{-5}\omega \leq \chi \leq 1 \times 10^{-4}\omega$) podemos observar que el sistema se comporta muy parecido a un Jaynes-Cummings sin deformar y hay una notable concordancia entre los cálculos numéricos y analíticos.

Cuando χ es del orden $\chi \approx 1 \times 10^{-3}\omega$, los cálculos numéricos muestran un comportamiento similar al de un Jaynes-Cummings sin deformación, sin embargo hay diferencias notables con los cálculos analíticos (figura 4.4), que para tiempos cortos no muestran un reavivamiento, sin embargo, a tiempos más largos sí exhiben el siguiente reavivamiento. En la figura 4.5 tenemos una anarmonicidad de $\chi = g/3 \approx 0.03\omega$. En este caso podemos observar colapsos y reavivamientos más compactos, esto debido al efecto de la no linealidad del campo electromagnético. Los cálculos analíticos y numéricos son cualitativamente parecidos, sin embargo debido a que las soluciones analíticas son aproximadas podemos notar diferencias.

χ	Diferencia entre numérico y analítico	Diferencia entre deformado y no deformado (numérico)
10^{-5}	No	No
10^{-4}	No	No
10^{-3}	Sí	No
3×10^{-2}	Sí	Sí

Cuadro 4.1: Comparación cualitativa entre los cálculos analíticos y numéricos y comparación con el caso de un Jaynes-Cummings no deformado para los distintos valores del parámetro de anarmonicidad χ .

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo, hemos propuesto dos posibles generalizaciones del modelo estándar de Jaynes-Cummings. Primero hemos presentado un método para construir un operador de evolución temporal aproximado, escrito en una forma de producto de exponenciales, para un sistema compuesto por dos cavidades acopladas que contienen un átomo de dos niveles cada una (dos Hamiltonianos de Jaynes-Cummings acoplados). Después, utilizando el marco de un álgebra de operadores f -deformados y haciendo la elección apropiada de la función de deformación, hemos introducido un Hamiltoniano para la descripción de una cavidad tipo JC donde la interacción entre el átomo y el campo electromagnético ya no es lineal en las variables del campo (es decir, una interacción dependiente de la intensidad del campo).

Una vez que tenemos una expresión analítica para el operador de evolución temporal correspondiente, podemos propagar algún estado inicial particular y calcular cualquier propiedad que nos interese, como el número promedio de fotones en cada cavidad, la inversión atómica, el número de excitaciones por cavidad individual (dos JC acoplados) y el número total de excitaciones.

Para probar la precisión de nuestras aproximaciones, consideramos un estado inicial, donde para el campo tomamos estados de número (estados de Fock) como estado inicial y aplicamos el operador de evolución temporal completo. Evaluamos el número promedio de fotones, así como el valor promedio del estado atómico en cada cavidad y confrontamos los resultados con los obtenidos mediante un cálculo puramente numérico resolviendo la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano correspondiente completo. Después consideramos como estado inicial un estado coherente del campo, en donde en el caso de los dos JC acoplados enfrentamos limitaciones computacionales para efectuar el cálculo analítico, por ello consideramos solamente los cálculos numéricos. Los parámetros del Hamiltoniano para el acoplamiento átomo-campo y el acoplamiento cavidad-cavidad se tomaron de [15] y corresponden a posibilidades experimentales reales. En el caso de dos Hamiltonianos de JC acoplados, Con estos parámetros del Hamiltoniano, encontramos que al tener los acoplamientos átomo-cavidad individuales mayores que el acoplamiento cavidad-cavidad ($g_i \gg \lambda$), las dos cavidades se comportan de forma similar a dos Jaynes-Cummings independientes, con colapsos y reavivamientos, tal como sucede en el JCM con estados coherentes, sin embargo, el comportamiento se ve afectado por el acoplamiento cavidad-cavidad. Cuando el acoplamiento cavidad-cavidad es mayor que el acoplamiento átomo-cavidad individual ($\lambda > g_i$) observamos un comportamiento muy distinto al del JCM estándar con estados coherentes, ya que no se presentan colapsos ni reavivamientos,

el comportamiendo es más parecido a las oscilaciones de Rabi. Debido a que el acoplamiento átomo-cavidad es muy pequeño comparado con el acoplamiento cavidad-cavidad, el intercambio de fotones es más notorio entre cavidades, mientras la cavidad 1 pierde un fotón, la cavidad dos lo gana. Por otro lado las transiciones atómicas son más lentas. Cuando los acoplamientos individuales átomo-cavidad son del mismo orden del acoplamiento cavidad-cavidad ($\lambda \sim g_i$) en los promedios de fotones para cada cavidad podemos observar un colapso y un reavivamiento menos pronunciados que en el JCM estándar, mientras que en las inversiones atómicas es más marcado el colapso y el reavivamiento.

En el caso del modelo de JC deformado considerando diferentes valores del parámetro de anarmonicidad χ encontramos:

Para valores pequeños de χ ($1 \times 10^{-5}\omega \leq \chi \leq 1 \times 10^{-4}\omega$), se observa un comportamiento muy similar al de un Jaynes-Cummings no deformado, mostrando concordancia entre los cálculos numéricos y analíticos. Cuando χ es del orden de $\chi \approx 1 \times 10^{-3}\omega$, los cálculos numéricos muestran un comportamiento similar al de un Jaynes-Cummings sin deformación, pero con diferencias notables respecto a los cálculos analíticos. Estas discrepancias se hacen evidentes en tiempos cortos, donde no se observa un reavivamiento, pero sí se manifiestan a tiempos más largos exhibiendo un reavivamiento posterior. En el caso de una anarmonicidad de $\chi = \frac{g}{3} \approx 0.03\omega$, se observan colapsos y reavivamientos más compactos debido al efecto de la no linealidad del campo electromagnético. Aunque los cálculos analíticos y numéricos son cualitativamente similares, se deben tener en cuenta las aproximaciones en las soluciones analíticas, lo que puede dar lugar a diferencias notables.

Bibliografía

- [1] M Sebawe Abdalla, MMA Ahmed, and A-SF Obada. Dynamics of a non-linear Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 162(2):215–240, 1990.
- [2] M Sebawe Abdalla, MMA Ahmed, and A-SF Obada. Multimode and multiphoton processes in a non-linear Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 170(2):393–414, 1991.
- [3] AM Abdel-Hafez, A-SF Obada, and MMA Ahmad. N-level atom and (n-1) modes: an exactly solvable model with detuning and multiphotons. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20(6):L359, 1987.
- [4] G. Agarwal. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2012. Original work published 2012.
- [5] GS Agarwal and RR Puri. Collapse and revival phenomenon in the evolution of a resonant field in a Kerr-like medium. *Physical Review A*, 39(6):2969, 1989.
- [6] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, Inc., 3rd edition, 2008.
- [7] Michel Brune, F Schmidt-Kaler, Abdelhamid Maali, J Dreyer, E Hagley, JM Raimond, and S Haroche. Quantum Rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Physical review letters*, 76(11):1800, 1996.
- [8] Vladimír Bužek. Jaynes-Cummings model with intensity-dependent coupling interacting with Holstein-Primakoff su (1, 1) coherent state. *Physical review A*, 39(6):3196, 1989.
- [9] Vladimír Bužek. N-level atom interacting with single-mode radiation field: an exactly solvable model with multiphoton transitions and intensity-dependent coupling. *Journal of Modern Optics*, 37(6):1033–1053, 1990.
- [10] Sergio Cordero and José Récamier. Selective transition and complete revivals of a single two-level atom in the Jaynes-Cummings Hamiltonian with an additional Kerr medium. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 44(13):135502, 2011.
- [11] J Črnugelj, M Martinis, and V Mikuta-Martinis. Properties of a deformed Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, 50(2):1785, 1994.
- [12] FW Cummings. Stimulated emission of radiation in a single mode. *Physical Review*, 140(4A):A1051, 1965.

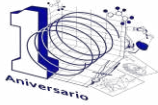
- [13] O De los Santos-Sánchez, C González-Gutiérrez, and J Récamier. Nonlinear Jaynes–Cummings model for two interacting two-level atoms. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49(16):165503, 2016.
- [14] Joseph H Eberly, NB Narozhny, and JJ Sanchez-Mondragon. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review Letters*, 44(20):1323, 1980.
- [15] S Felicetti, M Sanz, L Lamata, G Romero, Göran Johansson, Per Delsing, and E Solano. Dynamical Casimir effect entangles artificial atoms. *Physical review letters*, 113(9):093602, 2014.
- [16] Christopher C Gerry and Peter L Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2023.
- [17] Roy J Glauber. Photon correlations. *Physical Review Letters*, 10(3):84, 1963.
- [18] P Gora and C Jędrzejek. Nonlinear Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, 45(9):6816, 1992.
- [19] Ph Goy, JM Raimond, M Gross, and S Haroche. Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. *Physical review letters*, 50(24):1903, 1983.
- [20] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 4th edition, 1998.
- [21] Edwin T Jaynes and Frederick W Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [22] EA Kochetov. A generalized n-level single-mode Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 150(1):280–292, 1988.
- [23] JR Kukliński and JL Madańczyk. Strong squeezing in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, 37(8):3175, 1988.
- [24] V. I. Man’ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria. f-oscillators and nonlinear coherent states. *Physica Scripta*, 55(5):528, 2022.
- [25] Vladimir I Man’ko, Giuseppe Marmo, and Francesco Zaccaria. Moyal and tomographic probability representations for f-oscillator quantum states. *Physica Scripta*, 81(4):045004, 2004.
- [26] Albert Messiah. *Quantum Mechanics, Volume I*. North-Holland Publishing Company, 1st edition, 1961.
- [27] Tran Quang, PL Knight, and V Buek. Quantum collapses and revivals in an optical cavity. *Physical Review A*, 44(9):6092, 1991.
- [28] Jean-Michel Raimond and Serge Haroche. *Exploring the Quantum*. Oxford University Press, 1st edition, 2006.
- [29] I Ramos-Prieto, A Paredes, J Récamier, and H Moya-Cessa. Approximate evolution for a system composed by two coupled Jaynes–Cummings Hamiltonians. *Physica Scripta*, 95(3):034008, 2020.

- [30] J Récamier, M Gorayeb, WL Mochán, and JL Paz. Nonlinear coherent states and some of their properties. *International Journal of Theoretical Physics*, 47:673–683, 2008.
- [31] Gerhard Rempe, Herbert Walther, and Norbert Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Physical review letters*, 58(4):353, 1987.
- [32] BM Rodríguez-Lara, Francisco Soto-Eguibar, Alejandro Zárate Cárdenas, and HM Moya-Cessa. A classical simulation of nonlinear Jaynes–Cummings and Rabi models in photonic lattices. *Optics Express*, 21(10):12888–12898, 2013.
- [33] C Saavedra, JC Retamal, AB Klimov, and SM Chumakov. Jaynes-Cummings model with dissipation. In *Coherence and Quantum Optics VII: Proceedings of the Seventh Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, held at the University of Rochester, June 7–10, 1995*, pages 357–358. Springer, 1996.
- [34] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics, revised edition, 1995.
- [35] Matteo Scala, BENEDETTO Militello, Antonino Messina, Jyrki Piilo, and Sabrina Maniscalco. Microscopic derivation of the Jaynes-Cummings model with cavity losses. *Physical Review A*, 75(1):013811, 2007.
- [36] Erwin Schrödinger. Der stetige übergang von der mikro-zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14:664–666, 1926.
- [37] B Sherman and Gershon Kurizki. Preparation and detection of macroscopic quantum superpositions by two-photon field-atom interactions. *Physical Review A*, 45(11):R7674, 1992.
- [38] Bruce W. Shore and Peter L. Knight. The Jaynes-Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40(7):1195–1238, 1993.
- [39] B.Y. Soon and J.W. Haus. *NONLINEAR OPTICS, BASICS — Third-Harmonic Generation*. Elsevier, 2005.
- [40] CV Sukumar and B Buck. Multi-phonon generalization of the Jaynes-Cummings model. *Physics Letters A*, 83(5):211–213, 1981.
- [41] Michael Tavis and Frederick W Cummings. Exact solution for an n-molecule—radiation-field Hamiltonian. *Physical Review*, 170(2):379, 1968.
- [42] Karl Vogel, VM Akulin, and Wolfgang P Schleich. Quantum state engineering of the radiation field. *Physical review letters*, 71(12):1816, 1993.
- [43] D.F. Walls and G.J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [44] J. Wei and E. Norman. On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(2):327–334, 1964.
- [45] MJ Werner and H Risken. Q-function for the Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium. *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, 3(3):185, 1991.

- [46] MJ Werner and H Risken. Quasiprobability distributions for the cavity-damped Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium. *Physical Review A*, 44(7):4623, 1991.
- [47] Bernard Yurke and David Stoler. Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion. *Physical review letters*, 57(1):13, 1986.
- [48] Guanyu Zhu, Sebastian Schmidt, and Jens Koch. Dispersive regime of the Jaynes-Cummings and Rabi lattice. *New Journal of Physics*, 15(11):115002, 2013.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

POSGRADO EN CIENCIAS

Cuernavaca, Mor., a 8 de abril de 2024

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS

PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: **Generalizaciones al modelo de Jaynes-Cummings**, que presenta el L. en C. Diego Aranda Lozano (10055013) para obtener el título de Maestro en Ciencias.

Dirección de tesis: Dr. José Francisco Récamier Angelini
Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Markus Franziskus Müller CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Rolando Pérez Álvarez CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Wolf Luis Mochán Backal UNAM	APROBADO	
Dr. José Francisco Récamier Angelini ICF-UNAM	APROBADO	
Dr. Héctor Manuel Castro Beltrán CIICAP-UAEM	APROBADO	





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2024-04-08 15:26:30 | Firmante

FWSlcW5Ye9Xsclzlv71Z0FsaE9ozDDIKU2T6DVv/GnvMVPKTIiHUPk7JtmO6rS4fynqv1Zk2Awd5RZ0OGsQxxObg70SkOMUXZVJOe1lb1perWLbez8EQ58iS+N2WLBdxS4DPkYlqxFSfxmdhbwtdHGyb32+HoCc7p/BjZGCUc7g3idZ5J4pp8f9S4t30U6pLQxnfpgMCEhR/N8dFduZSPpN4+kHAX82HpK6xUk+8bUsYXlFEMg2TkC7kx6P7acN3ia+DI5Z8Hn4Pg hDY4q55UuFBE/ZVff3/lbQsWwdv6IM3+zv9j4KRfVAVSrd7zYe42pKCybtk1rxba2cVPQ==

ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2024-04-08 15:29:40 | Firmante

YjJqX3azXgmUQaaLs3rgeFtMFsVHGDDzWbJwspAgWmkYzPnodh6faKoZA3hlucQpfGfYjKnc+s2s6qaOAdf2DRGgE/W5nB/6krTP83lxd/yZDwm3qnhUDcFwkFRz1pMZF1gH mmyE/l0/l2XOdAXxqcppUoJ6ueI00ZPzdqL8SUKJcbee/uAnxU8Y07kYnskJL4X7G4rIVDDASxZivdVkf3RljkY2zqSMW1boZ/CfKec5xdu/JkMGYFQNI9WJ5NwasVSIR8vzjr7qnW kDBzdxqV0D53E1KNhMVe7jXlvU11xqp5TlOpg92Qsrc04yn9c3wWtGxOOxm/X2Z0EaHskQ==

HECTOR MANUEL CASTRO BELTRAN | Fecha:2024-04-08 17:30:30 | Firmante

S64F3fwe2G2jz9kO/dom8TyRx56os+u5bhECDIVW71tvWIO4eX/r/akhFHqKEXncNU+cV06aGlayZVaRj7oLBUa2kPt3PLeyJ38Pq5s0UBZwG+T4pTb2imhYhC2j6FT5aLukrpS3d KI2saeeB1ryC4Ks3fzi9ZMN9UcauGjwF0X25TzPikVs2CG4LseolBPglH7tj2WA0YIJLZYqjQMhkeDL27c62BtkWotis9nm/WEEKfsctoJFLks4YmZoto+DiAiTqzY/9/5xQUqyBcC0 MfGgpOAwPoVmP5Rjm8LTb+UMc9OeJD1/1/WVmXVmoYGoSpgurVPJQYHGUZa4NQ==

WOLF LUIS MOCHAN BACKAL | Fecha:2024-04-09 09:08:10 | Firmante

rF73nMI9FddWZ+FDsHP2g7ttHR7wLWaKbSeimF8liV/jTrFPhVEQYqbwRXa+3aCCszjM7jduXyO/7bgNMjHhXQOagDrg/IL+IAmPO9BCYDBxNMnEnjpGPWWwAO2XCDw9G RzFkOQyKpdArDMwv7T03zzT57qTXbdriJpSrHTUI7M3u+ZCYw1AYx24XEc+XiWY6ZV/+wcv+/Mlg8tY+ggyB+8oamBPlnWwqI725ZKvQwMJ/wOXug5/H7iwbhcG3QDXXmof/l5yi +hn2DHJYldqPCuqoxudyPbJ2BlpZr7y4oxkgutbk0entgkoPnuhLvs31KqNGu6MwP3qROYvHbKg==

JOSÉ FRANCISCO RÉCAMIER ANGELINI | Fecha:2024-04-09 10:44:54 | Firmante

M7JSBuehpUEz5avuKAV1Q6frb5N3nBs/ACAWEhRz0HVvt+PDsxHfmEG2zQlg9nSADlIIO7Ozf421X4lIYGsBLTINA7a5qIb2XJMmy99KNICINIXDaSm0Uf4dackma8gXH5+GoBt nUiy13LvhHa4R48t0MXe0BejkSFk6dblyACKpUHFtJvBgyGFGbZbbTVLYPclOzsdg2ZN6AN/vpbVXoThf1eFORvXwut0bXIUe/rtEhklUgwxZTykNV6CDRKHpgxtdVRMMmncn5eY XVzdr715nBkpO6c6y0Osp0ldfLk2AjKzJtMaExgJPuG6AaDK2TUVU7aU52BC8HFV/m4PbQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



9u3jXER82

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/1NuouTSXhal5CdKrRA4Ng2WvsUr4FuWC>



UAEM
RECTORÍA
2023-2029