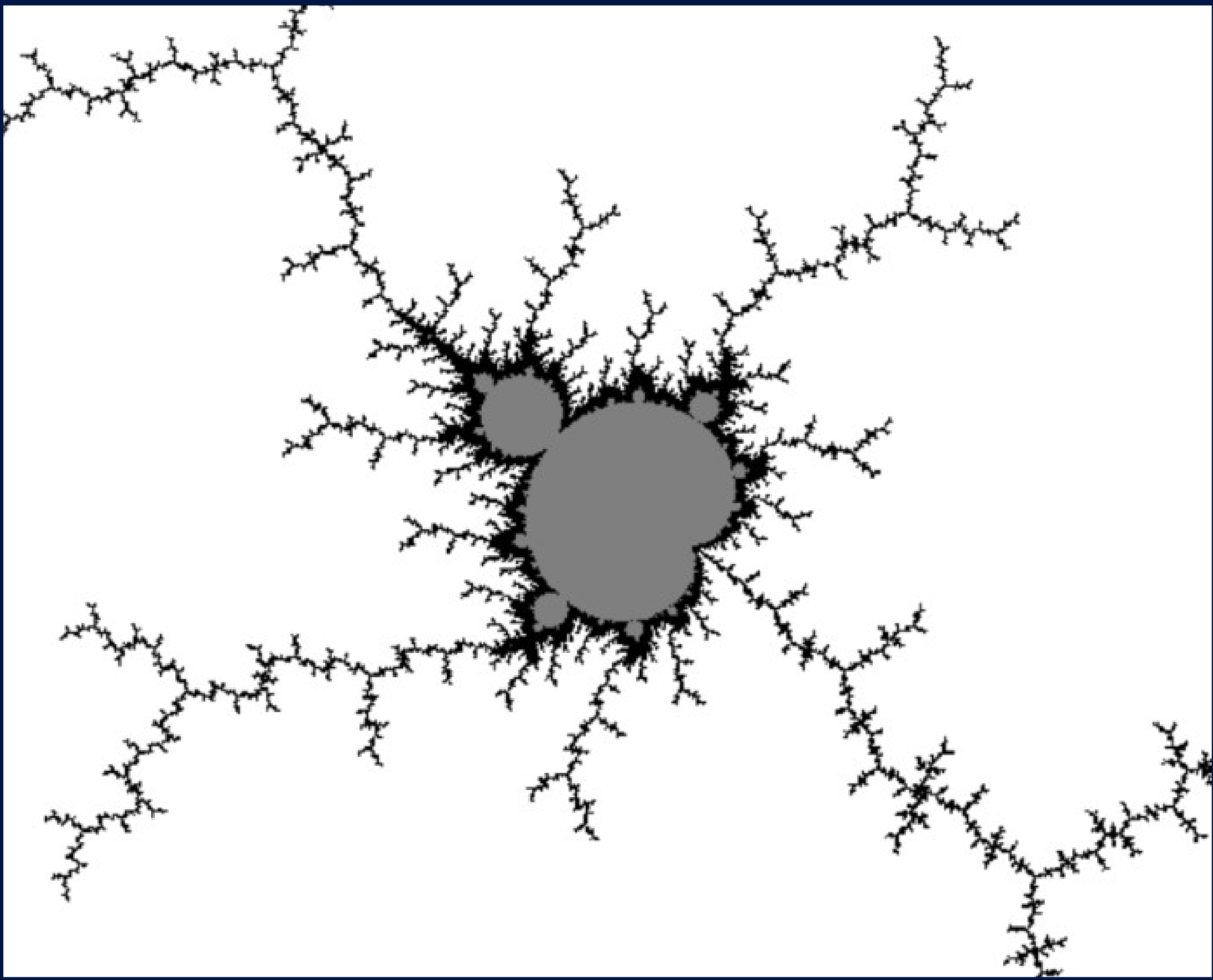
Una introducción a la variable compleja 2

José Antonio Gómez Ortega
Isaac Hernández Villegas
David Alejandro Pacheco Barbina
Rogelio Valdez Delgado



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Una introducción a la variable compleja 2

José Antonio Gómez Ortega
Isaac Hernández Villegas
David Alejandro Pacheco Barbina
Rogelio Valdez Delgado

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Centro de Investigación en Ciencias

Gómez Ortega, José Antonio, autor

Una introducción a la variable compleja 2 / José Antonio Gómez Ortega, Isaac Hernández Villegas, David Alejandro Pacheco Barbina, Rogelio Valdez Delgado.– – Primera edición.– – México : Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 2023.

154 páginas : ilustraciones

978–607–8784–96–7

1. Funciones de variable compleja 2. Funciones analíticas

LCC QA331.7 DC 515.9

Una introducción a la variable compleja 2

Esta publicación fue dictaminada por pares académicos
bajo la modalidad doble ciego.

Primera edición, junio de 2023

ISBN: 978–607–8784–96–7
DOI: 10.30973/2023/introduccion–variable

Av. Universidad 1001
Col. Chamilpa, CP 62209
Cuernavaca, Morelos, México
publicaciones@uaem.mx
libros.uaem.mx

Revisión de textos: Paola Lisbeth Cadena Cosme
Diseño de interiores y formación: Rogelio Valdez Delgado
Portada: Pilar Janet Lopez Zarate
Imagen de portada: Rogelio Valdez Delgado

Hecho en México

Introducción

La variable compleja es un área de las matemáticas que tiene algo para todos los gustos. Además de tener aplicaciones a otras partes del análisis, se puede decir que es un ancestro de otras áreas de las matématicas (por ejemplo, teoría de homotopía, geometría hiperbólica, dinámica holomorfa, etc.). De hecho, la variable compleja ha sido considerada como el área de introducción a las matemáticas.

En el 2013, la editorial de la Universidad Autonóma del Estado de Morelos publicó el libro "Una introducción a la variable compleja", como un apoyo bibliográfico para el curso de Variable Compleja 1 que se imparte en la Licenciatura en Ciencias de la UAEM. En ese libro se tratan los temas correspondientes al temario del curso referido, desde un punto de vista de resolución de problemas.

Ahora, en este libro se incluyen los temas de variable compleja que se han enseñado en el Centro de Investigación en Ciencias de la UAEM en los últimos ocho años, usualmente durante el sexto semestre, en el curso de Variable Compleja 2 de la Licenciatura en Ciencias, en las áreas terminales de Matemáticas y Física.

Dentro de la bibliografía para impartir el curso señalado, se encuentra el libro de Análisis Básico de Variable Compleja, de J. E. Marsden y M. J. Hoffman, en su versión en español, al final de este libro se encuentran las soluciones de los ejercicios con numeración impar, presentados a lo largo del libro. En este libro se presentan todas las soluciones a los ejercicios con número par (y algunos con numeración impar) que aparecen en los capítulos 4, 5, 6 y primera parte del capítulo 7, del libro de los autores J. E. Marsden y M. J. Hoffman. Por lo que este libro se puede pensar como una continuación al libro "Una introducción a la variable compleja". El resolver la mayor cantidad de problemas y ejercicios es parte importante del aprendizaje del área de variable compleja para el alumno.

Las soluciones de los problemas aquí mostradas, están escritas con el estudiante en mente. La mayoría de las soluciones se presentan en detalle, y cuando no es el caso, se le indica al lector lo que falta y se le pide que termine el problema como un ejercicio. El grado de dificultad de los problemas es muy variado. Algunos problemas tienen la motivación de fijar las ideas de la sección correspondiente, en la mente del estudiante, y otros se utilizan para extender la teoría. Cabe señalar, que la mayor parte de las soluciones a los problemas aquí presentadas son originales, en el sentido de que fueron escritas por los autores, aunque las soluciones de algunos de los problemas siguen un camino estándar. Por ello mismo, el lector seguramente podrá encontrar soluciones más creativas y más cortas a varios de los problemas.

Nuestra motivación principal, es el hecho de que este libro sirva como un apoyo adicional para el curso de variable compleja 2 y que el alumno tenga un material de primera mano que le sirva de apoyo para resolver problemas que se le presenten durante el curso.

La presentación de este texto sigue el orden del libro de J. E. Marsden y M. J. Hoffman, a partir del capítulo 4. En cada sección, se presenta de manera breve, la teoría necesaria para resolver los problemas correspondientes a la sección. Se han puesto referencias de textos para algunos resultados enunciados al principio de cada sección, esto con la finalidad de que el lector puede consultar otras fuentes de variable compleja.

El texto inicia con un breve capítulo de preliminares, donde señalamos algunos conceptos básicos de variable compleja, que usualmente corresponden a un primer curso de variable compleja.

En el capítulo 2, además de revisar las diferentes técnicas para calcular el residuo de una función meromorfa en una singularidad aislada, se presenta uno de los resultados más importantes de variable compleja, el teorema del residuo, así como algunas de sus aplicaciones en análisis complejo avanzado: evaluación de integrales definidas, evaluación de series infintas y expansiones de funciones en fracciones parciales.

En el capítulo 3, se estudia una de las herramientas indispensables para el estudio de la geometría de las funciones analíticas, que es el teorema de la transformación de Riemann, del cual se revisarán varias aplicaciones del mismo. También se da una introducción a la teoría de las transformaciones fraccionales lineales, que se usan en la última sección del capítulo, para estudiar algunas aplicaciones de variable compleja a la geometría y a problemas de la física.

En el capítulo 4, continuamos con el estudio de la teoría de las funciones analíticas, donde las principales herramientas que usaremos son las series de Taylor y el teorema del residuo. Estudiaremos la teoría de la continuación analítica con varios resultados, como son el teorema de Rouché y el teorema de la transformación.

Finalmente, en el capítulo 5, estudiamos brevemente los conceptos de producto infinito complejo de números y de funciones, en particular, la función gamma.

La idea de hacer un libro como éste surgió de las distintas veces que se ha impartido la materia a lo largo de 18 años, por lo que nos gustaría agradecer a los estudiantes que han tomado el curso de Variable Compleja 2 durante este tiempo.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se revisarán brevemente algunos conceptos básicos de variable compleja que nos permitirán adentrarnos directamente en los temas centrales de este texto.

1.1. Definiciones básicas

El objeto central de estudio son las funciones definidas en los números complejos que toman valores complejos, por lo que recordamos la definición formal de los complejos.

Definición 1.1.1 *El sistema de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, es el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ junto con la operación de adición*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

y la operación de multiplicación compleja,

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Es posible mostrar, sin mucha dificultad, que con estas operaciones $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un campo, ver capítulo 1 en [2]. El neutro aditivo es $(0, 0)$ y el neutro multiplicativo es $(1, 0)$. El inverso aditivo de (x, y) es $(-x, -y)$ y el inverso multiplicativo de $(x, y) \neq (0, 0)$ es $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.
Al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo podemos ver como un subconjunto de los números complejos, bajo la identificación $x \mapsto (x, 0)$, aún más, $\mathbb{R}$ es un subcampo de

$\mathbb{C}$. Si se define $i = (0,1)$, se tiene que $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Cualquier número complejo (x,y) puede ser escrito de la siguiente forma

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy.$$

Para $z = (x,y) = x+iy$, la **parte real** del número complejo z, la cual se denota como $\operatorname{Re} z$, es el número x y la **parte imaginaria** de z, la cual se denota como $\operatorname{Im} z$, es el número y.

Hay tres conceptos fundamentales asociados a los números complejos. El **conjugado complejo** de $z = x + iy$, denotado por $\bar{z}$, es el número complejo $x - iy$; el **módulo** o la **norma** de $z = x + iy$, denotado por $|z|$, es el número real $\sqrt{x^2 + y^2}$, el cual mide la distancia del origen al punto (x,y). Finalmente, el **argumento** de z es el ángulo formado entre el eje real positivo y el rayo que une 0 con z, el ángulo medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El argumento de z se denota por $\arg z$ y generalmente se le asigna un valor entre 0 y 2π.[1]

Una relación importante entre la norma de un complejo z y su conjugado es

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Existe otra manera de escribir un número complejo z, la cual se conoce como la **forma polar** del complejo z, si $r = |z|$ y $\theta = \arg z$, entonces

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

1.2. Funciones analíticas

Las funciones de estudio son por lo general definidas en conjuntos abiertos U de $\mathbb{C}$, las más sencillas son los monomios z^n, las polinomiales $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, las racionales que son cocientes de polinomios complejos y algunas otras, como por ejemplo las siguientes.

Definición 1.2.1 *Si $z = x + iy$, entonces se define e^z como $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Esta función se conoce como la* **función exponencial** *compleja.*

Con la ayuda de la función exponencial, es posible definir las funciones trigonométricas complejas.

[1] En el texto, en principio acordamos que el argumento se encuentra entre 0 y 2π, pero puede tomar otros valores, todos de la forma $\arg z + 2\pi k$, con k un número entero. Así $\arg z$ es una función multivaluada.

Definición 1.2.2 *Para cualquier número complejo z, se definen las funciones* **seno y coseno**, *como*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Definir la función logaritmo compleja es un poco más delicado, pues su dominio de definición no es todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y su rango, por cuestiones técnicas y de momento, es una banda horizontal infinita de ancho 2π.

Definición 1.2.3 *La función* $\log : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$, *está definida como*

$$\log z = \log |z| + i \arg z,$$

donde $\arg z$ *toma valores en el intervalo* $[y_0, y_0 + 2\pi)$ *y* $\log |z|$ *es el logaritmo usual del número real positivo* $|z|$.

Será conveniente para garantizar que $\log z$ sea continua, que el argumento de z tome valores solamente en el intervalo abierto $(y_0, y_0 + 2\pi)$ y en este caso el dominio de $\log z$ es $\mathbb{C} \setminus R_{y_0}$, donde R_{y_0} es el rayo que sale del origen con inclinación de un ángulo y_0.
La elección del intervalo $(y_0, y_0 + 2\pi)$, es llamada la elección de una **rama de logaritmo**. Notemos que podemos elegir cualquier intervalo de longitud 2π.

Una vez que se ha definido la función $\log$, es posible definir a^b para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$, como sigue.

Definición 1.2.4 *Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, se define $a^b = e^{b \log a}$, donde se ha elegido una rama de* $\log$.

Recordemos ahora el concepto principal de variable compleja, el de que una función sea analítica.

Definición 1.2.5 *Sea $f : U \to \mathbb{C}$, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto. Entonces se dice que f es* **diferenciable** *(en el sentido complejo) en $z_0 \in U$ si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Este límite se denota por $f'(z_0)$ o por $df/dz(z_0)$.
Se dice que f es **analítica** *en U si f es diferenciable en el sentido complejo en cada $z_0 \in U$.*

La diferencia más importante entre las funciones diferenciables en el sentido real y las diferenciables en el sentido complejo, radica en que estas últimas satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.2.6 (Cauchy-Riemann) *Sean $f : U \to \mathbb{C}$, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto con $f = u + iv$ y z_0 en U. Entonces $f'(z_0)$ existe si y sólo si f es diferenciable en el sentido de las variables reales, y en z_0 las funciones u, v satisfacen*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

(llamadas las ecuaciones de **Cauchy-Riemann***).*

Observación 1.2.7 *Usando el teorema anterior, la derivada de una función analítica se puede expresar como*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \qquad \text{y}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Definición 1.2.8 *Una función analítica en todo el plano complejo se llama* **función entera***.*

Si $f = u + iv$, entonces u y v deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La manipulación de estas ecuaciones nos llevan a otra propiedad importante que deben satisfacer estas funciones u y v.

Definición 1.2.9 *En un conjunto abierto U, una función $u : U \to \mathbb{R}$, la cual es dos veces continuamente diferenciable, es llamada* **armónica** *si en U se satisface la ecuación*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Siempre sucede que si $f = u + iv$ es analítica, entonces u y v son armónicas. Además, si u y v son funciones armónicas en U que cumplen que $u + iv$ es analítica, diremos que u y v son **conjugadas armónicas**.

1.3. Teorema de Cauchy

Para hablar del teorema de Cauchy, es necesario primero definir la integral de contorno. Sea $a_0 = a$, a_1, ..., $a_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$, decimos que una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una **curva suave** por tramos si γ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en cada intervalo abierto (a_i, a_{i+1}).

Definición 1.3.1 *Sea f una función continua definida en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ y sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva suave por tramos que satisface $\gamma([a, b]) \subset U$. La expresión*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

es llamada **la integral de f a lo largo de γ**.

Algunas veces es necesario acotar ciertas integrales de contorno sin tener que calcular el valor exacto. Para ello necesitamos la definición de longitud de arco de una curva.

Definición 1.3.2 *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, se define la* **longitud de arco** *de γ por*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

donde $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Proposición 1.3.3 *Sean f continua en un conjunto abierto U y γ una curva C^1 por tramos en U. Si existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo punto z en γ, entonces*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq Ml(\gamma).$$

A esta desigualdad se le conoce como la **estimación estándar**.

Así como en el cálculo real, también en los números complejos se tiene el teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno, el cual enunciamos a continuación.

Teorema 1.3.4 *Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva suave por tramos y sea F una función definida y analítica en un conjunto abierto U que contiene a γ. Entonces,*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

En particular, si $\gamma(0) = \gamma(1)$, entonces

$$\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

En este sentido, se tiene un teorema acerca de la independencia de la integral con respecto de la trayectoria, para ello decimos que un subconjunto G del plano complejo es una región si es un conjunto abierto y conexo.

Teorema 1.3.5 (Independencia con respecto de la trayectoria) *Suponga que f es una función continua en una región G. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) Las integrales son independientes de la trayectoria. Es decir, si z_0 y z_1 son dos puntos distintos cualesquiera en G, y γ_0, γ_1 son dos trayectorias en G de z_0 a z_1, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

(ii) Las integrales a lo largo de curvas cerradas son iguales a 0. Es decir, si γ es una curva cerrada contenida en G, entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(iii) Existe una antiderivada (global) de f en G. Es decir, existe una función F definida y analítica en todo G tal que $F'(z) = f(z)$ para toda z en G.

Presentamos ahora varias formulaciones del teorema de Cauchy.

Teorema 1.3.6 (Teorema de Cauchy, versión homotópica) *Sean f analítica en una región G y γ una curva cerrada simple en G. Supóngase que γ puede deformarse continuamente en otra curva cerrada simple $\tilde{\gamma}$ sin salirse de la región G, (es decir, $\tilde{\gamma}$ es homotópica a γ en G). Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Definición 1.3.7 *Una región $G \subset \mathbb{C}$ se llama* **simplemente conexa**, *si G es conexo y cualquer curva cerrada γ en G es homótopica en G a un punto de G.*

La versión precisa del teorema de Cauchy utiliza los conceptos de curvas homotópicas a un punto y de regiones simplemente conexas.

Teorema 1.3.8 (Teorema de Cauchy, versión para una curva homotópica a un punto) *Sean f una función analítica en una región G y sea γ una curva cerrada en G, la cual es homotópica en G a un punto de G. Entonces,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Teorema 1.3.9 (Teorema de Cauchy, versión en simplemente conexos) *Si f es una función analítica en una región simplemente conexa G y γ es una curva cerrada en G, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

El siguiente teorema es la versión del teorema 1.3.5 en regiones simplemente conexas.

Teorema 1.3.10 *Sea f una función analítica en una región simplemente conexa G, entonces, entonces las siguientes afirmaciones son validas y equivalentes.*

(i) Si z_0 y z_1 son dos puntos distintos cualesquiera en G, y γ_0, γ_1 son dos trayectorias en G de z_0 a z_1, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

(ii) Si γ es una curva cerrada contenida en G, entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

(iii) Existe una función F definida y analítica en todo G tal que $F'(z) = f(z)$, para toda z en G.

1.4. Series de funciones analíticas

La noción de convergencia de sucesiones y series de números complejos, así como la de convergencia de sucesiones de funciones de variable compleja, son similares a las del análisis real, por ejemplo, para determinar la convergencia de series, se pueden aplicar los criterios de la razón, de la raíz y de Cauchy, por mencionar algunos. Además, se tiene también la noción de convergencia uniforme para sucesiones y series de funciones compleja, se resalta que es posible usar el criterio de Cauchy para determinar este tipo de convergencia. Un resultado útil en convergencia de series de funciones complejas es el siguiente.

Teorema 1.4.1 (El criterio M de Weierstrass) *Sea g_n una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Suponga que existe una sucesión de constantes $M_n \geq 0$ tal que*

1. *$|g_n(z)| \leq M_n$, para toda $z \in A$.*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.*

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge absoluta y uniformemente en* A.

El siguiente resultado esta relacionado con la convergencia de funciones analíticas.

Teorema 1.4.2 (Teorema de convergencia analítica) *Sea* G *una región en* $\mathbb{C}$ *y sea* f_n *una sucesión de funciones analíticas en* G

1. *Si* $f_n \to f$ *uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en* G*, entonces* f *es analítica en* G.

   Más aún, $f_n' \to f'$ *puntualmente en* G *y uniformemente en cualquier disco cerrado en* G.

2. *Si* $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *converge uniformemente en cualquier disco cerrado en* G*, entonces* g *es analítica en* G.

   Más aún, $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z)$ *converge puntualmente en* G *y también uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en* G.

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde z_0 y todos los a_n son números complejos fijos. Este tipo de series convergen en discos abiertos como se enuncia a continuación.

Teorema 1.4.3 (Teorema de convergencia de series de potencias) *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$*, existe un único número* $R \geq 0$*, posiblemente* ∞*, llamado el* **radio de convergencia***, tal que si* $|z - z_0| < R$*, la serie converge y si* $|z - z_0| > R$*, la serie diverge. Más aún, la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado contenido en* $\mathbb{D}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$.
En caso de que z *cumpla que* $|z - z_0| = R$*, no se puede asegurar la convergencia o divergencia de la serie en tal* z.

Combinando los teoremas de convergencia analítica y de convergencia de series de potencias, se deduce el siguiente resultado.

Teorema 1.4.4 (Analiticidad de las series de potencias) *Una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *es una función analítica en el disco de convergencia* $\mathbb{D}_R(z_0)$.

Teorema 1.4.5 (Teorema de Taylor) *Sea f una función analítica en una región G. Sea $z_0 \in G$ y sea $\mathbb{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ contenido en G (es posible que $r = \infty$, en cuyo caso $\mathbb{D}_r(z_0) = G = \mathbb{C}$). Entonces, para cada $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge en $\mathbb{D}_r(z_0)$ (es decir, tiene un radio de convergencia mayor o igual que r), además tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

La serie anterior es llamada **la serie de Taylor** de f alrededor de z_0.

El teorema de Taylor no aplica a funciones como $f(z) = \frac{1}{z}$ o $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ en $z_0 = 0$, pues no son analíticas en ese punto. Para tales funciones existe otra expansión, llamada la **serie de Laurent**, que utiliza potencias negativas de z. Esta serie es importante en el estudio de puntos singulares de una función.

Teorema 1.4.6 (Teorema de Laurent) *Sea $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ y considere la región $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Se admite que $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$ o ambos. Sea f analítica en la región A. Entonces, f se puede expresar de la siguiente manera*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \tag{1.1}$$

donde ambas series en el lado derecho de la igualdad convergen absolutamente en A y convergen uniformemente en cualquier conjunto de la forma $B_{\rho_1,\rho_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$, donde $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Si γ es un circunferencia alrededor de z_0 con radio r, con $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}d\zeta, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Si hacemos para $n \geq 1$, $a_{-n} = b_n$, entonces la igualdad (1.1) se reescribe como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

La serie para f en el teorema anterior se conoce como la **serie de Laurent** o **expansión de Laurent** alrededor de z_0 en el anillo A. Además, la expansión de Laurent es única.

Es importante considerar el caso $r_1 = 0$, ya que entonces f es analítica en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r_2\}$, la r_2-vecindad agujerada de z_0. Se dice que z_0 es una **singularidad aislada** de f, si f es analítica en una r-vecindad agujerada de la forma $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < r\}$; en este caso f tiene una serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n},$$

válida para $0 < |z - z_0| < r$.

El coeficiente b_1 tiene una relevancia importante y se le conoce como el **residuo** de f en z_0. Su importancia radica, entre otras cosas, de que es suficiente conocer este coeficiente para calcular la integral de f sobre una curva cerrada.

Cuando en la serie de Laurent de f alrededor de z_0, todas las b_k son iguales a cero, decimos que z_0 es una **singularidad removible** de f. Cuando solo hay un número finito de b_k's distintas de cero, decimos que la singularidad z_0 es un **polo**. Si k es el índice más grande tal que $b_k \neq 0$, decimos que z_0 es un **polo de orden** k. En particular, si $b_1 \neq 0$ y si $b_j = 0$, para toda $j \geq 2$, decimos que z_0 es un **polo simple**. Finalmente, cuando hay una infinidad de b_k distintas de cero, decimos que z_0 es una **singularidad esencial**.

En relación con lo anterior, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.4.7 *Una función f es* **meromorfa** *en una región G, si es analítica en G excepto por singularidades aisladas en G los cuales son polos.*

Finalmente, recordemos que una función f tiene un **cero de orden** n en z_0, si existe otra función g tal que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, donde $g(z_0) \neq 0$. Esto es equivalente a que la función f y sus primeras $n - 1$ derivadas se anulan en z_0 pero la n-ésima derivada de f evaluada en z_0 es distinta de cero.

Capítulo 2

Cálculo de Residuos

En este capítulo se estudiará el teorema del residuo, así como algunas aplicaciones en análisis complejo avanzado: evaluación de integrales definidas, evaluación de series infintas y expansiones en fracciones parciales. Empezamos estudiando las diferentes técnicas para calcular el residuo en una singularidad aislada de una función meromorfa.

2.1. Cálculo de Residuos

Sea f una función meromorfa en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$, con una singularidad aislada en $z_0 \in U$, entonces f admite una expansión de Laurent, que es válida en una vecindad agujerada de z_0,

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots ,$$

recordemos que el número b_1 es llamado el **residuo** de f en z_0, y se denota como $b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0)$.
Si una función f es analítica en un punto z_0 o tiene una singularidad removible en z_0, entonces todos los coeficientes b_1, b_2, $\ldots$ son cero, en particular el residuo de f en z_0 es cero.
Hay varias técnicas para calcular el residuo sin tener que encontrar la expansión de Laurent, a continuación damos un resumen de éstas técnicas.

Proposición 2.1.1 *[Sección 4.1, [8]]. Sean f, g, h funciones de variable compleja y z_0 un punto en el plano complejo el cual es una singularidad aislada o un cero de* *cierto orden, de cada una de las funciones anteriores. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si* $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$, *entonces* z_0 *es una singularidad removible y el residuo de* f *en* z_0 *es cero.*

2. *Si* g *y* h *tienen ceros del mismo orden en* z_0, *entonces* z_0 *es una singularidad removible de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0 *es cero.*

3. *Si* $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ *existe y es distinto de cero, entonces* z_0 *es un polo simple de* f *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

4. *Si* $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$ *y* $h'(z_0)\neq 0$, *entonces* z_0 *es un polo simple de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},z_0\right)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

5. *Si* g *tiene un cero de orden* k *en* z_0, *y* h *tiene un cero de orden* $k+1$ *en* z_0, *entonces* z_0 *es un polo simple de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},z_0\right)=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$.

6. *Si* $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=h'(z_0)=0$ *y* $h''(z_0)\neq 0$, *entonces* z_0 *es un polo de segundo orden de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},z_0\right)=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$.

7. *Si* $g(z_0)\neq 0$, *entonces* z_0 *es un polo de segundo orden de* $\frac{g(z)}{(z-z_0)^2}$ *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{(z-z_0)^2},z_0\right)=g'(z_0)$.

8. *Si* $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=h'(z_0)=h''(z_0)=0$ *y* $h'''(z_0)\neq 0$, *entonces* z_0 *es un polo de segundo orden de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},z_0\right)=3\frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\frac{3}{2}\frac{g'(z_0)h^{(4)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2}$.

9. *Si* k *es el entero más pequeño tal que* $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$ *existe, y definiendo* $\phi(z)=(z-z_0)^k f(z)$, *entonces* z_0 *es un polo de orden* k *de* f *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}(f(z),z_0)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{\phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$.

10. *Si* g *tiene un cero de orden* l *en* z_0, *y* h *tiene un cero de orden* $k+l$ *en* z_0, *entonces* z_0 *es un polo de orden* k *de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0 *es* $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{\phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$, *donde* $\phi(z)=(z-z_0)^k\frac{g(z)}{h(z)}$.

11. *Si* $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$ *y* $h^{(k)}(z_0) \neq 0$, *entonces* z_0 *es un polo de orden* k *de* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *y el residuo en* z_0, $\mathrm{Res}\ (g/h, z_0)$, *se puede calcular de la siguiente manera*

$$\left[\frac{k!}{h^{(k)}(z_0)}\right]^k \cdot \begin{vmatrix} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(z_0) \\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & g'(z_0) \\ \frac{h^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & \cdots & 0 & \frac{g^{(2)}(z_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \frac{h^{(2k-3)}(z_0)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \end{vmatrix}.$$

A continuación presentamos una serie de problemas y ejercicios de cálculo de residuos.

2.1.1. Encuentre los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados.

$$a)\ \frac{e^{z^2}}{z-1},\ z_0 = 1, \qquad b)\ \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2},\ z_0 = 0.$$

$$c)\ \left(\frac{\cos z - 1}{z}\right)^2,\ z_0 = 0, \qquad d)\ \frac{z^2}{z^4 - 1},\ z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Solución. $a)$ Como, $\displaystyle\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{z^2}}{z-1} = \lim_{z\to 1} e^{z^2} = e \neq 0$, se tiene por el número 3 de la Proposición 2.1.1, que $z_0 = 1$ es un polo simple y $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{z^2}}{z-1}, 1\right) = e$.

$b)$ Dado que $\dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$ es analítica en $z_0 = 0$,

$$b_1 = \mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}, 0\right) = 0.$$

$c)$ Analicemos la función $g(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$. Usando la serie de Taylor del coseno alrededor de $z_0 = 0$, tenemos que la serie de Laurent de $g(z)$ es

$$\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}(-1)^n}{(2n)!} - 1\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}(-1)^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}(-1)^n}{(2n)!}.$$

De esta manera, se tiene que la función g es analítica en 0, y por lo tanto $[g(z)]^2$ también lo es, por lo que

$$b_1 = \operatorname{Res}\left(\left(\frac{\cos z - 1}{z}\right)^2, 0\right) = 0.$$

Segunda solución para la parte c). Considere, como en la solución anterior, la función $g(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$, la cual es el cociente de $f(z) = \cos z - 1$ y $h(z) = z$, las cuales tienen ceros de órdenes 2 y 1, respectivamente, en $z_0 = 0$; como el orden del cero en el numerador, es mayor que el orden del cero en el denominador, la función g tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$, y lo mismo pasa para la función $[g(z)]^2$, de donde el residuo buscado es cero.

d) Sean $g(z) = z^2$ y $h(z) = z^4 - 1$, luego $h'(z) = 4z^3$. Como $g(z_0) = g(e^{\frac{i\pi}{2}}) = g(i) = i^2 = -1 \neq 0$; $h(z_0) = e^{2\pi i} - 1 = 0 \quad h'(e^{\frac{i\pi}{2}}) = 4(e^{\frac{i\pi}{2}})^3 = -4i \neq 0$. Por el número 4 de la Proposición 2.1.1, z_0 es un polo simple de $\frac{g}{h}$ y

$$b_1 = \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{z^4 - 1}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{-1}{-4i} = -\frac{i}{4}.$$

2.1.2. Deduzca el número 8 de la Proposición 2.1.1 a partir del número 6 de la misma proposición.
Solución. Ya que $g(z)$ tiene un cero de primer orden en z_0 y $h(z)$ tiene un cero de tercer orden en z_0, entonces existen funciones analíticas g_1 y h_1, en una vecindad de z_0, tales que $g(z) = (z - z_0)g_1(z)$, $h(z) = (z - z_0)^3 h_1(z)$ en tal vecindad con $g_1(z_0) \neq 0$ y $h_1(z_0) \neq 0$. Luego,

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z - z_0)g_1(z)}{(z - z_0)^3 h_1(z)} = \frac{g_1(z)}{(z - z_0)^2 h_1(z)} = \frac{g_1(z)}{h_2(z)},$$

donde $h_2(z) = (z - z_0)^2 h_1(z)$.
Veamos que g_1 y h_2 satisfacen las condiciones del número 6 de la proposición 2.1.1. Luego $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g_1(z)}{h_2(z)}$, tiene un polo de orden 2 en z_0. Observemos lo siguiente, $h_2'(z) = 2(z - z_0)h_1(z) + (z - z_0)^2 h_1'(z)$, $h_2''(z) = 2h_1(z) + 4(z - z_0)h_1'(z) + (z - z_0)^2 h_1''(z)$ y $h_2'''(z) = 6h_1'(z) + 6(z - z_0)h_1''(z) + (z - z_0)^2 h_1'''(z)$, de donde se tiene que $h_2(z_0) = h_2'(z_0) = 0$, $h_2''(z_0) = 2h_1(z_0) \neq 0$ y $h_2'''(z_0) = 6h_1'(z_0) \neq 0$, por lo cual z_0 es un cero de orden 2 de $h_2(z)$. De esta manera tenemos que g_1 y h_2 si satisfacen las condiciones del número 6 de la proposición 2.1.1. Luego

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{g_1(z)}{h_2(z)}, z_0\right) = \frac{2g_1'(z_0)}{h_2''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g_1(z_0)h_2'''(z_0)}{(h_2''(z_0))^2}.$$

Ahora se tiene que escribir esta expresión en términos de g y h. Recordemos que $g(z) = (z - z_0)g_1(z)$ y $h(z) = (z - z_0)^3 h_1(z) = (z - z_0)^2 h_2(z)$, por lo que se tienen las siguientes igualdades

$$g'(z) = (z - z_0)g_1'(z) + g_1(z), \quad g''(z) = (z - z_0)g_1''(z) + 2g_1'(z),$$
$$h'(z) = (z - z_0)h_2'(z) + h_2(z), \quad h''(z) = (z - z_0)h_2''(z) + 2h_2'(z),$$
$$h'''(z) = (z - z_0)h_2'''(z) + 3h_2''(z), \quad h^{(iv)}(z) = (z - z_0)h_2^{(iv)}(z) + 4h_2'''(z).$$

Por lo tanto, $g_1(z_0) = g'(z_0)$, $g_1'(z_0) = g''(z_0)/2$, $h_2''(z_0) = h'''(z_0)/3$ y $h_2'''(z_0) = h^{(iv)}(z_0)/4$. Sustituyendo estos valores en la expresión del residuo de $\frac{g_1(z)}{h_2(z)}$ en z_0, se obtiene que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \frac{2g_1'(z_0)}{h_2''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g_1(z_0)h_2'''(z_0)}{(h_2''(z_0))^2} = \frac{2(g''(z_0)/2)}{(h'''(z_0)/3)} - \frac{2}{3}\frac{g'(z_0)(h^{(iv)}(z_0)/4)}{(h'''(z_0)/3)^2}$$

que simplificado es igual a

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{2}\frac{g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2},$$

lo que termina la demostración.

Segunda solución, sin usar el número 6 de la proposición 2.1.1. Ya que $g(z)$ tiene un cero de primer orden en z_0 y $h(z)$ tiene un cero de tercer orden en z_0, entonces $\dfrac{g}{h}$ tiene un polo de segundo orden en z_0 y la serie de Laurent se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots . \qquad (2.1)$$

Deseamos calcular b_1, por lo que escribimos las funciones g, h como sus desarrollos en series de Taylor, ya que son analíticas,

$$g(z) = g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{g'''(z_0)(z - z_0)^3}{3!} + \cdots$$
$$h(z) = \frac{h'''(z_0)(z - z_0)^3}{3!} + \frac{h^{(iv)}(z_0)(z - z_0)^4}{4!} + \cdots .$$

Entonces de la expresión (2.1), tenemos que

$$\begin{aligned} g(z) &= h(z)\left[\frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + \cdots\right] \\ &= \left[\frac{h'''(z_0)(z - z_0)}{3!} + \frac{h^{(iv)}(z_0)(z - z_0)^2}{4!} + \cdots\right][b_2 + b_1(z - z_0) + \cdots] \\ &= \frac{b_2 h'''(z_0)}{6}(z - z_0) + \left[\frac{b_2 h^{(iv)}(z_0)}{24} + \frac{b_1 h'''(z_0)}{6}\right](z - z_0)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Ya que estas dos series de potencias son iguales, los coeficientes deben ser iguales, entonces

$$g'(z_0) = \frac{b_2 h'''(z_0)}{6} \quad \text{y} \quad \frac{g''(z_0)}{2} = \frac{b_2 h^{(iv)}(z_0)}{24} + \frac{b_1 h'''(z_0)}{6}.$$

Resolviendo para b_1, obtenemos el resultado,

$$b_1 = \frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{2}\frac{g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2}.$$

2.1.3. Sean g y h funciones analíticas en z_0, con $g(z_0) \neq 0$ y suponga que $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $h^{(k)}(z_0) \neq 0$. Muestre que g/h tiene un polo de orden k, y el residuo $\operatorname{Res}\,(g/h, z_0)$ está dado por

$$\left[\frac{k!}{h^{(k)}(z_0)}\right]^k \cdot \begin{vmatrix} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(z_0) \\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & g'(z_0) \\ \frac{h^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & \cdots & 0 & \frac{g^{(2)}(z_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \frac{h^{(2k-3)}(z_0)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \end{vmatrix}.$$

Solución. Como h tiene un cero de orden k en z_0, y g no se anula en z_0, se tiene que

$$h(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

ambas expresiones válidas en una vecindad de z_0. Además, h se puede escribir como $h(z) = (z - z_0)^k f(z)$, con f analítica en una vecindad de z_0 y $f(z_0) \neq 0$.
Como $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k \dfrac{g(z)}{h(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^k f(z)} = \dfrac{g(z_0)}{f(z_0)} \neq 0$ existe, se tiene que $\dfrac{g}{h}$ tiene un polo de orden k en z_0, es decir, su serie de Laurent, en una vecindad agujerada de z_0, tiene la forma

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \rho(z),$$

donde $\rho(z)$ es una función analítica en una vecindad de z_0.
Usando las expansiones de g y h, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n\right) \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \rho(z)\right),$$

donde se tiene que encontrar $b_1 = \mathrm{Res}(g/h, z_0)$.
Comparando coeficientes, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n &= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=k}^{\infty}b_j\frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-j}\right)\\ &\quad+\rho(z)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\end{aligned}$$

de donde, cuando

$$\begin{array}{ll} n=0 & g(z_0)=\frac{b_kh^{(k)}(z_0)}{k!}\\ n=1 & g'(z_0)=\frac{b_kh^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}+\frac{b_{k-1}h^{(k)}(z_0)}{k!}\\ n=2 & \frac{g''(z_0)}{2!}=\frac{b_kh^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}+\frac{b_{k-1}h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}+\frac{b_{k-2}h^{(k)}(z_0)}{k!}\\ \vdots & \quad\vdots\\ n=k-1 & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}=\frac{b_kh^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!}+\frac{b_{k-1}h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!}+\cdots+\frac{b_1h^{(k)}(z_0)}{k!}. \end{array}$$

De las identidades anteriores, se deben encontrar los valores de b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, $\ldots$, b_1, para lo cual se debe resolver el sistema de ecuaciones, que se puede escribir en forma matricial como $A\cdot\overline{b}=\overline{g}$, donde $\overline{b}$ es el vector columna $(b_k, b_{k-1},\ldots,b_1)$, $\overline{g}$ es el vector columna $(g(z_0), g'(z_0), \frac{g''(z_0)}{2!},\ldots,\frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!})$ y A es la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{h^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots\\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \frac{h^{(2k-3)}(z_0)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} \end{pmatrix}.$$

Es claro que det $A=\left(\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}\right)^k\neq 0$, de donde el sistema tiene la solución $\overline{b}=A^{-1}\overline{g}$, luego $b_1=\frac{\det A^*}{\det A}$, donde A^* es la matriz que se obtiene de la matriz A al cambiar el último vector columna por el vector $\overline{g}$, de donde se tiene el resultado.

2.1.4. Encuentre todos los puntos singulares de las siguientes funciones y calcule los residuos en esos puntos.

$$a)\ \frac{1}{e^z-1}; \qquad\qquad b)\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Solución. $a)$ Sean $f(z)=1$ y $g(z)=e^z-1$, entonces $\dfrac{1}{e^z-1}$ tiene puntos singulares cuando $g(z)=e^z-1=0 \Leftrightarrow e^z=1 \Leftrightarrow z=2n\pi i$, con $n\in\mathbb{Z}$.
Ahora bien, $f(2n\pi i)=1$, para toda $n\in\mathbb{Z}$, $g'(2n\pi i)=e^{2n\pi i}=1\neq 0$, para toda $n\in\mathbb{Z}$. De esta manera, por el número 4 de la proposición 2.1.1, todos los puntos singulares $z=2n\pi i$, con $n\in\mathbb{Z}$, son polos simples y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z-1},2n\pi i\right)=\frac{f(2n\pi i)}{g'(2n\pi i)}=\frac{1}{1}=1, \quad \text{para toda } n\in\mathbb{Z}.$$

$b)$ La función solo tiene un punto singular cuando $z=0$, además, podemos obtener su serie de Laurent, usando la serie de Taylor del seno, de la siguiente manera para $z\neq 0$,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots.$$

Luego es fácil ver que $\operatorname{Res}\big(\operatorname{sen}(\frac{1}{z}),0\big)=b_1=1$.

2.1.5. Si f_1 y f_2 tienen residuos r_1 y r_2 en z_0, muestre que el residuo de f_1+f_2 en z_0 es r_1+r_2.
Solución. Escribimos a $f_1(z)$ y a $f_2(z)$ en sus expansiones de serie de Laurent alrededor de z_0

$$f_1(z)=\cdots+\frac{b_k}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\frac{r_1}{(z-z_0)}+\rho_1(z)$$
$$f_2(z)=\cdots+\frac{c_k}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{c_2}{(z-z_0)^2}+\frac{r_2}{(z-z_0)}+\rho_2(z),$$

donde ρ_1 y ρ_2 son funciones analíticas en z_0.
Ahora al considerar f_1+f_2, debido a la unicidad de la serie de Laurent, tenemos que la serie de Laurent para esta función suma es

$$\cdots+\frac{b_k+c_k}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{b_2+c_2}{(z-z_0)^2}+\frac{r_1+r_2}{(z-z_0)}+h(z),$$

donde $h(z)=\rho_1(z)+\rho_2(z)$ y el término que nos interesa es el que tiene como denominador $(z-z_0)$, es decir, $\frac{r_1+r_2}{(z-z_0)}$.
De esta manera

$$\operatorname{Res}(f_1+f_2,z_0)=r_1+r_2.$$

2.1.6. Si f_1 y f_2 tienen polos simples en z_0, muestre que f_1f_2 tiene un polo de segundo orden en z_0. Deduzca una fórmula para el residuo.
Solución. Como f_i tiene un polo simple en z_0, para $i=1,2$, existen funciones ϕ_i analíticas en vecindades de z_0, tales que se puede expresar a f_i como $f_i(z)=\frac{\phi_i(z)}{z-z_0}$,

donde $\phi_1(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots$ y $\phi_2(z) = b_{-1} + b_0(z-z_0) + b_1(z-z_0)^2 + \cdots$. Además, $\mathrm{Res}(f_1, z_0) = a_{-1} = \phi_1(z_0)$ y $\mathrm{Res}(f_2, z_0) = b_{-1} = \phi_2(z_0)$. Sea $h(z) = f_1(z)f_2(z)$. Primero veamos que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 h(z)$ existe;

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 h(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 \frac{\phi_1(z)}{z-z_0}\cdot\frac{\phi_2(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\phi_1(z)\phi_2(z) = a_{-1}b_{-1}.$$

Luego, z_0 es un polo de orden menor o igual a 2 para h. Además, es claro que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)h(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{\phi_1(z)\phi_2(z)}{z-z_0}$ no existe; por lo que z_0 es un polo doble. Haciendo $\phi(z) = (z-z_0)^2 h(z) = \phi_1(z)\phi_2(z)$ se tiene, por el número 7 de la proposición 2.1.1, que

$$\mathrm{Res}(h, z_0) = \phi'(z_0) = \phi_1(z_0)\phi_2'(z_0) + \phi_1'(z_0)\phi_2(z_0) = a_{-1}b_0 + b_{-1}a_0,$$

donde a_0 y b_0 son los términos constantes en las expansiones de Laurent de f_1 y f_2.

Segunda solución. Si f_1 y f_2 tienen polos simples en z_0, entonces sus series de Laurent alrededor de z_0 son de la forma

$$f_1(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

y

$$f_2(z) = \frac{b_{-1}}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

con $a_{-1} = \mathrm{Res}(f_1, z_0) \neq 0$ y $b_{-1} = \mathrm{Res}(f_2, z_0) \neq 0$. Luego la serie de Laurent de $f_1 f_2$ alrededor de z_0 es

$$f_1(z)f_2(z) = \frac{a_{-1}b_{-1}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}b_0 + a_0 b_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

donde $c_n = \sum_{k=-1}^{n+1} a_k b_{n-k}$, para $n \geq 0$.

Como $a_{-1}b_{-1} \neq 0$, se tiene que z_0 es un polo doble y $\mathrm{Res}(f_1 f_2, z_0) = a_{-1}b_0 + a_0 b_{-1} = b_0\mathrm{Res}(f_1, z_0) + a_{-1}\mathrm{Res}(f_2, z_0)$, con a_0, b_0 los valores en z_0 de las extensiones analíticas de $f_1(z) - \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ y $f_2(z) - \frac{b_{-1}}{z-z_0}$ alrededor de z_0.

2.1.7. Sean

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{(z-z_0)^k}$$

las expansiones de Laurent para las funciones f y g, válidas en $0 < |z-z_0| < r$. Entonces la expansión de Laurent para fg se obtiene mediante la multiplicación formal de estas series

Solución. El resultado se sigue de los siguientes resultados generales conocidos para series absolutamente convergentes. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie que converge absolutamente, entonces se tiene que si $\{b_n\}$ es cualquier reordenación de $\{a_n\}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, y de hecho $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Esto nos permite escribir la serie de Laurent de f (y de g), por ejemplo, de la siguiente manera

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(z-z_0)^n + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Para demostrar lo pedido en este problema, usaremos el siguiente resultado del análisis.

Lema 2.1.2 *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *son series que convergen absolutamente, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *converge absolutamente, donde* $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$.
Además, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

Demostración del lema. Consideremos $A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$, $A_N = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$, $B_N = \sum_{n=N}^{\infty} |b_n|$, los cuales son números reales ya que las series son absolutamente convergentes. Como

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} |c_j| &= \sum_{j=0}^{n} |a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \cdots + a_j b_0| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} (|a_0||b_j| + |a_1||b_{j-1}| + \cdots + |a_j||b_0|) \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{n} |a_n|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| = A \cdot B,
\end{aligned}$$

la sucesión de sumas parciales $\left\{ \sum_{j=0}^{n} |c_j| \right\}$ es una sucesión creciente acotada, luego $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ es convergente y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente.

Para mostrar que, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$, bastará ver que

$$\left| \sum_{j=0}^{2n} c_j - \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{j=0}^{n} b_j \right| \tag{2.2}$$

es pequeño para n grande, es decir, que tiende a cero cuando n tiende a infinito. La idea es analizar el siguiente triángulo que contempla a la suma $\sum_{j=0}^{6} c_j$, y el cuadrado que encierra a $\sum_{j=0}^{3} a_j \sum_{j=0}^{3} b_j$, la diferencia son los términos que están en los triángulos pequeños a la derecha del cuadrado y abajo del cuadrado, pero éstos en módulo suman algo menor que la suma de los módulos de todos los números fuera del cuadrado.

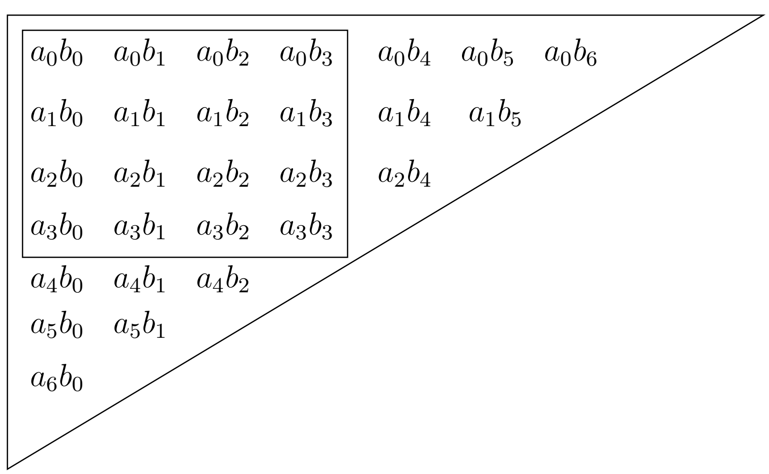


Figura 2.1: Arreglo de los primeros términos del producto de dos series.

Esto es,

$$\left|\sum_{j=0}^{2n} c_j - \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{j=0}^{n} b_j\right| \leq \sum_{\substack{j+l=2n \\ j\geq n+1 \text{ o } l\geq n+1}} |a_j||b_l| \leq AB_{n+1} + A_{n+1}B.$$

Como A_{n+1} y B_{n+1} tienden a cero cuando n tiende a infinito, el resultado es inmediato.

Otra idea para deducir la segunda parte del Lema. Sea $p_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j|$, es decir, $\{p_n\}$ es una sucesión creciente y acotada que converge a algún número c, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente y ya que el límite de un producto es el producto de los límites.
Entonces como $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, si n y n' son suficientemente grandes, se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n'} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{n'} |b_j| - \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j|\right| < \epsilon/2,$$

es decir, $|p_{n'} - p_n| < \epsilon/2$, luego, se puede deducir que

$$\sum_{i>n \text{ o } j>n} |a_i||b_j| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Sea N suficientemente grande de manera que los términos c_n, con $n \leq N$, incluyan los términos $a_i b_j$, con i, $j \leq L$, luego $\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j$ consiste de términos $a_i b_j$, con $i > L$ o $j > L$, es decir

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j\right| \leq \sum_{i \text{ o } j>L} |a_i||b_j| \leq \epsilon.$$

Como el límite de un producto es el producto de los límites, se tiene también que

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j\right| < \epsilon,$$

para L suficientemente grande.

Ahora se puede concluir, considerando L y N suficientemente grandes, que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{n=1}^{N} c_n\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j\right| \\ &\quad + \left|\sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j - \sum_{n=1}^{N} c_n\right| \\ &< 2\epsilon.\end{aligned}$$

Para concluir, notemos que la expansión de Laurent es única, lo cual termina la demostración.

2.1.8. Calcule los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades.

$$a)\ \frac{1}{(1-z)^3}, \qquad b)\ \frac{e^z}{(1-z)^3},$$

$$c)\ \frac{1}{z(1-z)^3}, \qquad d)\ \frac{e^z}{z(1-z)^3}.$$

Solución. $a)$ La única singularidad de $\frac{1}{(1-z)^3}$ es $z_0 = 1$. Aquí usaremos el resultado del problema **2.1.3**, aplicado a $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{g(z)}{h(z)}$, donde $g(z) = 1$ y $h(z) = (1-z)^3$, de donde f tiene un polo triple en $z_0 = 1$, por lo que el residuo está dado por

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \left[\frac{3!}{h'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{h'''(z_0)}{3!} & 0 & g(z_0) \\ \frac{h^{(iv)}(z_0)}{4!} & \frac{h'''(z_0)}{3!} & g'(z_0) \\ \frac{h^{(v)}(z_0)}{5!} & \frac{h^{(iv)}(z_0)}{4!} & \frac{g''(z_0)}{2} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas

$$h'''(z_0) = -6, h^{(iv)}(z_0) = 0, h^{(v)}(z_0) = 0, g(z_0) = 1, g'(z_0) = 0, g''(z_0) = 0.$$

Por lo tanto, el residuo es

$$\operatorname{Res}(f, 1) = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$b)$ Usamos la misma idea que en el inciso anterior. Sea $f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3} = \frac{g(z)}{h(z)}$, donde $g(z) = e^z$ y $f(z) = (1-z)^3$, función que tiene un polo triple en $z_0 = 1$. Como

$$h'''(z_0) = -6, h^{(iv)}(z_0) = 0, h^{(v)}(z_0) = 0, g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = e,$$

se obtiene que

$$\operatorname{Res}(f,1) = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & e \\ 0 & -1 & e \\ 0 & 0 & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = -\frac{e}{2}.$$

c) Sea $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^3}$ que tiene singularidades en $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$. Se usará también el problema **2.1.3** con $g(z) = 1$ y $h(z) = z(1-z)^3$. En el caso cuando $z_0 = 0$, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 1$, por lo tanto z_0 es un polo simple y se sigue que

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = 1.$$

Para $z_0 = 1$, se tiene que

$$h'''(z_0) = -6, h^{(iv)}(z_0) = -24, h^{(v)}(z_0) = 0, g(z_0) = 1, g'(z_0) = 0, g''(z_0) = 0,$$

de donde

$$\operatorname{Res}(f,1) = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

d) Sea $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$, se procede igual, aquí hay singularidades en $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$. En el caso cuando $z_0 = 0$, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 1$, donde $g(z) = e^z$ y $h(z) = z(1-z)^3$, por lo tanto z_0 es un polo simple y se tiene que

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = 1.$$

Cuando $z_0 = 1$, se tiene que

$$h'''(z_0) = -6, h^{(iv)}(z_0) = -24, h^{(v)}(z_0) = 0, g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = e,$$

de donde

$$\operatorname{Res}(f,1) = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & e \\ -1 & -1 & e \\ 0 & -1 & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = -1\left[\frac{e}{2} - e + e\right] = -\frac{e}{2}.$$

2.1.9. Encuentre los residuos de $\dfrac{z^2-1}{\cos(\pi z)+1}$ en cada una de sus singularidades.

Solución. Primero, veamos cuáles son las singularidades de la función dada. Sean $f(z) = \frac{z^2-1}{\cos(\pi z)+1}$ y $h(z) = \cos(\pi z)+1$; f tiene singularidades cuando $\cos(\pi z)+1 = 0$,

es decir, $\cos(\pi z) = -1$; luego $\pi z = \pi(2n+1)$, con $n \in \mathbb{Z}$, de donde $z = 2n+1$, con $n \in \mathbb{Z}$. Luego, todas las singularidades de f son de la forma $z = 2n+1$, con $n \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, analicemos la función en el numerador $g(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$, que tiene 2 ceros, uno en $z = 1$ y otro en $z = -1$. Para $z = 1$, se tiene que $h(1) = 0$, $g(1) = 1^2 - 1 = 0$, $h'(1) = -\pi \operatorname{sen}(\pi) = 0$, $g'(1) = 2(1) = 2 \neq 0$ y $h''(1) = -\pi^2 \cos(\pi) = \pi^2 \neq 0$. Como g tiene un cero de orden 1 y h tiene un cero de orden 2 en $z = 1$, por el número 5 de la proposición 2.1.1, $z = 1$ es un polo simple y $\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{\cos \pi z + 1}, 1\right) = 2 \cdot \frac{2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2}$.
Para $z = -1$, se tiene que $h(-1) = 0$, $g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$, $h'(-1) = -\pi \operatorname{sen}(-\pi) = 0$, $g'(-1) = 2(-1) = -2 \neq 0$ y $h''(-1) = -\pi^2 \cos(-\pi) = \pi^2 \neq 0$. Como g tiene un cero de orden 1 y h tiene un cero de orden 2 en $z = -1$, por el número 5 de la proposición 2.1.1, $z = -1$ es un polo simple y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{\cos \pi z + 1}, -1\right) = 2\frac{(-2)}{\pi^2} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Ahora bien, para los demás puntos singulares, por el número 6 de la proposición 2.1.1, éstos son polos de segundo orden y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{\cos \pi z + 1}, 2n+1\right) = 2 \cdot \frac{2(2n+1)}{\pi^2} - \frac{2}{3}\frac{(4n^2+4n)(0)}{(\pi^2)^2} = 4 \cdot \frac{2n+1}{\pi^2},$$

para toda $n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1, 1\}$. Es fácil notar que esta fórmula aplica también para los casos $z = 1$ y $z = -1$, por lo que se puede concluir que dicho resultado aplica para toda $n \in \mathbb{Z}$.

2.2. Teorema del Residuo

El teorema del residuo es uno de los resultados principales de variable compleja, éste incluye al teorema de Cauchy y a la fórmula integral de Cauchy como casos especiales. Además, conduce inmediatamente a interesantes aplicaciones que veremos más adelante.

Teorema del Residuo. [Capítulo 4, [1]]. *Sea G una región en $\mathbb{C}$, y sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$, puntos distintos de G. Sea f analítica en $G \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, es decir, f es analítica en G excepto para singularidades aisladas en $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Sea γ una curva cerrada en G, homotópica en G a un punto de G tal que ningún punto z_i está sobre γ. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i) I(\gamma, z_i),$$

donde $I(\gamma, z_i)$ es el índice de γ con respecto a z_i.

Para la definición de homotopía de curvas ver [3], capítulo IV.

Recordemos que si γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto que no está sobre γ, entonces el **índice de** γ **con respecto a** z_0, se define como

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Si una función f es analítica para toda z de norma suficientemente grande, entonces es analítica en una vecindad agujerada de ∞. Luego, podemos pensar al ∞ como una singularidad aislada de f. Con la ayuda de $F(z) = f(1/z)$, se puede discutir el comportamiento de f en ∞ en términos del comportamiento de F en 0.

Definición 2.2.1 *Sea f una función analítica en una vecindad agujerada de ∞ y sea $F(z) = f(1/z)$, entonces se define* $\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}((1/z^2)F(z), 0)$.

Con esta definición de **residuo en infinito**, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2 *Sea f una función analítica para toda z de norma mayor a $R_0 > 0$. Si $R > R_0$ y Γ es la circunferencia de radio R centrada en 0, recorrida una vez en sentido contrario a la manecillas del reloj, entonces*

$$\int_\Gamma f(z)dz = -2\pi i \mathrm{Res}\ (f, \infty).$$

A continuación presentamos una serie de problemas relacionados con el teorema del residuo.

2.2.1. Deduzca la fórmula integral de Cauchy apartir del teorema de residuo.

Fórmula Integral de Cauchy. *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ analítica en una región G, sea $\gamma \subset G$ una curva cerrada en G que es homotópica a un punto, y sea $z_0 \in G$ que no está sobre γ, entonces*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Solución. Sea γ una curva cerrada, y consideremos la función $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$. Como f es analítica en G, entonces $g(z)$ es analítica en $G \setminus \{z_0\}$. Por lo que aplicando el teorema del residuo para la función $g(z)$, se obtiene

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(g, z_0) I(\gamma, z_0).$$

Pero como $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{f(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, donde el último límite se tiene ya que f es continua en z_0, luego por el número 3 de la proposición 2.1.1, z_0 es un polo simple de $g(z)$ y Res$(g, z_0) = f(z_0)$. Luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \mathrm{Res}(g, z_0)I(\gamma, z_0) = f(z_0)\cdot I(\gamma, z_0).$$

Otra forma de ver que $\mathrm{Res}(g, z_0)I(\gamma, z_0) = f(z_0)$. Como $f(z)$ es analítica en G, su expansión en serie de Taylor alrededor de z_0 es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots,$$

con $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, así

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)} = \frac{a_0}{(z-z_0)} + a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + \cdots.$$

Por lo tanto, se tiene que $\mathrm{Res}(g, z_0) = a_0 = f(z_0)$.
En el caso de que $f(z_0) = 0$, es fácil ver que la integral del teorema del residuo es cero.

2.2.2. Evalúe la siguiente integral, donde la curva γ es la circunferencia de radio 9 y centro en 0,

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^z - 1}.$$

Solución. Del problema **2.1.4** de la sección 2.1, sabemos que las singularidades de $\frac{1}{e^z-1}$ son de la forma $z = 2n\pi i$, con $n \in \mathbb{Z}$, los cuales son puntos del eje imaginario, y de estas singularidades consideremos aquellas que están dentro de γ, es decir, que cumplan $|z| < 9$, las cuales son $z_1 = -2\pi i$, $z_2 = 0$ y $z_3 = 2\pi i$, y del mismo problema **2.1.4** de la sección 2.1, sabemos que son polos simples y los residuos de la función en esos puntos son iguales a 1.
Ahora bien, por el teorema del residuo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{e^z-1} &= 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{e^z-1}, -2\pi i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{e^z-1}, 0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{e^z-1}, 2\pi i\right)\right] \\ &= 2\pi i[1+1+1] = 6\pi i.\end{aligned}$$

2.2.3. Muestre que si γ es cualquier circunferencia de radio mayor que 1 y centro en 0, entonces

$$\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}dz = 10\pi i.$$

Solución. Consideremos la función $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)}$, la cual tiene singularidades aisladas en $z_0=0$ y $z_1=1$. Para calcular los residuos de f en esos puntos, notemos que $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, donde $g(z)=5z-2$ y $h(z)=z(z-1)$, por lo cual $g(0)\neq 0$ y $g(1)\neq 0$, mientras que $h(0)=h(1)=0$, pero $h'(0)=-1\neq 0$ y $h'(1)=1\neq 0$. De donde se puede concluir que $z_0=0$ y $z_1=1$ son ambos polos simples de f, y

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{g(0)}{h'(0)}=\frac{-2}{-1}=2,\quad \operatorname{Res}(f,1)=\frac{g(1)}{h'(1)}=\frac{3}{1}=3.$$

Otra forma de calcular los residuos es la siguiente. Como

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0} z\frac{5z-2}{z(z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{5z-2}{z-1}=2,$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{5z-2}{z(z-1)}=\lim_{z\to 1}\frac{5z-2}{z}=3,$$

ambas singularidades son polos simples con $\operatorname{Res}(f,0)=2$ y $\operatorname{Res}(f,1)=3$.
Como γ es una curva cerrada simple, por el teorema del residuo, se tiene que

$$\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}dz=2\pi i(\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,1))=10\pi i.$$

2.2.4. Sea f analítica en $\mathbb{C}$ excepto para los polos 1 y -1. Asuma que $\operatorname{Res}(f,1)=-\operatorname{Res}(f,-1)$. Sea $A=\{z\in\mathbb{C}: z\notin[-1,1]\}$. Muestre que existe una función analítica h en A, tal que $h'(z)=f(z)$.
Solución. Como f es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$ y si γ es una curva cerrada en $\mathbb{C}$, entonces por el teorema del residuo usando que $\operatorname{Res}(f,1)=-\operatorname{Res}(f,-1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= 2\pi i[\operatorname{Res}(f,1)I(\gamma,1)+\operatorname{Res}(f,-1)I(\gamma,-1)]\\ &= 2\pi i[-\operatorname{Res}(f,-1)I(\gamma,1)+\operatorname{Res}(f,-1)I(\gamma,-1)]\\ &= -2\pi i\operatorname{Res}(f,-1)[I(\gamma,1)-I(\gamma,-1)].\end{aligned}$$

Ahora, solo resta analizar la curva γ para ver su relación con los polos de f. Si en el interior de γ están los polos -1 y 1, entonces $I(\gamma,1)=I(\gamma,-1)$; y si los polos están afuera de γ, entonces $I(\gamma,1)=I(\gamma,-1)=0$. Para ambos casos

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Hemos justificado que para cualquier curva cerrada γ contenida en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, la integral $\int_\gamma f(z)dz$ vale cero (note que tal curva contiene a las dos singularidades o a ninguna). Por lo tanto, por la proposición 2.1.9 de [8], como la integral de f sobre cualquier curva cerrada se anula, existe una antiderivada global de f en A, esto es, existe una función $h(z)$ definida y analítica en A, tal que $h'(z) = f(z)$, lo cual termina la demostración.

2.2.5. Evalúe las siguientes integrales:

$a)$ $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$

$c)$ $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(1-z)^3}dz.$

Solución. $a)$ y $b)$ La función $\frac{1}{(1-z)^3}$ solo tiene una singularidad en $z_0 = 1$, pero como este punto está fuera de $\gamma_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$ y de $\gamma_b = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \frac{1}{2}\}$, tenemos que $I(\gamma_a, z_0) = 0$ y $I(\gamma_b, z_0) = 0$, además, del problema **2.1.8**, inciso $a)$, en la sección 2.1, se tiene que $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1-z)^3}, 1\right) = 0$. Ahora bien, por el teorema del residuo

$$\int_{\gamma_a} \frac{dz}{(1-z)^3} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1-z)^3}, z_0\right) I(\gamma_a, z_0) = 0, \text{ y}$$

$$\int_{\gamma_b} \frac{dz}{(1-z)^3} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1-z)^3}, z_0\right) I(\gamma_b, z_0) = 0.$$

Segunda solución de la parte $a)$ *y* $b)$. Dado que $\frac{1}{(1-z)^3}$ es analítica sobre y dentro de γ_a y γ_b, por el teorema de Cauchy $\displaystyle\int_{\gamma_a} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$ y $\displaystyle\int_{\gamma_b} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$.

$c)$ La única singularidad de $\frac{1}{(1-z)^3}$ dentro de $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \frac{1}{2}\}$ es $z_0 = 1$ y $I(\gamma, z_0) = 1$, por el teorema del residuo se sigue que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(1-z)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1-z)^3}, 1\right) I(\gamma, z_0).$$

Por el inciso $a)$ del problema **2.1.8**, en la sección 2.1, $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{(1-z)^3}, 1\right) = 0$. Luego, concluimos que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0.$$

$d)$ Dado que la única singularidad de $\dfrac{e^z}{(1-z)^3}$ dentro de $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \frac{1}{2}\}$ es $z = 1$ y $I(\gamma, z_0) = 1$, por el teorema del residuo

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(1-z)^3}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(1-z)^3}, 1\right) I(\gamma, z_0).$$

Por el inciso $b)$ del problema **2.1.8**, en la sección 2.1, $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(1-z)^3}, 1\right) = -\frac{e}{2}$.
Entonces, concluimos que

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{(1-z)^3} = -e\pi i.$$

2.2.6. Si $f(z)$ es una función analítica para $|z| > R$ y si $\lim_{z\to\infty}[-zf(z)]$ existe, entonces este límite es igual al residuo de f en ∞.
Solución. Si f es una función analítica para todo z de norma mayor que cierta R, podemos decir que $z_0 = \infty$ es una singularidad aislada para f. Además, por la definición 2.2.1, se tiene que $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}(\frac{1}{z^2}F(z), 0)$, donde $F(z) = f(1/z)$.
Veamos que $z_0 = 0$ es un polo simple de $\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$, bastará por el número 3 de la proposición 2.1.1, mostrar que $\lim_{z\to 0} z\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ existe, de hecho tal valor si existe, será igual al residuo de $\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ en 0. Por hipótesis existe $\lim_{z\to\infty}(-zf(z))$, digamos que es igual a b, pero

$$b = \lim_{z\to\infty}(-zf(z)) = \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{z}f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\lim_{z\to 0} z\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Por lo tanto, $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}), 0) = b$.

2.2.7. $a)$ Encuentre el residuo de $\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}$ en $z = \infty$.
$b)$ Muestre dos métodos para evaluar

$$\int_\gamma \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz,$$

donde γ es el círculo con centro en 0 y radio 3.
Solución. $a)$ Sea $f(z) = \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}$, recordemos que

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}F(z), 0\right),$$

donde $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z(1-z)^3}{(1+2z)^3}$. Entonces se tiene que calcular el residuo en cero de $\frac{1}{z^2}F(z) = \frac{(1-z)^3}{z(1+2z)^3}$. Como $z_0 = 0$ es un cero simple de $z(1+2z)^3$ y la función $(1-z)^3$ evaluada en $z_0 = 0$ es 1, resulta que z_0 es polo simple de $\frac{1}{z^2}F(z)$, luego el residuo buscado es, por el número 3 de la proposición 2.1.1,

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to 0} z\frac{(1-z)^3}{z(1+2z)^3} = -1.$$

$b)$ Para calcular la integral usemos dos métodos diferentes. Primero vamos a usar el teorema del residuo. Para ello notemos que la función $f(z) = \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}$ tiene dos singularidades aisladas dentro de γ, a saber, $z_0 = 0$ y $z_1 = -2$, por lo cual tenemos que calcular $\text{Res}(f, 0)$ y $\text{Res}(f, -2)$.

Para calcular $\text{Res}(f, 0)$, escribamos $f(z) = \frac{\frac{(z-1)^3}{(z+2)^3}}{z}$, es decir, es claro que 0 es un polo simple, y el residuo se calcula evaluando el numerador en cero y la derivada del denominador en cero; luego $\text{Res}(f, 0) = \frac{-1}{8}$.

Para calcular $\text{Res}(f, -2)$, escribamos $f(z) = \frac{\frac{(z-1)^3}{z}}{(z+2)^3}$, de donde se tiene que -2 es un polo triple. Para calcular el residuo, hacemos $\phi(z) = (z+2)^3 f(z) = \frac{(z-1)^3}{z} = z^{-1}(z-1)^3$, luego, $\text{Res}(f, -2) = \frac{\phi''(-2)}{2!}$. Calculemos las derivadas $\phi'(z)$ y $\phi''(z)$,

$$\phi'(z) = 3z^{-1}(z-1)^2 - z^{-2}(z-1)^3,$$

$$\phi''(z) = 6z^{-1}(z-1) - 6z^{-2}(z-1)^2 + 2z^{-3}(z-1)^3,$$

de donde $\phi''(-2) = \frac{9}{4}$.
Ahora, se puede concluir que $\text{Res}(f, -2) = \frac{9}{8}$. Finalmente, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz = 2\pi i (\text{Res}\,(f, 0) + \text{Res}\,(f, -2)) = 2\pi i \left(\frac{-1}{8} + \frac{9}{8} \right) = 2\pi i.$$

Para calcular la integral usando otro método, usemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3 *Sea γ una curva cerrada simple en $\mathbb{C}$. Sea f analítica a lo largo de γ y suponga que f tiene únicamente un número finito de singularidades fuera de γ. Entonces*

$$\int_\gamma f(z) dz = -2\pi i \sum \{\textit{residuos de } f \textit{ fuera de } \gamma \textit{ incluyendo a } \infty\}.$$

En nuestro caso la función es $f(z) = \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}$ y γ es la circunferencia con centro en 0 y radio 3, las cuales satisfacen las hipótesis de la proposición, de donde, por la parte $a)$ se tiene que

$$\int_\gamma \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz = -2\pi i \;\text{Res}\,(f, \infty) = -2\pi i(-1) = 2\pi i.$$

2.2.8. Muestre informalmente la proposición 2.2.3, mencionada en la solución del problema anterior.

Solución. Sea Γ una circunferencia suficientemente grande, recorrida en el sentido de las manecillas del reloj, tal que contenga a la curva γ (donde γ es una curva cerrada, simple y recorrida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) y que contenga a todas las singularidades finitas de f en su interior. Sabemos que f es una función analítica a lo largo de γ, y que f tiene únicamente un número finito de singularidades fuera de γ.
Como f es analítica fuera de Γ, por la proposición 2.2.2 se tiene que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = -(-2\pi i \text{Res } (f,\infty)) = 2\pi i \text{Res } (f,\infty),$$

donde el primer signo menos es por el hecho de que Γ esta recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

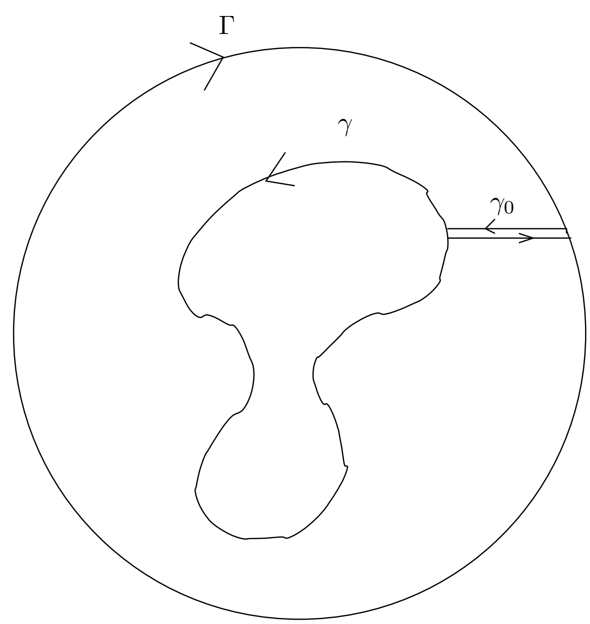


Figura 2.2: Construcción de la curva C.

Sea γ_0 una trayectoria recta que conecta a la curva Γ con la curva γ. Entonces definimos la curva C de la siguiente manera

$$C = \Gamma + \gamma_0 + \gamma - \gamma_0;$$

recordemos que dada una curva ρ, la curva $-\rho$ es la curva ρ recorrida en el sentido opuesto. Luego todas las singularidades de f, que están fuera de γ, están en el interior de C.

Como C es una curva cerrada simple, podemos aplicar el teorema del residuo para obtener que

$$\int_C f(z)dz = -2\pi i \sum_{i=1}^{n} \{\text{Res}(f, z_i) : z_i \text{ singularidad de } f \text{ dentro de } C\}$$

donde $I(C, z_i) = -1$, ya que la curva C esta recorrida en el sentido de las manecillas del reloj, de ahí el signo negativo.
Ahora, como $C = \Gamma + \gamma_0 + \gamma - \gamma_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_\Gamma f(z)dz + \int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz \\
&= \int_\Gamma f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz,
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_C f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz \\
&= -2\pi i \sum_{i=1}^{n} \{\text{Res}(f, z_i) : z_i \text{ singularidad de } f \text{ dentro de } C\} \\
&\quad -2\pi i \text{Res } (f, \infty) \\
&= -2\pi i \sum [\text{residuos de } f \text{ afuera de } \gamma \text{ incluyendo a } \infty].
\end{aligned}$$

2.2.9. Escoja una rama de $\sqrt{z^2 - 1}$ que sea analítica en $\mathbb{C}$, excepto en el segmento $[-1, 1]$ sobre el eje real. Evalúe

$$\int_\gamma \sqrt{z^2 - 1}dz$$

donde γ es la circunferencia de radio 2 centrada en 0.
Solución. Consideremos una rama del logaritmo donde la función $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto en el segmento $[-1, 1]$
Usando el resultado del problema anterior **2.2.8**,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \sqrt{z^2 - 1}dz = -2\pi i \sum [\text{residuos de } f \text{ fuera de } \gamma, \text{ incluyendo a } \infty].$$

Dado que f es analítica para todo z de norma mayor o igual a 2, entonces $z_0 = \infty$ es la única singularidad aislada para f, por lo que

$$\text{Res}\,(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -\text{Res}\left(\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z^3}, 0\right).$$

Sea $\phi(z) = \sqrt{1-z^2} = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}$, como

$$\lim_{z\to 0} \phi(z) = \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)} = e^{\frac{1}{2}\log(1)} = e^0 = 1,$$

$z = 0$ es un polo triple de $\frac{\sqrt{1-z^2}}{z^3}$ y el residuo es

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z^3}, 0\right) = \frac{\phi''(0)}{2!}.$$

Calculando las primeras dos derivadas de $\phi(z) = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}$, obtenemos

$$\phi'(z) = -e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}\frac{z}{1-z^2} = \frac{-ze^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}}{1-z^2} = -z(1-z^2)^{-1/2},$$

$$\phi''(z) = -e^{-\frac{1}{2}\log(1-z^2)} - z^2e^{-\frac{3}{2}\log(1-z^2)},$$

de donde se tiene que $\frac{\phi''(0)}{2!} = \frac{-e^{-\frac{1}{2}\log(1)}}{2} = -\frac{1}{2}$, por lo que

$$\int_\gamma \sqrt{z^2-1}dz = -2\pi i\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

2.3. Evaluación de integrales definidas

Una de las aplicaciones importantes del teorema del residuo es el cálculo de integrales definidas reales. A continuación damos una lista de fórmulas para calcular ciertas integrales definidas, así como las condiciones que se necesitan para poder aplicar tales fórmulas.

Proposición 2.3.1 *[Sección 4.3, [8]]. Sea f una función meromorfa, es decir, analítica excepto en singularidades aisladas, y sean $\mathbb{H}^+$ el semiplano superior y $\mathbb{H}^-$ el semiplano inferior, entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si f no tiene polos en el eje real, tiene un número finito de polos en $\mathbb{C}$ y existen constantes M, $p > 1$ tales que $|f(z)| \leq M/|z|^p$, para $|z|$ grande, entonces*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i \sum\{\textit{residuos de } f \textit{ en } \mathbb{H}^+\} \\ &= -2\pi i \sum\{\textit{residuos de } f \textit{ en } \mathbb{H}^-\}.\end{aligned}$$

2. *Si P, Q son polinomios, tales que grado(Q) $\geq 2+$ grado(P) y Q no tiene ceros reales, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } P/Q \text{ en } \mathbb{H}^+\}.$$

3a. *Sea $|f(z)| \leq M/|z|$, para $|z|$ grande y constante M, y tal que ningún polo de f esta sobre el eje real, o $f(z) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde grado(Q) $\geq 1+$ grado(P) y Q no tiene ceros reales.*
Si $\omega > 0$, entonces

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z) \text{ en } \mathbb{H}^+\}.$$

Si $\omega < 0$, entonces

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = -2\pi i \sum \{\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z) \text{ en } \mathbb{H}^-\}.$$

3b. *Si f es real en el eje real, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x) dx = \mathit{Re}\ I, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x) dx = \mathit{Im}\ I,$$

donde $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$.

4. *Sea $R(x,y)$ una función racional, es decir, cociente de funciones polinomiales en la variables x, y, tal que $R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es continua en θ, sin polos en el disco unitario $\mathbb{D}$, entonces*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) d\theta = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f \text{ dentro de } \mathbb{D}\},$$

donde $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)$.

5. *Sean $a > 0$ y f una función con un número finito de polos, ninguno en el eje real positivo; $|f(z)| \leq M_1/|z|^b$, $b > a$, para $|z|$ grande y $|f(z)| \leq M_2/|z|^d$, $0 < d < a$, para $|z| \to 0$, o si $f(z) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, Q no tiene ceros en el eje real positivo, $0 < a <$ grado(Q)$-$ grado(P) y $n_Q - n_P < a$, donde n_Q es el orden del cero de Q en 0 y n_P es el orden del cero de P en 0, entonces*

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \sum \{\text{residuos de } z^{a-1} f(z) \text{ en } A\},$$

donde el conjunto A son los polos de f excluyendo a 0 y donde se usa la rama de $\log$, con $0 < \arg z < 2\pi$.

6. *Las mismas condiciones que en el punto 1., excepto que se permiten polos simples en el eje x, entonces*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i \sum\{\textit{residuos de } f \textit{ en } \mathbb{H}^{+}\}\\ &+ \pi i \sum\{\textit{residuos de } f \textit{ en el eje } x\}.\end{aligned}$$

7. *Las mismas condiciones que en el punto 2., excepto que se permiten polos simples en el eje x, entonces*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= 2\pi i \sum\{\textit{residuos de } P/Q \textit{ en } \mathbb{H}^{+}\}\\ &+ \pi i \sum\{\textit{residuos de } P/Q \textit{ en el eje } x\}.\end{aligned}$$

8a. *Las mismas condiciones que en el punto 3., excepto que se permiten polos simples en el eje x, entonces si $\omega > 0$*

$$\begin{aligned}I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx &= 2\pi i \sum\{\textit{residuos de } e^{i\omega z}f(z) \textit{ en } \mathbb{H}^{+}\}\\ &+ \pi i \sum\{\textit{residuos de } e^{i\omega z}f(z) \textit{ en el eje } x\}.\end{aligned}$$

Si $\omega < 0$, entonces

$$\begin{aligned}I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx &= -2\pi i \sum\{\textit{residuos de } e^{i\omega z}f(z) \textit{ en } \mathbb{H}^{-}\}\\ &- \pi i \sum\{\textit{residuos de } e^{i\omega z}f(z) \textit{ en el eje } x\}.\end{aligned}$$

8b. *Sea f real sobre el eje real, y se permiten polos simples en el eje x, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)dx = \textit{Re } I, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)dx = \textit{Im } I,$$

donde $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx$.

A continuación presentamos una lista de problemas de integrales definidas, donde se aplican las fórmulas enumeradas en esta sección.

2.3.1. Demuestre que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solución. Consideremos la función

$$g(x) = \frac{1 - e^{2ix}}{x^2} = \frac{1 - (\cos(2x) + i\ \mathrm{sen}(2x))}{x^2} = \frac{2\mathrm{sen}^2(x)}{x^2} - i\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x^2}.$$

Como $\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}$ es una función par y positiva en los reales

$$4\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}dx = \mathsf{Re}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{1 - e^{2ix}}{x^2}dx\right].$$

Para calcular la integral de $g(x)$, usamos las función $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$, la cual es analítica en todo el plano complejo con excepción del origen, es decir, sólo tiene una singularidad real en 0, la cual es un polo simple. Para $z = x + iy \in \mathbb{H}^+$, se tiene que $|e^{2iz}| = e^{-2y}$, lo cual tiende a 0 cuando $y \to \infty$, de donde $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$, para una constante M y para $|z| \geq R$. Luego podemos aplicar la proposición 2.3.1, parte 6, por la cual

$$\int_\infty^\infty \frac{1 - e^{2ix}}{x^2}dx = \pi i\ \mathrm{Res}(f, 0).$$

Para calcular el residuo de f en cero, notemos que $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2} = \frac{q(z)}{h(z)}$, donde $q(z) = 1 - e^{2iz}$ y $h(z) = z^2$, por lo cual $q(0) = 0$, $q'(0) = -2i$, $h(0) = h'(0) = 0$ y $h''(0) = 2$. Luego, $\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{2q'(0)}{h''(0)} = -2i$, de donde se tiene el resultado ya que

$$4\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}dx = \mathsf{Re}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{1 - e^{2ix}}{x^2}dx\right] = \mathsf{Re}(\pi i(-2i)) = 2\pi.$$

2.3.2. Evalúe

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^6}.$$

Solución. Usaremos el ejemplo resuelto 4.3.16 en [8], donde se tiene el siguiente resultado

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^{2n}} = -\frac{\pi i}{n}\left(\frac{e^{i\pi/2n}}{1 - e^{i\pi/n}}\right) = \frac{\pi}{2n}\csc\frac{\pi}{2n}.$$

Así, tenemos que nuestra integral es la anterior con $n = 3$, por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^6} = \frac{\pi}{6}\csc\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Segunda solución. Ya que la función $f(x) = 1/(1 + x^6)$ es una función par y continua en el eje real, se tiene que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + x^6} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^6}.$$

La función $f(x)$ puede ser escrita como $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde $Q(x)$ no tiene ceros reales, y grad $Q(x) \geq 2+$ grad $P(x)$, ya que el grado de $P(x)$ es 0 y el grado de $Q(x)$ es 6. Por lo tanto, tenemos las condiciones para aplicar el resultado de la parte 2 de la proposición 2.3.1, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } P/Q \text{ en } \mathbb{H}^+\}.$$

Las singularidades de f son las seis raíces sextas de -1, que son

$$\{e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{5i\pi/6}, e^{7i\pi/6}, e^{3i\pi/2}, e^{11i\pi/6}\},$$

de las cuales, $e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{5i\pi/6}$, están en el semiplano superior. Como todas son polos simples, calculamos sus residuos de la siguiente forma, $\mathrm{Res}(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/6}) &= \frac{1}{6e^{i5\pi/6}} = \frac{1}{6(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})}, \\
\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/2}) &= \frac{1}{6e^{i5\pi/2}} = \frac{1}{6i}, \\
\mathrm{Res}(f, e^{i5\pi/6}) &= \frac{1}{6e^{i25\pi/6}} = \frac{1}{6(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/6}) + \mathrm{Res}(f, e^{i\pi/2}) + \mathrm{Res}(f, e^{5i\pi/6})\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{e^{i5\pi/6}} + \frac{1}{e^{i25\pi/6}} + \frac{1}{i}\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} + \frac{1}{i}\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{3i}\right) = \frac{2\pi}{3},
\end{aligned}$$

de donde

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$$

2.3.3. Evalúe $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^3} dx$, para $0 < a < 3$.

Solución. Con esta restricción sobre a se cumple la hipótesis del número 5 de la proposición 2.3.1, pues siendo $P(z) = 1$, $Q(z) = 1 + z^3$, tenemos que

$$n_Q - n_P = 0 < a < 3 = \text{grad}(Q) - \text{grad}(P).$$

Como los puntos singulares de $f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z^3}$ son las raíces cúbicas complejas de -1, las cuales no están en el eje real positivo, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^3}dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(a\pi)}\left[\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{\pi}{3}i}\right) + \operatorname{Res}\left(f, e^{\pi i}\right) + \operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)\right].$$

Ahora calculemos los residuos en las singularidades anteriores, que al ser polos simples, se pueden escribir como

$$\operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi}{3}i}) = \frac{(e^{i\frac{\pi}{3}})^{a-1}}{3(e^{i\frac{\pi}{3}})^2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}a}}{3e^{i\pi}} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{3}a}}{3};$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{i\pi}) = \frac{(e^{i\pi})^{a-1}}{3(e^{i\pi})^2} = \frac{e^{i\pi a}}{3e^{i\pi}} = \frac{-e^{i\pi a}}{3};$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{\frac{5\pi}{3}i}) = \frac{(e^{\frac{5\pi}{3}i})^{a-1}}{3(e^{\frac{5\pi}{3}i})^2} = \frac{e^{i5\frac{\pi}{3}a}}{3e^{i\pi}} = \frac{-e^{-i5\frac{\pi}{3}a}}{3}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{(2k-1)\pi}{3}i}\right) &= -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}a}}{3}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}a} + e^{i\frac{4\pi}{3}a}\right)\\
&= -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}a}}{3}\left(\frac{e^{i2\pi a}-1}{e^{i\frac{2\pi}{3}a}-1}\right)\\
&= -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}a}}{3}\left(\frac{e^{i2\pi a}-1}{(e^{i\frac{\pi}{3}a})2i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}a)}\right)\\
&= -\frac{e^{i2\pi a}-1}{6i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}a)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^3}dx &= \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(a\pi)}\left(-\frac{e^{i2\pi a}-1}{6i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}a)}\right) = \frac{\pi(e^{i\pi a}-e^{-i\pi a})}{6i\operatorname{sen}(a\pi)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}a)}\\
&= \frac{\pi(2i)\operatorname{sen}(a\pi)}{6i\operatorname{sen}(a\pi)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}a)} = \frac{\pi}{3\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}a)}.
\end{aligned}$$

2.3.4. a) Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}.$$

$b)$ Use la misma técnica para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}} dx = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}}.$$

Solución. $a)$ Sea $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$ y sea γ el rectángulo con vértices $-R$, R, $R+\pi i$ y $-R+\pi i$, donde $R > 0$. La función f sólo tiene a $i\pi/2$ como singularidad dentro de γ, de hecho, es un polo simple con residuo

$$\operatorname{Res}(f, i\pi/2) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi i}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{2}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i}.$$

Luego por el teorema del residuo

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} \right) = \pi e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Ahora calculemos la integral sobre γ, integrando sobre cada lado del rectángulo. Observe que

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx + \int_0^\pi \frac{e^{i(R+iy)}}{e^{R+iy} + e^{-R-iy}} i dy \\ &+ \int_R^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}} dx + \int_\pi^0 \frac{e^{i(-R+iy)}}{e^{-R+iy} + e^{-(-R+iy)}} i dy. \end{aligned}$$

Demostremos que la segunda y la cuarta integral tienden a cero cuando $R \to \infty$. Para ello, usemos estimación estándar para obtener que

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{i(R+iy)}}{e^{R+iy} + e^{-R-iy}} i dy \right| \leq \pi \frac{e^0}{e^R - e^{-R}} \to 0, \text{ cuando } R \to \infty.$$

De manera análoga, se tiene que

$$\left| \int_\pi^0 \frac{e^{i(-R+iy)}}{e^{-R+iy} + e^{-(-R+iy)}} i dy \right| \leq \pi \frac{e^0}{e^R - e^{-R}} \to 0, \text{ cuando } R \to \infty.$$

Por otro lado, como

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx + \int_R^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}} dx = (1 + e^{-\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx,$$

podemos concluir al hacer $R \to \infty$, que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx &= (\pi e^{-\frac{\pi}{2}}) \frac{1}{1+e^{-\pi}} \\ &= \frac{\pi}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

$b)$ Consideremos la función $f(z) = \frac{e^{-z}}{1+e^{-2\pi z}}$ y sea γ el rectángulo con vértices $-R$, R, $R-i$ y $-R-i$, donde $R > 0$, recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. La función f sólo tiene a $-i/2$ como singularidad dentro de γ, que es un polo simple con residuo $\operatorname{Res}(f, -i/2) = \frac{e^{\frac{i}{2}}}{-2\pi e^{-2\pi(\frac{-i}{2})}} = \frac{e^{\frac{i}{2}}}{2\pi}$, luego por el teorema del residuo, $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\frac{e^{\frac{i}{2}}}{2\pi}) = ie^{\frac{i}{2}}$.
Ahora calculemos la integral sobre γ, integrando sobre cada lado del rectángulo. Observe que

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}} dx + \int_0^{-1} \frac{e^{-(R+iy)}}{1+e^{-2\pi(R+iy)}} idy \\ &+ \int_R^{-R} \frac{e^{-(x-i)}}{1+e^{-2\pi(x-i)}} dx + \int_{-1}^{0} \frac{e^{-(-R+iy)}}{1+e^{-2\pi(-R+iy)}} idy. \end{aligned}$$

Veamos que la segunda y la cuarta integral tienden a cero cuando $R \to \infty$, para ello, usemos estimación estándar para obtener que

$$\left| \int_0^{-1} \frac{e^{-(R+iy)}}{1+e^{-2\pi(R+iy)}} idy \right| \leq \frac{e^{-R}}{e^{-2\pi R} - 1} \to 0, \text{ cuando } R \to \infty,$$

y de manera análoga,

$$\left| \int_{-1}^{0} \frac{e^{-(-R+iy)}}{1+e^{-2\pi(-R+iy)}} idy \right| \leq \frac{e^{R}}{e^{2\pi R} - 1} \to 0, \text{ cuando } R \to \infty.$$

Como,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}} dx + \int_R^{-R} \frac{e^{-(x-i)}}{1+e^{-2\pi(x-i)}} dx = (1-e^i) \int_R^{-R} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}} dx,$$

tenemos al hacer $R \to \infty$ que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}} dx = \frac{-ie^{\frac{i}{2}}}{1-e^i} = \frac{-i}{e^{-i/2} - e^{i/2}} = \frac{i}{e^{i/2} - e^{-i/2}} = \frac{1}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}}.$$

2.3.5. Muestre que
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}(\theta)d\theta = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

Solución. Ya que $\operatorname{sen}^{2n}\theta$ es una función par y de periodo 2π, tenemos que
$$2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2n}(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2n} d\theta.$$

Si hacemos el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, entonces
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2n} d\theta = \int_\gamma \left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{(2i)^{2n}i}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz,$$
donde γ es la circunferencia unitaria recorrida una vez en sentido positivo. Ahora tenemos las condiciones necesarias para aplicar el número 4 de la proposición 2.3.1, y obtener que la última integral es igual a
$$\frac{2\pi i}{2^{2n}(-1)^n i}\sum\{\text{Residuos de } f \text{ dentro del disco unitario}\},$$
donde $f(z) = \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}$, la cual tiene a 0 como única singularidad dentro del disco unitario, es decir,
$$\frac{1}{(2i)^{2n}i}\int_0^{2\pi} \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz = \frac{2\pi i}{2^{2n}(-1)^n\, i}\operatorname{Res}(f,0).$$

Para calcular $\operatorname{Res}(f,0)$, como 0 es un polo de orden $2n+1$, consideremos $\phi(z) = z^{2n+1}f(z)$, y entonces
$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{\phi^{(2n)}(0)}{(2n)!}.$$

Observemos que $\phi(z) = (z^2-1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{2k}(-1)^{2n-k}$, de donde
$$\phi^{(2n)}(z) = \sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}2k(2k-1)(2k-2)\dots(2k-(2n-1))z^{2k-2n}(-1)^{2n-k},$$
y entonces
$$\begin{aligned}
\phi^{(2n)}(0) &= \binom{2n}{n}2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-(2n-1))(-1)^{2n-n}\\
&= \binom{2n}{n}(2n)!(-1)^n\\
&= (-1)^n\frac{(2n)!(2n)!}{n!n!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{\phi^{(2n)}(0)}{(2n)!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Finalmente, podemos concluir que

$$2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{2n}(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi i}{2^{2n}(-1)^n i}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

de donde se tiene el resultado deseado.

Otra forma de concluir el problema. Si $z=\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta)$, entonces $\operatorname{sen}(\theta)=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$, por lo que $\operatorname{sen}^{2n}(\theta)=\frac{1}{2^n(-1)^n}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n}}$. El desarrollo en serie de Laurent de $\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}$ alrededor de $z_0=0$ es

$$\begin{aligned}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} &= \frac{1}{z^{2n+1}}\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}z^{2j}(-1)^{2n-j}\\ &= \sum_{j=0}^{2n}(-1)^{-j}\binom{2n}{j}z^{2j-2n-1}\end{aligned}$$

por lo que el residuo en 0 es el coeficiente de $\frac{1}{z}$, esto es, $\operatorname{Res}\left(\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}},0\right)=(-1)^n\binom{2n}{n}$. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{2n}(\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2i)^{2n}\,i}\int_\gamma\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}(-1)^n\,i}\cdot 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}},0\right)\\ &= \frac{\pi}{2^{2n}(-1)^n}(-1)^n\binom{2n}{n}\\ &= \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.\end{aligned}$$

2.3.6. Muestre que para $0<b<1$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^b(x+1)}dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(b\pi)}.$$

Solución. Hagamos el cambio de variable de $a=1-b$, como $0<b<1$, entonces $0<a<1$ y la nueva integral tiene la siguiente forma

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}dx.$$

Con esta restricción sobre a se cumple la hipótesis del número 5 de la proposición 2.3.1, pues siendo $P(z) = 1$, $Q(z) = z + 1$, tenemos que

$$n_Q - n_P = 0 < a < 1 = \mathsf{grad}(Q) - \mathsf{grad}(P).$$

Notando que el único punto singular de $P(z)/Q(z)$ es -1, que no está sobre el eje real positivo, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(a\pi)}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z+1}, -1\right).$$

Como $z = -1$ es un polo simple, el residuo esta dado por

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z+1}, -1\right) &= \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{a-1}}{z+1} = \lim_{z\to -1} z^{a-1} \\ &= (-1)^{a-1} = e^{\pi(a-1)i} = -e^{\pi a i}.\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(a\pi)}\left(-e^{\pi a i}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)},$$
donde $\operatorname{sen}(a\pi) = \operatorname{sen}((1-b)\pi) = \operatorname{sen}(\pi - b\pi) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(b\pi) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(b\pi) = \operatorname{sen}(b\pi)$. Así concluimos que,

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^b(x+1)}dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(b\pi)}.$$

2.3.7. Demuestre que
$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Solución. Consideremos la función $f(z) = \frac{\log(z)}{(z^2+1)^2}$, definida en la rama $-\frac{\pi}{2} <$arg $z < \frac{3\pi}{2}$, luego f es analítica en $A\setminus\{i\}$, donde A es el plano complejo, menos el eje imaginario negativo unión el origen. Sea $0 < \epsilon < 1$ y $R > 1$, y consideremos la curva Γ como en la figura 2.3, donde $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.
Por el teorema del residuo

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f, i).$$

Para calcular el residuo, notemos que i es un polo doble de f (ver número 7 de la proposición 2.1.1), y si hacemos $\phi(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{\log(z)}{(z+i)^2}$, entonces $\operatorname{Res}(f, i) =$

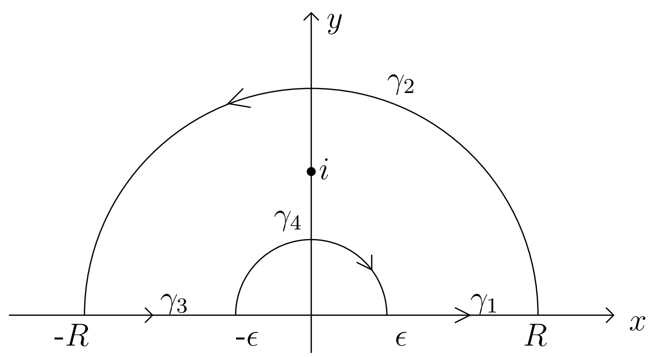


Figura 2.3: Construcción de la curva Γ.

$\phi'(i)$. Calculando la derivada de ϕ en i, obtenemos que $\phi'(i) = \frac{\pi+2i}{8}$, donde se ha usado la rama de $\log$ indicada al principio. Luego

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2 i}{4}.$$

Ahora, como $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, entonces $\int_\Gamma f dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f dz$, por lo que se tienen que calcular las 4 integrales por separado.
Notemos que

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_\epsilon^R \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\int_{\gamma_3} f dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2} dx = \int_\epsilon^R \frac{\log(-x)}{(x^2+1)^2} dx = \int_\epsilon^R \frac{\log(x)+i\pi}{(x^2+1)^2} dx,$$

luego

$$\int_{\gamma_1+\gamma_3} f dz = 2\int_\epsilon^R \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2} dx + i\int_\epsilon^R \frac{\pi}{(x^2+1)^2} dx.$$

Ahora, calculemos las integrales de f sobre γ_2 y γ_4. Notemos que $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ y $\gamma_3(t) = \epsilon e^{i(\pi-t)}$, con $t \in [0,\pi]$. Para z en γ_2 se tiene que

$$|f(z)| = \left|\frac{\log z}{(z^2+1)^2}\right| = \left|\frac{\log(R)+it}{(z^2+1)^2}\right| \le \frac{\log(R)+\pi}{(R^2-1)^2},$$

ya que $|z^2+1| \ge |z|^2 - 1 = R^2 - 1$. Por estimación estándar se tiene que

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \le \frac{\log(R)+\pi}{(R^2-1)^2} \cdot l(\gamma_2)^1 = \frac{\log(R)+\pi}{(R^2-1)^2} \cdot \pi R = s(R).$$

[1] $l(\gamma)$ es la longitud de la curva γ, es decir, $l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(s)||ds$, donde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es

Haciendo R tender a ∞, vemos que $\lim\limits_{R\to\infty} s(R) = 0$.
De la misma forma, para z en γ_4, se tiene que

$$|f(z)| = \left|\frac{\log z}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{|\log(\epsilon)| + \pi}{(1-\epsilon^2)^2},$$

ya que $|z^2+1| \geq 1 - |\epsilon|^2 = 1 - \epsilon^2$. Por estimación estándar se tiene que

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| \leq \frac{|\log(\epsilon)| + \pi}{(1-\epsilon^2)^2} \cdot l(\gamma_4) = \frac{|\log(\epsilon)| + \pi}{(1-\epsilon^2)^2} \cdot \pi\epsilon = t(\epsilon).$$

Haciendo ϵ tender a 0, vemos que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} t(\epsilon) = 0$.
De esta forma, cuando $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$, se tiene que $\int_{\gamma_2} f$, $\int_{\gamma_4} f$ tienden a cero, y por lo tanto[2]

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= 2\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx + i\int_0^\infty \frac{\pi}{(x^2+1)^2}dx \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx + \frac{i\pi^2}{4}\end{aligned}$$

de donde podemos concluir que,

$$-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} = 2\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx + \frac{i\pi^2}{4}$$

de donde,

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}.$$

2.3.8. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios con grad $Q(z) \geq 2+$ grad $P(z)$. Muestre que la suma de los residuos de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ es 0.
Solución. Sea $Q(z)$ un polinomio de grado n y $P(z)$ otro polinomio de grado k, tal que $n \geq 2+k$, y supongamos sin perdida de generalidad que los polinomios no tienen ceros en común. Notemos que como $Q(z)$ es un polinomio de grado n, tiene un polo de orden n en ∞. Entonces por la definicion 2.2.1, se tiene que

$$\mathrm{Res}(P/Q, \infty) = -\mathrm{Res}\left(\left(\frac{1}{z^2}\right) F(z), 0\right),$$

una parametrización de γ.

[2]Nota: se usará el resultado de cálculo diferencial e integral de que $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}$ o aplique el ejercicio 11 de la sección 4.3 en [8].

donde $F(z) = P(\frac{1}{z})/Q(\frac{1}{z})$. Sea γ un círculo con centro en el origen de radio R suficientemente grande, de tal manera que no hay singularidades finitas de P/Q fuera de γ (todas están en el interior de γ).
Por lo tanto, por la proposición 2.2.2, tenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = -2\pi i \text{Res}(P(z)/Q(z), \infty) = 2\pi i \text{Res}\left(\left(\frac{1}{z^2}\right)\frac{P(\frac{1}{z})}{Q(\frac{1}{z})}, 0\right).$$

Calculemos este último residuo, considerando que $P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$ y $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, como

$$\begin{aligned}
\frac{P(\frac{1}{z})}{Q(\frac{1}{z})} \cdot \frac{1}{z^2} &= \frac{b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k}}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{z^n\left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k}\right)}{z^2\left(a_0 z^n + \cdots + a_n\right)} \\
&= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_k z^{n-k}}{z^2\left(a_0 z^n + \cdots + a_n\right)} = \frac{z^{n-k}}{z^2} \cdot \frac{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \cdots + b_k}{a_0 z^n + \cdots + a_n}.
\end{aligned}$$

Como $n - k \geq 2$, entonces $n - k - 2 \geq 0$, de donde 0 es una singularidad removible de $f(z) = (P(\frac{1}{z})/Q(\frac{1}{z})) \cdot \frac{1}{z^2}$, por lo que el residuo buscado es cero, de donde,

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = -2\pi i \,\text{Res}(P(z)/Q(z), \infty) = 2\pi i \,\text{Res}\left(\left(\frac{1}{z^2}\right)\frac{P(\frac{1}{z})}{Q(\frac{1}{z})}, 0\right) = 0.$$

Pero por el teorema del residuo, también sabemos que esta integral es igual al producto de $2\pi i$ con la suma de los residuos de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ en sus singularidades en $\mathbb{C}$ que son los ceros de $Q(z)$, de donde

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\text{Res}(P(z)/Q(z), z_i)\right] = 0,$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son los ceros de $Q(z)$.

2.3.9. Sea $f(z)$ como en la fórmula 5 de la proposición 2.3.1, excepto que se permite a f tener un número finito de polos simples sobre el eje real positivo (estrictamente). Muestre que

$$\text{V.P.}^3 \int_0^\infty x^{a-1} f(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \sum \left[\begin{array}{c} \text{residuos de } z^{a-1}f(z) \text{ en los polos} \\ \text{de } f \text{ fuera del eje real no negativo} \end{array}\right]$$
$$+\frac{\pi e^{-\pi a i}\cos(\pi a)}{\operatorname{sen}(\pi a)} \sum \left[\begin{array}{c} \text{residuos de } (-z)^{a-1}f(z) \text{ en los polos} \\ \text{de } f \text{ sobre el eje real positivo} \end{array}\right].$$

[3] Valor principal de Cauchy, ver la definición de V.P. en [8], páginas 301-303

Solución. De la misma manera como se demuestra la fórmula 5 de la proposición 2.3.1, ver [8], debemos construir una curva que ahora aisle a las singularidades del eje real positivo, a las cuales llamaremos z_j $(j = 1, \ldots, n)$, con $z_0 = 0$, y siguiendo un camino similar al de la demostración mencionada, definamos a Γ como la unión de las siguientes curvas:

1. $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [\eta, 2\pi - \eta]$.
2. $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{-it},\ t \in [\eta, 2\pi - \eta]$.
3. $\gamma_{j_1}(t) = z_j e^{(2\pi-\eta)i} + \varepsilon e^{-it},\ t \in [\eta, \pi + \eta],$ para $j = 1, \ldots, n$.
4. $\gamma_{j_2}(t) = z_j e^{\eta i} + \varepsilon e^{it},\ t \in [-\pi + \eta, \eta],$ para $j = 1, \ldots, n$.
5. $l_j(t) = (z_j + z_{j+1} - t)e^{(2\pi-\eta)i},\ t \in [z_j + \varepsilon, z_{j+1} - \varepsilon],$ para $j = 1, \ldots, n$.
6. $l_n(t) = (z_n + \varepsilon + R - t)e^{(2\pi-\eta)i},\ t \in [z_n + \varepsilon, R]$.
7. $L_j(t) = te^{\eta i},\ t \in [z_j + \varepsilon, z_{j+1} - \varepsilon],$ para $j = 1, \ldots, n$.
8. $L_n(t) = te^{\eta i},\ t \in [z_n + \varepsilon, R]$.

Estas curvas encierran en circunferencias de radio ε a las singularidades z_j, conforme $\eta \to 0$. Hagamos $g(z) = z^{a-1} f(z)$, entonces

$$\int_\Gamma g = \int_{\gamma_R} g + \int_{\gamma_\varepsilon} g + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{j_1}} g + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{j_2}} g + \sum_{j=0}^{n} \int_{l_j} g + \sum_{j=0}^{n} \int_{L_j} g. \tag{2.3}$$

Del número 5 de la proposición 2.3.1, se sigue que

$$\int_{\gamma_R} g, \int_{\gamma_\varepsilon} g \to 0,$$

cuando $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, respectivamente, independientemente de η.
Para las l_j, conforme $\eta \to 0$, se tiene que

$$\int_{l_j} g \to \int_{z_{j+1}-\varepsilon}^{z_j+\varepsilon} t^{a-1} e^{2\pi a i} f(t)dt \quad \text{y} \quad \int_{l_n} g \to \int_{R}^{z_n+\varepsilon} t^{a-1} e^{2\pi a i} f(t)dt.$$

Para las L_j, conforme $\eta \to 0$, se tiene que

$$\int_{L_j} g \to \int_{z_j+\varepsilon}^{z_j+1-\varepsilon} t^{a-1} f(t)dt \quad \text{y} \quad \int_{L_n} g \to \int_{z_n+\varepsilon}^{R} t^{a-1} f(t)dt.$$

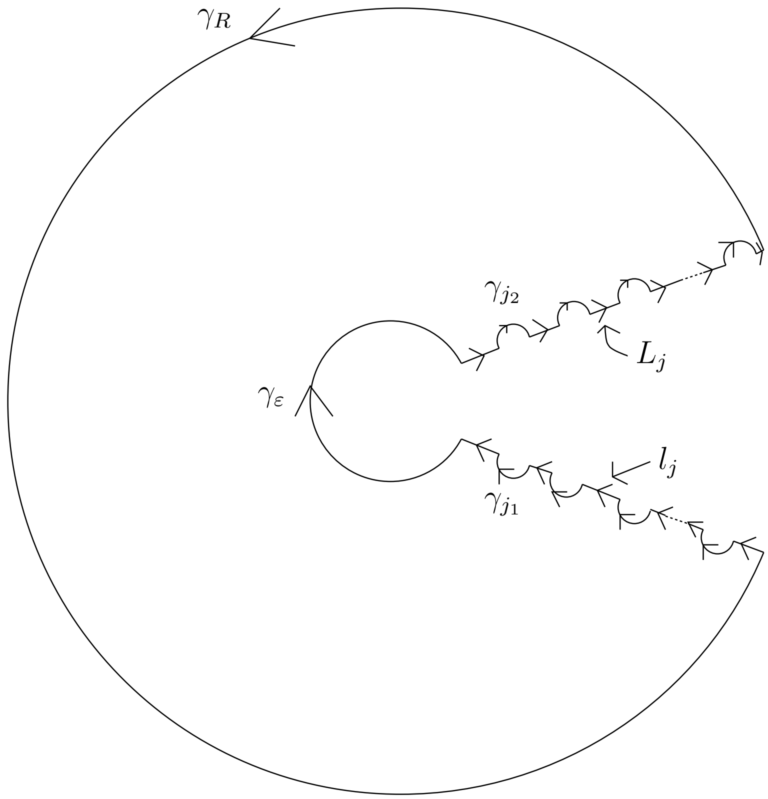


Figura 2.4: Construcción de la curva Γ.

Y así, conforme $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{l_j} g \to \int_{\infty}^{0} t^{a-1} e^{2\pi a i} f(t)dt = -e^{2\pi a i} \int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)dt$$

$$\text{y } \sum_{j=0}^{n} \int_{L_j} g \to \int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \int_{l_j} g + \sum_{j=0}^{n} \int_{L_j} g &\to \left(1 - e^{2\pi a i}\right) \int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)dt \\ &= -2i \operatorname{sen}(\pi a) e^{\pi a i} \int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

Para cada γ_{j_1}, se tiene que $\gamma_{j_1}(t) \to z_j e^{2\pi i} + \varepsilon e^{it} = (z_j + \varepsilon e^{i(t-2\pi)})e^{2\pi i} = (z_j + \varepsilon e^{it})e^{2\pi i}$, $t \in [2\pi, \pi]$, cuando $\eta \to 0$. Así

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{j_1}} g &\to \int_{2\pi}^{\pi} \left[(z_j + \varepsilon e^{it})e^{2\pi i}\right]^{a-1} f(z_j + \varepsilon e^{it})\varepsilon e^{it} i e^{2\pi i} dt \\
&= -e^{2\pi a i} \int_{\pi}^{2\pi} \left[(z_j + \varepsilon e^{it})\right]^{a-1} f(z_j + \varepsilon e^{it})\varepsilon e^{it} i dt \\
&= -e^{2\pi a i} \int_{-\gamma_{j_1}} z^{a-1} f(z) dz \\
&= -e^{2\pi a i} \int_{-\gamma_{j_1}} g.
\end{aligned}$$

Luego, por el **Lema 4.3.13** en [8], cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\gamma_{j_1}} g \to \pi i \mathrm{Res}(g, z_j).$$

Por lo tanto, cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\gamma_{j_1}} g \to -e^{2\pi i a} \pi i \mathrm{Res}(g, z_j).$$

Ahora, para cada γ_{j_2}, se tiene que $\gamma_{j_2}(t) \to z_j + \varepsilon e^{it}$, $t \in [\pi, 0]$, cuando $\eta \to 0$. Así

$$\int_{\gamma_{j_1}} g \to \int_{\pi}^{0} \left[(z_j + \varepsilon e^{it})\right]^{a-1} f(z_j + \varepsilon e^{it})\varepsilon e^{it} i dt =$$

$$-\int_{\pi}^{2\pi} \left[(z_j + \varepsilon e^{it})\right]^{a-1} f(z_j + \varepsilon e^{it})\varepsilon e^{it} i dt = -\int_{-\gamma_{j_2}} z^{a-1} f(z) dz = -\int_{-\gamma_{j_2}} g.$$

Luego, por el **Lema 4.3.13** en [8], cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\gamma_{j_1}} g \to \pi i \mathrm{Res}(g, z_j).$$

Por lo tanto, cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\gamma_{j_1}} g \to -\pi i \mathrm{Res}(g, z_j).$$

Tomando estos últimos 2 resultados, para cada z_j, tenemos que conforme $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\gamma_{j_1}} g + \int_{\gamma_{j_2}} g \to -(e^{2\pi a i} + 1)\pi i \mathrm{Res}(g, z_j),$$

donde $-(e^{2\pi ai}+1) = -e^{a\pi i}(e^{a\pi i}+e^{-a\pi i}) = -e^{a\pi i}2\cos(\pi a) = e^{(a-1)\pi i}2\cos(\pi a) = (-1)^{a-1}2\cos(\pi a)$.
Dado que los residuos en polos son límites, podemos sacar o meter constantes de la función del residuo, y así

$$\int_{\gamma_{j_1}} g + \int_{\gamma_{j_2}} g \to 2\pi i\cos(\pi a)(-1)^{a-1}\operatorname{Res}(g, z_j) =$$

$$2\pi i\cos(\pi a)\operatorname{Res}((-1)^{a-1}z^{a-1}f(z), z_j) = 2\pi i\cos(\pi a)\operatorname{Res}((-z)^{a-1}f(z), z_j).$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_{j_1}} g + \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_{j_2}} g \to \sum_{j=1}^{n} 2\pi i\cos(\pi a)\operatorname{Res}((-z)^{a-1}f(z), z_j) =$$

$$2\pi i\cos(\pi a)\sum\left[\begin{array}{c}\text{residuos de } (-z)^{a-1}f(z) \text{ en los polos}\\ \text{de } f \text{ sobre el eje real positivo}\end{array}\right].$$

Por otro lado

$$\int_{\Gamma} g \to 2\pi i\sum\left[\begin{array}{c}\text{residuos de } z^{a-1}f(z) \text{ en los polos}\\ \text{de } f \text{ fuera del eje real no negativo}\end{array}\right],$$

conforme $\eta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$.
Para finalizar, sustituyendo nuestros resultados en (2.3):

$$2\pi i\sum\left[\begin{array}{c}\text{residuos de } z^{a-1}f(z) \text{ en los polos}\\ \text{de } f \text{ fuera del eje real no negativo}\end{array}\right] =$$

$$2\pi i\cos(\pi a)\sum\left[\begin{array}{c}\text{residuos de } (-z)^{a-1}f(z) \text{ en los polos}\\ \text{de } f \text{ sobre el eje real positivo}\end{array}\right] =$$

$$-2i\operatorname{sen}(\pi a)e^{\pi ai}\int_0^{\infty} t^{a-1}f(t)dt,$$

y despejando, se obtiene la integral deseada

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}f(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi ai}}{\operatorname{sen}(\pi a)}\sum\left[\begin{array}{c}\text{residuos de } z^{a-1}f(z) \text{ en los polos}\\ \text{de } f \text{ fuera del eje real no negativo}\end{array}\right]$$

$$+\frac{\pi e^{-\pi ai}\cos(\pi a)}{\operatorname{sen}(\pi a)}\sum\left[\begin{array}{c}\text{residuos de } (-z)^{a-1}f(z) \text{ en los polos}\\ \text{de } f \text{ sobre el eje real positivo}\end{array}\right].$$

2.3.10. Establezca las siguientes fórmulas:

$a)$ $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2(\theta)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}$, para $a > 0$

$c)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-1}$ $\qquad d)$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Solución. $a)$ Como $1+\operatorname{sen}^2(\theta)$ es una función par, positiva y de periodo 2π, se tiene que

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2(\theta)} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2(\theta)}.$$

Ahora, si $e^{i\theta} = z$, entonces

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{iz(1+(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))^2)} = \int_\gamma \frac{4iz dz}{z^4-6z^2+1},$$

donde γ es la circunferencia unitaria recorrida una vez en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si hacemos $f(z) = \frac{z}{z^4-6z^2+1}$, entonces

$$I = 4i \int_\gamma f(z)dz = 4i(2\pi i)\sum(\text{residuos de } f \text{ dentro de } \gamma).$$

Para calcular los residuos en las singularidades de f, dentro de γ, se tienen que calcular los ceros del polinomio z^4-6z^2+1, para lo cual notamos que $z^4-6z^2+1 = (z^2-a^2)(z^2-b^2)$ donde $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$, con $b > 1$ y $0 < a < 1$. Por lo cual solo a y $-a$ son las singularidades de f dentro de γ, las cuales son polos simples. Para calcular las residuos, escribamos $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, donde $g(z) = z$ y $h(z) = z^4-6z^2+1 = (z^2-a^2)(z^2-b^2)$; entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \frac{a}{2a(a^2-b^2)} \text{ y } \operatorname{Res}(f,-a) = \frac{g(-a)}{h'(-a)} = \frac{-a}{-2a(a^2-b^2)}.$$

Por lo tanto

$$I = 4i\int_\gamma f(z)dz = -8\pi\left(\frac{1}{a^2-b^2}\right) = -8\pi\left(\frac{1}{-4\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}},$$

de donde $\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2(\theta)} = \frac{I}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$b)$ Como $\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ es una función par y positiva, entonces

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Sea $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{P(z)}{Q(z)}$, como grado $Q \geq$ grado $P+2$ y $Q(x) \neq 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$I = (2\pi i)\sum(\text{residuos de } f \text{ en } \mathbb{H}^+).$$

Notemos que las singularidades de f son los ceros de $Q(z)$, para lo cual notemos que $(z^2+a^2)^2 = (z-ia)^2(z+ia)^2$, de donde $ia \in \mathbb{H}^+$ es la única singularidad que se debe tomar en cuenta, la cual es un polo doble para f. Si hacemos $\phi(z) = \frac{z^2}{(z+ia)^2}$, entonces $\text{Res}(f, ia) = \phi'(ia) = -\frac{i}{4a}$, luego

$$I = 2\pi i\left(-\frac{i}{4a}\right) = \frac{\pi}{2a}.$$

Se concluye que

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}.$$

$c)$ Sea $f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^2}$, la cual cumple que $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$, y denotemos por $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)^2}dx$, luego

$$I = \text{Im}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}f(x)dx = \text{Im}\left(2\pi i\sum(\text{residuos de } e^{iz}f(z) \text{ en } \mathbb{H}^+)\right).$$

Consideremos la función $e^{iz}f(z) = \frac{e^{iz}z^3}{(z^2+1)^2}$, la cual tiene un polo doble en $z_0 = i \in \mathbb{H}^+$. Sea $\phi(z) = \frac{e^{iz}z^3}{(z+i)^2}$, de donde $\text{Res}(e^{iz}f(z), i) = \phi'(i) = \frac{e^{-1}}{4}$. Por lo tanto

$$I = \text{Im}\left(2\pi i\frac{e^{-1}}{4}\right) = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

$d)$ Sea $g(x) = \frac{x\operatorname{sen}(x)}{x^4+1}$, la cual es una función par y positiva, además si x es real, $g(x)$ es real. Entonces

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 2\int_0^\infty g(x)dx \\
&= \text{Im}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}g(x)dx \\
&= \text{Im}\left(2\pi i\sum(\text{residuos de } e^{iz}g(z) \text{ en } \mathbb{H}^+)\right).
\end{aligned}$$

Consideremos la función $h(z) = \frac{e^{iz}z}{z^4+1}$, la cual tiene polos simples en los ceros de z^4+1, pero solamente $e^{i\pi/4}$ y $e^{3\pi i/4}$ se encuentran en $\mathbb{H}^+$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(h, e^{i\pi/4}) + \operatorname{Res}(h, e^{3\pi i/4}) &= \frac{e^{i(e^{i\pi/4})}e^{i\pi/4}}{4(e^{i\pi/4})^3} + \frac{e^{i(e^{i3\pi/4})}e^{i3\pi/4}}{4(e^{i3\pi/4})^3} \\
&= \frac{1}{4}(-ie^{i(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})} + ie^{i(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})}) \\
&= \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(x)}{x^4+1}dx = \frac{I}{2} = \frac{\pi}{2}e^{-1/\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2.3.11. En el ejemplo resuelto **4.3.16** en [8], ¿podría el exponente $2n$ ser reemplazado por otra potencia $p \geq 2$?
Ejemplo resuelto **4.3.16**: Para $n \geq 1$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\csc\frac{\pi}{2n}.$$

Solución. Sea $p \geq 3$ un número entero impar, entonces la función $f(z) = 1/(1+z^p)$ tiene singularidades en los ceros $1+z^p$, los cuales son los p números $e^{\frac{i\pi}{p}(2k+1)}$, con $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Estas singularidades son polos son simples. El residuo en $e^{\frac{i\pi}{p}}$ es

$$\operatorname{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{p}}) = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{p}}} \frac{z - e^{\frac{i\pi}{p}}}{1+z^p} = \frac{1}{p\left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^{p-1}} = \frac{-e^{\frac{i\pi}{p}}}{p}.$$

Construyamos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$, como en la figura 2.5, donde γ_1 es el segmento sobre el eje real que va de 0 a R, γ_2 el arco de la circunferencia de radio R de ángulo $\frac{2\pi}{p}$ y γ_3 el segmento sobre el rayo que va del 0 en la dirección $e^{2\pi i/p}$ de longitud R. Las parametrizaciones son $\gamma_1(t) = t$ con $0 \leq t \leq R$, $\gamma_2(\theta) = Re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{p}$ y $\gamma_3(t) = te^{2\pi i/p}$, con $0 \leq t \leq R$.
Como $e^{\frac{i\pi}{p}}$ es la única singularidad dentro de γ, se tiene que

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{p}}) = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
2\pi i\left(\frac{-e^{\frac{i\pi}{p}}}{p}\right) &= \int_0^R \frac{dt}{1+t^p} + \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+(Re^{i\theta})^p} - \int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi i}{p}}dt}{1+(te^{\frac{2\pi i}{p}})^p} \\
&= (1-e^{\frac{2\pi i}{p}})\int_0^R \frac{dt}{1+t^p} + \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+(Re^{i\theta})^p}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

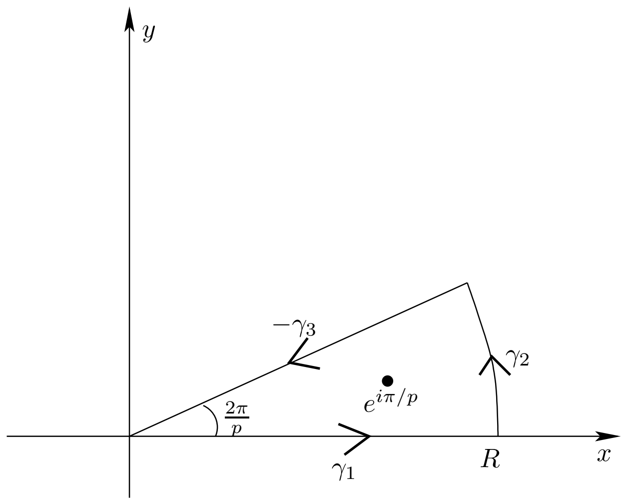


Figura 2.5: Construcción de la curva γ.

La última integral puede ser acotada de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{2\pi}{p}} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+(Re^{i\theta})^p}\right| &\leq \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \left|\frac{iRe^{i\theta}}{1+(Re^{i\theta})^p}\right| d\theta \\ &\leq \left(\frac{2\pi}{p}\right)\frac{R}{R^p-1},\end{aligned}$$

y entonces si $R\to\infty$, la integral que se acotó tiende a 0.
La ecuación (2.4) al hacer $R\to\infty$, se reduce a

$$2\pi i\left(\frac{-e^{\frac{i\pi}{p}}}{p}\right) = (1-e^{\frac{2\pi i}{p}})\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^p},$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^p} &= \frac{2\pi i(-e^{\frac{i\pi}{p}})}{p(1-e^{\frac{2\pi i}{p}})} = \frac{2\pi i}{p}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{p}}}{e^{\frac{2\pi i}{p}}-1}\right) \\ &= \frac{2\pi i}{p}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi i}{p}}-e^{\frac{-\pi i}{p}}}\right) = \frac{\pi}{p}\left(\frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{p}}-e^{\frac{-\pi i}{p}}}\right) = \frac{\pi}{p}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}.\end{aligned}$$

2.3.12. La transformada de Fourier de una función $g(x)$ está definida como

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Muestre que si f es diferenciable y las integrales para $\hat{f}$ y $\widehat{f'}$ convergen, entonces

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega}\widehat{f'}(\omega).$$

Solución. Sabemos que por definición

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Ahora bien, integrando por partes con $u = f(x)$ y $dv = e^{-i\omega x}dx$, tenemos que $du = f'(x)dx$, pues f es diferenciable, y $v = \frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}$, por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-f(x)\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-i\omega}f'(x)e^{-i\omega x}dx\right].\end{aligned}$$

Para calcular los límites en el primer término, notemos que $f(x)$ tiende a 0 en ambas direcciones a lo largo del eje x, pues de lo contrario la integral para $\hat{f}$ no convergería. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Como la función $e^{-i\omega x}$ es acotada, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-i\omega x} = \lim_{x\to-\infty} f(x)e^{-i\omega x} = 0.$$

Así pues, tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\omega}f'(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx,$$

donde esta última integral converge por hipótesis, así que podemos sustituirla por $\widehat{f'}(\omega)$.

Por lo tanto, se concluye que $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega}\widehat{f'}(\omega)$, es decir, $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$.

2.4. Evaluación de series infinitas

En esta sección se da una breve discusión de algunas aplicaciones del teorema del residuo, para calcular integrales que nos permiten evaluar sumas infinitas.

Teorema de la adición. *Sea f analítica en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sea C_N el cuadrado con vértices en $(N+\frac{1}{2})\times(\pm 1 \pm i)$, $N = 1, 2, 3, \dots$. Suponga que $\int_{C_N} (\pi \cot \pi z) f(z) dz \to 0$, conforme $N \to \infty$. Entonces se tiene la fórmula de la adición*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \{f(n) : n \in \mathbb{N} \text{ no es una singularidad de } f\}$$

$$= -\sum \{\text{residuos de } (\pi \cot \pi z) f(z) \text{ en las singularidades de } f\}.$$

En particular, si ninguna de las singularidades de f está en los números enteros, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} f(n)$ existe, es finito y

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum \{\text{residuos de } (\pi \cot \pi z) f(z) \text{ en las singularidades de } f\}.$$

El siguiente resultado muestra condiciones que bastan para poder aplicar el teorema de la adición.

Proposición 2.4.1 *Suponga que f es analítica en $\mathbb{C}$ excepto en singularidades aisladas. Si existen constantes R y M tales que $|zf(z)| \leq M$, siempre que $|z| \geq R$, entonces se satisfacen las hipótesis del teorema de la adición.*

Es conocido que una función racional puede ser expandida en fracciones parciales en términos de los ceros del denominador. Algunas veces una función meromorfa puede pensarse en algo así como una función racional con, posiblemente, una cantidad infinita de ceros en el denominador y uno desearía saber si es posible una expansión similar.

Teorema del desarrollo en fracciones parciales. *Suponga que f es meromorfa con polos simples en $a_1, a_2, \dots$, con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ y residuos b_k en a_k, además suponga que f es analítica en 0. Suponga que existen una sucesión $R_1, R_2, R_3, \dots$, con la propiedad de que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$ y curvas cerradas simples C_n que satisfacen*

- (i) *$|z| \geq R_n$, para toda z en C_n.*
- (ii) *Existe una constante S tal que la longitud de $(C_n) \leq SR_n$, para toda n.*
- (iii) *Existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M$, para toda z en C_n y para toda n, donde la misma M debe funcionar para toda n.*

Entonces

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n} \right).$$

A continuación se aplicarán los resultados anteriores en los siguientes problemas.

2.4.1. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Solución. Primero notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(2n-1)-1}}{(2(2n-1)-1)^3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2(2n)-1)^3} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^3} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^3}. \end{aligned}$$

Para calcular $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^3}$, consideremos $f(z) = \dfrac{1}{(4z-3)^3}$ la cual es analítica excepto en $z = \frac{3}{4}$, que no es un número entero.
Sea $Q(z) = (4z-3)^3$, por ser un polinomio de grado 3, sabemos que existe $M_1 > 0$, tal que $|Q(z)| \geq M_1 |z|^3$, si $|z| \geq R$, para alguna $R > 1$ (vease la demostración del *Teorema Fundamental del Álgebra* 2.4.9 en [8]). Así, sea $M = \frac{1}{M_1}$, si $|z| > R$, entonces $|zf(z)| = |z\frac{1}{Q(z)}| \leq |z|\dfrac{M}{|z|^3} = \dfrac{M}{|z|^2} < M$.
Así, por la proposición 2.4.1, se cumplen las hipótesis del teorema de la adición, y por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^3} = -\mathrm{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{(4z-3)^3}, \frac{3}{4} \right).$$

Sean $g(z) = \pi \cot(\pi z)$ y $h(z) = (4z-3)^3$, entonces se tiene $g(\frac{3}{4}) = -\pi$, $g'(\frac{3}{4}) = -2\pi^2$, $g''(\frac{3}{4}) = -4\pi^3$, $h(\frac{3}{4}) = h'(\frac{3}{4}) = h''(\frac{3}{4}) = 0$, $h'''(\frac{3}{4}) = 384$ y $h^{(n)}(\frac{3}{4}) = 0$, para $n \geq 4$.
Luego, $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\pi \cot(\pi z)}{(4z-3)^3}, \dfrac{3}{4} \right) = \left[\dfrac{3!}{384} \right]^3 \begin{vmatrix} \frac{384}{3!} & 0 & -\pi \\ 0 & \frac{384}{3!} & -2\pi^2 \\ 0 & 0 & -2\pi^3 \end{vmatrix} = -\dfrac{\pi^3}{32}$, por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Ahora, para $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^3}$ el procedimiento es análogo, pues la función sigue siendo el recíproco de un polinomio y su única singularidad es $z = \frac{1}{4}$ que no es un número entero, así, llegamos a que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^3} = -\mathrm{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{(4z-1)^3}, \frac{1}{4}\right).$$

Sean $g(z) = \pi\cot(\pi z)$ y $h(z) = (4z-1)^3$, entonces se tiene $g(\frac{1}{4}) = \pi$, $g'(\frac{1}{4}) = -2\pi^2$, $g''(\frac{1}{4}) = 4\pi^3$, $h(\frac{1}{4}) = h'(\frac{1}{4}) = h''(\frac{1}{4}) = 0$, $h'''(\frac{1}{4}) = 384$ y $h^{(n)}(\frac{1}{4}) = 0$, para $n \geq 4$.

Luego, Res$\left(\dfrac{\pi\cot(\pi z)}{(4z-1)^3}, \dfrac{1}{4}\right) = \left[\dfrac{3!}{384}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{384}{3!} & 0 & \pi \\ 0 & \frac{384}{3!} & -2\pi^2 \\ 0 & 0 & 2\pi^3 \end{vmatrix} = \dfrac{\pi^3}{32}$. Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^3} = -\frac{\pi^3}{32}.$$

Luego

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{16},$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Segunda solución. Notemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \cdots + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Dado que la función $f(z) = \dfrac{1}{(2z-1)^3}$ cumple que existe $M > 0$ tal que para $|z| > R$, $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^3}$, y solo tiene una singularidad cuando $z = \frac{1}{2}$, la cual no está en los enteros, por el problema **2.4.4** de esta misma sección,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \mathrm{Res}\left(\frac{\pi\csc(\pi z)}{(2z-1)^3}, \frac{1}{2}\right).$$

Sean $g(z) = \pi\csc(\pi z)$ y $h(z) = (2z-1)^3$, entonces $g(\frac{1}{2}) = \pi$, $g'(\frac{1}{2}) = 0$, $g''(\frac{1}{2}) = \pi^3$, $h(\frac{1}{2}) = h'(\frac{1}{2}) = h''(\frac{1}{2}) = 0$, $h'''(\frac{1}{2}) = 48$ y $h^{(n)}(\frac{1}{2}) = 0$, para $n \geq 4$.

Luego, $\mathrm{Res}\left(\frac{\pi \csc(\pi z)}{(2z-1)^3}, \frac{1}{2}\right) = \left[\frac{3!}{48}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{48}{3!} & 0 & \pi \\ 0 & \frac{48}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^3}{2!} \end{vmatrix} = \frac{\pi^3}{16}$. Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$

Para finalizar, por la observación al principio de esta solución, se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

2.4.2. Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) + \frac{1}{2a^2}, \quad a > 0.$$

Solución. Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$, la cual tiene singularidades en los puntos $z = \pm ai$. Para poder aplicar el teorema de la adición, se necesita mostrar que existen constantes R y M tales que $|zf(z)| \leq M$, siempre que $|z| \geq R$. Para ello notemos que si

$$\left|z + \frac{a^2}{z}\right| \geq |z| - \left|\frac{a^2}{z}\right| \geq |z| - |a^2| \geq R - |a^2|,$$

entonces

$$\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right| \leq \frac{1}{R - |a|^2} = M, \text{ si } |z| \geq R > 1.$$

Calculemos ahora los residuos de $g(z) = \pi \cot(\pi z) f(z)$ en las singularidades de f, las cuales son polos simples de g. Entonces, $\mathrm{Res}(g(z), \pm ai)) = \dfrac{\pi \cot(\pi(\pm ai))}{\pm 2ai}$, luego

$$\frac{\pi \cot(\pi(ai))}{2ai} = \left[\frac{i\pi}{2ai}\right]\left[\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{-e^{a\pi}+e^{-a\pi}}\right] = -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a),$$

$$\frac{\pi \cot(\pi(-ai))}{-2ai} = \left[\frac{i\pi}{-2ai}\right]\left[\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\right] = -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a).$$

Entonces, por el teorema de la adición, se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\left(-2\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a)\right) = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a),$$

de donde

$$\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a),$$

por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) + \frac{1}{2a^2}.$$

2.4.3. Muestre que

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Solución. Primero vamos a construir una función apropiada, para lo cual fijemos un número complejo z el cual no es un entero y consideremos

$$f(w) = \frac{1}{(w-z)^2} = \frac{1}{(z-w)^2}.$$

Esta función es meromorfa, ya que es holomorfa salvo en el único polo que tiene la función, es decir, en $w = z$ (y este polo no es un entero).
Verifiquemos que $|wf(w)|$ está acotada para w suficientemente grande. Si $|w| > R > 1$ y $|z| < R$, entonces

$$\frac{|w-z|^2}{|w|} \geq \frac{|w-z|^2}{|w|^2} = \left|1 - \frac{z}{w}\right|^2 \geq \left(1 - \left|\frac{z}{w}\right|\right)^2 \geq \left(1 - \frac{|z|}{R}\right)^2$$

por lo que $\frac{|w|}{|w-z|^2} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{|z|}{R}\right)^2}$. Entonces, para w es suficientemente grande, la función $|wf(w)|$ está acotada, por lo que se cumplen las condiciones de la proposición 2.4.1, de donde se puede aplicar el teorema de adición para obtener

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(z-n)^2} = -\left\{\text{Residuo de } \frac{\pi\cot\pi w}{(w-z)^2}\right\}.$$

Calculemos ahora el residuo en la parte derecha de la igualdad anterior. Escribimos la función $\frac{\pi\cot\pi w}{(w-z)^2}$ como el cociente de $g(w) = \pi\cot\pi w$ y $h(w) = (w-z)^2$. Recordemos que z no es un número entero, pero para calcular el residuo se tienen que considerar dos casos, cuando $2z$ no es entero y cuando si lo es.
En el primer caso, $g(z) = \pi\cot\pi z \neq 0$, $h(z) = 0 = h'(z)$ y $h''(z) \neq 0$, entonces tenemos un polo doble en $w = z$ y el residuo lo calculamos con la fórmula 6 de la proposición 2.1.1

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi w}{(w-z)^2}, z\right) = 2\frac{g'(z)}{h''(z)} - \frac{2}{3}\frac{g(z)h'''(z)}{[h''(z)]^2}.$$

Podemos ver que $h'''(z) = 0$, $h''(z) = 2$, $g'(z) = -\pi^2 \csc^2(\pi z)$, luego

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi w}{(w-z)^2}, z\right) = -\frac{2\pi^2 \csc^2(\pi z)}{2} = -\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}.$$

En el caso en que $2z$ es un número entero, es decir, $z = m/2$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que $g(z) = 0$, pero $g'(z) = -\pi^2 \neq 0$ y $h(z) = 0 = h'(z)$ y $h''(z) = 2 \neq 0$, luego tenemos un polo simple en $z = w$ y el residuo lo calculamos con la fórmula 5 de la proposición 2.1.1

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi w}{(w-z)^2}, z\right) = 2\frac{g'(z)}{h''(z)} = -\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = -\pi^2,$$

de donde nuevamente se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \pi^2.$$

2.4.4. Desarrrolle un método para evaluar series de la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$, donde f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un número finito de polos, ninguno de los cuales es un entero.

Solución. La condición que se va a pedir a $f(z)$, además de ser meromorfa con singularidades en $|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n|$, es de que en los cuadrados C_n de vértices $(n+\frac{1}{2})(\pm 1, \pm i)$, con $n = 1, 2, \ldots$, se cumple que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz = 0$. Con esto se garantiza que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, a_k\right).$$

La función $g(z) = \frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ tiene singularidades en los puntos a_k y además en los enteros, donde estos últimos son singularidades removibles o polos simples con residuo

$$\lim_{z\to n} (z-n)\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{f(n)}{\pi \cos(\pi n)} = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi}.$$

El teorema del residuo garantiza que

$$\begin{aligned}\int_{C_n} \frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} &= 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, k\right) + 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, a_k\right) \\ &= 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi} + 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, a_k\right).\end{aligned}$$

Al hacer $n \to \infty$, se obtiene que

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, a_k\right),$$

por lo que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, a_k\right).$$

2.4.5. Muestre que si $2z - 1$ no es un entero, entonces

$$\frac{1}{\cos(\pi z)} = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{z}{2z-1}\right) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{2z-1}{(2z-1)^2 - 4n^2} + \frac{1}{1-4n^2}\right].$$

Solución. Para usar el teorema del desarrollo en fracciones parciales, consideremos $f(z) = \dfrac{1}{\cos(\pi z)}$, la cual es meromorfa con polos simples en $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = -\frac{3}{2}$, $\ldots$, $a_{2n-1} = \frac{2n-1}{2}$, $a_{2n} = -\frac{2n-1}{2}$, $\ldots$, de donde se tiene la condición $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots$.

Se necesita calcular los residuos de f en esos polos simples, y se tiene además que $\operatorname{Res}(f(z), a_{2n}) = \operatorname{Res}(f(z), a_{2n+1}) = (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}$.

Finalmente, consideremos los cuadrados C_N con esquinas $\pm N \pm Ni$ y veamos que existe una sucesión $\{R_n\}$ que tiende a infinito, y que existen constantes S y M tales que: (i) $|z| \ge R_N$, para toda z en C_N; (ii) longitud$(C_N) \le SR_N$, para toda N; (iii) $|f(z)| \le M$, para toda z en C_N y para toda N.

Si tuvieramos lo anterior, por el teorema del desarrollo en fracciones parciales concluimos que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n}\right).$$

Como $f(0) = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
f(z) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z-a_n}+\frac{b_n}{a_n}\right) = 1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad +\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{z+\frac{2n-1}{2}}-\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)+\left(\frac{1}{z-\frac{2n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)\right]\\
&= 1-\frac{4}{\pi}\left(\frac{z}{2z-1}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{2z+2n-1}-\frac{2}{2n-1}\right)\\
&\quad +\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{2z-(2n+1)}+\frac{2}{2n+1}\right)\\
&= 1-\frac{4}{\pi}\left(\frac{z}{2z-1}\right)\\
&\quad +\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{2(2z-1)}{(2z-1-2n)(2z-1+2n)}+\frac{1}{-(2n-1)}+\frac{1}{2n+1}\right]\\
&= 1-\frac{4}{\pi}\left(\frac{z}{2z-1}\right)+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{2z-1}{(2z-1)^2-4n^2}+\frac{1}{1-4n^2}\right].
\end{aligned}
$$

Solo resta encontrar la sucesión $\{R_n\}$ que tiende a infinito, y las constantes S y M mencionadas arriba. Para ello consideremos $R_N = N$, de donde $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = \infty$, además, la longitud de $(C_N) = 8N = 8R_N$, por lo que podemos tomar $S = 8$ y para ver que $f(z)$ esta acotada, para todo z sobre C_N, observemos que si $z = x + iy$, entonces $\cos(\pi z) = \cos(\pi x)\cosh(\pi y) + i\,\mathrm{sen}(\pi x)\,\mathrm{senh}(\pi y)$, luego

$$
\begin{aligned}
|\cos(\pi z)|^2 &= \cos^2(\pi x)\cosh^2(\pi y)+\mathrm{sen}^2(\pi x)\mathrm{senh}^2(\pi y)\\
&= (1-\mathrm{sen}^2(\pi x))\cosh^2(\pi y)+\mathrm{sen}^2(\pi x)\mathrm{senh}^2(\pi y)\\
&= \cosh^2(\pi y)-\mathrm{sen}^2(\pi x)\geq\cosh^2(\pi y)-1=\mathrm{senh}^2(\pi y),
\end{aligned}
$$

luego $|f(z)| = \left|\frac{1}{\cos(\pi z)}\right| \leq \frac{1}{|\mathrm{senh}(\pi y)|} \leq \frac{1}{|\mathrm{senh}(\pi)|}$, para $|z| \geq \pi$ con $z \in C_N$. De donde concluimos la demostración del problema.

2.4.6. Use el teorema de desarrollo en fracciones parciales para mostrar que

$$
\cot z = \frac{1}{z}+\sum{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2},
$$

donde $\sum{}'$ significa que la suma es sobre todo $n \neq 0$.

Solución. Primero consideremos la función $f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$, que no esta definida en 0, pero como

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}(z\cot z - 1) = \lim_{z\to 0} z\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - 1 = 0,$$

la función f tiene una singularidad removible en 0, por lo que si definimos $f(0) = 0$, la función f es analítica en 0. Ahora, nuestro trabajo es verificar que se cumplan las condiciones del teorema de desarrollo en fracciones parciales para que podamos aplicarlo. Entonces observemos que la función $f(z)$ tiene polos en $-\pi$, π, -2π, 2π, $\cdots$, $-n\pi$, $n\pi$, $\ldots$. Así, nuestra sucesión de singularidades se puede ordenar de la siguiente forma: $a_1 = -\pi, a_2 = \pi, a_3 = -2\pi, a_4 = 2\pi, \ldots, a_{2n-1} = -n\pi, a_{2n} = n\pi, \ldots$, para toda $n \neq 0$, y claramente se cumple la condición

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \cdots .$$

Estos polos son simples, y denotemos por b_n a los residuos respectivos.
Sea C_N el cuadrado con vértices en $\pi(N+\frac{1}{2})(\pm 1, \pm i)$ y sea $R_N = \pi(N+\frac{1}{2})$, entonces $|z| \geq \pi(N+\frac{1}{2})$, para toda z en C_N.
Por otro lado, sabemos que la longitud de C_N es $8\pi(N+\frac{1}{2})$, por lo que la longitud de $C_N \leq SR_N$, si $S = 8$. Ya tenemos las dos primeras condiciones del teorema con $R_N = \pi(N+\frac{1}{2})$, $S = 8$. Solo falta ver que la función $|\cot z|$ está acotada, para toda z en C_N, y para toda N; para ello vemos que

$$\begin{aligned}
|\cot z| &= \left|\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}\right| \\
&= \left|\frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}\right| \\
&\leq \frac{|e^{ix-y}| + |e^{-ix+y}|}{|e^{ix-y}| - |e^{-ix+y}|} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{-e^{-y} + e^{y}} = \frac{1 + e^{2y}}{-1 + e^{2y}}.
\end{aligned}$$

Para z en C_N, Im $z = y$, cumple que $-\pi(N+\frac{1}{2}) \leq y \leq \pi(N+\frac{1}{2})$. Ahora, notemos que si z es suficientemente grande, esto implica que y es muy grande, pero si $y \to \infty$, la parte derecha de la última desigualdad tiene a 1; entonces para cualquier z en C_N se tiene que $|\cot z|$ es acotada y podemos aplicar el teorema para tener que,

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n}\right).$$

En este caso, como dijimos al principio, ya que los polos son de la forma $n\pi$ para cualquier $n \neq 0$, entonces $a_n = n\pi$ y los residuos b_n en $n\pi$ cumplen que

$$b_n = \operatorname{Res}(\cot z, n\pi) = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1.$$

Por lo tanto, como $f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$, concluimos que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

2.4.7. Demuestre que

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solución. Hay que probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Notemos que

$$\sum{}' \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \cdots + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + 1 + 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

donde $\sum{}'$ denota a $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}$, excepto por el término cuando $n = 0$, y además

$$\begin{aligned} \sum{}' \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(2n-1)-1}}{(2n-1)^2} + \sum{}' \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum{}' \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Para calcular $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, considere $f(z) = \dfrac{1}{(2z-1)^2}$ la cual es analítica excepto en $z = \frac{1}{2}$, que no está en los enteros.
Sea $Q(z) = (2z-1)^2$ un polinomio de grado 2, entonces existe $M_1 > 0$ tal que $|Q(z)| \geq M_1|z|^2$, si $|z| \geq R$, para alguna $R > 1$ (vease la demostración del *Teorema Fundamental del Álgebra* 2.4.9 en [8]). Así, sea $M = \frac{1}{M_1}$, si $|z| > R$, entonces $|zf(z)| = |z\frac{1}{Q(z)}| \leq |z|\dfrac{M}{|z|^2} = \dfrac{M}{|z|} < M$.
Luego se cumplen las hipótesis del teorema de la adición, y por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\mathrm{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{(2z-1)^2}, \frac{1}{2} \right).$$

Sean $g(z) = \pi \cot(\pi z)$ y $h(z) = (2z-1)^2$, entonces $g(\frac{1}{2}) = 0$, $g'(\frac{1}{2}) = -\pi^2$, $h(\frac{1}{2}) = h'(\frac{1}{2}) = 0$ y $h''(\frac{1}{2}) = 8$, por lo que $\frac{1}{2}$ es un polo simple y

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{(2z-1)^2}, \frac{1}{2} \right) = 2\, \frac{g'(\frac{1}{2})}{h''(\frac{1}{2})} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ahora bien $\sum' \frac{1}{n^2} = \cdots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + 1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, y por la proposición 4.4.3 en [8], se tiene que $\sum' \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$, luego

$$\sum{}' \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Por lo que se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Segunda solución. De la solución anterior, sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ahora bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2},$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Finalmente, usando que la suma de la serie harmónica al cuadrado es igual a $\frac{\pi^2}{6}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Tercera solución. Del hecho de que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$, y ya que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \end{aligned}$$

se sigue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ahora, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

se sigue que

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= {\sum}' \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4}{\sum}' \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}(3-1) = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Transformaciones Conformes

Una herramienta indispensable para el estudio de la geometría de las funciones analíticas es el teorema de la transformación de Riemann, del cual veremos varias aplicaciones en este capítulo.

3.1. Transformaciones Conformes

En esta sección se da una breve discusión de algunos aspectos geométricos de las funciones analíticas, y se enuncia el famoso teorema de la transformación de Riemann.

Recordemos que una función $f : A \to B$ es conforme en A si para toda z_0 en A, f rota a los vectores tangentes a curvas a través de z_0, un ángulo específico θ y los alarga un factor definido r.

La relación entre las funciones analíticas y las funciones conformes está dada por el siguiente resultado, y de hecho, de ahora en adelante los dos conceptos en este libro serán equivalentes.

Teorema de la transformación conforme. [Capítulo III, [3]]. *Sea $f : U \to V$ analítica tal que $f'(z) \neq 0$, para toda z en U. Entonces f es conforme en U.*

Un resultado básico, pero más sofisticado que el anterior, es el famoso teorema de la transformación de Riemann, el cual enunciamos a continuación.

Teorema de la transformación de Riemann. [Capítulo VII, [3]]. *Sea G una región simplemente conexa distinta del vacío, tal que $G \neq \mathbb{C}$. Entonces existe una transformación conforme biyectiva $f : G \to \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Más aún, para cualquier $z_0 \in G$ fijo, se puede encontrar una f tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$, con tal especificación f es única.*

Veamos algunas aplicaciones a los resultados anteriores.

3.1.1. Considere $f(z) = u + iv$, con $u(x, y) = 2x^2 + y^2$ y $v(x, y) = y^2/x$. Muestre que las curvas $u = cte$ y $v = cte$ se intersectan ortogonalmente, pero que f no es analítica.
Solución. Sean $A = \{z \in \mathbb{C} : u(z) = a\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : v(z) = b\}$ con a, b constantes, es decir

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 2x^2 + y^2 = a\}, \quad B = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{y^2}{x} = b\right\}.$$

Para mostrar que las curvas $u = a$ y $v = b$ se intersectan ortogonalmente, tenemos que calcular sus vectores tangentes en un punto común, y calcular su producto punto, si resulta que es cero, implicará que las curvas son ortogonales en el punto común. Calculando, obtenemos que

$$\nabla u = (4x, 2y), \qquad \nabla v = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right)$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = (4x, 2y) \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right) = \frac{-4y^2}{x} + \frac{4y^2}{x} = 0.$$

Por lo tanto, las curvas se intersectan ortogonalmente.
Para mostrar que la función f no es analítica, mostremos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen (ya que la otra condición de que existan las parciales sí ocurre). Las ecuaciones de Cauchy-Riemann están dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

y en nuestro caso se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \; \frac{\partial v}{\partial y} = 2y/x, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \; \frac{\partial v}{\partial x} = -y^2/x^2.$$

En este caso, las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que $4x = 2y/x$ y $2y = y^2/x^2$, de donde, $2x^2 = y$, es decir, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son solo ciertas sobre puntos en esa parábola, el cual no es un conjunto que contenga subconjuntos abiertos del plano, luego f no es analítica en ninguna región del plano complejo.

3.1.2. ¿En qué puntos son conformes las siguientes transformaciones?

$$a)\ \ f(z) = \overline{z} \qquad\qquad b)\ \ f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}.$$

Solución. $a)$ $f(z) = \overline{z}$.
Dado que $f(x, y) = x - iy$, entonces $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$, y de esta manera $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$, es decir, no se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y por ende, f no es analítica. Por lo tanto, en ninguna parte del plano complejo la función f es conforme.
$b)$ $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$.
La función dada es analítica excepto cuando $z = \frac{2n+1}{2}\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, los cuales son puntos aislados y además

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\left(\frac{e^{2iz}+1}{2e^{iz}}\right)^2} = \left(\frac{2e^{iz}}{e^{2iz}+1}\right)^2 = \frac{4e^{2iz}}{(e^{2iz}+1)^2} \neq 0,$$

ya que $4e^{2iz} \neq 0$, y $e^{2iz} + 1 \neq 0$ para $z \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.
Por lo tanto, f es conforme en $\mathbb{C} \setminus \{z = (n + \frac{1}{2})\pi \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$.

3.1.3. Sean A y B regiones cuyas fronteras son arcos suaves. Sea f conforme en un región que incluye $A \cup \partial A$ y que transforma A sobre B y ∂A sobre ∂B. Sea u armónica en B y $u = h(z)$ para z en la frontera de B. Sea $v = u \circ f$ de tal manera que v es igual a $h \circ f$ en la frontera de A. Demuestre que $\partial v/\partial n = 0$ en z_0, si $\partial u/\partial n = 0$ en $f(z_0)$, donde z_0 esta en la frontera de A y $\partial/\partial n$ denota la derivada en la dirección normal a la frontera.
Solución. Como z_0 esta en la frontera de A se tiene que considerar $v = h \circ f$, de donde por la regla de la cadena, como $\partial u/\partial n = 0$ en $f(z_0)$, se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial n}(z_0) = \frac{\partial (h \circ f)}{\partial n}(z_0) = \frac{\partial}{\partial n}(h(f(z_0))) \cdot f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial n}(f(z_0)) \cdot f'(z_0) = 0.$$

3.1.4. Sea $f : A \to B$ una función tal que, $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ existen y son continuas. Suponga que f es biyectiva y que preserva ángulos dirigidos; demuestre que f es analítica y conforme. ¿Puede la función en el ejercicio **3.1.1** preservar todos los ángulos?
Solución. Para mostrar que $f = u + iv$ es analítica, vamos a demostrar que las parciales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

La hipótesis del problema, garantiza la existencia de las parciales de f con respecto a x y con respecto a y, de las relaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

se garantiza que las parciales de la derecha existen y son continuas. Solo falta probar que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Sea $c(t) = x(t) + iy(t)$ una curva tal que $c(0) = z_0$, y tal que $c'(t)$ existe y es diferente de cero, y consideremos la curva $d(t) = (f \circ c)(t)$. Sea $Df(c(t))$ la matriz de derivadas parciales de f en $c(t)$, por la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}
d'(t) &= Df(c(t)) \cdot c'(t) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(c(t))x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(c(t))y'(t) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(c(t))x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}(c(t))y'(t)\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c(t)) + i\frac{\partial v}{\partial x}(c(t))\right)x'(t) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(c(t)) + i\frac{\partial v}{\partial y}(c(t))\right)y'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(c(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(t))y'(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) - i\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\right)c'(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) + i\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\right)\overline{c'(t)} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(c(t))c'(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c(t))\overline{c'(t)}.
\end{aligned}$$

Para la última igualdad recuerde que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Luego

$$d'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(c(0))c'(0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c(0))\overline{c'(0)}.$$

El hecho de que la función f conserve ángulos dirigidos, se refiere a que si rotamos $c'(0)$ cierto ángulo alrededor de z_0, entonces $d'(0)$ queda rotado (alrededor de $f(z_0)$) él mismo ángulo y en la misma dirección, pero si esto sucede se tendrá que $\arg d'(0) -$

$\arg c'(0)$ es constante, pero como

$$\begin{aligned}\arg d'(0) - \arg c'(0) &= \arg\left(\frac{d'(0)}{c'(0)}\right)\\ &= \arg\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\frac{\overline{c'(0)}}{c'(0)}\right)\end{aligned}$$

y como $c'(0)$ puede variar, deberá ser necesario que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$, que es la ecuación de Cauchy - Riemann, pues recuerde que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$.
Se ha mostrado que f es analítica, se tiene además que $f'(z_0)$ es diferente de cero ya que f es biyectiva, entonces por el teorema de la transformación conforme, f es conforme.

Segunda solución. Como en la primera solución se tiene que la diferencial de df_{z_0} de f en z_0 existe y se relaciona con la matriz

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix},$$

de la siguiente manera,

$$df_{z_0}(h) = Df(z_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{h}.$$

Notemos que cuando se dice que la función biyectiva f conserva ángulos dirigidos se refiere a que $T = df_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ los conserva para cada $z_0 \in A$. Al ser f biyectiva se tiene que df_{z_0} (o $Df(z_0)$) es invertible. Además, si θ es el ángulo entre dos números complejos w y z, la ley de los cosenos garantiza que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle w, z\rangle}{|w||z|}$$

donde $\langle w, z\rangle = \mathrm{Re}(w\bar{z})$ es el producto interno en $\mathbb{C}$.
El conservar ángulos para T invertible es equivalente a que para $w, z \in \mathbb{C}$ se cumpla que

$$|w||z||\langle T(w), T(z)\rangle| = |T(w)||T(z)||\langle w, z\rangle|.$$

Lema. Una transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ conserva ángulos si y solo si existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $T(z) = az$ para toda $z \in \mathbb{C}$ o $T(z) = a\bar{z}$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

Demostración del lema. Si T conserva ángulos es invertible, entonces $a = T(1) \neq 0$; sea $b = a^{-1}T(i)$, entonces

$$0 = \langle i, 1\rangle = \langle T(i), T(1)\rangle = \langle ab, a\rangle = |a|^2\langle b, 1\rangle = |a|^2 \,\mathrm{Re}\, b.$$

Luego, $\mathrm{Re}(b) = 0$, de donde $b = ir$ para algún r número real.
Como $T(z) = T(x+iy) = xT(1) + yT(i) = ax + aby = a(x+iry)$, entonces $\langle T(1), T(z)\rangle = \langle a, a(x+iry)\rangle = |a|^2 x$. Ahora, como T conserva ángulos, se tiene que

$$|x+iy||a|^2 x = |1||z|\langle T(1), T(z)\rangle = |T(1)||T(i)|\langle 1, z\rangle = |a||a(x+iry)|x,$$

de donde $|x+iy| = |x+iry|$ para todo $z = x+iy$, con $x \neq 0$, lo que implica que $r = \pm 1$, de donde $T(z) = az$ o $T(z) = a\bar{z}$.
Recíprocamente, si $T(z) = az$ (respectivamente, si $T(z) = a\bar{z}$) se tiene que

$$\begin{aligned} |w||z|\langle T(w), T(z)\rangle &= |w||z|\langle aw, az\rangle \\ &= |w||z||a|^2\langle w, z\rangle \\ &= |aw||az|\langle w, z\rangle \\ &= |T(w)||T(z)|\langle w, z\rangle. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración del lema.

El lema nos asegura que para cada $z_0 \in A$, se tiene que $df_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ debe ser de la forma $df_{z_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)h$ o de la forma $df_{z_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{h}$. Desde luego ambas conservan ángulos, pero solamente la primera los conserva orientados. Luego, siempre sucede que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, es decir, f satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann y entonces f es analítica en todo A y claramente conforme.
Con respecto a la función del ejercicio **3.1.1**, si esta función preservará todos los ángulos, entonces por lo que se acaba de mostrar, la función sería analítica, lo cual es una contradicción. Entonces no puede preservar todos los ángulos.

3.1.5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$. Muestre que f puede ser escrita como una rotación, seguida de una amplificación, seguida de una traslación.
Solución. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, escribamos a a en su forma polar como $a = re^{i\theta}$. Sea $g(z) = e^{i\theta}z$, una rotación de z por el ángulo θ y sea $h(z) = rz$, que es una amplificación de z con magnitud r, y sea $t(z) = z+b$, la traslación por b. Es claro que $f(z) = (t \circ h \circ g)(z)$, así obtenemos que $f(z)$ es una rotación, seguida de una amplificación, seguida de una traslación.

3.1.6. Muestra que toda transformación conforme biyectiva de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es de la forma $az + b$, para a, b números complejos, con $a \neq 0$.
Solución. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una transformación conforme. En particular, f es analítica en cero, por lo cual f se puede expresar como su serie de Taylor alrededor del cero, con radio de convergencia igual a infinito,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Consideremos la función $g(z) = f(\frac{1}{z})$, la cual es analítica excepto en $z_0 = 0$, su serie de Laurent alrededor de cero es

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Si $z_0 = 0$ fuera una singularidad esencial para g, entonces por el Teorema de Picard (ver [8]), para cualquier vecindad U de 0, y cualquier $w \in \mathbb{C}$, la ecuación $g(z) = w$ tiene infinitas soluciones en U; es decir, existen al menos dos puntos distintos (y distintos de cero) z_1, z_2 en U, tales que $g(z_1) = g(z_2) = w$, pero entonces $f(\frac{1}{z_1}) = f(\frac{1}{z_2})$, lo cual es una contradicción pues f es inyectiva.
Se puede concluir entonces que 0 es un polo de orden k para g, es decir, para toda $n > k$, se tiene que $a_n = 0$,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{z^n},$$

de donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n,$$

es un polinomio de grado k. Como f es biyectiva, entonces $k = 1$, por lo que se tiene el resultado.

3.2. Transformaciones fraccionales lineales y de Schwarz-Christoffel

Una transformación fraccional lineal, también llamada transformación de Möbius, es una función de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c, d son números complejos fijos, con $ad - bc \neq 0$, para garantizar que T no sea constante. Estas transformaciones son biyecciones conformes de la esfera de Riemann, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en sí misma, es decir, transformaciones analíticas salvo en un punto, con inversa analítica en todo $\hat{\mathbb{C}}$ menos un punto. Estas transformaciones forman el grupo de automorfismos de la esfera de Riemann.

De la misma forma, podemos hablar de los automorfismos del disco unitario, es decir, de las transformaciones conformes de $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ en sí mismo, éstas son las transformaciones fraccionales lineales de la forma

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

con $z_0 \in \mathbb{D}$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ fijos para una transformación; pero al variar z_0 y θ se obtienen todas las transformaciones.

Una de las propiedades importantes de las transformaciones fraccionales lineales es que si S es una línea recta o una circunferencia en el plano complejo, entonces la imagen de S bajo una transformación fraccional lineal vuelve a ser una recta o una circunferencia en el plano complejo.
El grupo de transformaciones fraccionales lineales en $\hat{\mathbb{C}}$ actúan de forma 3-transitiva de manera única, y de hecho actúan de forma 4-transitiva en cuartetas de puntos que tengan la misma razón cruzada. Esto es, dados dos juegos de tres (o cuatro puntos con la misma razón cruzada), entonces existe una transformación que envía un juego de puntos al otro.
Para las demostraciones de los resultados anteriores y para conocer más resultados acerca de las transformaciones fraccionales lineales o transformaciones de Möbius, ver el capítulo 2 de [6].

3.2.1. La fórmula de Schwarz-Christoffel

La fórmula de Schwarz-Christoffel da una expresión integral para transformar el semi-plano superior o la circunferencia unitaria en el interior de un polígono dado. Para el semiplano superior el resultado es el siguiente.

Fórmula de Schwarz-Christoffel. [Capítulo 6, [1]]. *Suponga P es un polígono en el plano complejo, con vértices en $w_1, w_2, \ldots, w_n$ y con ángulos exteriores $\pi\alpha_i$, donde $-1 < \alpha_i < 1$. Entonces las transformaciones conformes de $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ sobre el interior de P, tienen la forma*

$$f(z) = a\left(\int_{z_0}^{z} (\zeta - x_1)^{-\alpha_1} \cdots (\zeta - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}} d\zeta\right) + b,$$

donde a y b son constantes y la integración es a lo largo de cualquier trayectoria en A que une z_0 en A con z; se usa la rama principal para las potencias en el integrando. Más aún,

(i) *Se pueden escoger arbitrariamente dos de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

(ii) *a y b determinan el tamaño y la posición de P.*

(iii) $f(x_i) = w_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(iv) *f manda el punto al infinito a w_1.*

A continuación damos una lista de las transformaciones conformes mas comunes entre ciertas regiones del plano complejo. Consideremos las siguientes regiones del plano complejo: $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0,\ \text{Im } z > 0\}$ el primer cuadrante; $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ el semiplano superior; $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario; $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z < 2\pi\}$ una banda horizontal de ancho 2π; $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \text{Im } z > 0\}$ la parte del disco unitario en el semiplano superior; $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$ el semiplano derecho; $B^- = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z \leq \pi\}$ una banda horizontal de ancho π; $B^{-l} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z < \pi,\ \text{Re } z < 0\}$ una semi banda de ancho π; $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \text{Im } z > 0\}$ el complemento de $\mathbb{D}^+$ en $\mathbb{H}^+$; $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z,\ -\frac{\pi}{2} < \text{Re } z < \frac{\pi}{2}\}$ una semi banda vertical de ancho π; $F = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z,\ 0 < \text{Re } z < \frac{\pi}{2}\}$ una semi banda vertical de ancho $\frac{\pi}{2}$.

Lista de transformaciones conformes mas comunes:

- (i) $z \to z^2$ es una transformación conforme biyectiva entre A y $\mathbb{H}^+$ con inversa $z \to \sqrt{z}$.
- (ii) $z \to e^z$ es una transformación conforme biyectiva entre B y $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ con inversa $z \to \log z$.
- (iii) $z \to e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ es un automorfismo de $\mathbb{D}$ que manda el punto z_0 en 0, con inversa $z \to \frac{e^{-i\theta}z+z_0}{1+e^{-i\theta}\bar{z}_0 z}$.
- (iv) $z \to \frac{1+z}{1-z}$ es una transformación conforme biyectiva entre $\mathbb{D}^+$ y A con inversa $z \to \frac{z-1}{1+z}$.
- (v) $z \to \frac{z-1}{z+1}$ es una transformación conforme biyectiva entre C y $\mathbb{D}$ con inversa $z \to -\frac{z+1}{z-1}$.
- (vi) $z \to \frac{z-i}{z+i}$ es una transformación conforme biyectiva entre $\mathbb{H}^+$ y $\mathbb{D}$ con inversa $z \to -i\frac{z+1}{-z+1}$.
- (vii) $z \to e^z$ es una transformación conforme biyectiva entre B^- y $\mathbb{H}^+$ con inversa $z \to \log z$.
- $(viii)$ $z \to e^z$ es una transformación conforme biyectiva entre B^{-l} y $\mathbb{D}^+$ con inversa $z \to \log z$.
- (ix) $z \to z + \frac{1}{z}$ es una transformación conforme biyectiva entre D y $\mathbb{H}^+$ con inversa $z \to \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}$.
- (x) $z \to \frac{1}{z}$ es una transformación conforme biyectiva entre $\mathbb{D}$ y $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ cuya inversa es ella misma.

(xi) $z \to \operatorname{sen} z$ es una transformación conforme biyectiva entre E y $\mathbb{H}^+$ con inversa $z \to \operatorname{sen}^{-1} z$.

(xii) $z \to \operatorname{sen} z$ es una transformación conforme biyectiva entre F y A con inversa $z \to \operatorname{sen}^{-1} z$.

A continuación presentamos varios problemas con ejemplos de transformaciones conformes.

3.2.1. Sea $f(z) = (z-i)/(z+i)$. ¿Cuál es la imagen bajo f de los siguientes conjuntos?

$a)$ La recta real;

$b)$ la circunferencia con centro en 0 y radio 2;

$c)$ la circunferencia con centro en 0 y radio 1;

$d)$ el eje imaginario.

Solución. La función f es una transformación fraccional lineal, por lo que envía circunferencias en circunferencias, de hecho es un isomorfismo analítico entre el semiplano superior y el disco unitario abierto (ver número (vi) de la lista de transformaciones fraccionales comunes).
$a)$ Para encontrar la imagen de la recta real bajo f, se tienen que tomar tres puntos en la recta y ver sus imágenes. En este caso consideremos ∞, 0 y 1, para ver que $f(\infty) = 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$. Como estos tres puntos imagen están sobre la frontera del disco unitario, entonces la imagen bajo f de la recta real es la frontera del disco unitario abierto.
$b)$ Consideremos tres puntos en la circunferencia con centro en 0 y radio 2, digamos, 2, $2i$, $-2i$; sus imágenes son, respectivamente, $f(2) = \frac{3-4i}{5}$, $f(2i) = \frac{1}{3}$ y $f(-2i) = 3$. Entonces la imagen de la circunferencia con centro en 0 y radio 2 es la circunferencia que pasa por los tres puntos anteriores: $\frac{3-4i}{5}$, $\frac{1}{3}$ y 3.
Para encontrar el centro y radio de la circunferencia imagen, observemos que la circunferencia con centro en 0 y radio 2 es ortogonal al eje real, por lo que sus imágenes bajo f también son ortogonales. En el inciso anterior se vio que la imagen del eje real es la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$, por lo cual se tiene que D es ortogonal a $\mathbb{S}^1$, de donde el centro de D esta sobre el eje real. Es decir, el centro es el punto $(3 + \frac{1}{3})/2 = \frac{5}{3}$, luego el radio es $\frac{4}{3}$.
$c)$ Consideremos tres puntos en la circunferencia con centro en 0 y radio 1, digamos, 1, i, $-i$; sus imágenes son, respectivamente, $f(1) = -i$, $f(i) = 0$ y $f(-i) = \infty$. Por lo que la imagen de $\mathbb{S}^1$ es una recta que pasa por esos tres puntos, luego $f(\mathbb{S}^1)$ es igual al eje imaginario.

d) Consideremos tres puntos en el eje imaginario, por ejemplo ∞, i, $-i$, los cuales bajo f son enviados a $f(\infty) = 1$, $f(i) = 0$ y $f(-i) = \infty$, de donde la imagen del eje imaginario es el eje real.

3.2.2. Encuentre las transformaciones fraccionales lineales f, que satisfagan que $f(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$ si:

a) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1$; $w_1 = 0, w_2 = -i, w_3 = \infty$;

b) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1$; $w_1 = -i, w_2 = 0, w_3 = \infty$.

Solución. a) Buscamos una transformación fraccional lineal $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, tal que $f(i) = 0, f(0) = -i, f(-1) = \infty$, así $\frac{ai+b}{ci+d} = 0$, $\frac{b}{d} = -i$, $\frac{-a+b}{-c+d} = \infty$.
De la primer ecuación se tiene que $ai+b = 0$, entonces $a = ib$; de la segunda ecuación se tiene que $d = ib$; de la tercera ecuación concluimos que $-c+d = 0$, entonces $c = d$. Luego, $a = c = d = ib$, por lo que si hacemos $a = 1$, se obtiene

$$f(z) = \frac{z-i}{z+1}.$$

b) Buscamos una transformación fraccional lineal $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, que cumpla que $f(i) = -i, f(0) = 0, f(-1) = \infty$, así $\frac{ai+b}{ci+d} = -i$, $\frac{b}{d} = 0$, $\frac{-a+b}{-c+d} = \infty$.
De la segunda ecuación se tiene que $b = 0$; de la tercera ecuación se obtiene que $-c + d = 0$, entonces $c = d$. Sustituyendo en la primer ecuación, se llega a que $\frac{ai}{ci+c} = -i$, entonces $a = (-1-i)c$. Luego, $a = (-1-i)c = (-1-i)d$ y $b = 0$, si hacemos $c = 1$, se obtiene

$$f(z) = \frac{(-1-i)z}{z+1}.$$

3.2.3. Encuentre una transformación fraccional lineal, que mande al disco unitario en el semiplano derecho, con $f(0) = 3$.
Solución. Por (v) de la lista de transformaciones conformes más comunes, la transformación fraccional lineal que envía el disco unitario en el semiplano derecho es

$$z \to -\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

con $0 \to 1$. Entonces, si consideramos la transformación $w \to 3w$, que manda el semiplano derecho en si mismo, con $1 \to 3$, entonces se tiene que

$$f(z) = -3\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

es la transformación que buscamos.

3.2.4. Encuentre una transformación conforme del disco unitario sobre sí mismo tal que envíe $\frac{1}{4}$ a $-\frac{1}{3}$.
Solución. La forma general de un automorfismo del disco unitario es $T(z) = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}$, con $z_0 \in \mathbb{D}$. Si consideramos la transformación

$$T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad T(z) = \frac{z - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z},$$

entonces $T(1/4) = 0$.
De la misma manera, consideremos

$$S : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad S(z) = \frac{z + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z},$$

entonces $S(-1/3) = 0$, por lo que $S^{-1}(0) = -1/3$. Luego, consideremos la transformación $S^{-1} \circ T(z)$, la cual envía $1/4$ en $-1/3$, donde $S^{-1}(z) = \frac{z-1/3}{1-(1/3)z}$. Entonces la transformación conforme buscada es

$$S^{-1} \circ T(z) = S^{-1}\left(\frac{z - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z}\right) = \frac{13z - 7}{-7z + 13}.$$

3.2.5. Encuentre una transformación conforme uno a uno, de la región descrita por el conjunto $A = \{z$ tal que $|z-1| < \sqrt{2}$ y $|z+1| < \sqrt{2}\}$ sobre el semiplano superior.
Solución. Consideremos la transformación fraccional lineal $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$, vemos que la imagen de la circunferencia unitaria es la circunferencia que pasa por $f(i) = \infty$, $f(-i) = 0$ y $f(1) = \frac{1+i}{1-i} = i$, es decir, es una recta, la cual es el eje imaginario.
Ahora bien, como la circunferencia unitaria solo corta a la frontera de A en i y $-i$, y sus imágenes son $f(i) = \infty$ y $f(-i) = 0$, entonces las imágenes de las fronteras izquierda y derecha de A, son semirectas (pues pasan por ∞), que salen del origen.
Además, dado que el ángulo que se forma en $z = i$, entre la parte izquierda de la frontera de A y la circunferencia unitaria es de $\frac{\pi}{4}$ y f es una transformación fraccional lineal, entonces la imagen de la parte izquierda de la frontera de A (una semirecta) hará un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje imaginario.
Análogamente, como la parte derecha de la frontera de A forma un ángulo de $-\frac{\pi}{4}$ con la circunferencia unitaria, tenemos que la imagen de la parte derecha de la frontera de A (una semirecta) hará un ángulo de $-\frac{\pi}{4}$ con el eje imaginario.
Para ver el interior de la imagen, basta calcular $f(0) = -1$, y por lo tanto, la imagen de A bajo f es la región formada por los puntos de la forma $z = re^{i\theta}$, con $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$.
Ahora bien, si definimos $g(z) = e^{\frac{-3\pi}{4}i}f(z)$, se aplicará una rotación extra, con la que obtenemos el primer cuadrante; por último, para duplicar los ángulos y obtener

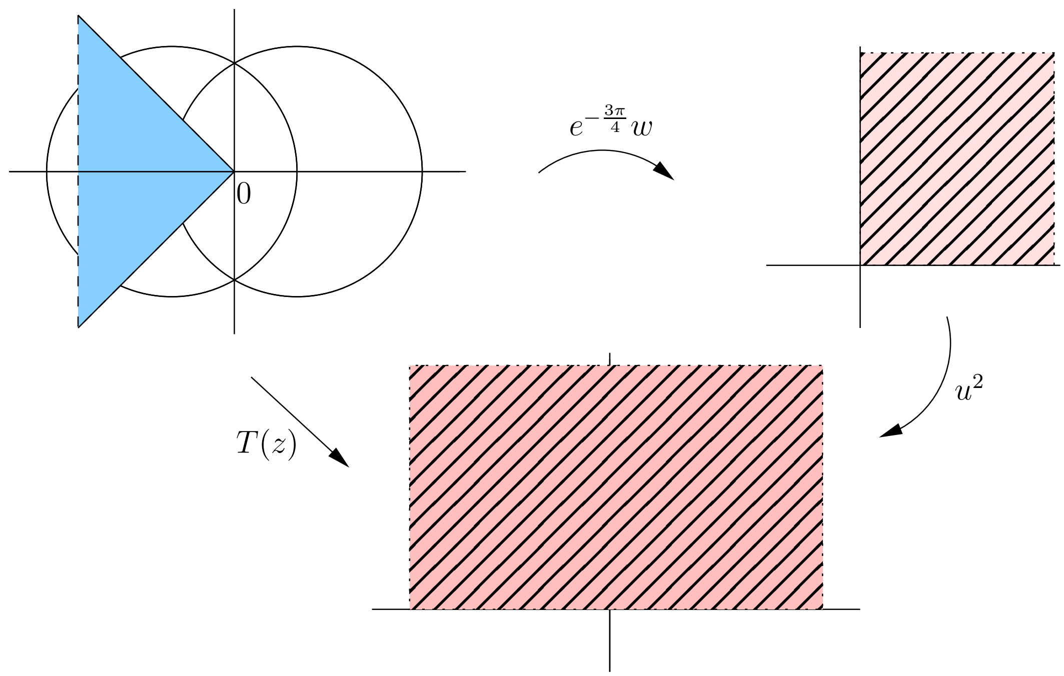


Figura 3.1: La Descripción de la transformación $T(z)$.

el semiplano superior basta con hacer $h(z) = [g(z)]^2$, ver figura 3.1. De donde, la transformación que estamos buscando es

$$T(z) = e^{-\frac{3\pi}{2}i}\left[\frac{z+i}{z-i}\right]^2.$$

3.2.6. Demuestre que si tanto T como R son transformaciones fraccionales lineales, entonces también $T \circ R$ lo es.
Solución. Sean T y R transformaciones fraccionales lineales,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad R(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$$

donde sabemos que estas transformaciones son biyectivas y conformes.
La composición $T \circ R$ está dada por

$$(T \circ R)(z) = \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+d} = \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+hd)},$$

la cual esta bien definida ya que $(ae+bg)(cf+hd)-(af+bh)(ce+dg)=(ad-bc)(eh-fg)\neq 0$. Ahora, para mostrar que esto es una transformación fraccional lineal, tenemos que probar que es biyectiva y conforme. Como las dos transformaciones T y R son conformes, entonces la composición es conforme y como T y R son biyectivas, la composición es biyectiva.
Otra forma de mostrar que la composición es biyectiva es encontrando la función inversa de $T\circ R$. Definamos la transformación

$$S(w)=\frac{-(cf+hd)w+(af+bh)}{(ce+dg)w-(ae+bg)}.$$

Mostremos que S es la inversa de $T\circ R$. Hacemos $(ae+bg)=k,(af+bh)=l,(ce+dg)=m,(cf+hd)=n$, entonces $(T\circ R)(z)=\frac{kz+l}{mz+n}$, $S(w)=\frac{-nw+k}{mz-k}$, entonces

$$\begin{aligned}(T\circ R)(S(w))&=\frac{k\left(\frac{-nw+k}{mz-k}\right)+l}{m\left(\frac{-nw+k}{mz-k}\right)+n}\\&=\frac{w(lm-kn)}{lm-kn}=w\end{aligned}$$

Un cálculo similar demuestra que $S(T(R(z)))=z$. Otra forma para mostrar que la composición es conforme, es ver que $(T\circ R)'(z)\neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(S(T(R(z)))&=\frac{d}{dz}z=1\\S'(T(R(z)))\cdot(T\circ R)'(z)&=1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(T\circ R)'(z)\neq 0$, de donde $T\circ R$ es conforme, y por lo tanto una transformación fraccional lineal.

3.2.7. Muestre que $K(z)=z/(1-z)^2$ envía, en forma inyectiva y sobre, al disco unitario abierto en $\mathbb{C}\backslash\{z:\text{Im}z=0 \text{ y } \text{Re}z<-\frac{1}{4}\}$.
Solución. Primero observemos que

$$K(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{\frac{1}{z}(z^2+1-2z)}=\frac{1}{z+\frac{1}{z}-2},$$

de donde si se define $h(z)=z+\frac{1}{z}$, $t(z)=z-2$, $g(z)=\frac{1}{z}$, se tiene que $K(z)=g\circ t\circ h(z)$.
Veamos primero cuál es la imagen de $\mathbb{D}$ bajo h. Si $z\in\partial\mathbb{D}=\mathbb{S}^1$, entonces $z=e^{i\theta}$, para $\theta\in[0,2\pi]$. Luego $h(z)=2\cos\theta$, de donde h envía la circunferencia unitaria en el intervalo $[-2,2]$. Demostremos ahora que h envía $\mathbb{D}$, de forma biyectiva, en $A=\hat{\mathbb{C}}\backslash[-2,2]$. Notemos que $h(0)=\infty$.

Para ver la inyectividad, supongamos que $h(z) = h(w)$, para $z, w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, entonces $z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w}$. Luego, $z - w = \frac{z-w}{zw}$, o $(z-w)(1 - \frac{1}{zw}) = 0$, de donde $z = w$ o $zw = 1$. Lo último no puede pasar ya que $|z| < 1$ y $|w| < 1$, por lo tanto $z = w$, de donde h es inyectiva.
Sea $w \in \mathbb{C}\backslash[-2, 2]$, y consideremos la ecuación $h(z) = w$, la cual es equivalente a $z^2 - zw + 1 = 0$. Sean r_1 y r_2 las dos raíces de la ecuación cuadrática, entonces $r_1 r_2 = 1$, por lo cual las raíces cumplen que una esta dentro del disco unitario y otra fuera; esto implica que h es sobre. Por lo tanto concluimos que $h(\mathbb{D}) = \hat{\mathbb{C}}\backslash[-2, 2] = A$.
Ahora, la imagen de A bajo la traslación $t(z)$, que es biyectiva, esta dada por $t(A) = \hat{\mathbb{C}}\backslash[-4, 0] = B$.
Finalmente, la imagen de B bajo $g(z)$, la cual también es una función biyectiva, es $g(B) = \hat{\mathbb{C}}\backslash(-\infty, -\frac{1}{4}]$, de donde se tiene el resultado.

3.2.8. Establezca (iii), (iv), (v) de la lista de transformaciones conformes más comunes.
Solución.
(iii) La transformación es $T(z) = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, que por ser fraccional lineal es conforme e inyectiva.
Si $|z| = 1$, entonces $|T(z)| = \left|e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = \frac{1}{|\overline{z}|}\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = \left|\frac{z-z_0}{\overline{z}-\overline{z_0}|z|^2}\right| = \left|\frac{z-z_0}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right| = \frac{|z-z_0|}{|\overline{z-z_0}|} = 1$. Luego como T transforma discos en discos, $T(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ y $T(z_0) = e^{i\theta}\frac{z_0-z_0}{1-|z_0|^2} = 0$, se tiene que $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Como la inversa de T es $T^{-1}(w) = \frac{e^{-i\theta}w+z_0}{1+e^{-i\theta}\overline{z_0}w} = S \circ R_{-\theta}(w)$, donde $R_{-\theta}(w) = e^{-i\theta}w$ y $S(w) = \frac{w+z_0}{1+\overline{z_0}z}$, se tiene que T^{-1} es una transformación conforme del disco unitario en si mismo, por lo que se concluye lo deseado.

(iv) Buscamos una transformación fraccional lineal $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $T(-1) = 0, T(0) = 1, T(1) = \infty, T(i) = i$, es decir, buscamos a, b, c, d tales que

$$\frac{-a+b}{-c+d} = 0,\ \frac{b}{d} = 1,\ \frac{a+b}{c+d} = \infty,\ \frac{ai+b}{ci+d} = i.$$

De la primera ecuación $-a + b = 0$, entonces $a = b$. De la segunda ecuación se tiene que $b = d$. De la tercera ecuación, $c + d = 0$, entonces $c = -d$.
Así, $a = b = -c = d$, y con $a = b = d = 1$, $c = -1$, tenemos que $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$.
Luego, verifiquemos que un punto dentro del semi disco superior, bajo la transformación, va al primer cuadrante

$$T\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} = \frac{(1+\frac{i}{2})^2}{1-(\frac{i}{2})^2} = \frac{1+i+\frac{i^2}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}+i}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5},$$

el cuál sí está dentro del primer cuadrante.

Por último, como T es una transformación fraccional lineal, T^{-1} existe y está dada por

$$T^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

por lo que se concluye lo deseado.

(v) Buscamos una transformación fraccional lineal $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $T(i) = i$, $T(0) = -1, T(-i) = -i, T(\infty) = 1$, es decir, buscamos a, b, c, d tales que

$$\frac{ai+b}{ci+d} = i, \ \frac{b}{d} = -1, \ \frac{-ai+b}{-ci+d} = -i, \ \frac{a}{c} = 1.$$

De la segunda ecuación, se tiene que $d = -b$. De la cuarta ecuación, $a = c$. Sustituyendo ambas igualdades en la primer ecuación $\frac{ai+b}{ai-b} = i$, $ai + b = -a - bi$, por lo que $(1+i)a = (-1-i)b$, y finalmente $a = -b$.
Así, $a = -b = c = d$, y con $a = c = d = 1$, $b = -1$, tenemos que $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
Luego, verifiquemos que un punto dentro del plano Re$(z) > 0$, bajo la transformación, queda dentro del disco unitario. Observemos que $T(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$, el cuál sí está dentro del disco unitario, por lo que se concluye lo deseado. Además, la inversa de T es igual a $T^{-1}(z) = \frac{z+1}{1-z}$.

3.2.9. Suponga $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y que $ad > bc$; muestre que la transformación $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ deja invariante el semiplano superior $\mathbb{H}^+$. Muestre que cualquier transformación fraccional lineal en el plano complejo, que envía el semiplano superior en sí mismo, es de esta forma.
Solución. Tenemos que demostrar que $\mathbb{H}^+$ se queda invariante bajo la transformación $T(z)$. Veamos que si z que pertenece a $\mathbb{H}^+$, entonces su imagen $T(z)$, sigue perteneciendo a $\mathbb{H}^+$.
Sea $z \in \mathbb{H}^+$, es decir, Im $z > 0$; se tiene que mostrar que Im$(T(z)) > 0$, pero

$$\text{Im}\, T(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) = \frac{\text{Im}z\,(ad-bc)}{|cz+d|^2} > 0,$$

la cual siempre es mayor que cero, ya que $ad - bc > 0$. Por lo tanto, $T(\mathbb{H}^+) \subset \mathbb{H}^+$. Como $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$, sus coeficientes son reales y $ad > (-b)(-c)$; luego $T^{-1}(\mathbb{H}^+) \subset \mathbb{H}^+$, y entonces $T(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^+$.
Para la otra parte del problema, primero notemos que si T es una transformación fraccional lineal que deja invariante a $\mathbb{H}^+$, entonces por continuidad debe dejar invariante a la recta real. Veamos ahora que cualquier transformación fraccional lineal que deja invariante a la recta real tiene que ser una transformación fraccional lineal con coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y que su determinante cumple que $ad - bc \neq 0$.

Sea S cualquier transformación fraccional lineal que deja invariante al conjunto de los números reales. Consideremos tres puntos distintos z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{R}\backslash\{S^{-1}(\infty)\}$, y sea $w_j = S(z_j)$, es decir, $w_j \in \mathbb{R}$. Entonces las transformaciones fraccionales lineales

$$U(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)} \text{ y } V(z) = \frac{(z-w_1)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-z)}$$

tienen coeficientes reales con determinante distinto de cero. Como $V^{-1}(U(z_j)) = w_j = S(z_j)$, para $j = 1, 2, 3$, y por la unicidad de la triple transitividad, podemos concluir que $S = V^{-1}U$, por lo tanto S tiene coeficientes reales y su determinante es distinto de cero, es decir,

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc \neq 0.$$

Si $w = S(z)$, sabemos que

$$\text{Im}\,(w) = \frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2}\text{Im}\,(z)$$

de donde podemos concluir que $ad - bc > 0$.

3.2.10. La *razón cruzada* de cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3, z_4, está definida como

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Muestre que cualquier transformación fraccional lineal tiene la propiedad de que

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Solución. Primero notemos que si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces es fácil ver que

$$T(z) = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1(z),$$

con $T_1(z) = z + d/c$, $T_2(z) = 1/z$, $T_3(z) = ((bc - ad)/c^2)z$ y $T_4(z) = z + a/c$. En el caso de que $c = 0$, entonces $T(z) = (a/d)z + b/d$, es decir es la composición de una traslación y una homotecia.

Entonces, basta ver que las traslaciones $t(z) = z + a$, las homotecias $h(z) = kz$ y la función $f(z) = 1/z$ preservan la razón cruzada. Observemos que para cuatro números complejos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 se tiene que

$$\begin{aligned} [t(z_1), t(z_2); t(z_3), t(z_4)] &= [z_1 + a, z_2 + a; z_3 + a, z_4 + a] \\ &= \frac{z_4 + a - z_1 - a}{z_4 + a - z_2 - a} \cdot \frac{z_3 + a - z_2 - a}{z_3 + a - z_1 - a} \\ &= \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = [z_1, z_2; z_3, z_4]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[h(z_1), h(z_2); h(z_3), h(z_4)] &= [kz_1, kz_2; kz_3, kz_4] \\
&= \frac{kz_4 - kz_1}{kz_4 - kz_2} \cdot \frac{kz_3 - kz_2}{kz_3 - kz_1} \\
&= \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = [z_1, z_2; z_3, z_4];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] &= \left[\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}; \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right] \\
&= \frac{\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_2}} \cdot \frac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}} \\
&= \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = [z_1, z_2; z_3, z_4].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, toda transformación fraccional lineal preserva la razón cruzada.

Segunda solución. Sea $T(z)$ una transformación fraccional lineal y sean $U(z) = [z_1, z_2; z_3, z]$ y $V(w) = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), w]$, que son transformaciones fraccionales lineales. Como $U(z_1) = 0 = V(T(z_1)) = V \circ T(z_1)$, $U(z_2) = \infty = V(T(z_2)) = V \circ T(z_2)$, $U(z_3) = 1 = V(T(z_3)) = V \circ T(z_3)$, se tiene que U y $V \circ T$ coinciden en tres puntos, luego coinciden en todos los puntos de $\hat{\mathbb{C}}$; en particular coinciden en z_4, $U(z_4) = V \circ T(z_4)$, es decir

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)].$$

3.2.11. Muestre que $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ es real si y solo si z_1, z_2, z_3, z_4 están sobre una recta o sobre una circunferencia. Use el ejercicio anterior **3.2.10**, para demostrar que una transformación fraccional lineal envía circunferencias o rectas en circunferencias o rectas.

Solución. Sea $T(z) = [z_1, z_2, z_3, z] = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$, la cual es una transformación fraccional lineal tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = \infty$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$, es decir, las imágenes de z_1, z_2, z_3 y z_4 bajo T, pertenecen a la recta real, por lo que estos cuatro puntos deben pertenecer a una misma recta o a una misma circunferencia $\mathcal{L}$, ya que la inversa T^{-1} también es una transformación fraccional lineal que envía rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

Reciprocamente, si z_1, z_2, z_3 y z_4 están en una misma circunferencia o recta, como $T(z) = [z_1, z_2; z_3, z]$ envía a z_1, z_2 y z_3 a 0, ∞ y 1, respectivamente, es decir, los envía a la recta real, entonces $T(z_4)$ también esta en esta recta, es decir, $T(z_4) = [z_1, z_2; z_3, z_4]$ es real.

Mostremos ahora que si T es una transformación fraccional lineal y si $L \subset \mathbb{C}$ es una línea recta y $S \subset \mathbb{C}$ es una circunferencia, entonces $T(L)$ es una linea recta o una

circunferencia, y $T(S)$ es una línea recta o una circunferencia.
Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in L$ arbitrarios y $w_1, w_2, w_3, w_4 \in S$ arbitrarios, entonces por el problema **3.2.10** y por la primera parte de este problema, tenemos que

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] \in \mathbb{R} \text{ y}$$

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [T(w_1), T(w_2), T(w_3), T(w_4)] \in \mathbb{R},$$

por lo tanto, $T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)$ están sobre una recta o sobre una circunferencia y $T(w_1)$, $T(w_2)$, $T(w_3)$, $T(w_4)$ también. Como $z_i \in L$ y $w_i \in S$ fueron arbitrarias, entonces $T(L)$ es una recta o una circunferencia y lo mismo para $T(S)$.

Segunda solución de la primera parte, sin usar el problema **3.2.10**.
Sea $w = [z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ un número real, entonces arg$(w) = 0$ o π, es decir,

$$S = \text{arg}\left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right) + \text{ arg}\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right) = 0 \text{ o } \pi.$$

Luego, se tienen dos casos, cuando z_1, z_2, z_3 son colineales o no (en este último caso, hay una circunferencia que pasa por los tres puntos). Si z_1, z_2, z_3 son colineales, entonces arg$\left(\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\right) = 0$ o π. Ahora, como $S = 0$ o π, se tiene que arg$\left(\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\right) = 0$ o π, de donde los cuatro puntos son colineales.
Ahora, si existe una circunferencia que pasa por z_1, z_2 y z_3, entonces se debe tener que $S = \pi$, de donde z_4 está sobre la misma circunferencia que pasa por los otros tres puntos.

Segunda solución de la segunda parte. Si T es una transformación fraccional lineal y $\mathcal{C}$ es una circunferencia o una recta y si z_1, z_2, z_3, $z \in \mathcal{C}$, entonces $[z_1, z_2; z_3, z] \in \mathbb{R}$, pero como T conserva la razón cruzada (problema **3.2.10**), se tiene que

$$[Tz_1, Tz_2; Tz_3, Tz] = [z_1, z_2; z_3, z] \in \mathbb{R};$$

por la primera parte del problema se tiene que Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz están en una circunferencia o una recta.
Como $\mathcal{C}$ queda determinada por z_1, z_2 y z_3, y el punto z es un punto arbitrario de $\mathcal{C}$, su imagén Tz queda en $\mathcal{C}'$, la circunferencia o recta determinada por Tz_1, Tz_2, Tz_3, es decir, $T(\mathcal{C})$ esta contenida en $\mathcal{C}'$, de hecho $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, pues si $w \in \mathcal{C}'$ podemos aplicar lo anterior con T^{-1} para segurar que $T^{-1}(w) \in \mathcal{C}$ y entonces $T(T^{-1}(w)) = w$, lo que garantiza que $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

3.2.12. Muestre que una transformación fraccional lineal T que no es la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos (esto es que $T(z) = z$). Dé un ejemplo para mostrar que T no necesariamente tiene puntos fijos. Encuentre los puntos fijos de $T(z) = z/(z+1)$.

Solución. Sea $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ una transformación fraccional lineal diferente de la identidad. Buscamos los puntos z tales que $T(z) = z$, es decir, $az+b = z(cz+d)$, lo cual es equivalente a $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Esta ecuación cuadrática tiene a los más dos raíces distintas

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}{2c},$$

que son los puntos fijos de T. Es importante señalar que $c \neq 0$, para que haya puntos fijos en $\mathbb{C}$ (si hacemos $c = 0, d = a = 1, b \neq 0$, obtenemos la transformación $T(z) = z+b$ (una traslación), la cual no tiene puntos fijos en $\mathbb{C}$). Se puede hacer la convención de que las transformaciones de la forma $T(z) = az + b$ tienen a ∞ como punto fijo.

Encontremos los puntos fijos de $T(z) = z/(z+1)$, para ello se tiene que resolver la ecuación

$$\frac{z}{z+1} = z$$

de donde $z^2 = 0$. Por lo tanto, el único punto fijo es $z = 0$.

3.2.13. Transforme de manera conforme el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ sobre el conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 1\}$.
Solución. Sea $T(z) = z-1$, entonces $T(A) = \mathbb{D}$. Usando la transformación de Cayley, $S(z) = i\frac{z+1}{-z+1}$, tenemos que $S(\mathbb{D}) = \mathbb{H}^+$; ahora apliquemos la rotación $R(z) = -iz$, la cual envía el semiplano superior en el semiplano derecho K. Finalmente, observe que $T^{-1}(z) = z+1$, envía K en B. Luego, la transformación

$$T^{-1} \circ R \circ S \circ T(z) = \frac{z}{-z+2} + 1 = \frac{2}{2-z},$$

transforma conformemente A en B.

3.2.14. Demuestre que las transformaciones conformes que mandan el disco unitario abierto al interior de un polígono con vértices $w_1, \ldots, w_n$, y a los puntos $z_1, \ldots, z_n$ en la circunferencia unitaria $|z| = 1$, a los puntos $w_1, \ldots, w_n$, respectivamente, están dadas por

$$f(z) = a\left[\int_0^z (\zeta - z_1)^{-\alpha_1} \ldots (\zeta - z_n)^{-\alpha_n} d\zeta\right] + b$$

donde las α_i son como en la fórmula de Schwarz-Christoffel.
Solución. Por (vi) en la lista de transformaciones conformes más comunes, podemos transformar al disco unitario en el semiplano superior con la transformación $g(z) = -i\frac{z+1}{z-1}$; sean $g_i = g(z_i)$, de aquí, por la fórmula de Schwarz-Christoffel, con $z_0 = 0 \mapsto i$, ya que el 0 se puede conectar por medio de radios o segmentos de radios a cualquier

punto en el disco unitario y además i se puede conectar con cualquier punto del semiplano superior, tenemos que

$$f(z) = a\left[\int_i^{g(z)} (\zeta - g_1)^{-\alpha_1} \dots (\zeta - g_n)^{-\alpha_n} d\zeta\right] + b.$$

3.2.15. Verifique la parte (ix) de la lista de transformaciones conformes comunes.

Solución. Para verificar (ix), tendremos que probar que la transformación $T(z) = z + 1/z$ envía de forma biyectiva el semiplano superior, sin la parte del disco unitario cerrado, en el semiplano superior.

Se tiene que mostrar que $T : \mathbb{H}^+ \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}^+$ de forma biyectiva. Primero veamos que si $\mathrm{Im}(z) > 0$, entonces $\mathrm{Im}\, T(z) > 0$,

$$\mathrm{Im}\,(T(z)) = \frac{T(z) - \overline{T(z)}}{2i} = \mathrm{Im}(z) - \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)(|z|^2 - 1)}{|z|^2}$$

lo cual siempre es mayor que 0, ya que $|z| > 1$.

Para ver que es inyectiva, sean $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^+ \setminus \overline{\mathbb{D}}$, supongamos que $T(z_1) = T(z_2)$, así $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$ y se sigue que $z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$, que es equivalente a $(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$, por lo tanto $z_1 = z_2$ o $z_1 z_2 = 1$, pero esto último no puede pasar, ya que $|z_1| > 1$ y $|z_2| > 1$, de donde $z_1 = z_2$.

Para la sobreyectividad, sea $w \in \mathbb{H}^+$ y consideremos la ecuación $T(z) = w$, esto es $z + \frac{1}{z} = w$. Resolviendo la ecuación $z^2 - zw + 1 = 0$, sean r_1 y r_2 la raíces de la ecuación cuadrática, sabemos que $r_1 r_2 = 1$, lo cual solo sucede si una de estas raíces está en el interior del disco unitario, y otra fuera. Esto último implica la sobreyectividad, por lo que concluimos que $T(\mathbb{H}^+ \setminus \mathbb{D}) = \mathbb{H}^+$.

3.2.16. Verifique, a partir de la fórmula de Schwarz-Christoffel, que $z \to \operatorname{sen}^{-1} z$ es una transformación conforme del semiplano superior en la región $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0 \text{ y } -\pi/2 < \mathrm{Re} z < \pi/2\}$.

Solución. Primero observemos que la derivada de la función $\operatorname{sen}^{-1} z$ es $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$. Para ver lo anterior hagamos $\theta = \operatorname{sen}^{-1} z$, de donde $\operatorname{sen}\theta = z$, luego $\cos\theta d\theta = dz$, es decir, $d\theta = \frac{dz}{\cos\theta} = \frac{dz}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Para usar la fórmula de Schwarz-Christoffel, consideremos dos puntos en el eje real, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, y ángulos rectos para ambos puntos, luego para z_0 fijo en el semiplano superior y para cualquier z ahí mismo, se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &= a\left(\int_{z_0}^{z}(\zeta+1)^{-1/2}(\zeta-1)^{-1/2}d\zeta\right)+b \\ &= a\left(\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)+b \\ &= a(\operatorname{sen}^{-1}z-\operatorname{sen}^{-1}z_0)+b \end{aligned}$$

es una transformación que envía el semiplano superior al interior de un polígono con tres lados, con dos ángulos rectos y tal que $f(\infty)=\infty$.
Ya que a y b son constantes que se pueden ajustar, al tomar $a=1$ y $b=\operatorname{sen}^{-1}z_0$, se tiene que $f(z)=\operatorname{sen}^{-1}z$ envía el semiplano superior en $\{z : \text{Im}z>0 \text{ y } -\pi/2<\text{Re}z<\pi/2\}$, de manera conforme.

3.2.17. Suponga que C_1 y C_2 son dos circunferencias tangentes, con C_2 en el interior de C_1. Muestre que se pueden colocar un número infinito de circunferencias en la región comprendida entre C_1 y C_2 y cada una tangente a la siguiente. Muestre que los puntos de tangencia de cada circunferencia con la siguiente están en un misma circunferencia.
Solución. Por el ejercicio 33 de la sección 5.2 de [8], podemos considerar sin pérdida de generalidad a $C_1=\{z\in\mathbb{C} : |z-1|=1\}$ y a $C_2=\{z\in\mathbb{C} : |z-2|=2\}$. El área a rellenar con circunferencias, se puede transformar en la banda $B=\{z\in\mathbb{C} \mid 1<\text{Re}(z)<2\}$, con la transformación $f(z)=4/z$, luego podemos definir circunferencias de la forma $S_n=\{z\in\mathbb{C} : |z-\frac{3}{2}+in|=\frac{1}{2}\}$, con $n\in\mathbb{Z}$, los cuales se pueden colocar en la banda B. Ahora bien, por ser f una transformación fraccional lineal, transforma circunferencias o rectas en circunferencias o rectas y preserva ángulos, como las circunferencias S_n son tangentes entre ellas y también tangentes a las rectas que definen a la banda B, entonces $f^{-1}(S_n)$ serán todas circunferencias tangentes entre ellas y también tangentes a las circunferencias C_1 y C_2 en la región deseada, y así se muestra la primera parte.

Los puntos de tangencia de las circunferencias S_n están siempre en la recta $\text{Re}(z)=\frac{3}{2}$, y como f^{-1} manda rectas en circunferencias, todos los puntos de tangencia de las $f^{-1}(S_n)$ estarán también en una misma circunferencia.

3.2.18. Sea $f(z)=a(z-b)/(z-d)$. Muestra lo siguiente.
$a)$ Las circunferencias que pasan por los puntos b y d son transformadas en líneas rectas que pasan por el origen.
$b)$ Las circunferencias de *Apolonio*, con ecuación $|\frac{z-b}{z-d}|=\frac{r}{|a|}$, son transformadas en circunferencias centradas en 0 y radio r.

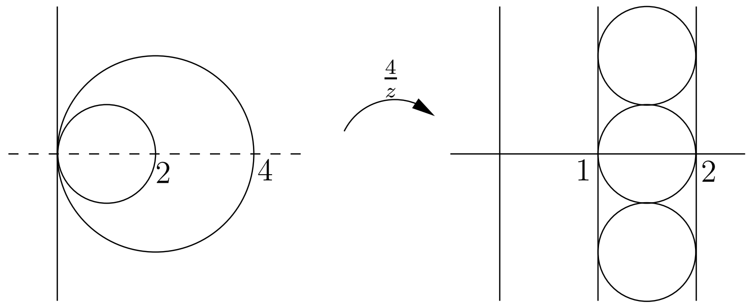


Figura 3.2: La imagen de la función $\frac{4}{z}$.

c) Bosqueje y verifique que estas circunferencias tanto como sus imágenes se intersecan ortogonalmente.

Solución. a) Para circunferencias que pasan a través de b y d, al aplicar la transformación del problema, tenemos

$$f(b) = a\left(\frac{b-b}{b-d}\right) = 0$$

y $f(d) = \infty$. Así, las imágenes de circunferencias que pasan por b y d, son circunferencias que pasan por el 0 y el ∞, es decir, son líneas rectas que pasan por el origen.

b) Consideremos el módulo de la función f para ver como transforma la función f a las circunferencias de Apolonio,

$$|f(z)| = \left|a\left(\frac{z-b}{z-d}\right)\right| = |a|\left|\frac{z-b}{z-d}\right| = |a|\frac{r}{|a|} = r.$$

Por lo tanto, $|f(z)| = r$, esto afirma, que las circunferencias de Apolonio son transformadas en circunferencias de radio r, centradas en el origen.

c) Para verificar que sus imágenes se intersecan ortogonalmente es claro, ya que las circunferencias en a) son transformadas en rectas que pasan por el origen, y las circunferencias en b) son transformadas en circunferencias centradas en el origen, entonces, una recta y una circunferencia centrada en el origen, siempre se intersecan ortogonalmente.

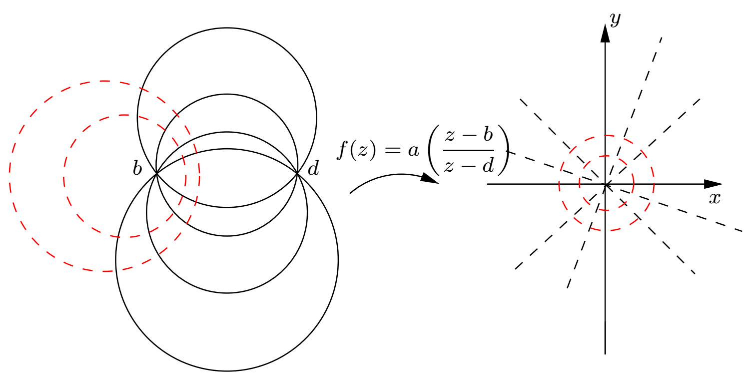


Figura 3.3: La imagen bajo f de circunferencias que pasan por dos puntos fijos b y d.

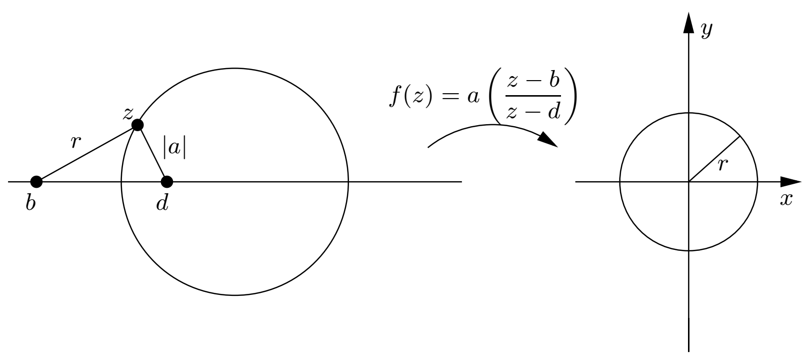


Figura 3.4: La imagen bajo f de las circunferencias de Apolonio.

3.3. Aplicaciones de transformaciones conformes a la física

En esta sección se verán aplicaciones de las dos secciones anteriores, 3.1 y 3.2, a problemas de conducción de calor, de potencial eléctrico y de hidrodinámica.

Los problemas de Dirichlet y de Neumann

Recordemos que una función $u(x, y) : G \to \mathbb{R}$ es armónica en una región G si satisface la *ecuación de Laplace* en A, esto es, para toda z en G se tiene que

$$\nabla^2 u(z) = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0.$$

Para los problemas de física, usualmente se añaden condiciones en la frontera.

Al problema de encontrar una función armónica u, con $\partial u/\partial n$ especificada en la frontera, se le conoce como *problema de Neumann*. Un detalle importante a tomar en cuenta, es que no podemos especificar $\Phi = \partial u/\partial n$ arbitrariamente, ya que se puede mostrar que siempre se cumple que

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

donde γ es la frontera de G. Cabe añadir que la solución al problema de Neumann en una región acotada y simplemente conexa es única salvo por suma de constantes.

El problema de Dirichlet habla de encontrar una función armónica en una región A cuyos valores estén especificados en la frontera de G (véase el apartado del problema de Dirichlet para el disco y la fórmula de Poisson en la sección 2.5 de [8]).

El método de solución para ambos problemas es el siguiente. Consideremos el semiplano superior y el problema de encontrar una función armónica que tenga los siguientes valores en la frontera: c_0 en $(-\infty, x_1)$, c_1 en (x_1, x_2), $\ldots$ y c_n en (x_n, ∞), donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ son puntos en el eje real. La solución está dada por

$$u(x,y) = c_n + \frac{1}{\pi}[(c_{n-1} - c_n)\theta_n + \cdots + (c_0 - c_1)\theta_1], \tag{3.1}$$

donde θ_i es el ángulo que hace el segmento de recta que une a (x,y) con $(x_i, 0)$ en $\mathbb{C}$, con el segmento (x_i, c_i).

Conducción de calor

Un ejemplo sobre la conducción de calor, que está relacionado con las ideas anteriores, es considerar una región bidimensional con temperatura T fija, por ejemplo, fijándola en las paredes (digamos con un dispositivo de calefacción o enfriamiento) o aislándolas (este último caso quiere decir que la temperatura no fluye a través de la frontera), y de ser el caso, entonces T es armónica.

Potencial eléctrico

Se sabe que si un potencial eléctrico Φ está determinado por cargas eléctricas estáticas, entonces Φ satisface la ecuación de Laplace, es decir, es armónica, y junto con su conjugada Ψ cumplen que las líneas de flujo (líneas donde Φ es constante) y las líneas equipotenciales (líneas donde Ψ es constante) se intersectan ortogonalmente.

Hidrodinámica
Dado un fluido viscoso e incomprensible, la aplicación en esta sección es analizar su campo de velocidades $V(x, y)$. Incomprensible quiere decir que div $V = 0$, suponemos también que V es de circulación libre, y entonces su potencial de velocidad Φ cumple que $V =$ grad Φ, y por ende es armónica.
El conjugado Ψ de esta Φ es llamada función de corriente, pues las líneas donde Ψ es constante se interpretan como las líneas en las que se mueven las partículas del fluido. En este caso, la condición sobre la frontera es que V debe ser paralela a la frontera, es decir, $\partial\Phi/\partial n = 0$, regresando así al problema de Neumann, por lo que es natural transformar la región en el plano superior, y usar la solución $\Phi(x, y) = \alpha x$, con α real y que representa la velocidad al infinito.

Ahora veamos los siguientes problemas.

3.3.1. Encuentre una fórmula para determinar la temperatura en la región ilustrada en la figura 3.5. (*Sugerencia:* considere la función $z \to \operatorname{sen} z$.)

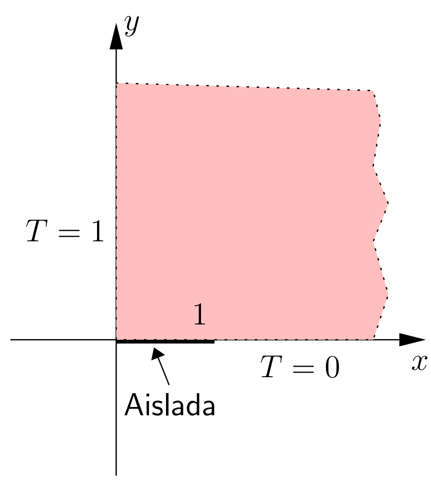


Figura 3.5: Región considerada en problema **3.3.1.**

Solución. Por tener una porción de la frontera donde $\partial T/\partial n = 0$ (aislada) y por la sugerencia, transformemos la región considerada en una semibanda con la función $\operatorname{sen}^{-1}(z)$. Por (xii) en la lista de transformaciones comunes, vemos que la región se

transforma en la banda $0 < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{2}$, $\text{Im}(z) > 0$, y aquí, la semirecta $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) > 0$ tiene temperatura $T = 1$, mientras que la semirecta $\text{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$, $\text{Im}(z) > 0$ tiene temperatura $T = 0$, por lo que, tomando $z = x + iy$, por inspección, tenemos que $T_0(x, y) = 1 - \dfrac{2}{\pi}x$. Luego, nuestra respuesta es $T(x, y) = T_0(\text{sen}^{-1}(z)) = 1 - \frac{2}{\pi}\text{Re}(\text{sen}^{-1}(z))$.
Para encontrar $\text{Re}(\text{sen}^{-1}(z))$ consideremos $w = u + iv$ tal que $w = \text{sen}^{-1}(z)$, así, $z = \text{sen}(w)$, es decir, $x + iy = \text{sen}(u + iv) = \text{sen}(u)\cosh(v) + i\cos(u)\text{senh}(v)$, de donde obtenemos que la parte real y la parte imaginaria son $x = \text{sen}(u)\cosh(v)$, $y = \cos(u)\text{senh}(v)$.
Ahora bien, de estas ecuaciones, tenemos que $K = (x + 1)^2 + y^2$ es igual a

$$\begin{aligned}
K &= \text{sen}^2(u)\cosh^2(v) + 2\text{sen}(u)\cosh(v) + 1 + \cos^2(u)\text{senh}^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u)\cosh^2(v) + 2\text{sen}(u)\cosh(v) + 1 + \left[1 - \text{sen}^2(u)\right]\text{senh}^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u)\cosh^2(v) + 2\text{sen}(u)\cosh(v) + 1 + \text{senh}^2(v) - \text{sen}^2(u)\text{senh}^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u)\left[\cosh^2(u) - \text{senh}^2(u)\right] + 2\text{sen}(u)\cosh(v) + \cosh^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u) + 2\text{sen}(u)\cosh(v) + \cosh^2(v) \\
&= [\text{sen}(u) + \cosh(v)]^2
\end{aligned}$$

y $L = (x - 1)^2 + y^2$ es igual a

$$\begin{aligned}
L &= \text{sen}^2(u)\cosh^2(v) - 2\text{sen}(u)\cosh(v) + 1 + \cos^2(u)\text{senh}^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u)\cosh^2(v) - 2\text{sen}(u)\cosh(v) + 1 + \left[1 - \text{sen}^2(u)\right]\text{senh}^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u)\cosh^2(v) - 2\text{sen}(u)\cosh(v) + 1 + \text{senh}^2(v) - \text{sen}^2(u)\text{senh}^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u)\left[\cosh^2(u) - \text{senh}^2(u)\right] - 2\text{sen}(u)\cosh(v) + \cosh^2(v) \\
&= \text{sen}^2(u) - 2\text{sen}(u)\cosh(v) + \cosh^2(v) \\
&= [\text{sen}(u) - \cosh(v)]^2 .
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\text{sen}(u) + \cosh(v) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}, \quad \text{sen}(u) - \cosh(v) = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Sumando estas últimas 2 identidades, se obtiene que

$$2\text{sen}(u) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Por último, despejando $u = \text{Re}(\text{sen}^{-1}(z))$, se tiene que

$$u = \text{sen}^{-1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2})\right].$$

Concluimos que la temperatura en términos de x e y es

$$T(x, y) = 1 - \frac{2}{\pi}\text{sen}^{-1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2})\right].$$

3.3.2. Encuentre el potencial eléctrico en la región ilustrada en la figura 3.6.

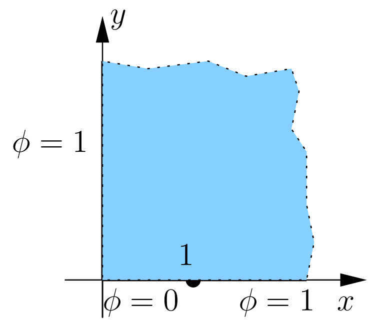


Figura 3.6: Encuentre ϕ para esta región.

Solución. Usaremos el procedimiento general para resolver el problema de Dirichlet, transformando la región dada en la figura 2.6 en el semiplano superior. En este caso podemos ocupar la transformación $z \mapsto z^2$. Ahora, de la fórmula de la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior (3.1), tenemos que

$$\phi_0(x, y) = c_2 + \frac{1}{\pi}[(c_1 - c_2)\theta_2 + (c_0 - c_1)\theta_1],$$

con $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$, ya que la carga que va en la parte Re$(z) < 0$ es 1, la que va en $(0, 1)$ es 0, y la correspodiente a $1 <$ Rez es igual a 1. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi_0(x, y) &= 1 + \frac{1}{\pi}[-\theta_2 + \theta_1] \\
&= 1 + \frac{1}{\pi}[-\text{arg}(z - 1) + \text{arg}(z)] \\
&= 1 + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x - 1}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución en la región dada es $\phi(x, y) = \phi_0(f(x, y))$, donde $f(x, y) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = (x^2 - y^2, 2xy)$, es decir

$$\phi(x, y) = 1 + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}\right).$$

3.3.3. Suponga que una carga puntual de $+1$ se localiza en $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ y que los ejes real positivo e imaginario positivo (las fronteras del primer cuadrante $A = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) > 0\}$) son conductores conectados a tierra, mantenidos a potencial 0. Encuentre el potencial en cualquier punto $z \neq z_0$ dentro de la región A.

Solución. Sabemos que la función $u(z) = \frac{1}{2\pi}\log|z|$ es una función armónica que representa el potencial en el disco unitario con carga puntual $+1$ en 0 y potencial 0 sobre la frontera del disco.

Sabemos que bajo z^2, la región A es enviada al semiplano superior $\mathbb{H}^+$, y a su vez $\mathbb{H}^+$, bajo la transformación de Cayley, $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$, es enviado al disco unitario con $i \to 0$, por lo que la transformación $S(z) = \frac{z^2-i}{z^2+i}$ envía A en el disco unitario de forma conforme y además, $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \to 0$. De esta forma, la función buscada es

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z^2-i}{z^2+i}\right|.$$

Capítulo 4

Desarrollo adicional de la teoría

En este capítulo continuamos con el estudio de la teoría de las funciones analíticas, donde las principales herramientas que usaremos son las series de Taylor y el teorema del residuo.

4.1. Continuación analítica

La motivación principal de esta sección es tratar de hacer el dominio de una función analítica lo más grande que sea posible, esto se conoce como continuación analítica. Existen varios resultados acerca del tema, de los cuales aquí veremos dos de los más importantes: el teorema de identidad y el principio de reflexión de Schwarz. Investigación adicional en la teoría nos lleva al teorema de monodromía y al concepto de superficie de Riemann. El primer resultado acerca de continuación analítica es el teorema de identidad.

Principio de continuación analítica o teorema de identidad. [Capítulo 8, [9]]. *Sean f y g funciones analíticas en una región G. Suponga que existe una sucesión z_1, z_2, z_3, ... de puntos distintos de G que converge a $z_0 \in G$, tal que $f(z_n) = g(z_n)$, para toda $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $f = g$ en todo G.*
La conclusión es válida, en particular, si f y g coinciden en alguna vecindad de algún punto de G.

El otro resultado importante acerca de continuación analítica es el siguiente.

Principio de reflexión de Schwarz. [Capítulo IX, [3]]. *Sea G una región en el semiplano superior cuya frontera, ∂G, intersecta al eje real en un intervalo $[a,b]$ (o en la unión finita de intervalos ajenos). Sea f analítica en G y continua en $G \cup (a,b)$. Sea $\bar{G} = \{z \,:\, \bar{z} \in G\}$, la reflexión de G, y defina g en $\bar{G}$ como $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Si además f es real en (a,b), entonces, g es analítica y es la única continuación analítica de f en $G \cup (a,b) \cup \bar{G}$.*

Existen otros métodos de continuación analítica, por ejemplo por continuidad usando el teorema de Morera, o usando series de potencias a lo largo de curvas. Está última técnica nos lleva a lo que se enuncia a continuación.

Principio de monodromía. [Capítulo 8, [1]]. *Sea G una región simplemente conexa y sea $z_0 \in G$. Sea f analítica en una vecindad de z_0. Suponga que f puede ser continuada analíticamente a lo largo de cualquier arco que une a z_0 con cualquier otro punto $z \in G$. Entonces, esta continuación define una continuación analítica (univaluada) de f en G.*

Analizando la continuación analítica en regiones que no son simplemente conexas, por ejemplo de funciones com $\log$, nos lleva al concepto de superficie de Riemann, introducido por Bernhard Riemann en 1851, ver capítulo IX en [3].

En los ejercicios a continuación, se aplicarán algunos métodos de continuación analítica mencionados en esta sección.

4.1.1. Sea $h(x)$ una función de variable real $x \in \mathbb{R}$. Suponga que h se puede escribir como $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la cual converge para todo x en el intervalo $(-\eta, \eta)$ alrededor de 0. Demuestre que h es la restricción de alguna función analítica en una vecindad de 0.

Solución. Supongase que $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente en $(-\eta, \eta)$, entonces la sucesión $\{a_n x^n\} \to 0$, luego $\{|a_n x^n|\} \to 0$ para cada $x \in (-\eta, \eta)$.

Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, veremos que para $0 < r < \eta$, la serie converge absolutamente en el disco $|z| \leq r$. Sea s tal que $r < s < \eta$, como $|a_n s^n|$ está acotada, digamos por M, entonces

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n = |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq M q^n,$$

con $q = \frac{r}{s} < 1$. Luego por el criterio de comparación se tiene que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente en $|z| \leq r$. Como $r < \eta$ es arbitrario, entonces se tiene que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es convergente en $|z| < \eta$, luego es una función analítica que extiende a $h(x)$.

4.1.2. Sea f analítica y no idénticamente 0 en una región G. Muestre que si $f(z_0) = 0$, entonces existe un entero k tal que $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
Solución. Sea $z_0 \in G$, como f es analítica en G, tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0 y como $f(z_0) = 0$, se tiene que el desarrollo es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Ahora bien, dado que f no es idénticamente 0 en G, no todos los coeficientes $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ son iguales a 0, sea k el menor entero positivo tal que $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$, lo cual es equivalente a tener $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, de donde tenemos por hipótesis que $f(z_0) = 0$ y por la definición de k que, $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$.

4.1.3. Formule el principio de reflexión de Schwarz para funciones armónicas.
Solución. Sea G una región en $\mathbb{H}^+$ tal que $\partial G \cap \mathbb{R} = [a, b]$. Sea u una función armónica en $G \cup [a, b]$. Sea $\bar{G}$ la reflexión de G como en el principio de reflexión de Schwarz, entonces definimos $w : G \cup [a, b] \cup \bar{G} \to \mathbb{R}$, como la función $w(z) = u(z)$ si $z \in G \cup [a, b]$; $w(z) = u(\bar{z})$ si $z \in \bar{G}$.
Notemos que si $z \in G \cup [a, b]$, w es armónica por ser igual a la función armónica u. Ahora, si $z = x + iy \in \bar{G}$, entonces $w(z) = u(x, -y)$, de donde es fácil ver que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{z}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\bar{z}) = 0.$$

Por lo tanto, w es una extensión de la función armónica u al conjunto $G \cup [a, b] \cup \bar{G}$.

4.1.4. Discuta la superficie de Riemann para $\sqrt{z^2 - 1}$.
Solución. Consideremos las siguientes funciones $f_1(z) = z^2 - 1$, $f_2(z) = \sqrt{z}$ y la composición de éstas es $f(z) = f_2(f_1(z)) = \sqrt{z^2 - 1}$. Sea $w \in \mathbb{C}$, consideremos $-\sqrt{w}, \sqrt{w} \in \mathbb{C}$, fijando la rama principal de $\log$; por otro lado, existen puntos diferentes $a_w, b_w \in \mathbb{C}$, tales que son la solución de la ecuación $f_1(z) = z^2 - 1 = w$, es decir, $a_w^2 - 1 = w$, $b_w^2 - 1 = w$.

Denotemos a $S_{\sqrt{z}}$ como la superficie de Riemann de $\sqrt{z}$. Ahora, como $S_{\sqrt{z}}$ consiste de dos copias del plano complejo, unidos por el origen, entonces a a_w lo podemos enviar a una de estas copias del plano, al punto w, y al punto b_w lo enviamos a la otra copia, al punto $w' = w$. Posteriormente, la transformación $\sqrt{z}$, nos lleva esos dos puntos a una sola copia de $\mathbb{C}$, de hecho a los puntos $-\sqrt{w}, \sqrt{w}$. Así $f(a_w) = \sqrt{w}$, $f(b_w) = -\sqrt{w}$. Por lo tanto la superficie de Riemann para $\sqrt{z^2-1}$ es una sola hoja, es decir el plano complejo.

4.1.5. Discuta la relación entre la proposición 2.2.6. en [8] y el principio de monodromía.
Solución.
Proposición 2.2.6. Sea G una región simplemente conexa tal que $0 \notin G$. Entonces existe una función analítica $F(z)$, única bajo la adición de múltiplos de $2\pi i$, tal que $e^{F(z)} = z$.
Sea z_0 un punto en G, por ser G abierto, existe un $r > 0$ pequeño tal que $\mathbb{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ esta contenido en G. Por el mismo argumento de la demostración de la proposición 2.2.6 en [8], existe una función analítica $f(z)$ definida en $\mathbb{D}_r(z_0)$ tal que $e^{f(z)} = z$, para toda z in $\mathbb{D}_r(z_0)$.
Por el principio de monodromía podemos extender f a todo G, a una función analítica y univaluada F que satisface que $e^{F(z)} = z$, para todo z en G.

4.1.6. Muestre que si f es una transformación analítica, uno a uno y sobre de $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$, el cual se extiende a una función continua, uno a uno y sobre de $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq R_1\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : r_2 \leq |z| \leq R_2\}$, entonces $R_1/r_1 = R_2/r_2$. De una descripción de tales funciones.
Solución. Por el ejercicio resuelto 6.1.14 en [8], acerca de transformaciones conformes entre anillos, tenemos que si $0 < r < 1$ y $0 < R < 1$ y $g : A_r \to A_R$ es una función biyectiva analítica, donde $A_j = \{z \in \mathbb{C} : j < |z| < 1\}$, para $j = r, R$, la cual se puede extender de manera continua y biyectiva a las fronteras de los dos conjuntos, entonces se concluye que $r = R$ y que g solo puede ser de dos tipos

$$g(z) = e^{i\theta} z \quad \text{o} \quad g(z) = re^{i\theta}/z.$$

Para nuestro problema, consideremos las funciones $g_1(z) = z/R_1$ y $g_2(z) = z/R_2$, y sea $g : A_{r_1/R_1} \to A_{r_2/R_2}$ dada por $g = g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$, la cual cumple todas las condiciones del ejercicio resuelto. Luego, se tiene entonces que $r_1/R_1 = r_2/R_2$ y que

$$g(z) = e^{i\theta} z \quad \text{o} \quad g(z) = \frac{r_1}{R_1} e^{i\theta}/z,$$

de donde

$$f(z) = \frac{R_2}{R_1} e^{i\theta} z \quad \text{o} \quad f(z) = R_2 r_1 e^{i\theta}/z.$$

4.2. El teorema de Rouché y el principio del argumento

En esta sección se presentan algunas propiedades de las funciones analíticas que nos permitirán, entre otras cosas, localizar raíces de ecuaciones dentro de ciertas curvas cerradas. La herramienta principal será el teorema del residuo.

Empezamos con un resultado que nos permite contar las raíces de una ecuación en el interior de una curva cerrada.

Teorema del conteo de raíces y polos. [Capítulo 13, [9]]. *Sea f una función analítica en una región G excepto para los polos b_1, b_2, ..., b_m y con ceros en a_1, a_2, ..., a_n, contados con su multiplicidad (esto es, si b_i es un polo de orden k, b_i aparece en la lista k veces y similarmente para los ceros a_j). Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en G y que no pasa através de ninguno de los puntos a_j o b_i. Entonces*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) - \sum_{i=1}^{m} I(\gamma, b_i) \right].$$

Cuando en la fórmula anterior la curva es cerrada simple se obtiene la identidad simplificada

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(Z_f - P_f),$$

donde Z_f es el número de ceros de f dentro de γ y P_f es el número de polos de f dentro de γ, cada uno contado con sus multiplicidad.

Una consecuencia útil del teorema de conteo de raíces y polos es el Principio del argumento. Para enunciarlo, necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.2.1 *Sea f una función analítica en una región G y sea γ una curva cerrada en G, homotópica a un punto en G y sin pasar por ningún cero de f. Entonces, definimos el cambio de argumento de $f(z)$, conforme z se mueve sobre todo las curva γ, como*

$$\Delta_\gamma \mathit{arg}\, f = 2\pi \cdot I(f \circ \gamma, 0).$$

Ahora si podemos enunciar el principio del argumento.

Principio del argumento. [Capítulo V, [3]]. *Sea f una función analítica en una región G excepto para los polos b_1, b_2, ..., b_m y tal que f tiene ceros en a_1, a_2, ..., a_n, contados con su multiplicidad. Si γ es una curva cerrada homotópica a un punto en G y que no pasa através de ninguno de los puntos a_j o b_i, entonces*

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) - \sum_{i=1}^{m} I(\gamma, b_i) \right].$$

Resaltamos la siguiente conección entre los dos resultados anteriores:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i\Delta_\gamma \arg f.$$

Una consecuencia del principio del argumento es el siguiente resultado que tiene varias aplicaciones que se verán en el resto del capítulo.

Teorema de Rouché. [Capítulo 13, [9]]. *Sean f y g funciones analíticas en una región G excepto para un número finito de ceros y polos en G. Sea γ una curva cerrada en G homotópica a un punto y que no pasa a través de ningún cero o polo de f o g. Suponga que en γ*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Entonces

(*i*) $\Delta_\gamma \arg f = \Delta_\gamma \arg g$;

(*ii*) $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, *donde* $Z_f = \sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j)$, *y a_j son los ceros de f, contados con su multiplicidad, y P_f, Z_g, P_g están definidos similarmente.*

Una de las aplicaciones del teorema de Rouché es el siguiente resultado.

Teorema de Hurwitz. [Capítulo VII, [3]]. *Sea f_n una sucesión de funciones analíticas en una región G, que converge uniformemente a f en cualquier disco cerrado en G. Si además f no es idénticamente cero y $z_0 \in G$ es tal que existe una sucesión $\{z_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ y tal que para alguna $N \in \mathbb{N}$ y para $n \geq N$, $f_n(z_n) = 0$, entonces $f(z_0) = 0$ (es decir, si z_0 es el límite de ceros de las funciones f_n, entonces z_0 es cero de f).*

Como una consecuencia del teorema de Hurwitz, se tiene que el siguiente resultado.

Corolario 4.2.2 *Sea f_n una sucesión de funciones analíticas en una región G, la cual converge uniformemente a f en los discos cerrados en G. Si cada f_n es inyectiva en G y f no es constante, entonces f es inyectiva en G.*

Otras de las aplicaciones del teorema de Rouché nos permite mostrar las siguientes propiedades de las funciones analíticas inyectivas.

Proposición 4.2.3 *Si $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica e inyectiva localmente en una región G, entonces $f'(z_0) \neq 0$ para toda $z_0 \in G$. Se sigue, por el teorema de la función inversa, que $f(G)$ es abierto. Si además f es inyectiva en G, entonces f^{-1} es una función analítica de $f(G)$ en G.*

Teorema de la función inyectiva. *Sea f una función analítica en una región G y sea γ una curva cerrada homotópica a un punto en G. Suponga que $I(\gamma, z) = 0$ o 1. Defina el conjunto $B = \{z \in G : I(\gamma, z) \neq 0\}$ (el interior de γ). Si f es tal que cada punto de $f(B)$ tiene índice 1 con respecto a la curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, entonces f es inyectiva en B.*

Veamos a continuación aplicaciones a los resultados anteriores en los siguientes problemas.

4.2.1. ¿Cuántos ceros tiene $z^4 - 5z + 1$ en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$?
Solución. Sea $f(z) = z^4 - 5z + 1$, la cual es una función analítica en todo $\mathbb{C}$. Veamos primero cuántos ceros tiene f dentro de $\mathbb{D}_2$, el disco de radio 2 con centro en 0. Consideremos la función $g(z) = z^4$, la cual tiene 4 ceros (contados con multiplicidad) dentro de $\mathbb{D}_2$, además

$$|f(z) - g(z)| = |-5z + 1| \leq |5z| + 1 = 11 < 16 = |z^4| = |g(z)|,$$

para puntos z en la frontera de $\mathbb{D}_2$. Por el teorema de Rouché, concluimos que f tiene sus 4 ceros dentro del disco $\mathbb{D}_2$.
Ahora veamos cuántos ceros tiene f dentro del disco unitario. Para ellos consideremos la función $h(z) = -5z$, la cual tiene un cero dentro del disco unitario. Además

$$|f(z) - h(z)| = |z^4 + 1| \leq |z^4| + 1 = 2 < 5 = |-5z| = |h(z)|,$$

para puntos z en la frontera del disco unitario (de hecho la desigualdad anterior también implica que f no tiene ceros sobre la frontera del disco unitario). Por el teorema de Rouché, f tiene un cero dentro del disco unitario, por lo cual podemos concluir que f tiene tres ceros en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

4.2.2. Muestre que si $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces debe haber al menos un punto z con $|z| = 1$ y $|p(z)| \geq 1$. (Sugerencia: si $|p(z)| < 1$ en todo punto del conjunto $\{z : |z| = 1\}$, ¿cuántos ceros tiene $a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$?)
Solución. Supongamos que $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ cumple que $|p(z)| < 1$ en $\{z : |z| = 1\}$.
Recordemos que el polinomio $a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ tiene $n-1$ ceros contados con multiplicidades. Consideremos $q(z) = p(z) - z^n$ y $f(z) = -z^n$, entonces para z con $|z| = 1$ se tiene que

$$|q(z) - f(z)| = |p(z) - z^n + z^n| = |p(z)| < 1 = |f(z)|.$$

Por lo que, tenemos las condiciones del teorema de Rouché, que muestra que $q(z)$ tiene n ceros en el interior de $\{z : |z| = 1\}$ pero esto no puede suceder, ya que $q(z)$ tiene a lo más $n-1$ ceros. Por lo tanto debe haber al menos un punto z con $|z| = 1$ y $|p(z)| \geq 1$.

4.2.3. Muestre que la ecuación $e^z = 5z^3 - 1$ tiene tres soluciones en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Solución. Sean $f(z) = e^z - 5z^3 + 1$, $g(z) = -5z^3 + 1$, entonces g tiene 3 raíces. Vamos a probar que f y g tienen el mismo número de raíces en el disco unitario $\mathbb{D}$.
Para esto, bastará mostrar que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$, para $|z| = 1$. Notemos que

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^x \leq e, \text{ si } z = x + iy, \text{ pues } |x| \leq |z| = 1.$$

También

$$|g(z)| = |-5z^3 + 1| = |5z^3 - 1| \geq 5|z|^3 - 1 = 4, \text{ pues } |z| = 1.$$

Por lo tanto

$$\frac{|f(z) - g(z)|}{|g(z)|} \leq \frac{e}{4} < 1, \text{ de donde } \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)| \text{ , para } |z| = 1;$$

luego, como las raíces de $g(z) = -5z^3 + 1$ cumplen que $5|z|^3 = 1$, es decir $|z| = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} < 1$, entonces sus 3 raíces están dentro del disco unitario, y por el teorema de Rouché, f tiene el mismo número de raíces dentro del disco unitario que g, es decir, $e^z = 5z^3 - 1$ tiene tres soluciones en el disco unitario.

4.2.4. Sean $g_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ y $\mathbb{D}_R(0)$ el disco de radio $R > 0$ con centro en 0. Muestre que para n suficientemente grande, g_n no tiene ceros en $\mathbb{D}_R(0)$.
Solución. Es claro que g_n es la suma parcial de orden n de la serie de Taylor de la función e^z, por lo cual g_n converge uniformemente a e^z en cualquier disco cerrado en el plano complejo. Además, se tiene que la función exponencial nunca se anula.

Si γ es la frontera de $\mathbb{D}_R(0)$, como la función exponencial e^z no se anula en $\mathbb{C}$, y particularmente en γ no se anula, por el teorema de Hurwitz, se tiene que existe una $N(\gamma) \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N(\gamma)$, entonces g_n tiene el mismo número de ceros que e^z dentro de $\mathbb{D}_R(0)$, es decir, ninguno, lo cual muestra la afirmación del problema.

Segunda solución. Sea $\epsilon =$mín $\{|e^z| : |z| = R\}$, como $e^z \neq 0$, entonces $\epsilon > 0$. Como los polinomios $g_n(z)$ son los polinomios de Taylor de la función exponencial, estos convergen uniformemente a e^z en $|z| \leq R$; en particular existe N número natural tal que $|g_n(z) - e^z| \leq |e^z|$, para toda z con $|z| = R$ y para toda $n \geq N$.
Por el teorema de Rouché $g_n(z)$ y e^z tienen el mismo número de ceros en el disco $\mathbb{D}_R(0)$, pero como e^z nunca se anula, no hay ceros de $g_n(z)$ con $|z| < R$.

4.2.5. Proporcione los detalles de la siguiente demostración del teorema de Rouché: Bajo las hipótesis del teorema de Rouché, la función $H(s,t) = sg(\gamma(t)) + (1-s)f(\gamma(t))$ es una homotopía de curvas cerradas entre las curvas $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$ en $\mathbb{C} \setminus 0$. Se sigue que $I(f \circ \gamma, 0) = I(g \circ \gamma, 0)$. La conclusión del teorema de Rouché se sigue de esto y del principio del argumento.
Solución. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto. Por la definición del cambio de argumento 4.2.1 para f y g, puesto que estas funciones no tienen polos en γ, tenemos que

$$i\Delta_\gamma \text{arg} f = 2\pi i \cdot I(f \circ \gamma, 0) = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z}$$
$$i\Delta_\gamma \text{arg} g = 2\pi i \cdot I(g \circ \gamma, 0) = \int_{g\circ\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Como la función $H(s,t) = sg(\gamma(t)) + (1-s)f(\gamma(t))$ es una homotopía entre las curvas $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$, esto implica por el teorema de deformación 2.3.12 en [8] que,

$$\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{g\circ\gamma} \frac{dz}{z},$$

de aquí se sigue que $\Delta_\gamma \text{arg} f = \Delta_\gamma \text{arg} g$, esto termina la parte (i) del teorema de Rouché.

Para la parte (ii), el principio del argumento nos dice que

$$\Delta_\gamma \text{arg} f = 2\pi \left[\sum I(\gamma, a_i) - \sum I(\gamma, b_j)\right] = 2\pi(Z_f - P_f),$$

y análogamente para $\Delta_\gamma \text{arg} g$, por lo que $Z_f - P_f = Z_g - P_g$.

4.2.6. Proporcione los detalles de la siguiente demostración del teorema de Rouché (debida a Caratheodory). La función

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\lambda g'(z) + (1-\lambda) f'(z)}{\lambda g(z) + (1-\lambda) f(z)} dz$$

es una función continua de λ, para $0 \leq \lambda \leq 1$. Pero su valor es siempre un entero y, por lo tanto,

$$Z_f - P_f = F(0) = F(1) = Z_g - P_g.$$

Solución. Sean f, g funciones analíticas en una región A salvo en un número finito de polos y tales que f y g tienen un número finito de ceros. Sea γ una curva cerrada en A homotópica a un punto que no pase por ceros o polos de f o de g.
Consideremos la función $h(z) = \lambda g(z) + (1-\lambda)f(z)$ que es una función de variables z en A y λ en $[0,1]$, la cual es analítica en A (para cada λ fija). Además, para z en γ y λ en $[0,1]$, h no se anula. Como función de λ, $\lambda g(z) + (1-\lambda)f(z)$ es continua en $[0,1]$, para cualquier z.
La función de (z, λ)

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{\lambda g'(z) + (1-\lambda)f'(z)}{\lambda g(z) + (1-\lambda)f(z)},$$

es continua en γ x $[0,1]$, por lo que está bien definida la integral

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\lambda g'(z) + (1-\lambda)f'(z)}{\lambda g(z) + (1-\lambda)f(z)}dz,$$

que por el teorema de conteo de raíces y polos es igual a $Z_{F(\lambda)} - P_{F(\lambda)}$.
Pero $F(\lambda)$ es una función continua en un conjunto conexo $[0,1]$, que toma valores enteros, luego debe ser constante, en particular $F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z_f - P_f$ deberá ser igual a $F(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = Z_g - P_g$, lo que garantiza que $Z_f - P_f = Z_g - P_g$.

4.2.7. $a)$ Sea $f : U \to V$ analítica, inyectiva y sobre. Sea $w \in V$ y sea γ una circunferencia pequeña con centro en $z_0 \in U$. Utilice el ejercicio 11 de la sección 6.2 en [8][1], para demostrar que

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)z}{f(z)-w}dz$$

para w suficientemente cerca de $f(z_0)$.
$b)$ Explique el significado de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz.$$

[1] Con las mismas hipótesis para f en el teorema del conteo de raíces y polos, si h es analítica en la región G, entonces

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}h(z)dz = 2\pi i\left[\sum_{i=1}^{n} h(a_i)I(\gamma, a_i) - \sum_{k=1}^{m} h(b_k)I(\gamma, b_k)\right].$$

Solución. $a)$ Aplicamos el ejercicio 11, de la sección 6.2 en [8], a la función $f(z) - w$ y con $h(z) = z$. Como f es analítica, no tiene polos y como f es biyectiva, se tiene que la función $f(z) - w$ solo tiene un único cero, a saber, $z = f^{-1}(w)$. Luego, para w cerca de $f(z_0)$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)z}{f(z)-w}dz = h(f^{-1}(w)) = f^{-1}(w).$$

$b)$ En general, si f es una función como en el teorema del conteo de raíces y polos, recordando que $\frac{d}{dz}(\log(f(z)-w)) = \frac{f'(z)}{f(z)-w}$, entonces la expresión

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz$$

se puede ver igual a

$$\Delta_\gamma \log(f(z)-w) = \Delta_\gamma \log|f(z)-w| + i\Delta_\gamma \text{arg}(f(z)-w),$$

para γ un fragmento de curva lo suficientemente corta para que $f(\gamma)$ sea un segmento de curva contenida en un semiplano y así poder definir una rama de logaritmo. En general S es el número de soluciones de la ecuación $f(z) = w$, es decir, en lugar de medir el número de ceros, ahora mide cuántos puntos tomar el valor w. Para γ una curva cerrada, podemos hacer lo anterior a lo largo de partes cortas y sucesivas de la curva, usando apropiadas elecciones de la rama de logaritmo. Cuando regresamos al punto inicial, las contribuciones para $\Delta_\gamma \log|f(z)-w|$ tendrán que ser todas canceladas, pues sabemos que la integral tiene que ser igual a $i\Delta_\gamma\text{arg}(f(z)-w)$.

4.2.8. Suponga que $g_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1/(k!z^k)$ y sea $\varepsilon > 0$. Para n suficientemente grande, ¿todos los ceros de g_n están en el disco $\mathbb{D}_\varepsilon(0)$ de radio ε y centro en 0?
Solución. Sea $g(z) = e^{1/z}$ la cual sabemos que es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Además, la serie de Laurent de g esta dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!z^k},$$

donde la convergencia es absoluta fuera de cualquier disco con centro en 0 y de radio ε; y la convergencia es uniforme en anillos cerrados con centro en 0 y fuera de $\mathbb{D}_\varepsilon(0)$. Además, notamos que las funciones $g_n(z)$ son la sumas parciales de la serie de Laurent de g.
Si γ es la frontera de $\mathbb{D}_\varepsilon(0)$, tenemos que γ no pasa por ningún cero de $g(z)$ ya que esta función nunca se anula. En virtud del teorema de Hurwitz, se tiene que existe una

$N_\varepsilon(\gamma) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon(\gamma)$, entonces g_n tiene el mismo número de ceros que g en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_\varepsilon(0)$, que es ninguno, por lo tanto para n grande,

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! z^k}$$

tiene todos sus ceros, si es que existen, en $\mathbb{D}_\varepsilon(0)$.

Segunda solución. Sean

$$p_n(z) = g_n\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!},$$

desde luego w es cero de p_n si $\frac{1}{w}$ es cero de g_n. Dado $\varepsilon > 0$ al hacer $R = \frac{1}{\varepsilon}$, el problema **4.2.4** garantiza que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, no hay ceros de p_n en $\mathbb{D}_R(0)$, es decir, si w es cero de p_n, entonces $|w| \geq R$, luego $|\frac{1}{w}| \leq \frac{1}{R} = \varepsilon$, por lo que para $n \geq n_0$ los ceros de g_n están en el disco $\mathbb{D}_\varepsilon(0)$.

4.2.9. Localice los ceros del polinomio $z^4 - z + 5 = 0$.
Solución. Sean $g(z) = z^4$, $f(z) = z^4 - z + 5$ y $h(z) = 5$, así tenemos que

$$|f(z) - g(z)| = |-z + 5| \leq |z| + 5 < |g(z)|,$$

si $|z| = 2^{3/4}$, ya que $|z| + 5 = 2^{3/4} + 5 < 8 = |2^{3/4}|^4 = |g(z)|$. Dado que g no se anula en ninguna circunferencia de radio positivo, la desigualdad anterior muestra que f no se anula en circunferencias con radio mayor a $2^{3/4}$. El teorema de Rouché muestra entonces, que las 4 raíces de f están dentro del disco cerrado $|z| \leq 2^{3/4}$.
De la misma manera, si $|z| = 2^{1/4}$, entonces

$$|f(z) - h(z)| \leq |z|^4 + |z| < 2 + 2^{1/4} < 5 = |h(z)|.$$

Dado que h no se anula nunca, la desigualdad anterior muestra que f no se anula en circunferencias con radio menor a $2^{1/4}$. El teorema de Rouché muestra entonces, que las 4 raíces de f están fuera del disco de radio $2^{1/4}$.
De las ecuaciones de Vieta (ver [2]), sabemos también que todas las raíces de f suman 0, por no tener coeficiente cúbico, y el producto de las raíces es 5; además, dado que los coeficientes del polinomio f son reales, sabemos que las raíces vienen dadas en pares de complejos conjugados. Digamos que las raíces son w_1, $\bar{w}_1$, w_2 y $\bar{w}_2$, entonces $w_1 + \bar{w}_1 + w_2 + \bar{w}_2 = 0$.
Si hacemos $w_1 = x + iy$ y $w_2 = a + ib$, entonces la identidad anterior nos lleva a que $x = -a$, y entonces $y = \sqrt{x^2 - (1/4)x}$ y $b = \sqrt{x^2 + (1/4)x}$. Además, $|w_1|^2 |w_2|^2 = 5$, con $|w_1|^2 = 2x^2 - (1/4x)$ y $|w_2|^2 = 2x^2 + (1/4x)$.
Por todo lo anterior, se puede concluir que hay una raíz en cada cuadrante de $\mathbb{C}$, dos de estas raíces están sobre la misma circunferencia y las otras dos sobre otra

circunferencia diferente a la anterior. Además, del análisis realizado con el teorema de Rouché, sabemos también que están en el anillo $R = \{z \in \mathbb{C} : 2^{1/4} \leq |z| \leq 2^{3/4}\}$.

4.2.10. Sea f analítica dentro y sobre $|z| = R$ tal que $f(0) \neq 0$. Considere $M = \max$ $|f(z)|$ sobre $|z| = R$. Muestre que el número de ceros de f dentro de $|z| = R/3$ no excede a

$$\frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{M}{|f(0)|}.$$

Solución. Sean z_1, z_2, ..., z_n los ceros de f, contados con multiplicidades, dentro del disco con frontera $|z| = R/3$, es decir, se tiene que demostrar la desigualdad

$$n \leq \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{M}{|f(0)|}.$$

Consideremos la función $h(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}$, la cual es analítica ya que z_i son ceros de f y f es analítica sobre y dentro del disco con frontera $|z| = R$. Acotemos la función h para $|z| = R$. Notemos que si $|z| = R$, entonces $|z - z_i| \geq \frac{2}{3}R$, luego

$$|h(z)| \leq \frac{|f(z)|}{(\frac{2}{3}R)^n} \leq \frac{M}{(\frac{2}{3}R)^n}.$$

Luego, por el teorema del módulo máximo, se tiene que

$$|h(0)| = \frac{|f(0)|}{|z_1||z_2|\cdots|z_n|} \leq \frac{M}{(\frac{2}{3}R)^n}.$$

Por otro lado como $|z_i| \leq \frac{R}{3}$, es claro que

$$\frac{|f(0)|3^n}{R^n} \leq |h(0)| \leq \frac{M}{(\frac{2}{3}R)^n},$$

de donde $2^n \leq \frac{M}{|f(0)|}$, luego aplicando la función logaritmo real de ambos lados de la desigualdad, se obtiene el resultado.

4.2.11. ¿Cual es el disco más grande alrededor de $z_0 = 0$ sobre el cual la función $f(z) = z^2 + 3z$ es inyectiva?

Solución. Dado que $f'(z) = 2z+3$, el único punto donde la derivada se anula es $-3/2$, mostraremos que f es inyectiva en el disco $\mathbb{D}_R(0)$ con centro en 0 y radio $R = 3/2$. Suponga que $z_1 = Re^{i\theta}, z_2 = Re^{i\phi}$ están en la circunferencia frontera del disco, con $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$. Si $f(Re^{i\theta}) = f(Re^{i\phi})$, entonces se tiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned}
(Re^{i\theta})^2 + 3(Re^{i\theta}) &= (Re^{i\phi})^2 + 3(Re^{i\phi}) \\
\frac{9}{4}(e^{2i\theta} - e^{2i\phi}) &= \frac{9}{2}e^{i\phi} - \frac{9}{2}e^{i\theta} \\
\frac{9}{4}(e^{i\theta} + e^{i\phi})(e^{i\theta} - e^{i\phi}) &= \frac{9}{2}(e^{i\phi} - e^{i\theta}),
\end{aligned}$$

por lo que $e^{i\theta} - e^{i\phi} = 0$ o $e^{i\theta} + e^{i\phi} = -2$. En cada caso nos queda que $\theta = \phi$. Hemos mostrado entonces que la función es inyectiva en la frontera del disco $\mathbb{D}_{3/2}(0)$, por lo tanto, por el teorema de la función inyectiva, podemos concluir que f es inyectiva en $\mathbb{D}_{3/2}(0)$.

Segunda solución. Sea $f(z) = z^2 + 3z$, entonces se tiene que $f(z) = f(w)$ si y solo si $z^2 + 3z = w^2 + 3w$, de donde se obtiene que $(z - w)(z + w + 3) = 0$ o que $z - w = 0$ o $z + w + 3 = 0$. La función dejará de ser inyectiva cuando existan z, w con $z \neq w$ y $z + w + 3 = 0$.
Ahora si z esta en el disco $\mathbb{D}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, la función $w = -z - 3$, lo transforma en el disco $\mathbb{D}_r(-3)$, los dos discos son ajenos si $r \leq \frac{3}{2}$. Si $r > \frac{3}{2}$, entonces $z = -\frac{3}{2} + \epsilon$ y $w = -\frac{3}{2} - \epsilon$ están en el disco $\mathbb{D}_r(0)$, para alguna $\epsilon > 0$ y $z + w + 3 = 0$, por lo que $f(z) = f(w)$ y entonces f deja de ser inyectiva.

4.2.12. Sea f analítica en $\mathbb{C}$ y sea $|f(z)| \leq 5\sqrt{|z|}$ para toda $|z| \geq 1$. Demuestre que f es constante.
Solución. Como f es analítica en $\mathbb{C}$, tiene serie de Taylor alrededor de $z = 0$ que converge en todo el plano complejo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ donde } a_n = \frac{f^n(0)}{n!}, \text{ para toda } n \geq 0.$$

Por la fórmula integral de Cauchy, con $\gamma = Re^{it}$, $R > 1$, $t \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

de donde

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} \right| |iRe^{it} dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{R}}{R^{n+1}} R dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{5}{R^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} dt = \frac{5}{R^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Así pues, para $n \geq 1$

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{5}{R^{n-\frac{1}{2}}},$$

como R puede ser arbitrariamente grande, el coeficiente a_n se anula para $n \geq 1$, por lo que $f(z) = a_0$, es decir, la función f es constante.

4.3. Propiedades de las funciones analíticas como transformaciones

En esta sección se estudian propiedades locales de las funciones analíticas, con las cuales se pueden dar demostraciones adicionales del teorema de la función inversa, del teorema del módulo máximo y del teorema de la transformación abierta.

A grandes rasgos, el resultado principal de la sección es que si f es una función analítica en z_0, donde $f(z_0) = w_0$ con multiplicidad k, en el sentido de que $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden k en z_0, entonces f es una función k a uno en una vecindad de z_0.

Teorema de la forma local de una transformación. [Capítulo 6, [8]]. *Sea f una función analítica no constante en una región G y sea $z_0 \in G$. Suponga que $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden $k \geq 1$ en z_0. Entonces existe una $\eta > 0$ tal que para toda $\varepsilon \in (0, \eta]$, existe una $\delta > 0$ tal que si $|w - w_0| < \delta$, entonces $f(z) - w$ tiene exactamente k raíces (contadas con sus multiplicidades) en el disco $|z - z_0| < \varepsilon$. En efecto, existe una $\lambda > 0$ (probablemente menor que η) tal que para toda $\varepsilon \in (0, \lambda]$, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |w - w_0| < \delta$, entonces $f(z) - w$ tiene exactamente k raíces distintas en el disco $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

Veamos algunas aplicaciones de este resultado.

4.3.1. ¿Cuál es el disco más grande alrededor de $z_0 = 1$ en el cual $f(z) = e^z$ es inyectiva?
Solución. Dado que $f'(1) = e \neq 0$, por el teorema de la función inversa (ver por ejemplo [8]), existe un disco D_0 alrededor de $z_0 = 1$ en el cual f es inyectiva. Ahora bien, sabemos que $e^z = e^{z+2\pi ni}$, para toda $n \in \mathbb{Z}$, así, las partes imaginaria de dos puntos $z_1, z_2 \in D_0$, no deben diferir en más de 2π, esto quiere decir que $|z_1 - z_2| < 2\pi$, y como z_1 y z_2 son arbitrarios, se pueden elegir lo más alejados dentro del disco, es decir, el diámetro de D_0 es 2π, y por lo tanto su radio es π, por lo tanto, $D_0 = \mathbb{D}_\pi(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \pi\}$.
Para ver que es el disco más grande, basta revisar la demostración de que f es inyectiva ahí. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_\pi(1)$, tales que $f(z_1) = f(z_2)$, es decir $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2\pi ki$, con $k \in \mathbb{Z}$, pero como $|z_1 - z_2| < 2\pi$, entonces $k = 0$, y por lo tanto $z_1 = z_2$, es decir, f es inyectiva en $\mathbb{D}_\pi(1)$.

Segunda solución. Sabemos que $e^z = e^w$ si y solo si $z = w + i2\pi k$, para algún número entero k, lo que lleva a que e^z es inyectiva en bandas horizontales de la forma $B_a = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \text{ Im}z < a + 2\pi\}$. El disco abierto más grande con centro en $z_0 = 1$ que se puede meter en una de tales bandas es de radio π, y tal disco $\mathbb{D}_\pi(1)$

está contenido en $B_\pi = \{z \in \mathbb{C} : -\pi \leq \text{ Im} z < \pi\}$.

4.3.2. ¿Cual es el mayor disco centrado en $z_0 = 1$ en el cual la función $f(z) = z^3$ es inyectiva?

Solución. Sean $f(z) = z^3$, $z_0 = w_0 = 1$ y $g(z) = f(z) - w_0 = z^3 - 1$. Los ceros de $z^3 - 1$ son $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$, de éstos, solo uno pertenece a $\mathbb{D}_1(1) = \{z : |z-1| < 1\}$, que es el 1. $f'(z) = 3z^2 = 0$ solo tiene al 0 como solución y no está en D. Sin embargo, no podemos concluir que f es inyectiva en este disco, y en efecto no lo es, ya que $f(re^{i\pi/3}) = f(re^{-i\pi/3}) = -r^3$, para r suficientemente pequeña. Sin embargo vamos a mostrar que la función será inyectiva en cualquier disco centrado en 1, que pertenezca al sector angular limitado por dos rectas que pasan por el origen y que hacen ángulos de $\pm 60^\circ$ con el semieje real positivo.

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta}, z_2 = r_2 e^{i\phi}$ están en el disco de radio r alrededor de 1, con $0 < r < \sqrt{3}/2$, entonces $-\pi/3 < \theta, \phi < \pi/3$. Supongamos $f(r_1 e^{i\theta}) = f(r_2 e^{i\phi}) = z_1^3 = z_2^3$, entonces $r_1 = r_2$ y $e^{3i\theta} = e^{3i\phi}$, de donde $e^{3i(\theta-\phi)} = 1$, esta última ecuación se da si y solo si $3(\theta - \phi) = 2\pi n$, pero por la restricción de los ángulos esto no sucede dado que $\theta - \phi < 2\pi/3$, luego $3(\theta - \phi) < 2\pi$, por lo tanto $n = 0$, por lo que $\theta = \phi$. Hemos probado que la función es inyectiva en cualquier disco $\mathbb{D}_r(1)$, con $0 < r < \sqrt{3}/2$. Finalmente, podemos concluir entonces que el disco abierto más grande donde f es inyectiva es $\mathbb{D}_R(1)$, con $R = \sqrt{3}/2$.

4.3.3. Sea $u : G \to \mathbb{R}$ armónica y no constante en una región G. Demuestre que u es una transformación abierta.

Solución. Sea $U \subset G$ un conjunto abierto, se tiene que demostrar que $u(U)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Sea $s \in u(U)$, entonces veremos que existe $\epsilon > 0$, tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset u(U)$. Sea $z_0 \in U$ tal que $u(z_0) = s$. Por ser U abierto y u armónica en U, se tiene que existen $r > 0$ y $f : \mathbb{D}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ una función analítica, tales que $\mathbb{D}_r(z_0) \subset U$ y $f = u + iv$, es decir, $u = \text{Re} f(z)$ en $\mathbb{D}_r(z_0)$.

Por ser f una función analítica, se tiene que es abierta, es decir, si hacemos $\rho = r/2$, entonces $f(\mathbb{D}_\rho(z_0))$ es un conjunto abierto que contiene a $f(z_0)$. Es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{D}_\epsilon(f(z_0)) \subset f(\mathbb{D}_\rho(z_0))$.

Ahora, recuerde que la función $\pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la proyección en la primera variable, es decir, $\pi_x(x, y) = x$, es una función abierta. De donde, $\pi_x(\mathbb{D}_\epsilon(f(z_0))) = (s - \epsilon, s + \epsilon) \subset u(U)$.

4.3.4. Sea f una función entera con la propiedad de que si $B \subset \mathbb{C}$ es cualquier conjunto acotado, entonces $f^{-1}(B)$ es acotado (o tal vez vacío). Muestre que para toda $w \in \mathbb{C}$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = w$. Aplique este resultado a los polinomios para deducir otra demostración del teorema fundamental del álgebra.

Solución. Hay que mostrar que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, y para esto basta probar que $f(\mathbb{C})$ es abierto y cerrado. Por ser f entera, también es abierta, por lo que $f(\mathbb{C})$ es abierto.

Para probar que $f(\mathbb{C})$ es cerrado, consideremos la definición de cerrado por sucesiones, entonces sea $\{z_n\}$ una sucesión en $f(\mathbb{C})$ tal que $z_n \to w \in \mathbb{C}$, el problema se reduce a mostrar que $w \in f(\mathbb{C})$.
Sea $B = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$, entonces B es un conjunto acotado, y por la hipótesis del problema $f^{-1}(B)$ también lo es, luego, $K := \overline{f^{-1}(B)}$ es cerrado y acotado, por lo que es compacto.
Ahora bien, consideremos los puntos $w_n := f^{-1}(z_n) \in K$, por ser K compacto, existe un subsucesión $\{w_{n_k}\}$ que converge a alguna $t \in K$. Luego, tenemos que $z_{n_k} = f(w_{n_k}) \to f(t)$, pero la sucesión $\{z_n\}$ converge a w, y por ser f continua tenemos que $f(t) = w$, por la unicidad del límite de una sucesión, y por lo tanto, $w \in f(\mathbb{C})$. De esta forma $f(\mathbb{C})$ es cerrado, y por lo tanto, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, de donde, para cada $w \in \mathbb{C}$ existe $z \in \mathbb{C}$, tal que $f(z) = w$.
Para la segunda parte del problema, primero mostremos que cualquier polinomio p cumple que si B es acotado, entonces $p^{-1}(B)$ es acotado. Procedamos por contradicción.
Supongamos que $p^{-1}(B)$ no es acotado, es decir, existe una sucesión de puntos $\{z_k\}$ en $p^{-1}(B)$, tal que $z_k \to \infty$. Ahora bien, por ser p un polinomio, sabemos que $\lim\limits_{z\to\infty} p(z) = \infty$, por lo que dado $M > 0$, existe $K > 0$ tal que $|z| > K$ implica que $|p(z)| > M$. Como $z_k \to \infty$, eventualmente $|z_m| > K$, de donde $|p(z)| > M$. Ahora solo consideremos M suficientemente grande tal que $|z| < M$, para toda $z \in B$, para llegar a una contradicción.
Usando la primera parte del problema, tenemos que para un polinomio $p(z)$ de grado n, para $z = 0$ existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$, lo que concluye la desmotración.

4.3.5. Considere el ejemplo resuelto 6.3.7 en [8] y tome el caso donde $k = 4$. Visualice la transformación local en tres pasos como sigue:

$$z \mapsto t = (z - z_0)\sqrt[4]{\phi(z)}, \quad t \mapsto s = t^4, \quad s \mapsto w = s + f(z_0).$$

Bosqueje esta transformación.
Solución.
Ejemplo resuelto 6.3.7. *Si f es una función analítica cerca de $z_0 \in U$ y si $f(z)-f(z_0)$ tiene un 0 de orden k en z_0, $1 \leq k < \infty$, entonces existe una función analítica $h(z)$ tal que $f(z) = f(z_0) + (h(z))^k$, para z cerca de z_0, y h es localmente inyectiva.*

Para $k = 4$, sea $g(z) = (z - z_0)\sqrt[4]{\phi(z)}$, $p(z) = z^4$ y $T(z) = z + f(z_0)$, entonces $T \circ p \circ g(z) = T(p((z - z_0)\sqrt[4]{\phi(z)})) = T((z - z_0)^4\phi(z)) = f(z_0) + (z - z_0)^4\phi(z)$, de donde $h(z) = g(z)$, ver figura 4.1.

4.3.6. Sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Su-

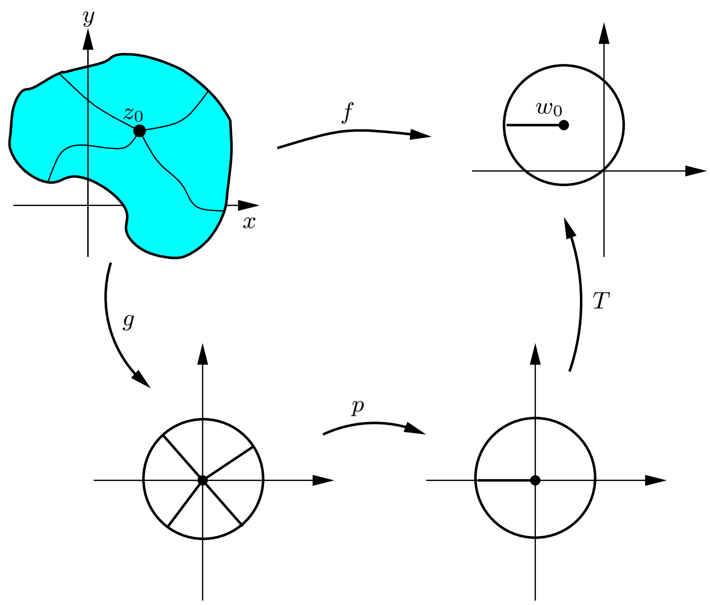


Figura 4.1: Solución del problema **4.3.5.**

ponga que $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$, para alguna $0 < r \leq R$. Muestre que f es inyectiva en el conjunto $\mathbb{D}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, a menos de que f sea constante.
Solución. Supongamos que f no es constante, por lo que mostremos que es inyectiva en $\mathbb{D}_r(0)$. Sea $|z_0| < r$, mostremos que la ecuación $f(z) = f(z_0)$ solo tiene una única solución en $\mathbb{D}_r(0)$ lo que implicará que f es inyectiva en ese conjunto.
Sea $g(z) = a_1(z-z_0)$, la cual es analítica en $\mathbb{D}_r(0)$, y solo tiene un cero en tal dominio. Sea

$$h(z) = f(z) - f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n,$$

luego

$$h(z) - g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z_0^n.$$

Sea $\phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Entonces por el teorema del valor medio se tiene que

$$|h(z) - g(z)| = |\phi(z) - \phi(z_0)| \leq \text{ máx } |\phi'(\eta)||z - z_0|,$$

donde el máximo se toma sobre los puntos η en el segmento que une z con z_0. Como $z_0 \in \mathbb{D}_r(0)$, si $|z| = r$, entonces $|\eta| < r$.
Ahora, observe que

$$|\phi'(\eta)| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} n a_n \eta^{n-1}\right| < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}| \leq |a_1|,$$

donde la desigualdad estricta se debe a que $|\eta| < r$. Por lo tanto

$$|h(z) - g(z)| = |\phi(z) - \phi(z_0)| \leq \text{ máx } |\phi'(\eta)||z - z_0| < |a_1||z - z_0| = |g(z)|$$

para $|z| = r$, de donde se tiene el resultado por el teorema de Rouché.

Capítulo 5

Métodos asintóticos

En este último capítulo del libro se da una introducción al estudio de funciones $f(z)$ alrededor de ∞, es decir, se analizan algunos métodos asintóticos para funciones de variable compleja. Nos enfocaremos en el estudio de los productos infinitos y al análisis de la función gamma.

5.1. Productos infinitos y la función gamma

Para estudiar la función gamma se necesita estudiar algunas propiedades básicas de los productos infinitos. Sea z_1, z_2, $\ldots$ una sucesión de números complejos, deseamos considerar el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) = (1+z_1)(1+z_2)\cdots .$$

Se escribe $1+z_n$ porque si el producto converge, el término general $(1+z_n)$ se debe aproximar a 1, esto es equivalente a que $z_n \to 0$.

Definición 5.1.1 *Se dice que el producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge si únicamente un número finito de* z_n *son iguales a* -1*, y si los productos finitos*

$$\prod_{k=m}^{n}(1+z_k) = (1+z_m)\cdots(1+z_n),$$

donde $z_k \neq -1$ *para* $k \geq m$, *convergen cuando* $n \to \infty$, *a un número distinto de cero.*

Con respecto a la convergencia de productos infinitos, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 5.1.2 (Teorema de convergencia) *[Capítulo VII, [3]].*

(i) *Si* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge, entonces* $z_n \to 0$.

(ii) *Suponga que* $|z_n| < 1$, *para toda* $n = 1, 2, \ldots,$ *de tal manera que* $z_n \neq -1$. *Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+z_n)$ *converge (estamos usando la rama principal de logartimo).*

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ *converge si* $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *converge. En este caso decimos que* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge absolutamente.*

(iv) *Si* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ *converge, entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge.*

(v) *En particular si* $|z_n| < 1$ *y si* $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+z_n)$ *converge a* S, *entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge a* e^S.

La definición de producto infinito de funciones se da de forma similar.

Definición 5.1.3 *El producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

se dice que converge uniformemente en B *si, para alguna* m, $f_n(z) \neq -1$ *para* $n \geq m$ *y para toda* $z \in B$, *si la sucesión* $P_n(z) = \prod_{k=m}^{n}(1+f_k(z))$ *converge uniformemente en* B *a alguna función* $P(z)$ *y si* $P(z) \neq 0$ *para toda* $z \in B$.

Usando el teorema de convergencia analítica (ver capítulo 3 en [8]), se sigue el siguiente resultado.

Teorema 5.1.4 (Analiticidad de productos infinitos) *Suponga que $f_n(z)$ es una sucesión de funciones analíticas en una región G y que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ converge uniformemente a $f(z)$ en cualquier disco cerrado en G. Entonces $f(z)$ es analítica en G. Tal convergencia uniforme se satisface si $|f_n(z)| < 1$ para $n \geq m$ y si $\sum_{n=m}^{\infty} \log(1 + f_n(z))$ converge uniformement, o si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente, en discos cerrados en ambos casos.*

El siguiente teorema construye la función analítica mas general, con un conjunto dado de ceros.

Teorema 5.1.5 (Teorema sobre productos canónicos) *Sea a_1, a_2, $\ldots$ una sucesión de números complejos distintos de cero (posiblemente finita y con elementos no necesariamente distintos) tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty.$$

Entonces, si $g(z)$ es cualquier función entera, la función

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} \right]$$

es entera. El producto converge uniformemente en los discos cerrados del plano, tiene ceros en a_1, a_2, $\ldots$, y tiene un cero de orden k en $z = 0$, pero no tiene otros ceros. Más aún, si f es cualquier función entera con estas propiedades, ésta puede ser escrita en la misma forma. En particular, f es entera sin ceros si y solo si f tiene la forma $f(z) = e^{g(z)}$ para alguna función entera g.

En el problema **5.1.5** se demostrará una versión más general de este teorema.

5.1.1. La función gamma

La función gamma entre otras cualidades da solución a un problema de interpolación que ha sido estudiado desde finales del siglo XVIII. El problema es encontrar una función continua de variable real o compleja que coincida con la función factorial en los enteros. Aquí daremos dos definiciones de la función gamma.

Definamos primero la función

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

la cual es entera con ceros simples en los enteros negativos $-1, -2, -3, \ldots$. Ahora, sea

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Definición 5.1.6 *La función gamma se define como*

$$\Gamma(z) = (ze^{\gamma z} G(z))^{-1} = \left[ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}\right]^{-1}.$$

Existen otras expresiones importantes para $\Gamma(z)$, por ejemplo como una integral, válida para $z \in \mathbb{C}$ con Re $(z) > 0$ (ver capítulo VII en [3]), la cual es

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

o bien la fórmula de Euler (ver capítulo 7 en [8]),

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{z} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}\right].$$

Veamos a continuación varios problemas acerca de productos infinitos y acerca de la función gamma.

5.1.1. Muestre que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

Solución. Notemos que los productos parciales del producto infinito son

$$\begin{aligned}
\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{n(n+1) - 2}{n(n+1)}\right) &= \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\right) \\
&= \left(\frac{4}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{4} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdots \frac{(N+2)}{N} \cdot \frac{(N-1)}{N+1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{N+2}{N}.
\end{aligned}$$

Sabemos que si los productos parciales convergen cuando $N \to \infty$, el producto infinito será igual al límite anterior, esto es

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{N+2}{3N}=\frac{1}{3}.$$

5.1.2. Complete la demostración del teorema acerca de la analiticidad de productos infinitos.
Solución. Suponga que $f_n(z)$ es una sucesión de funciones analíticas en una región G y que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

converge uniformemente a $f(z)$ en cualquier disco cerrado en G. Entonces $f(z)$ es analítica en G. Tal convergencia uniforme se satisface si $|f_n(z)|<1$ para $n \geq m$ y si $\sum_{n=m}^{\infty}\log[1+f_n(z)]$ converge uniformemente, o si $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ converge uniformemente (en los discos cerrados en ambos casos).
Para verificar la validez de esto, uno debe comprobar que la demostración del teorema de convergencia para productos funciona para la convergencia uniforme. Es decir, veamos la validez de los siguientes enunciados.
(i) Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge uniformemente, entonces $f_n(z)\to 0$ uniformemente.
(ii) Suponga que $|f_n(z)|<1$ para toda $n=1,2,\ldots$, de tal manera que $f_n(z)\neq -1$. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge uniformemente si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+f_n(z))$ converge uniformemente. (log es la rama principal; $|f_n(z)|<1$ implica que $\log(1+f_n(z))$ está definido.)
(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|)$ converge uniformemente si $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ converge uniformemente. (En este caso decimos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge uniformemente absolutamente.)
(iv) Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|)$ converge uniformemente, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge uniformemente.

Demostración:
(i) Podemos suponer que $f_n(z)\neq -1$, para toda n. Sea $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$; por hipótesis, $P_n \to P$ uniformemente para alguna $P\neq 0$. Así $P_n/P_{n-1}\to 1$ uniformemente. Pero $P_n/P_{n-1}=1+f_n(z)$. En consecuencia, $f_n(z)\to 0$ uniformemente.
(ii) Sea $S_n=\sum_{k=1}^{n}\log(1+f_k(z))$ y sea $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$. Entonces $P_n=e^{S_n}$. Es claro que si S_n converge uniformemente en compactos, entonces también P_n converge uniformemente en compactos, pues e^z es uniformemente continua en cualquier conjunto compacto $K\subset\mathbb{C}$.
Recíprocamente, suponga que $P_n \to P \neq 0$ uniformemente en compactos. Para de-

mostrar que S_n converge uniformemente, es suficiente mostrar que para n suficientemente grande, toda S_n está en una banda infinita de ancho 2π (en la cual e^z tiene una inversa continua).
No podemos escribir log $\sum_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z)) = \log P_n$, porque P_n podría estar en el eje real negativo. En vez de eso, para los fines de esta demostración, vamos a escoger la rama del $\log$ tal que P esté en el dominio A de tal rama. Ahora $P_n \to P$ uniformemente, así que $P_n \in A$, si n es grande y, por lo tanto, podemos escribir $S_n = \log P_n + 2\pi i \cdot k_n$, para un entero k_n. Así

$$(k_{n+1} - k_n) \cdot 2\pi i = \log(1 + f_{n+1}(z)) - (\log P_{n+1} - \log P_n).$$

Puesto que el lado derecho de la ecuación es imaginario puro,

$$(k_{n+1} - k_n) \cdot 2\pi i = i[\arg\,(1 + f_{n+1}(z)) - \arg\,P_{n+1} + \arg\,P_n].$$

Por (i), $f_{n+1}(z) \to 0$ uniformemente y en consecuencia, $\arg(1+f_{n+1}(z)) \to 0$ uniformemente. También, $\arg P_n \to \arg\,P$ y, por lo tanto, $k_{n+1} - k_n \to 0$ uniformemente. Ya que las k_n son enteros, deben ser iguales a un entero fijo k, para n grande. En consecuencia, $S_n = \log\,P_n + k \cdot 2\pi i$, así, conforme $n \to \infty, S_n \to S = \log\,P + k \cdot 2\pi i$ uniformemente.
(iii) Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + |f_n(z)|)$ converge uniformemente, en particular converge, y por lo tanto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |f_n(z)|)$ también converge por el teorema de convergencia para productos, inciso (iii), entonces, para toda $z \in G$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ están definidas las funciones $R_n^*(z) := \prod_{k=n+1}^{\infty}(1 + |f_n(z)|)$ y tenemos que mostrar que la sucesión $\{R_n^*(z)\}$ converge uniformemente hacia 1 en G
Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < e^\delta - 1 < \varepsilon$. Por la convergencia uniforme de la suma, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_\delta$ y para toda $z \in G$, se verifica que $\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(z)| < \delta$. Usando que

$$\prod_{k=1}^{m}(1 + |f_k(z)|) - 1 \leq \exp\,\left(\sum_{k=n+1}^{m}(1 + |f_k(z)|)\right) - 1,$$

tenemos que para toda $n > n_\delta$ y $z \in G$, se cumple

$$0 \leq \prod_{k=n+1}^{m}(1 + |f_k(z)|) - 1 \leq \exp\,\left(\sum_{k=n+1}^{m}(1 + |f_k(z)|)\right) - 1 < e^\delta - 1 < \varepsilon$$

y pasando al límite cuando $m \to \infty$, se llega a que para toda $n > n_\delta$ y $z \in G$, se verifica que $0 < R_n^*(z) - 1 < \varepsilon$, y por lo tanto, $R_n^*(z) \to 1$ uniformemente sobre G.
(iv) Suponga que $\prod(1+|f_n(z)|)$ converge uniformemente. Entonces, por (ii) se tiene que $\sum \log\,(1+f_n(z))$ converge uniformemente. (Debemos empezar con términos tales

que se satisfagan las condiciones de (ii).) En efecto, el argumento en (iii) muestra que $\sum$ log $(1 + f_n(z))$ converge uniformemente absolutamente y, por lo tanto, converge uniformemente. Así, por (ii), $\prod(1 + |f_n(z)|)$ converge uniformemente.

5.1.3. Muestre que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}.$$

Solución. Primero notemos que $1 + z_n = 1 - \frac{2}{n^3+1} = \frac{n^3-1}{n^3+1}$, y factorizando se tiene que $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ y $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$.
Para mostrar la convergencia del producto infinito, se necesita mostrar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log(1+z_n)=\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}\right).$$

Recordando que

$$\log\left(\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}\right)=$$
$$\log{(n-1)}-\log{(n+1)}+\log{(n^2+n+1)}-\log{(n^2-n+1)},$$

analicemos las sumas parciales de la serie por separado, considerando la primera diferencia de los logaritmos y después la segunda diferencia.
Notemos que para $k > 3$, se tiene que

$$\sum_{n=2}^{k}(\log{(n-1)}-\log{(n+1)})=\log 1+\log 2-\log k-\log{(k+1)},$$

mientras que, notando que $(n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$, se tiene que

$$\sum_{n=2}^{k}(\log{(n^2+n+1)}-\log{(n^2-n+1)})=-\log 3+\log{(k^2+k+1)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{k}\log(1+z_n) &= \log 2-\log k-\log{(k+1)}-\log 3+\log{(k^2+k+1)}\\ &= \log 2-\log 3+\log\left(\frac{k^2+k+1}{k^2+k}\right),\end{aligned}$$

lo cual tiende a $\log{(2/3)}$, cuando $k \to \infty$.

Como

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log(1 + z_n) = \log(2/3) = S,$$

entonces

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^3+1}\right) = e^S = \frac{2}{3}.$$

5.1.4. Muestre que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge (suponiendo que $z_n \neq -1$) si para todo $\varepsilon > 0$, existe una N tal que si $n \geq N$ y para toda $p = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple que,

$$|(1+z_n)\cdots(1+z_{n+p}) - 1| < \varepsilon.$$

(Sugerencia: use el criterio de Cauchy para sucesiones).
Solución. Sea

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_n)$$

los productos parciales del producto infinito, luego

$$|a_{n+p} - a_n| = |(1+z_1)\cdots(1+z_n)\cdots(1+z_{n+p}) - (1+z_1)\cdots(1+z_n)|,$$

entonces

$$\frac{|a_{n+p} - a_n|}{|a_n|} = |(1+z_{n+1})\cdots(1+z_{n+p}) - 1|,$$

luego para $n \geq N$ y para toda $p = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple que

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon |a_n|.$$

Mostremos que la sucesión a_n es acotada, como la ε es arbitraria, podemos tomar $\varepsilon = 1/2$, luego existe N_ε, tal que si $n \geq N_\varepsilon$

$$|(1+z_n)\cdots(1+z_{n+p}) - 1| < \frac{1}{2},$$

para toda $p = 0, 1, 2, \ldots$. Definimos los siguientes productos parciales

$$S_n = \prod_{i=0}^{n}(1+z_{N+i}),$$

luego $S_0 = 1 + z_N, S_1 = (1+z_N)(1+z_{N+1})$, etc., entonces por hipótesis

$$|(1+z_N)(1+z_{N+1})\cdots(1+z_{n+p}) - 1| < \frac{1}{2},$$

para toda $p = 0, 1, 2, \ldots$, luego $|S_p| - 1 \leq |S_p - 1| < \frac{1}{2}$, de aquí se tiene que $|S_p| < 3/2$.
Si denotamos a $(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_{N-1})$ por T_N, entonces $a_n = T_N \cdot S_{n-N}$ para $n \geq N$, de donde

$$|a_n| = |T_N||S_{n-N}| < \frac{3}{2}|T_N| = \frac{3}{2}M,$$

donde $|T_N| = M$ también está acotado, por ser un producto finito fijo. Así a_n es una sucesión que está acotada y que cumple que para todo $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \cdot \frac{3}{2}M$, para toda $p = 0, 1, 2, \ldots$, es decir, es una sucesión de Cauchy, por lo tanto el producto infinito converge.

5.1.5. Sean $a_1, a_2, \ldots$ puntos en $\mathbb{C}$, con $a_i \neq 0$, para toda i, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+h}} < \infty,$$

para un entero fijo $h \geq 1$. Muestre que la función entera más general que tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$ y un cero de orden k en 0 es

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \cdots + (z/a_n)^h/h} \right].$$

(Cada uno de los puntos a_i debe ser repetido un número finito de veces.)
(Sugerencia: Demuestre el siguiente lema. Si $1 + w = (1-a)e^{a + a^2/2 + \cdots + a^h/h}$ para $|a| < 1$, entonces $|w| \leq |a|^{h+1}/(1 - |a|)$.)
Solución. Para cada $R > 0$, sea $A_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, puesto que $a_n \to \infty$, únicamente un número finito de a_n están dentro de A_R, digamos $a_1, \ldots, a_{N-1}$. Por lo tanto, para $z \in A_R$, únicamente un número finito de términos $(1 - \frac{z}{a_n})$ se anulan. Para efectuar la demostración, mostremos el siguiente lema.

Lema. *Si* $1 + w = (1-a)e^{a + a^2/2 + \cdots + a^h/h}$ *para* $|a| < 1$, *entonces*

$$|w| \leq |a|^{h+1}/(1 - |a|).$$

Demostración: El caso $h = 1$ es el lema 7.1.7. en [8]. Para $h \geq 2$, usando el desarrollo en serie de potencias de $E_h(z) = (1-z)e^{z + z^2/2 + \cdots + z^h/h}$, se tiene que

$$E_h(z) = E_h(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Si derivamos, tenemos que

$$E_h'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1};$$

por otro lado, usando la notación $\exp(z) = e^z$, se tiene que

$$E_h'(z) = -\exp\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{z^k}{k}\right) + (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{z^k}{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{h-1} z^k\right) =$$

$$-\exp\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{z^k}{k}\right) + (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{z^k}{k}\right)\frac{1-z^h}{1-z} = -z^h\exp\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{z^k}{k}\right).$$

Luego, se observa que $E_h'(z)$ tiene un cero de orden h en $z = 0$, y por lo tanto, $a_k = 0$ para $1 \leq k \leq h$. Para los demás coeficientes, analicemos la función

$$\frac{E_h'(z)}{z^h} = -\exp(p(z)),$$

donde $p(z) = \sum_{k=1}^{h} \frac{z^k}{k}$ es un polinomio con coeficientes positivos.
Usando el desarrollo en serie de potencias de la exponencial, tenemos que

$$-\exp(p(z)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(z)^n}{n!}$$

como p tenía coeficientes positivos, $p(z)^n$ también los tiene, y por lo tanto, en la expansión

$$-\exp(p(z)) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

los $b_n > 0$, pero habíamos visto que

$$-\exp(p(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-h-1}$$

así que igualando los coeficientes, obtenemos que $(n+h+1)a_{n+h+1} = -b_n$, y por lo tanto, $a_n \leq 0$.
Ahora bien, evaluando en 1, tenemos que

$$0 = E_h(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

por lo que $|a_n| < 1$. Para finalizar, si $|z| < 1$, usando esta última igualdad

$$|1 - E_h(z)| = \left| -\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=h+1}^{\infty} |a_k||z|^k \leq |z|^{h+1}\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k = \frac{|z|^{h+1}}{1-|z|},$$

y con el cambio de variable $a = z$ y w como en el problema, tenemos que

$$|w| = |1 - E_h(a)| \leq \frac{|a|^{h+1}}{1 - |a|}.$$

El siguiente paso es mostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \cdots + (z/a_n)^h/h} \right]$$

converge uniformemente y absolutamente en $A_{R/2}$. Ésto mostrará que $\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \cdots + (z/a_n)^h/h} \right]$ es entera por el teorema de analiticidad de productos infinitos.
En efecto, para $n \geq N$, $|\frac{z}{a_n}| < 1$, si $|z| \leq R/2$, por el lema anterior, tenemos que

$$|w_n(z)| \leq \frac{|z|^{h+1}}{1 - |z/a_n|} \geq \frac{(R/2)^{h+1}}{1 - 1/2} \cdot \frac{1}{|a_n|^{h+1}} = \frac{R^{h+1}}{2^h} \cdot \frac{1}{|a_n|^h + 1} = M_n.$$

Por suposición, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, y en consecuencia, por el criterio M de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$ converge uniformemente y absolutamente, así,

$$f_1(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \cdots + (z/a_n)^h/h} \right]$$

es entera. A partir de la definición del producto es claro que f_1 tiene el número de ceros requeridos. Por lo tanto, la función $e^g f_1$ también los tiene. Luego, por el teorema sobre productos canónicos, tenemos que la función entera más general que tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$ y un cero de orden k en 0 es

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \cdots + (z/a_n)^h/h} \right].$$

5.1.6. Utilice la fórmula de Euler para demostrar que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
Solución. La fórmula de Euler nos dice que

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right].$$

Usando esta fórmula, se tiene que

$$z\Gamma(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right] = \prod_{n=1}^{\infty} n \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{(n+z)}.$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \frac{1}{z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z+1}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)^{-1}\right] \\
&= \frac{1}{z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1+z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(\frac{n+1}{n+1+z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(\frac{n}{n+z}\right)\right] \\
&= z\Gamma(z),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de que si el $\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente y $b_n \to 1$, entonces $b_1 \prod_{n=1}^{\infty} a_n b_{n+1} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Esto es inmediato de la siguiente identidad $b_1 \prod_{n=1}^{N} a_n b_{n+1} = (\prod_{n=1}^{N} a_n b_n) b_{N+1}$.

5.1.7. $a)$ Sea $E(z,h) = (1-z)e^{z+z^2/2+\cdots+z^h/h}$. Muestre que la función más general que tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$, cada uno de ellos repetido de acuerdo a su multiplicidad, donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+h}} < \infty$$

y $a_n \to \infty$, y que tiene un cero de orden k en 0, es

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, n\right).$$

Esta resultado es conocido como el teorema de factorización de Weierstrass.
$b)$ Concluya que toda función meromorfa es el cociente de dos funciones enteras.
Solución. $a)$ Primero demostramos que $\prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n}, n)$ es entera. Para $R > 0$, sea $A_R = \{z : |z| \leq R\}$. Ya que $a_n \to \infty$, únicamente un número finito de a_n están en A_R. Por lo tanto para $z \in A_R$, un número finito de términos $(1 - z/a_n)$ se anulan. Para probar que es entera, usaremos el lema usado en el problema **5.1.5.**

Lema. Si $1 + w = (1-a)e^{a+a^2/2+\cdots+a^n/n}$ para $|a| < 1$, entonces

$$|w| \leq \frac{|a|^{h+1}}{1-|a|}$$

.

Ahora, mostremos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + z^2/2a_n^2 + \cdots + z^n/na_n^n} - 1 \right]$$

converge uniforme y absolutamente en $A_{R/(h+1)}$. Esto probará que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + z^2/a_n^2 2 + \cdots + z^n/na_n^n}$$

es entera, por el teorema de analiticidad de productos infinitos.
Así, para $n \geq N$, $|\frac{z}{a_n}| < 1$ si $|z| < R/(h+1)$, y usando el lema anterior,

$$|w_n(z)| \leq \frac{|\frac{z}{a_n}|^{h+1}}{1 - |\frac{z}{a_n}|} \leq \frac{\left(\frac{R}{h+1}\right)^{h+1}}{1 - \frac{1}{h+1}} \cdot \frac{1}{|a_n|^{h+1}}$$

ya que $|z| < R/(h+1)$ y $|a_n| \geq R$, luego

$$|w_n(z)| \leq \frac{R^{h+1}}{h(h+1)^{h+1}} \cdot \frac{1}{|a_n|^{h+1}} = M_n;$$

sabemos que $\sum M_n$ converge, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+h}} < \infty,$$

y en consecuencia por el criterio de M-Weierstrass, $\sum w_n(z)$ converge uniforme y absolutamente. Por lo tanto,

$$f_1(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + z^2/a_n^2 2 + \cdots + z^n/na_n^n}$$

es entera y tiene un cero de orden k en 0.
Para la parte b), veamos que f_1 tiene k ceros, por lo tanto, también $f_2 = e^{g(z)} f_1$ ya que la exponencial nunca se anula. Si f_2 tiene el número dado de ceros, entonces $f = f_2/f_1$ es meromorfa y es cociente de funciones enteras.

Segunda solución para la parte b). Si $f(z)$ tiene ceros en $a_0 = 0$ de orden k y en a_1, a_2, ..., repetidos de acuerdo a su multiplicidad y polos en $b_0 = 0$ de orden l y en b_1, b_2, ..., repetidos de acuerdo a su orden, entonces

$$\frac{f(z) z^l \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{b_n}, n)}{z^k \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n}, n)}$$

solamente tiene singularidades removibles, luego es de la forma $e^{g(z)}$ con $g(z)$ entera, por lo que

$$f(z) = \frac{e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n}, n)}{z^l \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{b_n}, n)}$$

es cociente de dos funciones enteras.

5.1.8. Demuestre que para Re $(z) \geq 0$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt$$

Sugerencia: Si Re $z \geq 0$, entonces $1/(z+n) = \int_0^{\infty} e^{-t(z+n)} dt$. Utilice que la constante de Euler $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n)$ y el ejemplo resuelto 7.1.11. en [8].

Solución. Para Re $(z) \geq 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-t(z+n)} dt = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{e^{-t(z+n)}}{-(z+n)} - \frac{e^0}{-(z+n)} \right) = \frac{1}{z+n}.$$

Así, con esta fórmula, además usando que $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right]$ y la fórmula del ejercicio resuelto 7.1.11 en [8]

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= -\gamma - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \log n\right] - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \log n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}\right] - \frac{1}{z}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}\right] - \frac{1}{z}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty e^{-t(z+k)}dt\right] - \int_0^\infty e^{-tz}dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty e^{-t(z+k)}dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} e^{-t(z+k)}dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \int_0^\infty e^{-tz}\sum_{k=0}^{n} e^{-tk}dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \int_0^\infty e^{-tz}\frac{e^{-t(n+1)}-1}{e^{-t}-1}dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log n - \int_0^\infty \frac{e^{-t(z+n+1)}}{e^{-t}-1}dt\right] - \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}dt.
\end{aligned}
$$

De la misma primera fórmula, sabemos que

$$
\frac{1}{s} = \int_0^\infty e^{-ts}dt,
$$

luego, integrando con respecto a s, de 1 a n, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_1^n \frac{1}{s}ds &= \int_1^n\int_0^\infty e^{-ts}dtds = \int_0^\infty\int_1^n e^{-ts}dsdt\\
&= \int_0^\infty\left(\frac{e^{-tn}}{-t} - \frac{e^{-t}}{-t}\right)dt = \int_0^\infty\left(-\frac{e^{-tn}}{t} + \frac{e^{-t}}{t}\right)dt
\end{aligned}
$$

donde, por otro lado
$$\int_1^n \frac{1}{s}ds = \log n - \log 1 = \log n.$$
Sustituyendo, obtenemos que

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^\infty \left(-\frac{e^{-tn}}{t}+\frac{e^{-t}}{t}\right)dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t(z+n+1)}}{e^{-t}-1}dt\right] - \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\int_0^\infty \frac{e^{-tn}}{t}dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t(z+n+1)}}{e^{-t}-1}dt\right] + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

Para finalizar, notemos que conforme $n \to \infty$, tanto $\dfrac{e^{-tn}}{t}$ como $\dfrac{e^{-t(z+n+1)}}{e^{-t}-1}$ convergen a la función constante 0, por lo que sus integrales también lo hacen, de donde el resultado deseado.

5.1.9. Establezca la convergencia uniforme, para Re $(z) > 0$, de

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Solución. La demostración se sigue del siguiente lema.
Lema 1. La integral impropia

$$f_0(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$$

converge uniformemente sobre compactos del semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$, por lo que $f_0(z)$ es una función analítica en tal semiplano.
La integral impropia
$$f_1(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$
converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$, luego $f_1(z)$ es una función entera.
Demostración del Lema 1. Mostremos primero la convergencia de $f_0(z)$. Sea $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ compacto, es claro que $\delta =$max$\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\} > 0$, ya que la función parte real es continua y K es compacto. Luego, para toda $z \in K$ y $t \in [0,1]$, se cumple que
$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\mathrm{Re}\,(z)-1} \leq t^{\delta-1},$$
y la integral
$$\int_0^1 t^{\delta-1}dt = \left[\frac{t^\delta}{\delta}\right]_0^1 = \frac{1}{\delta}$$

es finita pues $\delta > 0$, luego la convergencia es uniforme.
Para $f_1(z)$ la demostración es similar. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, y sea A =max$\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\} < \infty$, por ser la función parte real continua y K compacto. Entonces para toda $z \in K$ y $t \in [1, \infty)$ se cumple que

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1} \leq e^{-t}t^{A-1} = (e^{-t}t^{A+1})t^{-2}.$$

La función $e^{-t}t^{A+1}$ está acotada en $[1, \infty)$ pues es continua con límite 0 en el infinito. Por lo tanto, podemos considerar C =sup$\{e^{-t}t^{A+1} : t \geq 1\} < \infty$, con lo que se obtiene

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq Ct^{-2}$$

y como la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = 1$$

es finita, se tiene el resultado.
Para finalizar simplemente observamos que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = f_0(z) + f_1(z).$$

5.1.10. Demuestre la fórmula de Hankel

$$\Gamma(z) = \frac{-1}{2i\,\mathrm{sen}(\pi z)} \int_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt,$$

donde C es el contorno ilustrado en la figura 5.1. ¿Para qué z es válida la fórmula? Utilice $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\mathrm{sen}(\pi z)$, para concluir que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z}e^{-t}dt.$$

Solución. Observamos que el contorno de Hankel es una curva que llega desde ∞ por la recta $y = i\epsilon$ hasta tocar a la circunferencia de radio r con centro en 0, da casi una vuelta completa al origen y regresa por la recta $y = -i\epsilon$ al infinito. Tal curva consta de 3 curvas definidas de la siguiente manera: $-L_s$ que es la curva recorrida en sentido inverso de la curva L_s parametrizada por $L_s(z) = z + i\varepsilon$, con $z \in [r\cos\eta, \infty)$, donde η es el ángulo del punto en el que se encuentra con la circunferencia parametrizada por $\gamma_r(z) = re^{iz}$, con $z \in [\eta, 2\pi - \eta]$; y L_i es la recta parametrizada por $L_i(z) = z - i\varepsilon$ con $z \in [r\cos\eta, \infty)$.

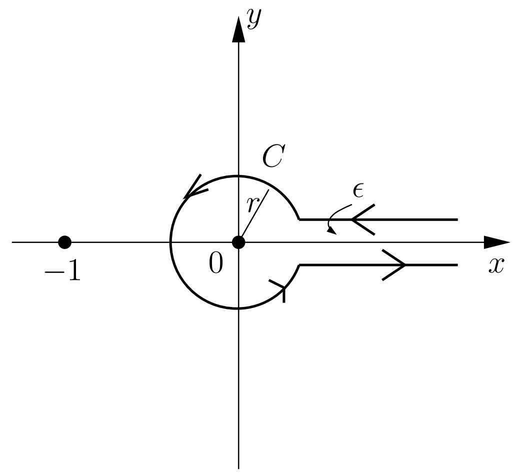


Figura 5.1: El contorno para la fórmula de Hankel

Del problema **2.3.9** de la sección 2.3, sabemos a qué converge la integral en cada una de las curvas que componen a C, conforme $r, \varepsilon \to 0$

$$\int_{\gamma_r} (-t)^{z-1} e^{-t} dt \to 0,$$

$$\int_{-L_s} (-t)^{z-1} e^{-t} dt \to \int_{\infty}^{0} (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -\int_{0}^{\infty} (-t)^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\int_{L_i} (-t)^{z-1} e^{-t} dt \to \int_{0}^{\infty} e^{2\pi(z-1)i} (-t)^{z-1} e^{-t} dt = e^{2\pi zi} \int_{0}^{\infty} (-t)^{z-1} e^{-t} dt.$$

Luego, conforme $r, \varepsilon \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{C} (-t)^{z-1} e^{-t} dt &\to (e^{2\pi zi} - 1) \int_{0}^{\infty} (-t)^{z-1} e^{-t} dt \\
&= 2ie^{\pi zi} \mathrm{sen}(\pi z) \int_{0}^{\infty} (-t)^{z-1} e^{-t} dt \\
&= -2i(-1)^{z-1} \mathrm{sen}(\pi z) \int_{0}^{\infty} (-t)^{z-1} e^{-t} dt \\
&= -2i \,\mathrm{sen}(\pi z) \int_{0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= -2i \,\mathrm{sen}(\pi z) \Gamma(z).
\end{aligned}$$

Despejando a $\Gamma(z)$, obtenemos que

$$\Gamma(z) = \frac{-1}{2i\operatorname{sen}(\pi z)} \int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt$$

que es el resultado deseado.
Ahora bien, para la segunda parte del problema, sabemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(1-z) &= \frac{-1}{2i\text{sen}(\pi(1-z))} \int_C (-t)^{(1-z)-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{-1}{2i\text{sen}(\pi z)} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Luego, por la identidad $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\text{sen}(\pi z)$, y tomando en cuenta que la función gamma nunca se anula, tenemos que

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\text{sen}(\pi z)}{\pi},$$

multiplicando ambos lados por $\Gamma(1-z)$ obtenemos que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\text{sen}(\pi z)}{\pi} \frac{-1}{2i\operatorname{sen}(\pi z)} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt$$

que es el resultado deseado.

5.1.11. Defina $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, para Re $(z) > 0$.

$a)$ Demuestre directamente que $\Gamma(z)$ es una función analítica en Re $(z) > 0$, para mostrar que $\int_0^n t^{z-1} e^{-t} dt$ converge uniformemente en discos cerrados, conforme $n \to \infty$.

$b)$ Muestre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, Re $(z) > 0$.

$c)$ Utilice $b)$ y la continuación analítica para demostrar que $\Gamma(z)$ puede ser extendida a una función meromorfa que tiene polos simples en $0, -1, -2, \ldots$. (Sugerencia: el procedimiento es análogo al que se utilizó al demostrar el principio de reflexión de Schwarz).

Solución. $a)$ Para mostrar que la función gamma es analítica, tenemos que ver que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Escribimos $\Gamma(z) = \Gamma(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, luego por definición se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{i}\frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} t^{(x-1)+iy} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{(x-1)+iy} e^{-t} \log{(t)} dt \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} t^{(x-1)+iy} e^{-t} dt = i \int_0^\infty t^{(x-1)+iy} e^{-t} \log{(t)} dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}$$

de donde las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen, y esto implica que $\Gamma(z)$ es analítica.

Para probar la otra parte del inciso $a)$, veamos que si tenemos la sucesión de funciones

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} e^{-t} dt,$$

todas estas son analíticas, la demostración es análoga a la dada en la primera parte. Ahora, supongamos que no convergen uniformemente a la función $\Gamma(z)$, en virtud del teorema de convergencia analítica, y con el resultado de que la función Γ es analítica, esto no puede ocurrir. Por lo tanto, $\Gamma_n \to \Gamma$ uniformemente en discos cerrados.

$b)$ Sea

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt,$$

podemos aplicar las propiedades de la integral, tomar el límite cuando $n \to \infty$, e integrar por partes

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n t^z e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left[-t^z e^{-t} \right]_0^n + \int_0^n z t^{z-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(-n^z e^{-n} + \int_0^n z t^{z-1} e^{-t} dt \right) \\ &= z \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\, \Gamma(z)\end{aligned}$$

$c)$ Sea $\Gamma(z) = (1/z)\Gamma(z+1)$, la cual es una función analítica en el conjunto definido como $A = \{z : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$. Definamos la función $g(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$ en el conjunto $\overline{A}$, que es la reflexión de A con respecto al eje imaginario. Ahora, $\Gamma(z) = g(z)$ en un conjunto $]a, b[$, que es la intersección de A y su reflexión, y además contiene una

sucesión convergente de puntos, tal sucesión es $\Gamma_n(z)$; de aquí tenemos que $f = g$ en todo el eje real positivo, ya que aquí $\bar{z} = z$ y $\Gamma = \overline{\Gamma}$ (asumimos a Γ real, en el eje real positivo).
Vemos que $g(z) = (1/z)\Gamma(z)$ cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann por el inciso a), entonces g es analítica. Sea h la función definida en $A \cup]a, b[\cup \overline{A}$; al hacer $h(z) = \Gamma(z)$ en este conjunto, entonces h es continua, ya que $\Gamma = g$ (tiene polos en $0, -1, -2, \dots$) en el eje real positivo. Así h es analítica en A y $\overline{A}$, continua en $]a, b[$, entonces por el teorema de Morera, es analítica en todo el conjunto $A \cup]a, b[\cup \overline{A}$. Por lo tanto, $\Gamma(z)$ puede ser extendida a una función meromorfa con polos en $0, -1, -2, \dots$.

5.1.12. Muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ y que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$, utilizando la función gamma.
Solución. Recordemos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}.$$

Ahora, por ser e^{-y^2} una función par, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

al hacer el cambio de variable $t = y^2$, se obtiene que

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

de donde se obtiene la primera integral.
Para calcular la segunda integral, notemos primero que

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = 2\int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy,$$

ahora, integremos por partes, considerando $u = y$ y $dv = ye^{-y^2} dy$, para obtener

$$\int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \lim_{t \to \infty}\left(\left[-t\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^{\infty}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right),$$

de donde se obtiene la segunda integral.

Bibliografía

[1] Ahlfors L., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 3rd edition 1979.

[2] Bulajich R., Gómez J. A., Valdez R., *Álgebra*, *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2021.

[3] Conway J. B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, Second Edition 1973.

[4] Gamelin T. W., *Complex Analysis*, Springer, 2001.

[5] Hinojosa G., Tapia M., Valdez R., *Una introducción a la variable compleja*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 2013.

[6] Jones G. A., Singerman D., *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.

[7] Lang S., *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[8] Marsden J.E., Hoffman M.J., *Análisis básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, México, DF. Primera Edición, 1996.

[9] Remmert R., *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[10] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Third edition, 1976.

[11] Spivak M., *Calculus*, Editorial Reverté, S.A., segunda edición, 1993.

Universidad Autónoma del
Estado de Morelos