UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
Área terminal de Matemáticas

Problema de frontera de Carleman con datos discontinuos.

TESIS

PRESENTADA POR:

MAZATL ALBERTO DOMINGUEZ DOMINGUEZ.

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. YURI KARLOVICH

CUERNAVACA, MORELOS

OCTUBRE DE 2019

Introducción

Las primeras formulaciones de problemas de valor en la frontera para funciones analíticas fueron debido a B. Riemann (1857). Las ecuaciones integrales singulares con desplazamiento están conectadas con problemas de frontera de forma natural. Siguiendo el trabajo de B. Riemann, D. Hilbert (1905), C. Haseman (1907) y T. Carleman (1932) también consideraron problemas de este tipo.
Hace unos 50 años, matemáticos soviéticos empezaron un estudio sistemático de estos temas. Los primeros trabajos fueron realizados en Tbilisi por D. Kveselava (1946-1948). Después, esta teoría se desarrolló aún más en Tbilisi, así como en otros centros científicos soviéticos. A principios de los 60's algunos trabajos surgieron en otros países como China, Polonia, Alemania, Vietnam y Korea. En las últimas dos décadas la geografía de investigaciones de operadores integrales singulares con desplazamiento se expandió significativamente, incluyendo países como Estados Unidos, Portugal y México. Hasta la fecha, han aparecido más de 600 publicaciones sobre estos temas. Este estudio es de gran importancia ya que las aplicaciones abarcan diversas áreas tanto de las matemáticas como de la física, en particular, varias aplicaciones han sido desarrolladas en las siguientes teorías [18]: teoría de problemas límite para ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden de tipo mixto (elíptica-hiperbólica), teoría de enlaces infinitesimales en superficies de curvatura positiva, teoría de corrientes de cavidad en un líquido ideal, física del plasma, etc.

En esta tesis nos enfocamos principalmente en los problemas de Riemann y de Carleman. Estudiamos, primero, el problema de Carleman para funciones que pertenecen a la clase de Hölder, reduciendo el problema de Carleman al problema de Riemann mediante el teorema de adhesión conforme. Más adelante se consideran clases más generales de funciones para las cuales necesitamos la teoría de Fredholm y el principio local de Allan-Douglas.

La tesis se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 1 introducimos la teoría de Fredholm, algunos conceptos necesarios para el estudio de los problemas de Riemann y Carleman para la teoría clásica, así como su extensión a coeficientes que pertenecen a clases más generales de funciones mediante la aplicación del principio local de Allan-Douglas. Las funciones de desplazamiento se describen en este capítulo.

En el capítulo 2 introducimos los problemas de Riemann y Carleman usando la teoría clásica [18]. El problema de Riemann es de utilidad para establecer la solubilidad del problema de Carleman utilizando el teorema de adhesión conforme para reducir el problema de Carleman al problema de Riemann.

En el capítulo 3 definimos los pesos potenciales y pesos de Muckenhoupt, materia teórica sobre operadores de Toeplitz y factorización de Wiener-Hopf, la cual nos ayuda en el estudio de invertibilidad de operadores de Toeplitz para encontrar la solución al problema de Riemann con coeficientes en los espacios de Lebesgue con peso. El capítulo 4 es una reducción del problema de Carleman al problema de Riemann usando los resultados de los dos capítulos anteriores.

El capítulo 5 está dedicado al estudio de la invertibilidad del operador integral singular con coeficientes continuos a trozos en los espacios de Lebesgue con pesos potenciales.

El capítulo 6 muestra los resultados obtenidos para resolver el problema de Carleman con coeficientes en la clase de funciones lentamente oscilatorias a trozos en espacios de Lebesgue con pesos potenciales. Usando la descripción del espacio de ideales maximales del álgebra C^* de funciones lentamente oscilatorias a trozos, el principio local de Allan-Douglas, relaciones con operadores de convolución de Mellin, el teorema sobre dos idempotentes, fue construido un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ de todos operadores integrales singulares con coeficientes lentamente oscilatorios a trozos en cada espacio de Lebesgue L^p con peso potencial ϱ. Aplicando este cálculo fue establecido un criterio de Fredholm de operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$ y como corolario fue obtenido un criterio de Fredholm para operador integral singular asociado con el problema de frontera de Riemann. Después fueron consideradas sus aplicaciones al problema de frontera de Carleman.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

Preliminares.

1.1 Teoría de Fredholm.

La teoría de Fredholm está desarrollada en el libro [11]. Sean X_1 y X_2 espacios de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ el espacio de Banach de todos los operadores lineales acotados A que actúan de X_1 en X_2 con la norma $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$. Si X es un espacio de Banach, denotamos por $\mathcal{L}(X)$ el espacio $\mathcal{L}(X, X)$. Este espacio es un álgebra de Banach, el producto es la composición de operadores.
El kernel y la imagen de un operador $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ son

$$\ker A := \{x \in X_1 : Ax = 0\}\,, \qquad \mathrm{Im}\ A := \{Ax : x \in X_1\}\,.$$

Como el operador A es acotado, $\ker A$ es un subespacio cerrado de X_1. La dimensión del subespacio $\ker A$, es decir, el número de soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$Ax = 0 \tag{1}$$

se denotará por $\alpha(A)$, y lo escribimos $\alpha(A) = \dim \ker A$.
Vamos a usar la siguiente notación para el operador conjugado. Sean X_1^* y X_2^* los espacios de todos los funcionales lineales acotados definidos en X_1 y X_2, respectivamente, los llamados espacios conjugados. Si $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, entonces el operador conjugado $A^* : X_2^* \to X_1^*$ es definido por la relación $(A^*u)(x) = u(Ax)$ para $u \in X_2^*$. El conjunto $\ker A^* := \{u \in X_2^* : A^*u = 0\}$ es un subespacio de X_2^* con dimension $\alpha(A^*) = \dim \ker A^*$.
Un operador lineal acotado $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ es llamado *normalmente soluble* si la ecuación

$$Ax = y \tag{2}$$

es soluble para aquellos y sólo aquellos $y \in X_2$ los cuales son ortogonales a todas las soluciones homogeneas de la ecuación $A^*u = 0$, es decir, si y sólo si

$$u(y) = 0 \text{ para todas las funciones } u \in \ker A^*. \tag{3}$$

Ahora introducimos las definiciones de operador de Noether y su índice.

Definición 1. Un operador $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ es llamado un *operador de Noether* si

(i) A es un operador normalmente soluble,

(ii) $\alpha(A)$ y $\alpha(A^*)$ son números finitos.

Definición 2. El entero $\operatorname{ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*)$ es llamado el *índice* del operador de Noether A.

Se puede probar que la condición de solubilidad normal de un operador A es equivalente a la condición que el conjunto $\operatorname{Im} A$ es cerrado en el espacio X_2, es decir, $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$. El espacio cociente $X_2/\overline{\operatorname{Im} A}$ es llamado el cokernel del operador A y se denota por $\operatorname{coker} A = X_2/\overline{\operatorname{Im} A}$. Denotamos su dimensión por $\beta(A) = \dim \operatorname{coker} A$. Se puede probar que, para un operador normalmente soluble $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, el subespacio $\ker A^*$ tiene dimensión finita si y sólo si el subespacio $\operatorname{coker} A$ tiene dimensión finita y entonces $\alpha(A^*) = \beta(A)$. De esta manera obtenemos la siguiente definición alterna de un operador de Noether.

Definición 3. Un operador $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ es llamado un *operador de Noether* si

i) A es un operador normalmente soluble ($\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$),

ii) $\alpha(A)$ y $\beta(A)$ son números finitos.

La siguiente definición distingue una clase particular de los operadores de Noether: los operadores de Fredholm.

Definición 4. Un operador de Noether cuyo índice es cero es llamado *operador de Fredholm.*

El llamado *operador canónico de Fredholm* (u operador de Riesz-Schauder) $A = I + D \in \mathcal{L}(X)$, donde I es el operador identidad en X y D es un operador compacto, es un ejemplo simple de un operador de Fredholm. A continuación enunciamos algunas propiedades de operadores de Noether.

1. Un operador A es de Noether si y sólo si el operador conjugado A^* es de Noether y entonces ind $A^* = -$ind A.

2. Para un operador de Noether dado A existe un número positivo $\rho(A)$ tal que, para todos los operadores lineales acotados B que satisfacen la desigualdad $\|B\| < \rho(A)$, el operador $A + B$ es también un operador de Noether y ind $(A + B) =$ ind A.

3. Si A es un operador de Noether y D es un operador compacto, entonces $A + D$ es un operador de Noether y ind $(A + D) =$ ind A.

4. Si $B \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $A \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$ son operadores de Noether, entonces su composición $AB \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$ es también un operador de Noether y ind $(AB) =$ ind $A+$ ind B.

Definición 5. Decimos que un operador A admite una *regularización izquierda (derecha)* si existen operadores lineales acotados R tales que el producto $RA\,(AR)$ es un operador canónico de Fredholm.

El operador R es llamado un *regularizador izquierdo (derecho)* del operador A. Se dice que un operador admite una *regularización* si el operador A admite simultaneamente una regularización izquierda y derecha (bilateral). El regularizador bilateral del operador A está determinado hasta un operador compacto.

5. Criterio de Noether. Las siguientes afirmaciones sobre un operador $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ son equivalentes:

   (a) A es un operador de Noether;

   (b) El operador A admite una regularización;

   (c) Existen operadores $B_1 \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ y $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ tales que B_1A y AB_2 son operadores de Noether.

6. La alternativa de Fredholm. Para una ecuación $Ax = y$ con un operador de Fredholm A, una de las siguientes alternativas se sostiene:

   (a) La ecuación homogénea $Ax = 0$ no tiene soluciones linealmente independientes ($\alpha(A) = 0$), y la ecuación $Ax = y$ es soluble incondicionalmente y unívocamente.

(b) La ecuación homogénea $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales, y entonces para la solubilidad de la ecuación $Ax = y$ es necesario y suficiente que $\alpha(A)$ cumpla las condiciones de solubilidad $u(y) = 0$.

1.2 El principio local de Allan-Douglas.

Se puede ver [5, Sección 1.7] los resultados de esta sección.

Definición 1.1. *Sea A un álgebra de Banach con identidad e. Un subconjunto $M \subset A$ es llamado* clase de localización *si*

(i) $0 \notin M$,

(ii) *para cualesquiera $f_1, f_2 \in M$ existe un tercer elemento $f \in M$ tal que $f_j f = f f_j = f$ $(j = 1, 2)$.*

Dos elementos $a, b \in A$ se dice que son *M-equivalentes por la izquierda* (respectivamente *por la derecha*) si

$$\inf_{f \in M} \|(a-b)f\| = 0 \quad \left(\text{respectivamente } \inf_{f \in M} \|f(a-b)\| = 0 \right).$$

Un elemento $a \in A$ es llamado *M-invertible por la izquierda* (resp. *por la derecha*) si existen un $b \in A$ y una $f \in M$ tal que $baf = f$ (resp. $fab = f$). Un sistema $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ de clases de localización se dice que es una *cubierta* si de cada elección $\{f_\tau\}_{\tau \in T}$ $(f_\tau \in M_\tau)$ puede seleccionarse un número finito de elementos $f_{\tau_1}, \ldots, f_{\tau_m}$ cuya suma es invertible en A.

Ahora suponga que T es un espacio topológico. Entonces un sistema $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ de clases de localización se dice que es una *superposición* si

(iii) cada M_τ es un subconjunto acotado de A;

(iv) $f \in M_{\tau_0}$ $(\tau_0 \in T)$ implica que $f \in M_\tau$ para toda τ en alguna vecindad abierta de τ_0;

(v) los elementos de $F := \bigcup_{\tau \in T} M_\tau$ conmutan por pares.

Sea $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ un sistema de superposición de clases de localización. El *conmutador* de F es el conjunto

$$\operatorname{Com} F := \{a \in A : af = fa \, \forall f \in F\}.$$

Es claro que Com F es una subálgebra cerrada de A. Para $\tau \in T$, sea Z_τ denota el conjunto de todos los elementos en Com F que son M_τ-equivalentes a cero por la izquierda y por la derecha. Note que (en vista de (iii)) Z_τ es un ideal bilateral cerrado de Com F el cual no contiene la identidad (si $e \in Z_\tau$, entonces existen $f_n \in M_\tau$ tales que $\|f_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, y por lo tanto existe $g_n \neq 0$ en M_τ tal que $f_n g_n = g_n$, de esto sigue que $\|f_n\| \geq 1$, lo cual es una contradicción). Para cada $a \in$ Com F sea a^τ denota la clase $a + Z_\tau$ del álgebra cociente Com F/Z_τ.
Finalmente, recordar que una función $f : Y \to \mathbb{R}$ dada en un espacio topológico Y es llamada *semi continua por arriba en* $y_0 \in Y$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $U_\varepsilon \subset Y$ de y_0 tal que $f(y) < f(y_0) + \varepsilon$ siempre que $y \in U_\varepsilon$. La función f se dice es *semi continua por arriba en* Y si es semi continua por arriba en cada $y \in Y$. Equivalentemente, f es semi continua por arriba en Y si y sólo si $\{y \in Y : f(y) < \alpha\}$ es un subconjunto abierto de Y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Observe que si Y es un espacio de Hausdorff compacto y $f : Y \to \mathbb{R}$ es una función acotada y semi continua por arriba en Y, entonces existe un $y_0 \in Y$ tal que $f(y_0) = \sup\limits_{y \in Y} f(y)$. Sea GA el grupo de elementos invertibles en un álgebra A.

Lema 1.1. (a) *Sea M una clase de localización, sean $a, a_0 \in A$, y suponga que a y a_0 son M-equivalentes por la izquierda (resp. por la derecha). Entonces a es M-invertible por la izquierda (resp. por la derecha) si y sólo si a_0 también lo es.*

(b) *Sea $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ un sistema de clases de localización que tienen la propiedad (iii) de la definición 1.1, sean $\tau \in T$ y $a \in$ Com F. Entonces a es M_τ-invertible en Com F por la izquierda y por la derecha si y sólo si $a^\tau \in G($Com $F/Z_\tau)$.*

Teorema 1.1. (Gohberg/Krupnik) *Sea A un álgebra de Banach con identidad, sea $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ un sistema de clases de localización que es cubierta, y sea $a \in$ Com F.*

(a) *Suponga que, para cada $\tau \in T$, a es M_τ-equivalente por la izquierda (resp. por la derecha) a $a_\tau \in A$. Entonces a es invertible por izquierda (resp. por derecha) en A si y sólo si a_τ es M_τ-invertible por la izquierda (resp. por la derecha) para todo $\tau \in T$.*

(b) *Si el sistema $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ tiene la propiedad (iii) de la definición 1.1, entonces $a \in GA$ si y sólo si a^τ es invertible en Com F/Z_τ para todo $\tau \in T$.*

(c) *Sea el sistema $\{M_\tau\}_{\tau \in T}$ es superposición. Entonces el mapeo*

$$T \to \mathbb{R}_+, \quad \tau \mapsto \|a^\tau\|$$

es semicontinuo por arriba. Si $a^{\tau_0} \in G(Com\ F/Z_{\tau_0})$ *para algún* $\tau_0 \in T$*, entonces* $a^{\tau} \in G(Com\ F/Z_{\tau})$ *para toda* τ *en alguna vecindad abierta de* τ_0*.*

Definición 1.2. *Sea A un álgebra de Banach con identidad e. El* centro *Cen A de A es el conjunto de todos los elementos $Z \in A$ con la propiedad que $za = az$ para toda $a \in A$. Claramente, Cen A es una subálgebra conmutativa cerrada de A. Sea B una subálgebra cerrada de Cen A que contiene a e. En consecuencia, B es también conmutativa. Si $N \subset B$ es un ideal maximal de B, entonces J_N denotará el más pequeño ideal bilateral cerrado de A que contiene a N, esto es,*

$$J_N = clos_A \left\{ \sum_{k=1}^{m} x_k a_k : m \in \mathbb{Z}_+, x_k \in N, a_k \in A \right\}.$$

Por supuesto, puede suceder que $J_N = A$. En el caso $J_N \neq A$ denotamos por A_N el álgebra cociente A/J_N y, para $a \in A$, por a_N la clase $a + J_N$. Si $J_N = A$, entonces A_N se referirá al álgebra $\{\Theta\}$ cuyo único elemento Θ es al mismo tiempo cero y la identidad; ponemos entonces $a_N = \Theta$ para cada $a \in A$ y hacemos la convención que $a_N \in GA_N$ y $\|a_N\| = 0$ para cada $a \in A$. Note que en cualquier caso $\|a_N\| = dist\ (a, J_N)$.

Lema 1.2. *[5] Sea L un ideal maximal izquierdo, derecho o bilateral de A. Entonces $L \cap B$ es un ideal maximal de B.*

Teorema 1.2. (Principio local de Allan-Douglas) *Sea la situación como en la Definición* 1.2.

(a) *Si $a \in A$, entonces a es invertible por la izquierda (derecha, resp. bilateral) en A si y sólo si a_N es invertible por la izquierda (derecha, resp. bilateral) en A_N para toda $N \in M(B)$.*

(b) *El mapeo*

$$M(B) \to \mathbb{R}_+, \quad N \mapsto \|a_N\|$$

es semicontinuo por arriba. Si $a \in A$ y $a_{N_0} \in GA_{N_0}$, entonces $a_N \in GA_N$ para toda N en alguna vecindad abierta de N_0.

(c) *Si A es semisimple, es decir, la intersección de todos ideales maximales izquierdos consiste sólo de cero, entonces*

$$\bigcap_{N \in M(B)} J_N = \{0\}.$$

(d) *Si A es un álgebra C^*, entonces, para $a \in A$,*

$$\|a\| = \max_{N \in M(B)} \|a_N\| .$$

Observación. Si A y B son álgebras C^*, entonces $J_N \neq A$ para cada $N \in M(B)$. En efecto, si $N_0 \in M(B)$, entonces existe un $b \in B$ tal que $\hat{b}(N_0) = 1$ y $0 < \hat{b}(N) < 1$ para $N \neq N_0$, y el inciso (d) del teorema anterior da

$$1 = \|b\| = \max_{N \in M(B)} \|b_N\| = \max_{N \in M(B)} \left\| \hat{b}(N) e_N \right\| = \|e_{N_0}\| ,$$

Por lo tanto $e_{N_0} \neq 0$, y así $J_{N_0} \neq A$.
Si $A = C$, (C son las funciones continuas en el círculo unitario $\mathbb{T}$) y $B = C_A$ (el álgebra del disco), entonces $M(B) = \mathrm{clos}\mathbb{D}$ (el disco unitario cerrado) y es fácil ver que, para $z \in \mathrm{clos}\mathbb{D}$, $J_z \neq C$ si y sólo si $z \in \mathbb{T}$. Esto es un caso especial de un resultado más general: si A es un álgebra de Banach conmutativa con elemento identidad, entonces $J_N \neq A$ para toda N que pertenece a la frontera de Shilov de $M(A)$ (ver [5, Sección 1.20]).

1.3 Función de desplazamiento.

Vamos a introducir algunas propiedades de mapeos homeomorfos de una curva simple Γ sobre ella misma y daremos su clasificación (ver [18]).
Sea Γ una curva cerrada o no cerrada, simple, orientada y $\alpha(t)$ un mapeo homeomorfo de la curva Γ sobre ella misma. Denotaremos por (τ, t) ($[\tau, t]$) un arco abierto (cerrado) de la curva Γ con puntos extremos τ y t que corre de acuerdo a la orientación aceptada. Un homeomorfismo $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ es llamado *desplazamiento*. Luego, si no se hacen otras suposiciones, siempre supondremos que la *función desplazamiento* $\alpha(t)$ tiene derivada $\alpha'(t)$ la cual nunca se anula en Γ y satisface la condición de Hölder en todo Γ.
Una clasificación de desplazamientos que es suficiente para nuestro propósito está basada en los siguiente hechos:

1) El mapeo definido por la función $\alpha(t)$ o preserva la orientación aceptada en Γ o cambia la orientación en Γ en la dirección contraria.

2) El mapeo $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ puede o no tener puntos periódicos en Γ.

3) Si existen puntos periódicos, entonces o todos los puntos de la curva son periódicos o los puntos periódicos de $\alpha(t)$ forman un cierto subconjunto cerrado.

A veces llamaremos a un homeomorfismo $\alpha(t)$ que preserva orientación en Γ un *desplazamiento directo* y a un homeomorfismo $\alpha(t)$ que cambia la orientación en Γ un *desplazamiento inverso*. Desplazamientos directos y desplazamientos inversos a veces se denotan como $\alpha_+(t)$ y $\alpha_-(t)$, respectivamente.

Un punto $t \in \Gamma$ es llamado un *punto periódico del desplazamiento* $\alpha(t)$ con multiplicidad $k \geq 1$, si $\alpha_k(t) = t$ y (para $k > 1$) $\alpha_i(t) \neq t$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k-1$, donde $\alpha_i(t) = \alpha(\alpha_{i-1}(t))$, y acordamos que $\alpha_0(t) \equiv t$. Un punto periódico con multiplicidad uno es llamado un *punto fijo*.

Denotamos por $M(\alpha, k)$ el conjunto de puntos periódicos de un desplazamiento $\alpha(t)$ con multiplicidad k. La sucesión $\alpha_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ es una *sucesión iterativa* del desplazamiento $\alpha(t)$ en el punto $t \in \Gamma$.

Clasificación de desplazamientos que preservan orientación.

El conjunto M^+ de todos los homeomorfismos que preservan orientación de un contorno cerrado simple sobre él mismo puede ser dividido en las siguientes clases.

(1) (*clase* M_1^+) Existe un entero $k \geq 2$ (el menor) tal que $M(\alpha, k) = \Gamma$.

(2) (*clase* M_2^+) $M(\alpha, k) \neq \emptyset$ y $M(\alpha, k) \neq \Gamma$.

(3) (*clase* M_3^+) $M(\alpha, k) = \emptyset$.

Un desplazamiento $\alpha(t)$ que satisface la condición $M(\alpha, k) = \Gamma$ para $k \geq 2$ es llamado un *desplazamiento de Carleman*. En otro caso se le llama *desplazamiento no Carleman*.

El conjunto M^- de todos los homeomorfismos de Γ sobre ella misma que cambia orientación se divide en las clases M_1^- y M_2^- definidas por las siguientes condiciones:

(1) $\alpha_2(t) \equiv t$ (desplazamiento de Carleman).

(2) $\alpha_2(t)$ es tal que $M(\alpha, k) \neq \emptyset$ y $M(\alpha, k) \neq \Gamma$, y $M(\alpha_2, 1) \neq \emptyset$ (desplazamiento no Carleman).

De esta clasificación se sigue que no existe un homeomorfismo $\alpha(t)$ de un contorno simple Γ sobre sí mismo que cambie la orientación en Γ y sea un desplazamiento de Carleman tal que el número más pequeño es $k \geq 2$.

Índice de Cauchy.

Una curva orientada simple Γ es llamada una *curva de Lyapunov* si la siguiente condición se satisface: la recta tangente a Γ en cada punto t existe y forma un ángulo $\Theta(t)$ con el eje de las abscisas que satisface la condición de Hölder

$$|\Theta(t_1) - \Theta(t_2)| > M|t_1 - t_2|^{\mu}, \quad A > 0,\ 0 < \mu < 1.$$

Sea Γ una curva cerrada orientada y $f(t)$ una función continua tal que $f(t) \neq 0$ en Γ. Denotamos por $\{\arg f(t)\}_\Gamma$ el incremento total del argumento de la función f cuando t corre la curva Γ. El *índice de Cauchy* de la función f es, por definición, el entero

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\{\arg f(t)\}_\Gamma = \text{Ind}\,_\Gamma f(t)\,.$$

De las definiciones de desplazamientos directos e inversos, $\alpha_+(t)$ y $\alpha_-(t)$, se sigue inmediatamente que

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg \alpha_+(t)\}_\Gamma = 1\,,\ \frac{1}{2\pi}\{\arg \alpha_-(t)\}_\Gamma = -1.$$

No es difícil mostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg \alpha'_+(t)\right\}_\Gamma = 0$$

y

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg \alpha'_-(t)\right\}_\Gamma = -2.$$

Desplazamientos especiales.

En esta parte consideramos la función fraccional lineal en el círculo unitario complejo, es decir, $\Gamma = \mathbb{T}$,

$$\alpha(t) = \frac{t-\beta}{\bar{\beta}t - 1}\,, \quad t \in \mathbb{T}\,, \quad \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}\,. \tag{1.1}$$

Es fácil verificar que $\alpha(t) \in \mathbb{T}$, $\alpha(\alpha(t)) = t$ y que los puntos t y $\alpha(t)$ se mueven en $\mathbb{T}$ en la misma dirección o en dirección contraria si $|\beta| < 1$ o $|\beta| > 1$, respectivamente. Elegimos $\alpha(t) = e^{i\theta}t$. Si θ es un múltiplo racional de π, entonces obtenemos ejemplos de desplazamientos que pertenecen a la clase M_1^+ con cualquier $k \geq 2$, y si θ no es un racional múltiplo de π, entonces obtenemos ejemplos de desplazamientos que pertenecen a la clase M_3^+. Ahora consideremos la función fraccional lineal

$$\alpha(t) = \frac{at+b}{\bar{b}t + \bar{a}}\,, \quad t \in \mathbb{T}\,, \quad |a|^2 - |b|^2 = \gamma\,, \quad \gamma = \pm 1. \tag{1.2}$$

Es fácil ver que $\alpha(t) \in \mathbb{T}$ y preserva o cambia orientación en Γ si $\gamma = +1$ o $\gamma = -1$, respectivamente. Por lo tanto $\alpha(t) \in M_2^+$ si $\gamma = +1$ y $\alpha(t) \in M_2^-$ si $\gamma = -1$.
La función desplazamiento que buscamos debe pertenecer a la clase M_1^-, es decir, que cambia la orientación y satisface condición de Carleman. Entonces consideramos las funciones fraccionales lineales que mandan el disco unitario en el mismo

$$\alpha(z) := e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad |z| < 1.$$

con $|a| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y que satisfacen condiciones que necesitamos, $\alpha(\alpha(z)) = z$ y que cambia orientación en $\mathbb{T}$. Por lo tanto el desplazamiento buscado para el problema de Carleman es

$$\alpha(t) = \frac{a-\overline{t}}{1-\overline{a}\overline{t}}. \tag{1.3}$$

este desplazamiento cambia orientación, verificamos cuando se satisface la condición de Carleman.

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha(t)) &= \frac{a - \overline{\frac{a-\overline{t}}{1-\overline{a}\overline{t}}}}{1-\overline{a}\overline{\frac{a-\overline{t}}{1-\overline{a}\overline{t}}}} \\
&= \frac{a\overline{\left(1-\overline{a}\overline{t}\right)} - \overline{\left(a-\overline{t}\right)}}{\overline{\left(1-\overline{a}\overline{t}\right)} - \overline{a}\overline{\left(a-\overline{t}\right)}} \\
&= \frac{a\,(1-at) - \overline{a} + t}{1 - at - \overline{a}^2 + \overline{a}t}.
\end{aligned}$$

La condición se cumple cuando $a = \overline{a}$.
Por lo tanto la función desplazamiento queda de la siguiente manera

$$\alpha(t) = \frac{a-\overline{t}}{1-a\overline{t}}.$$

la cual en la curva que consideramos es equivalente a

$$\alpha(t) = \frac{a-\frac{1}{t}}{1-a\frac{1}{t}}.$$

De modo que la función de desplazamiento queda descrita por la función

$$\alpha(z) = \frac{a-\frac{1}{z}}{1-a\frac{1}{z}}. \tag{1.4}$$

Esta función cambia orientación de $\mathbb{T}$ y manda interior del disco en exterior.

CAPÍTULO 2

Problema de frontera de Carleman.

El problema de frontera de Carleman es un problema de valor en la frontera para funciones analíticas que implican una función desplazamiento la cual invierte la orientación de la frontera. Sea Γ una curva cerrada simple en el plano complejo y sea D el dominio acotado por Γ. Sea $\alpha(t)$ una función compleja en Γ que induce un mapeo uno a uno de Γ sobre ella misma que invierte la dirección del recorrido en Γ y además satisface la condición de Carleman

$$\alpha(\alpha(t)) = t, \quad t \in \Gamma,$$

Además suponemos que la derivada $\alpha'(t)$ satisface la condición de Hölder.
Entonces, el problema de frontera de Carleman consiste en encontrar una función $\Phi(z)$, analítica en D, excepto para un número finito de polos, continua en $D \cup \Gamma$ y sujeta a la condición:

$$\Phi(\alpha(t)) = G(t)\Phi(t) + g(t), \quad t \in \Gamma \tag{I}$$

donde las funciones $G(t)$ y $g(t)$ dadas en Γ satisfacen la condición de Hölder y $G(t) \neq 0$ en Γ. El problema (I) es llamado *problema de frontera de Carleman* (ver [18]).
Si no se agregan otras condiciones en el desplazamiento $\alpha(t)$ y en las funciones $G(t)$, $g(t)$, entonces el problema (I) se dice, es ultradefinido, de acuerdo a esta razón, no es de Noether. Entonces, el problema (I) es estudiado bajo suposiciones adicionales las cuales pretenden eliminar la ultradefinición en las condiciones de frontera. Suponemos que los coeficientes $G(t)$ y $g(t)$ obedecen un sistema de identidades que son escritas más adelante. En este caso, es posible desarrollar una teoría de solubilidad para el problema (I).
Para el estudio del problema (I) es posible aplicar el método de ecuación integral y el

método de adhesión conforme. Al final el problema de Carleman es reducido al problema de Riemann de valor en la frontera en un contorno abierto.
Una reducción del problema de Carleman mediante el teorema de adhesión conforme nos lleva al problema de Riemann el cuál analizamos a continuación.

2.1 Problema de Riemann.

Operador integral singular.

En esta tesis consideramos que los operadores actúan en los siguientes espacios de Banach: $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, $H_\mu(\Gamma)$ $(0 < \mu < 1)$. Recordemos que $L_p(\Gamma)$ es el espacio de todas las funciones medibles de Lebesgue φ en Γ que son absolutamente integrables en la p-ésima potencia. La norma en $L_p(\Gamma)$ es dada por

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \, |dt|\right)^{1/p}.$$

$H_\mu(\Gamma)$ es un espacio de funciones definidas en Γ que satisfacen la condición de Hölder con exponente μ. La norma en $H_\mu(\Gamma)$ está dada por

$$\|\varphi\|_{H_\mu} = \max_{\tau,t\in\Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{\tau,t\in\Gamma} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{|\tau - t|^\mu}.$$

Como es usual denotamos por $C(\Gamma)$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas en Γ con la norma

$$\|\varphi\|_C = \max_{t\in\Gamma} |\varphi(t)| \, .$$

Consideramos la integral de tipo Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \ , \ z \in \Gamma, \tag{1}$$

y el *operador integral singular*

$$(S_\Gamma \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \ , \ t \in \Gamma,$$

donde la integral es entendida en el sentido del valor principal de Cauchy, la función $\frac{1}{\tau - t}$ es llamada el *kernel de Cauchy* y la función $\varphi(t)$, llamada densidad de la integral singular, pertenece al espacio $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ o al espacio $H_\mu(\Gamma)$ $(0 < \mu \leq 1)$.
El operador S_Γ tiene las siguientes propiedades ([11], [12], [18]):

1. El operador integral singular S es acotado en los espacios $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ y $H_\mu(\Gamma)$ $(0 < \mu < 1)$ y $S \in \mathcal{L}(H_1(\Gamma), H_{1-\varepsilon}(\Gamma))$ donde $\varepsilon > 0$ es un valor pequeño si $\mu = 1$. La afirmación 1 también es verdadera en el caso cuando Γ es una curva cerrada simple. Note que si $\Gamma = \mathbb{T} = \{t : |t| = 1\}$, entonces $\|S\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$.

2. Si Γ es una curva cerrada, entonces $S^2 = I$ donde I es el operador identidad (propiedad de involución).

3. El operador $D = aS - SaI$ es compacto en $L_p(\Gamma)$ o $H_\mu(\Gamma)$ si $a(t) \in C(\Gamma)$ o $a(t) \in H_\mu(\Gamma)$, respectivamente.

Si $\varphi(t) \in H_\mu(\Gamma)$ entonces existen límites angulares finitos $\Phi^+(t)\,(\Phi^-(t))$ con $z \to t\,(t \in \Gamma\,,\, z \in D^+)$ $(z \to t\,(t \in \Gamma\,,\, z \in D^-))$. Esos valores límite son expresados por las *fórmulas de Sokhotsky-Plemelj*

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\left[(I\varphi)(t) + (S\varphi)(t)\right] \qquad , \qquad \Phi^-(t) = \frac{1}{2}\left[-(I\varphi)(t) + (S\varphi)(t)\right] \tag{2.1}$$

y pertenecen al espacio $H_\mu(\Gamma)$ o $H_{1-\varepsilon}(\Gamma)$ si $\mu < 1$ o $\mu = 1$, correspondientemente. Se dice que una función analítica en D^+ (D^-) pertenecen a la clase $H_\mu(D^+ \cup \Gamma)$ $(H_\mu(D^- \cup \Gamma))$ o $L_p(D^+ \cup \Gamma)$ $(L_p(D^- \cup \Gamma))$ si esta es representada por una integral de tipo Cauchy con densidad de $H_\mu(\Gamma)$ o $L_p(\Gamma)$. Si $\varphi(t) \in L_p(\Gamma)$, entonces las fórmulas (2.1) se sostienen en casi todo Γ. Las funciones $\Phi^\pm(t)$ pertenecen al mismo espacio $L_p(\Gamma)$.

Enunciado del problema de Riemann.

Sea Γ una curva cerrada simple que divide el plano complejo en una parte interior $D^+(\ni 0)$ y una parte exterior $D^-(\ni \infty)$. Sean G y g funciones definidas en Γ. El *problema de frontera de Riemann* es enunciado en la siguiente manera:
Encontrar funciones $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ analíticas en D^+ y D^-, respectivamente, que satisfacen la condición

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2.2}$$

impuesta en sus valores límite $\Phi^\pm$ en el contorno Γ.
Buscamos soluciones en la clase de funciones analíticas que son representadas como integral de tipo de Cauchy con densidades en los espacios de Hölder $H_\mu(\Gamma)$ $(0 < \mu < 1)$ o en los espacios de Lebesgue $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Si $G,\ g\ \in H_\mu(\Gamma)$, entonces los valores límite $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ existen en todo Γ y pertenecen a $H_\mu(\Gamma)$. Si $G \in C(\Gamma)$, $g \in L_p(\Gamma)$ entonces $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ existen en casi todo Γ y pertenecen a $L_p(\Gamma)$.

Solución al problema de salto.

Sea Γ una curva cerrada simple y $g \in H_\mu$, $t \in \Gamma$. Consideramos el problema de Riemann (2.2), donde

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^+$$
$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^-.$$

Mediante las proyecciones $\Phi^+ = P_+g$ y $\Phi^- = -P_-g$ tenemos para $t \in \Gamma$

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - t}d\tau$$
$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

y

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t).$$

Vamos a considerar el problema homogeneo

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

donde $G \in H_\mu(\Gamma)$ y $G(t) \neq 0$ para todos $t \in \Gamma$. Sea $\varkappa := \operatorname{Ind} G = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma$.

Caso 1) $\varkappa = 0$

Tomamos logaritmo de ambos lados de la igualdad

$$\ln \Phi^+(t) = \ln G(t) + \ln \Phi^-(t).$$

Sea $\Psi^\pm(z) = \ln \Phi^\pm(z)$, de esta manera obtenemos el problema

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \ln G(t)$$

Por lo tanto

$$\Psi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^\pm.$$

Sea $t_0 \in \Gamma$,

$$\ln G(t_0 + 0) = \ln|G(t_0)| + i\arg G(t_0 + 0),$$
$$\ln G(t_0 - 0) = \ln|G(t_0)| + i\arg G(t_0 - 0).$$

Pero $\varkappa = 0$, entonces $\arg G(t_0 + 0) = \arg G(t_0 - 0)$.
Las soluciones serán $\Phi^\pm(z) = \mathrm{e}^{\Psi^\pm(z)}$, $z \in D^\pm$, y $\Phi^\pm(t) = \mathrm{e}^{\Psi^\pm(t)}$.

Caso 2) $\varkappa \neq 0$

Sea $h(t) := t^{-\varkappa}$, $t \in \Gamma$, e introducimos la función

$$G_0(t) = G(t) \cdot t^{-\varkappa}.$$

Obtenemos que Ind $G = \varkappa +$ Ind $h = \varkappa - \varkappa = 0$.
Ahora tenemos el problema

$$\Phi^+(t) = t^{\varkappa} G_0(t) \Phi^-(t)$$

donde la función $G_0(t)$ tiene índice cero. Introducimos las funciones $\chi^+(z) = \mathrm{e}^{\Psi_0^+(z)}$, $\chi^-(z) = z^{\varkappa} \mathrm{e}^{\Psi_0^-(z)}$ donde

$$\Psi_0^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\ln G_0(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^{\pm}.$$

El coeficiente $G_0(t)$ admite la factorización

$$G_0(t) = \chi^+(t)/\chi^-(t) \tag{2.3}$$

y sustituyendo esta factorización en el problema de salto obtenemos

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} = P_{\varkappa-1}(t). \tag{2.4}$$

Ya que la función $\frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)}$ tiene un polo en $z = \infty$ y por el teorema generalizado de Liouville, tal función es un polinomio de grado $\varkappa - 1$. Por lo tanto las soluciones del problema homogéneo son

$$\Phi^{\pm}(z) = \chi^{\pm}(z) P_{\varkappa-1}(z) \tag{2.5}$$

donde $P_{\varkappa-1}(z)$ es un polinomio de grado no mayor que $\varkappa - 1$ con coeficientes complejos $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa-1}$, para $\varkappa > 0$.
La solución general del problema (2.2) se completa de la siguiente manera. Procedemos de manera similar para el problema homogeneo tal que ahora sustituimos (2.3) en (2.2) y obtenemos

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} + \frac{g(t)}{\chi^+(t)}. \tag{2.6}$$

Puesto que $\frac{g}{\chi^+} \in H_\mu(\Gamma)$ se sigue que

$$\frac{g(t)}{\chi^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t) \tag{2.7}$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{2.8}$$

Así la condición de frontera (2.6) puede reescribirse en la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Sea $\varkappa \geq 0$. Aplicando el principio de continuación analítica y el teorema generalizado de Liouville, obtenemos la solución al problema de frontera de Riemann (2.2) tiene la forma

$$\Phi^\pm(z) = \chi^\pm(z)\Psi^\pm(z) + \chi^\pm(z)P_{\varkappa-1}(z), \tag{2.9}$$

donde $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ si $\varkappa = 0$ y $P_{\varkappa-1}(z)$ es un polinomio de grado no mayor que $\varkappa - 1$ con coeficientes complejos $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa-1}$, para $\varkappa > 0$.

Sea $\varkappa < 0$. Entonces se sigue del teorema de Liouville usual que $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$. Para obtener que la función $\Phi^-(z)$ sea analítica, es necesario y suficiente que el componente $\Psi^-(z)$ de la integral de tipo de Cauchy (2.8) tenga un cero de orden no menor que $-\varkappa+1$ en el punto $z = \infty$. Al expandir $\Psi^-(z)$ en serie de potencias en una vecindad del punto $z = \infty$, obtenemos las condiciones de solubilidad del problema (2.2) para el caso $\varkappa < 0$:

$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{\chi^+(t)} t^{k-1} dt = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa. \tag{2.10}$$

Entonces, el siguiente teorema es válido.

Teorema 2.1. *El número l de soluciones linealmente independientes y el número ρ de condiciones de solubilidad linealmente independientes del problema de frontera de Riemann* (2.2) *para un par de funciones están dadas por*

$$l = \max(0, \varkappa)\ ,\ \rho = \max(0, -\varkappa). \tag{2.11}$$

Las soluciones y las condiciones de solubilidad del problema (2.2) *son expresadas en forma explícita (por medio de las integrales de tipo de Cauchy) por las fórmulas* (2.9) *y* (2.10).

Lema 2.1. *Si Γ es un contorno simple cerrado y $t = \beta(z)$ es un mapeo conforme del disco unitario abierto sobre Γ, entonces la función*

$$k(\zeta, z) = \frac{\beta'(\zeta)}{\beta(z) - \beta(\zeta)} - \frac{1}{z - \zeta} \qquad (|\zeta| = 1,\ |z| \leq 1)$$

esta acotada de la siguiente manera

$$|k(\zeta, z)| \leq \frac{c}{|\zeta - z|^\mu}, \quad c = cte, \quad 0 < \mu < 1.$$

2.2 Problema de frontera de Carleman.

Enunciado del problema. Condiciones de solubilidad.

Formulamos el problema de frontera de Carleman para el disco unitario complejo $\mathbb{D}$:
Encontrar una función $\Phi^+(z)$ analítica en el dominio D^+, y satisface la condición de Hölder en $D^+ \cup \Gamma$, por la condición de frontera

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^+(t) + g(t) \quad \text{en } \Gamma, \tag{2.12}$$

donde $\alpha(t)$ es un desplazamiento inverso de Carleman ($\alpha_-(\alpha_-(t)) \equiv t$), y $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.
Sustituyendo t por $\alpha(t)$ en la condición (2.12) y haciendo uso de la condición $\alpha(\alpha(t)) = t$, obtenemos

$$\Phi^+(t) = G(\alpha(t))\Phi^+(\alpha(t)) + g(\alpha(t)). \tag{2.13}$$

Eliminando de (2.12) y (2.13) el valor límite $\Phi^+(\alpha(t))$, obtenemos

$$\Phi^+(t) = G(\alpha(t))G(t)\Phi^+(t) + G(\alpha(t))g(t) + g(\alpha(t)). \tag{2.14}$$

Debemos considerar dos casos, admitiendo ya sea $G(\alpha(t))G(t) \neq 1$ o que $G(\alpha(t))G(t) \equiv 1$, $t \in \Gamma$. El caso $G(\alpha(t))G(t) - 1 = 0$ en el subconjunto de medida cero será también de interés, pero por ahora no tiene que ser estudiado.
Supongamos que

$$G(\alpha(t))G(t) \neq 1 \quad , \quad t \in \Gamma. \tag{2.15}$$

Es fácil ver, de (2.14), que el problema homogéneo

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^+(t)$$

no tiene soluciones no triviales. Ahora, considere el problema no homogéneo (2.12). Entonces, de (2.14), obtenemos

$$\Phi^+(t) = \frac{G(\alpha(t))g(t) + g(\alpha(t))}{1 - G(\alpha(t))G(t)} = \nu(t).$$

Obviamente $\nu(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Por lo tanto la función $\nu(t)$ puede representarse en la forma $\nu(t) = \nu(t)^+ - \nu^-(t)$, donde $\nu^+(t)$ y $\nu^-(t)$ son los valores límite en Γ de funciones analíticas en D^+ y D^-, respectivamente. Así, bajo la condición (2.15), dos casos son posibles:

1. $\nu^-(t) \equiv 0$, es decir, $\nu(t)$ es el valor límite de una función analítica y este problema tiene una única solución

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\nu(t)}{\tau - z}d\tau.$$

2. $\nu^-(t) \neq 0$. En este caso, el problema (2.12) no es soluble.

Ahora supongamos que

$$G(\alpha(t))G(t) = 1, \qquad t \in \Gamma \tag{2.16}$$

Aquí también hay dos posibles casos:

1. $G(\alpha(t))g(t) + g(\alpha(t)) \neq 0$ en un subconjunto de medida no nula de Γ. En este caso, problema (2.12) no es soluble para la clase de funciones considerada, ya que ahí no existen valores límites de la función $\Phi^+(z)$ en el subconjunto de Γ de medida no nula.

2.

$$G(\alpha(t))g(t) + g(\alpha(t)) \equiv 0, \qquad t \in \Gamma. \tag{2.17}$$

Nuestro análisis muestra que la teoría del problema (2.12) es trivial en todos los casos considerados hasta ahora excepto los casos donde las condiciones (2.16) y (2.17) se satisfacen simultáneamente, y justo esos casos vamos a considerar a continuación.

Note que las funciones

$$G(t) = \frac{h_1(\alpha(t))}{h_1(t)} \text{ y } g(t) = \frac{h_2(t) - h_2(\alpha(t))}{h_1(t)},$$

donde $h_1(t), h_2(t)$ son cualesquiera funciones en $H_\mu(\Gamma)$ con $h_1(t) \neq 0$, satisfacen las condiciones (2.16) y (2.17).

Representaciones integrales. Solución del problema-salto de frontera de Carleman (interior)

En este punto deducimos representaciones integrales para cualesquiera funciones analíticas en un dominio acotado simplemente conexo D^+, con frontera Γ, y satisface la condición de Hölder en $D^+ \cup \Gamma$. Si tenemos presente sólo aquellas necesidades que surgen en la solución del problema (2.12), entonces es suficiente conseguir una representación integral para una función analítica en un dominio. En esta sección $\alpha(t)$ es un desplazamiento inverso. Los casos en los que $\alpha(t)$ satisface la condición de Carleman serán especificados.

Lema 2.2. *Los problemas de frontera*

$$\Phi_1^+(\alpha(t)) = \lambda\Phi_2^+(t) \quad , \quad \lambda = \pm 1. \tag{2.18}$$

no tienen otras soluciones aparte de constantes arbitrarias.

Demostración. Aplicando la proyección $P_- = (I - S)/2$ a Φ_1^+ y Φ_2^+ tenemos las igualdades

$$\Phi_1^+(t) = \frac{1}{2}\Phi_1^+(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi_1^+(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0 \tag{2.19}$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{1}{2}\Phi_2^+(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi_2^+(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0 \tag{2.20}$$

Haciendo una sustitución $t \mapsto \alpha(t)$ y $\tau \mapsto \alpha(\tau)$ en (2.19), obtenemos

$$\frac{1}{2}\Phi_1^+(\alpha(t)) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\Phi_1^+(\alpha(\tau))d\tau = 0. \tag{2.21}$$

Usando la condición (2.18), de (2.21) obtenemos

$$\frac{\lambda}{2}\Phi_2^+(t) + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\Phi_2^+(\tau)d\tau = 0. \tag{2.22}$$

Sumamos (2.20) y (2.22) dividido por λ, tenemos

$$\Phi_2^+(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\Phi_2^+(\tau)d\tau = 0 \tag{2.23}$$

La ecuación (2.23), ya que el operador integral definido por

$$(K\Phi_2^+)(\tau) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\Phi_2^+(\tau)d\tau,\ \tau \in \Gamma,$$

es compacto de acuerdo al Lema 2.1, es una ecuación de Fredholm. Por lo tanto tiene un número finito de soluciones linealmente independientes. Si $\Phi_2^+(t)$ no es una constante, tenemos que el problema

$$\Phi_1^+(\alpha(t)) = \lambda\Phi_2^+(t)$$

también tiene soluciones $(\Phi_1^+)^k(t)$ y $(\Phi_2^+)^k(t)$ para todos $k \in \mathbb{N}$. Tenemos una contradicción. □

Lema 2.3 es probado análogamente.

Lema 2.3. *Los problemas de frontera para una dominio no acotado D^-*

$$\Phi_1^-(\alpha(t)) = \lambda\Phi_2^-(t) \quad , \quad \lambda = \pm 1. \tag{2.24}$$

no tienen otras soluciones aparte de constantes arbitrarias en la clase de funciones analíticas acotadas en infinito y no tienen soluciones no triviales en la clase de funciones analíticas que desaparecen en infinito.

El siguiente resultado es consecuencia directa de los Lemas 2.2 y 2.3.

Lema 2.4. *Los problemas de frontera*

$$\Phi^+(\alpha(t)) = \lambda\Phi^+(t) \quad , \quad \lambda = \pm 1.$$

no tienen otras soluciones aparte de constantes en D^+, y esta constante igual a cero si $\lambda = -1$. Los problemas de frontera

$$\Phi^-(\alpha(t)) = \lambda\Phi^-(t) \quad , \quad \lambda = \pm 1.$$

no tienen soluciones acotadas en infinito aparte de constantes, esta constante igual a cero si $\lambda = -1$, y no tiene soluciones no triviales que satisfacen la condición $\Phi^-(\infty) = 0$.

Lema 2.5. *La ecuación integral canónica de Fredholm*

$$\left(\mathcal{L}_-\varphi\right)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\varphi(\tau)d\tau = 0 \tag{2.25}$$

no tiene soluciones no triviales.

Demostración. Sea $\varphi(t)$ una solución de la ecuación (2.25). Consideramos las integrales de tipo Cauchy

$$\Phi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau \quad , \quad z \in D^+$$
$$\Phi_2^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \quad , \quad z \in D^+,$$

donde $\alpha_{-1}(t)$ es el homeomorfismo inverso de $\alpha(t)$. Es fácil ver que $\left(\mathcal{L}_-\varphi\right)(t) \equiv \Phi_1^+(\alpha(t)) - \Phi_2^+(t) = 0$. Del Lema 2.2, obtenemos que $\Phi_1^+(z) - \Phi_2^+(z) = c$, donde c es una constante arbitraria. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau)) - c}{\tau - z}d\tau \equiv 0 \quad , \quad z \in D^+,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) + c}{\tau - z}d\tau \equiv 0 \quad , \quad z \in D^+. \tag{2.26}$$

Se sigue de las identidades (2.26) que las funciones $\varphi(\alpha_{-1}(t)) - c$ y $\varphi(t) + c$ son valores límite de funciones analíticas en el dominio D^- y desaparecen en infinito, es decir

$$\varphi(\alpha_{-1}(t)) - c = \psi_1^-(t) \quad , \quad \varphi(t) + c = \psi_2^-(t)\, , \, \psi_i^-(\infty) = 0 \quad , \quad i = 1, 2.$$

Eliminando la función $\varphi(t)$ de esas igualdades, obtenemos el problema de frontera

$$\psi_1^-(\alpha(t)) = \psi_2^-(t) - 2c \tag{2.27}$$

cuya solución debe encontrarse en la clase de funciones que desaparecen en infinito. La condición de frontera (2.27) puede ser reescrita en la forma de un problema homogéneo, llamémosle

$$W_1^-(\alpha(t)) = W_2^-(t)\,, \tag{2.11'}$$

donde $W_1^-(z) = \psi_1^-(z) + c$, $W_2^-(z) = \psi_2^-(z) - c$. De acuerdo al Lema 2.3, la solución general del problema (2.11') es una constante: $W_1^-(z) = W_2^-(z) = c_1$. Usando las condiciones $\psi_i^-(\infty) = 0$, $i = 1, 2$, obtenemos $c_1 = c$ y $c_1 = -c$, es decir, $c_1 = c = 0$. Por lo tanto $\psi_1^-(z) = W_1^-(z) - c = c_1 - c = 0$, $\psi_2^-(z) = W_2^-(z) + c = c_1 + c = 0$. En consecuencia $\varphi(t) \equiv 0$. □

Sea $\alpha(t)$ un desplazamiento de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$). Consideramos la ecuación integral de Fredholm no homogenea

$$(\mathcal{L}_-\varphi)(t) = g(t) \tag{2.28}$$

suponiendo que la función $g(t)$ satisface una de las condiciones:

$$g(\alpha(t)) + \lambda g(t) = 0\,, \quad \text{con } \lambda = +1 \quad \text{ó} \quad \lambda = -1\,. \tag{2.29}$$

Lema 2.6. *Si $\alpha(t)$ es un desplazamiento inverso de Carleman y la parte derecha de la ecuación* (2.28) *obedece una de las identidades* (2.29)*, entonces la ecuación* (2.28) *tiene una única solución, y esta solución satisface una de las condiciones*

$$\varphi(\alpha(t)) + \lambda\varphi(t) = 0 \quad , \quad \lambda = \pm 1\,. \tag{2.30}$$

Demostración. Usando las condiciones (2.30) encontramos por examinación directa que si $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación (2.28) entonces la función $\varphi_*(t) = -\lambda\varphi(\alpha(t))$ es también una solución de esa ecuación. De acuerdo con Lema 2.5 y la alternativa de Fredholm, se sigue que si la ecuación no homogenea (2.28) es soluble ciertamente, entonces tiene una única solución $\varphi(t)$. Puesto que la función $\varphi_*(t)$ es también una solución de la ecuación (2.28), $\varphi(t) = \varphi_*(t)$ y llegamos a la condición (2.30). □

Basado en los Lemas 2.2-2.6 deducimos una representación integral para funciones que son analíticas en un dominio simplemente conexo D^+ con frontera Γ.

Teorema 2.2. (Representaciones integrales para un par de funciones analíticas en un dominio acotado simplemente conexo) *Sea $\alpha(t)$ un homeomorfismo que cambia orientación de Γ sobre sí mismo y $\alpha_{-1}(t)$ es el homomorfismo inverso. Cualesquiera dos funciones $\Phi_1^+(z)$ y $\Phi_2^+(z)$, analíticas en el dominio D^+ y que tienen en Γ los valores límite Φ_1^+, $\Phi_2^+ \in H_\mu(\Gamma)$, admiten una de dos representaciones integrales*

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau + C, \\ \Phi_2^+(z) &= -\frac{\lambda}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau + \lambda C, \quad \lambda = \pm 1\,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde la densidad $\varphi(t)$ y C son determinadas unívocamente por las funciones dadas $\Phi_1^+(z)$ y $\Phi_2^+(z)$.

Demostración. En vista del Lema 2.5 y la alternativa de Fredholm existe una única solución de las ecuaciones integrales de Fredholm

$$(\mathcal{L}_-\varphi)(t) = \Phi_1^+(\alpha(t)) - \lambda\Phi_2^+(t)\,, \quad \lambda = \pm 1. \tag{2.32}$$

Suponga que

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau\,, \quad z \in D^+\,, \\ \Psi_2^+(z) &= -\frac{\lambda}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau\,, \lambda = \pm 1\,, \quad z \in D^+\,. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (2.32) puede ser escrita en la forma

$$\Phi_1^+(\alpha(t)) - \Psi_1(\alpha(t)) = \lambda[\Phi_2^+(t) - \Psi_2^+(t)]. \tag{2.33}$$

Usando el Lema 2.2, de (2.33) deducimos que

$$\Phi_1^+(z) = \Psi_1^+(z) + C \quad , \quad \Phi_2^+(z) = \Psi_2^+(z) + \lambda C\,.$$

La constante C es determinada unívocamente porque la densidad $\varphi(t)$ (y las funciones $\Psi_1^+(z)$ y $\Psi_2^+(z)$) estan determinadas unívocamente por las funciones dadas $\Phi_1^+(z)$ y $\Phi_2^+(z)$.
□

Las representaciones integrales para una función analítica en un dominio D^+ son casos particulares de las representaciones (2.31) y pueden deducirse de estas.

Teorema 2.3. (Representaciones integrales para una función analítica en un dominio acotado simplemente conexo) *Sea $\alpha(t)$ un desplazamiento inverso de Carleman. Cualquier* *función* $\Phi^+(z)$*, analítica en el dominio* D^+ *y que tiene en cualquier parte en* Γ *valores límite* $\Phi^+(t) \in H_\mu(\Gamma)$*, puede ser representada ya sea por la fórmula*

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - z} d\tau + C\,, \tag{2.34}$$

o por la fórmula

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - z} d\tau\,, \tag{2.35}$$

donde las densidades $\varphi(\alpha(t))$ *en* (2.34) *y* (2.35) *y la constante* C *son determinadas unívocamente por la función dada* $\Phi^+(z)$*, y la condición*

$$\varphi(\alpha(t)) + \varphi(t) = 0 \tag{2.36}$$

se sostiene para la densidad de la representación (2.34)*, y la condición*

$$\varphi(\alpha(t)) - \varphi(t) = 0 \tag{2.37}$$

se sostiene para la densidad de la representación (2.35)*.*

Demostración. Llegamos a las representaciones integrales (2.34) y (2.35) como casos particulares de la representación (2.31) para $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, respectivamente. Suponemos que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ y $\Phi_1^+(z) \equiv \Phi_2^+(z)$. Entonces la parte derecha de las ecuaciones de Fredholm

$$(\mathcal{L}_-\varphi)\,(t) \equiv \Phi^+(\alpha(t)) - \lambda\Phi^+(t) \equiv g_\lambda(t) \quad , \quad \lambda = \pm 1\,,$$

saisface las condiciones $g_\lambda(\alpha(t)) + \lambda g_\lambda(t) = 0$. En vista del Lema 2.6, obtenemos $\varphi(\alpha(t)) + \lambda\varphi(t) = 0$. De esto sigue que las funciones $\Psi_1^+(z)$ y $\Psi_2^+(z)$ coinciden. Puesto que $\Phi_1^+(z) \equiv \Phi_2^+(z)$ y $\Psi_1^+(z) \equiv \Psi_2^+(z)$, $C = 0$ para $\lambda = -1$. □

Vamos a aplicar este resultado para resolver dos de los problemas de frontera de Carleman más simples no homogeneos:

$$1) \qquad \Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^+(t) = g(t), \tag{2.38}$$

donde de acuerdo a la condición (2.17)

$$g(\alpha(t)) + g(t) = 0. \tag{2.39}$$

$$2) \qquad \Phi^+(\alpha(t)) + \Phi^+(t) = g(t), \tag{2.40}$$

donde

$$g(\alpha(t)) - g(t) = 0. \tag{2.41}$$

Teorema 2.4. *Las soluciones generales de los problemas de frontera de Carleman*

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \lambda\Phi^+(t) = g(t) \quad , \quad \lambda = \pm 1,$$

donde la parte derecha $g(t)$ satisface las condiciones

$$g(\alpha(t)) + \lambda g(t) = 0 \quad , \quad \lambda = \pm 1,$$

están dadas por las fórmulas

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - z} d\tau + C \quad , \quad si\ \lambda = 1, \tag{2.42}$$

y

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - z} d\tau \quad , \quad si\ \lambda = -1, \tag{2.43}$$

donde C es una arbitraria constante compleja, y $\varphi(t)$ es la solución de la ecuación integral de Fredholm $(\mathcal{L}_-\varphi)(t) = g(t)$.

Demostración. Por ejemplo, consideramos el problema salto de Carleman (2.38). De acuerdo con Teorema 2.3 vamos a encontrar una solución en la forma (2.34), donde la densidad φ satisface la condición (2.36). Calculando los valores límite $\Phi^+(\alpha(t))$ y $\Phi^+(t)$ y tomando en cuenta la condición (2.36), reducimos el problema (2.38) a la equación integral de Fredholm $(\mathcal{L}_-\varphi)(t) = g(t)$. Puesto que la condición (2.39) se sostiene, de acuerdo con Lema 2.6 concluimos que la solución de la ecuación $(\mathcal{L}_-\varphi)(t) = g(t)$ realmente satisface la condición (2.36). Por lo tanto, la aplicación de la representación integral (2.34) es correcta. Ahora encontramos la densidad de la representación integral y junto con la solución (2.42) de la ecuación $(\mathcal{L}_-\varphi)(t) = g(t)$, la cual es incondicionalmente y unívocamente soluble. En el caso del problema (2.40) el razonamiento es análogo. □

Teorema de adhesión conforme.

Basado en los resultados de las dos subsecciones anteriores probamos aquí un *teorema de adhesión conforme* mediante el cual el problema de frontera de Carleman (1) será reducido al problema de frontera de Riemann en una curva abierta.

Sea Ω un dominio, es decir, una región encerrada por una curva cerrada simple. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es llamada *univalente* (inyectiva o uno a uno) si $f(z_1) \neq f(z_2)$ donde $z_1, z_2 \in \Omega$ con $z_1 \neq z_2$.

Teorema 2.5. (Sobre adhesión conforme) *Sea $\alpha(t)$ un desplazamiento inverso de Carleman. Existe una función $\omega^+(z)$ analítica en el dominio D^+ excepto para algún punto $z = z_0 \in D^+$, donde $\omega^+(z)$ tiene un polo simple y $\omega^+(z)$ satisface la condición de adhesión*

$$\omega^+(\alpha(t)) = \omega^+(t) \tag{2.44}$$

en la frontera de Lyapunov Γ del dominio D^+. La función $\omega^+(z)$ es un mapeo conforme y univalente del dominio D^+ con frontera de Lyapunov Γ sobre un dominio Δ el cual es el plano complejo cortado por un curva abierta simple de Lyapunov.

Demostración. Se sigue del Lema 2.4 que el problema de frontera (2.44) no tiene otras soluciones aparte de constantes en la clase de funciones analíticas. Obviamente tal solución no nos da un mapeo con las propiedades indispensables. Entonces vamos a encontrar una solución del problema (2.44) en la clase de funciones que poseen un polo simple en algún punto fijo $z_0 \in D^+$, esto es

$$\omega^+(z) = \frac{1}{z - z_0} + \Psi^+(z), \tag{2.45}$$

donde $\Psi^+(z)$ es una función analítica en el dominio D^+. Usando la representación (2.45) y la condición (2.44), obtenemos el problema salto de Carleman

$$\Psi^+(\alpha(t)) - \Psi^+(t) = \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{\alpha(t) - z_0} \tag{2.46}$$

para encontrar la función $\Psi^+(z)$. Note que la condición de solubilidad (2.39) se cumple para la función $g(t) = \frac{1}{t-z_0} - \frac{1}{\alpha(t)-z_0}$. Por lo tanto, en vista del Teorema 2.4, una solución del problema (2.46) es dada por (2.42). Sustituyendo $\Psi^+(z)$ en (2.45), obtenemos una solución del problema de frontera (2.44) en la clase de funciones que poseen un polo simple en D^+. El valor límite de la solución $\omega^+(t)$ satisface una condición de Hölder en la frontera Γ del dominio D^+.

Vamos a analizar el comportamiento del mapeo realizado por la función $\omega^+(z)$. El desplazamiento inverso $\alpha(t)$ tiene dos puntos fijos en Γ, digamos $t = A$ y $t = B$. La curva Γ es dividida por esos puntos en dos arcos que no se intersectan (A, B) y (B, A). Marcamos (A, B) y (B, A), corren en dirección positiva (sentido contrario a las manecillas del reloj), por Γ_+ y Γ_-, respectivamente. En virtud de las condiciones (2.44) y (2.45), la función $\omega^+(z)$ mapea el dominio D^+ sobre un dominio Δ que contiene a infinito, tal que los puntos t y $\alpha(t)$ del contorno Γ estan pegados en el mismo punto $w = \omega^+(t) = \omega^+(\alpha(t))$ del nuevo contorno L. Este último es un arco abierto con extremos $a = \omega^+(A)$ y $b = \omega^+(B)$. Si el punto t recorre el arco Γ_+ desde A hasta B, y luego t recorre el arco Γ_- desde B

hasta A, entonces el punto $w = \omega^+(t)$ recorre el arco L dos veces: desde $a = \omega^+(A)$ hasta $b = \omega^+(B)$ y luego desde b hasta a. Por lo tanto $\omega^+(z)$ mapea el dominio D^+ acotado por la curva Γ sobre el plano complejo Δ con el corte $L = (a, b)$, y las imágenes $\omega^+(\Gamma_+)$ y $\omega^+(\Gamma_-)$ son los lados opuestos del corte L.

Vamos a probar que el mapeo $\omega^+(z) : D^+ \to \Delta$ es univalente, esto es, para un arbitrario punto $\omega_* \in \Delta$ existe sólo un punto $z_* \in D^+$ tal que $\omega^+(z_*) = \omega_*$. De acuerdo a la condición (2.44)

$$\omega^+(\alpha(t)) - \omega_* = \omega^+(t) - \omega_*. \tag{2.47}$$

Puesto que $\omega_* \in \Delta$, $\omega^+(t) - \omega_* \neq 0$ para $t \in \Gamma$. Debemos probar que la función $\omega^+(z) - \omega_*$ tiene sólo un cero en D^+. Suponga que el número de ceros de la función $\omega^+(z) - \omega_*$ es infinito. Entonces esos ceros tienen al menos un punto límite $t_* \in \Gamma$. Puesto que la función $\omega^+(z)$ es continuamente extendible a Γ, el punto $\omega_* = \omega^+(t_*)$ pertenece a la frontera L del dominio Δ. Pero esto contradice la elección del punto ω_* dentro de Δ. Por lo tanto, la función $\omega^+(z) - \omega_*$ tiene sólo un número finito de ceros en el dominio D^+. Más aún, esta función tiene un polo de primer orden en el punto $z_0 \in D^+$. Calculando el índice de Cauchy de ambas partes de la ecuación (2.47) obtenemos la relación $-n + 1 = n - 1$, esto es, $n = 1$ y así $\omega^+(z)$ es univalente.

Ahora probamos que la derivada $\frac{d\omega^+(t)}{dt}$ existe y que $\frac{d\omega^+(t)}{dt} \in H_\mu(\Gamma)$. Para este fin consideramos el problema de frontera homogéneo de Carleman

$$X^+(\alpha(t)) = \tilde{G}(t) X^+(t), \tag{2.48}$$

donde

$$\tilde{G}(t) = \frac{[\alpha(t) - z_0]^2 (t - A)(t - B)}{\alpha'(t)(t - z_0)^2 (\alpha(t) - A)(\alpha(t) - B)}, \tag{2.49}$$

$$\tilde{G}(A) = \lim_{t \to A} \tilde{G}(t) = 1 \quad , \quad \tilde{G}(B) = \lim_{t \to B} \tilde{G}(t) = 1,$$

Es fácil ver que $\tilde{G}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, y que $\tilde{G}(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Tomando en cuenta que

$$\alpha'(\alpha(t))\alpha'(t) = 1, \tag{2.50}$$

lo cual se sigue de la condición de Carleman $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, también obtenemos

$$\tilde{G}(t)\tilde{G}(\alpha(t)) = 1.$$

Calculamos el índice de Cauchy del coeficiente $\tilde{G}(t)$. Tenemos

$$\{\arg(t - A)\}_\Gamma = \pi \quad , \quad \{\arg(t - B)\}_\Gamma = \pi,$$

$$\{\arg(\alpha(t) - A)\}_\Gamma = -\pi \quad , \quad \{\arg(\alpha(t) - B)\}_\Gamma = -\pi.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{t-A}{\alpha(t)-A}\right\}_{\Gamma}=\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{t-B}{\alpha(t)-B}\right\}_{\Gamma}=1.$$

Entonces es fácil obtener de (2.49) que $\tilde{\kappa}=\frac{1}{2\pi}\{\arg\tilde{G}(t)\}_{\Gamma}=0$. En virtud de las propiedades establecidas de la función $\tilde{G}(t)$ es claro que $\ln\tilde{G}(t)$ es una función bien definida que pertenece a $H_\mu(\Gamma)$, y

$$\ln\tilde{G}(t)+\ln\tilde{G}(\alpha(t))=0. \tag{2.51}$$

Vamos a hallar la solución del problema de frontera (2.48). Tomando logaritmos en ambos lados de (2.48), llegamos a un problema salto de frontera de Carleman (2.38), donde el lado derecho $g(t)=\ln\tilde{G}(t)$ satisface la identidad (2.39), en vista de (2.51). De acuerdo al Teorema 2.4, existe una solución $\Psi^+(z)$ del mencionado problema salto y esta solución está dada por la fórmula (2.42). En consecuencia, obtenemos la solución $X_0^+(z)=e^{\Psi^+(z)}$ del problema de frontera (2.48). Obviamente, $\tilde{G}(t)=X_0^+(\alpha(t))/X_0^+(t)$.

Ahora, consideremos la función

$$\gamma^+(z)=(z-z_0)^{-2}(z-A)(z-B)cX_0^+(z), \tag{2.52}$$

donde

$$c=-\frac{1}{(z_0-A)(z_0-B)X_0^+(z_0)}.$$

La constante c es elegida tal que la función $\gamma^+(z)$ admite la expansión

$$\gamma^+(z)=-\frac{1}{(z-z_0)^2}+\cdots$$

en una vecindad del punto z_0. Obviamente, $\gamma^+(t)\in H_\mu(\Gamma)$ y es fácil verificar que la función $\gamma^+(z)$ satisface la condición de frontera

$$\gamma^+(\alpha(t))=\frac{1}{\alpha'(t)}\gamma^+(t),$$

la cual es obtenida por la diferenciación de la condición (2.44) del problema de adhesión conforme. Todavía falta probar que

$$\frac{d\omega^+(z)}{dz}=\gamma^+(z).$$

Para este fin consideramos la función $\omega_0^+(z)=\int_A^z\gamma^+(z)dz$, la cual satisface la condición de frontera (2.44). En efecto,

$$\omega_0^+(\alpha(t))=\int_A^{\alpha(t)}\gamma^+(t)dt=\int_A^t\gamma^+(\alpha(t))\alpha'(t)dt=\int_A^t\gamma^+(t)dt=\omega_0^+(t).$$

La función $\omega_0^+(z)$ puede ser representada en la forma

$$\omega_0^+(z) = \frac{1}{z - z_0} + \tilde{\omega}_0^+(z), \tag{2.53}$$

donde $\tilde{\omega}_0^+(z)$ es una función analítica en el dominio D^+. De hecho,

$$2\pi i \text{ Res } \gamma^+(z)|_{z=z_0} = \int_\Gamma \gamma^+(t)dt = -\int_\Gamma \gamma^+(\alpha(t))\alpha'(t)dt = -\int_\Gamma \gamma^+(t)dt.$$

En consecuencia, $\int_\Gamma \gamma^+(t)dt = 0$ y $\text{Res } \gamma^+(z)|_{z=z_0} = 0$. Por lo tanto, la expansión de la función $\gamma^+(z)$ en el punto $z = z_0$ tiene la forma

$$\gamma^+(z) = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + \gamma_0 + \gamma_1(z - z_0) + \cdots,$$

y (2.53) se sostiene.

De (2.45) y (2.53) se sigue que la función

$$W^+(z) = \omega^+(z) - \omega_0^+(z)$$

es analítica en el dominio D^+. Más aún, ésta satisface la condición de frontera $W^+(\alpha(t)) = W^+(t)$. De acuerdo al Lema 2.2, obtenemos $W^+(z) =$ constante. Por lo tanto

$$\frac{d\omega^+(z)}{dz} = \frac{d\omega_0^+(z)}{dz} = \gamma^+(z).$$

y de acuerdo con la prueba dada arriba,

$$\frac{d\omega^+(t)}{dt} = \gamma^+(t) \in H_\mu(\Gamma).$$

Todavía resta probar que el arco $L = (a, b)$ es una curva de Lyapunov. Denotamos las abscisas de arco de los puntos t y w de los contornos Γ y L por s y σ, respectivamente. Probamos que la función $s = s(\sigma)$ satisface una condición de Hölder. Primero elegimos valores s_1 y s_2 tales que los puntos $t_1 = t(s_1)$ y $t_2 = t(s_2)$ no coinciden con uno de los puntos fijos de $\alpha(t)$ y ellos pertenecen a uno de los arcos Γ_+ o Γ_-. Entonces, usando un procedimiento parecido a [18, Sección 7.2] obtenemos

$$|s(\sigma_2) - s(\sigma_1)| \leq \frac{1}{m} |\sigma_2 - \sigma_1|. \tag{2.54}$$

donde $m = \min\{|w'(t(s))| \,:\, s \in [s_1, s_2]\} \neq 0$, basado en la representación (2.52). Ahora, supongamos que el punto t_1 coincide con uno de los puntos fijos del desplazamiento $\alpha(t)$. De la representación (2.52) se sigue que

$$w_t'(t(s)) = [t(s) - t(s_1)]h(s),$$

donde $h(s) \neq 0$ para $s \in [s_1, s_2]$. Entonces

$$|\sigma_2 - \sigma_1| = \left| \int_{s_1}^{s_2} |t(s) - t(s_1)| \, |h(s)| \, ds \right| \geq \mu \left| \int_{s_1}^{s_2} |t(s) - t(s_1)| \, ds \right|, \tag{2.55}$$

donde $\mu = \min\{|h(s)| \,:\, s \in [s_1, s_2]\}$. Ya que la curva Γ, en cualquier caso, es suave, para cualesquiera dos puntos $t(s')$ y $t(s'')$ la desigualdad

$$|t(s'') - t(s')| \geq M \, |s'' - s'| \ , \quad M > 0$$

es válida. Por tanto

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} |t(s) - t(s_1)| \, ds \right| \geq M \left| \int_{s_1}^{s_2} |s - s_1| \, ds \right| = \frac{M(s_2 - s_1)^2}{2}. \tag{2.56}$$

De las desigualdades (2.55) y (2.56) se sigue que

$$|s(\sigma_2) - s(\sigma_1)| \leq \sqrt{\frac{2}{\mu M}} \, |\sigma_2 - \sigma_1|^{1/2} \, . \tag{2.57}$$

Desigualdades (2.54) y (2.57) muestran que la función $s = s(\sigma)$ satisface una condición de Hölder. La derivada w'_σ de la función $w = w\{t[s(\sigma)]\}$ puede ser representada en la forma

$$w'_\sigma = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = t'(s) e^{i \arg w'(t)}.$$

De lo que se ha dicho, se sigue que la función $e^{i \arg w'(t)}$, considerada como una composición de σ satisface una condición de Hölder en cualquier lado excepto para dos valores del parámetro σ correpondientes a los extremos de la curva abierta L. En esos puntos la función $e^{i \arg w'(t)}$ y junto con ella la derivada w'_σ, tiene discontinuidades acotadas. Ya que Γ es un contorno de Lyapunov, la función $t'[s(\sigma)]$ satisface una condición de Hölder en σ. De este modo, la derivada w'_σ satisface una condición de Hölder en cualquier lado en L excepto para los puntos σ_1 y σ_2 correspondientes a los extremos de la curva L. Esta condición es la condición que asegura que el arco abierto L pertenece a la clase de curvas de Lyapunov. $\square$

Solución del problema de frontera de Carleman interior.

Establecemos que la dirección positiva (de orientación) en la curva L es de $w = a$ a $w = b$. Entonces, para valores límite de la función $z(w)$, inversa de la función $\omega^+(z)$, obtenemos (de la izquierda y de la derecha, respectivamente)

$$z^+(w) = t \quad , \quad z^-(w) = \alpha(t) \quad , \quad w \in L \ , \ t \in \Gamma_+, \tag{2.58}$$

o, lo que es lo mismo, en virtud de la condición de Carleman $\alpha(\alpha(t)) = t$,

$$z^+(w) = \alpha(t) \quad , \quad z^-(w) = t \quad , \quad w \in L \ , \ t \in \Gamma_-. \tag{2.59}$$

Usando (2.58) reescribimos la condición de frontera de Carleman para $t \in \Gamma_+$ en la forma

$$\Phi^+(z^-(w)) = G(z^+(w))\Phi^+(z^+(w)) + g(z^+(w)).$$

Introduciendo una nueva función desconocida $\Phi_1^+(\omega)$ por la igualdad

$$\Phi_1^+(\omega) = \Phi^+(z(\omega)), \tag{2.60}$$

tenemos

$$\Phi^+(z^+(w)) = \Phi_1^+(w) \quad , \quad \Phi^+(z^-(w)) = \Phi_1^-(w).$$

De esta manera, obtenemos una condición de frontera de Riemann en la curva L para la función $\Phi_1(\omega)$:

$$\Phi_1^-(w) = G(z^+(w))\Phi_1^+(w) + g(z^+(w)) \tag{2.61}$$

Si usamos la relación (2.59) ($t \in \Gamma_-$) entonces obtenemos otro problema de frontera de Riemann en la curva L

$$\Phi_1^+(w) = G(z^-(w))\Phi_1^-(w) + g(z^-(w)). \tag{2.62}$$

Mostramos que las condiciones de frontera (2.61) y (2.62) coinciden. Para este fin, transformamos la condición de frontera (2.61) a la forma

$$\Phi_1^+(w) = \frac{1}{G(z^+(w))}\Phi_1^-(w) - \frac{g(z^+(w))}{G(z^+(w))},$$

y entonces usamos las condiciones de solubilidad (2.16) y (2.17), las cuales pueden ser escritas como (ver (2.58) y (2.59)):

$$G(z^-(w))G(z^+(w)) = 1,$$
$$G(z^-(w))g(z^+(w)) + g(z^-(w)) = 0.$$

Por tanto, el problema de frontera de Carleman (2.12) en un contorno cerrado Γ es reducido al problema de frontera de Riemann (2.62) en un contorno abierto L. Esto es necesario encontrar la solución al problema de Riemann (2.62) en la clase de funciones acotadas en los puntos $w = a$ y $w = b$ y en infinito. En efecto, la acotación de la solución $\Phi_1(\omega) = \Phi^+(z(\omega))$ en las vecindades de $w = a$ y $w = b$ siguen de la acotación de $\Phi^+(z)$

en las vecindades de $z = A$ y $z = B$. La acotación de la solución $\Phi_1^+(\omega)$ en infinito es una consecuencia del hecho de que $\Phi_1(\infty) = \Phi^+(z_0)$ es un numero finito diferente de cero. Por lo tanto, la solución del problema de frontera de Carleman (2.12) es reducido a la solución del problema de frontera de Riemann (2.62) en la clase de funciones referida.
Sea $\kappa = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma$ el índice de Cauchy del coeficiente $G(t)$ en la curva Γ. Ahora calculamos el índice de Cauchy del coeficiente $G(z^-(w))$ del problema de Riemann (2.62) en la curva L. Note que si un punto w recorre la curva L en la dirección positiva (desde a hasta b), entonces el punto $z^-(w)$ recorre la curva Γ_- en la dirección (desde A hasta B). Por lo tanto

$$\{\arg G(z^-(w))\}_L = -\{\arg G(t)\}_{\Gamma_-}. \tag{2.63}$$

Tomando en cuenta que si un punto t recorre Γ_- en la dirección positiva, entonces el punto $\alpha(t)$ recorre Γ_+ en la dirección negativa, obtenemos de la condición (2.16):

$$\begin{aligned} 0 &= \{\arg[G(t)G(\alpha(t))]\}_{\Gamma_-} = \{\arg G(t)\}_{\Gamma_-} + \{\arg G(\alpha(t))\}_{\Gamma_-} \\ &= \{\arg G(t)\}_{\Gamma_-} - \{\arg G(t)\}_{\Gamma_+}, \quad \text{esto es }, \{\arg G(t)\}_{\Gamma_+} = \{\arg G(t)\}_{\Gamma_-}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\{\arg G(t)\}_\Gamma = \{\arg G(t)\}_{\Gamma_+} + \{\arg G(t)\}_{\Gamma_-} = 2\{\arg G(t)\}_{\Gamma_-}. \tag{2.64}$$

De (2.63) y (2.64) se sigue que

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg G(z^-(w))\}_L = -\frac{\kappa}{2}. \tag{2.65}$$

De la condición (2.16) se sigue que $G^2(A) = 1$, $G^2(B) = 1$. Po lo tanto, en los puntos fijos $t = A$ y $t = B$ la función $G(t)$ toma uno de los dos valores: $+1$ o -1. El coeficiente $G(z^-(w))$ del problema de Riemann (2.62) toma los mismos valores en los puntos extremos a y b (correspondientes a A y B) del contorno L.
La igualdad (2.64) muestra que $\kappa = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma = 2k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ si

$$\{\arg G(t)\}_{\Gamma_-} = \arg G(B) - \arg G(A) = 2k\pi \tag{2.66}$$

y $\kappa = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma = 2k + 1$ si

$$\{G(t)\}_{\Gamma_-} = \arg G(B) - \arg G(A) = (2k+1)\pi. \tag{2.67}$$

Si (2.66) se satisface entonces $G(A) = G(B) = \pm1$, y si (2.67) se satisface entonces $G(A) = -G(B) = \pm1$.
Así, los siguientes casos son posibles:

1) κ es un número par, y $G(A) = G(B) = 1$,

2) κ es un número par, y $G(A) = G(B) = -1$,

3) κ es un número impar, y $G(A) = -G(B) = 1$,

4) κ es un número impar, y $G(A) = -G(B) = -1$.

Ahora calculamos el índice $\tilde{\kappa}$ del problema de frontera de Riemann (2.62) en la clase de funciones acotadas en ambos puntos extremos de L para cada caso 1) - 4), (ver [18, Subsección 5.2]). En la clase de funciones referida la elección de la rama de $\theta = \arg G(A)$ es definida por la condición $-2\pi < \theta \leq 0$. En virtud de (2.65), obtenemos para Δ (ver [18, Subsección 5.2]):

$$\Delta = \{\arg G(z^-(w))\}_\Gamma = -\kappa\pi.$$

En el caso 1) ambos extremos $a = \omega^+(A)$ y $b = \omega^+(B)$ son especiales, es decir, $G(A)$ y $G(B)$ son números positivos. Junto con esto $\theta = \arg G(A) = 0$, $\tilde{\kappa} = (0 - \kappa\pi)/2\pi = -\frac{\kappa}{2}$. En el caso 2) ambos extremos a y b no son especiales, y $\arg G(A) = -\pi$, $\tilde{\kappa} = E(\frac{-\pi-\kappa\pi}{2\pi}) = -\frac{\kappa+2}{2}$. En el caso 3) el extremo $w = a$ es especial y el extremo $w = b$ no es especial, y $\arg G(A) = 0$, $\tilde{\kappa} = E(-\frac{\kappa}{2}) = -\frac{\kappa+1}{2}$. En el caso 4) el extremo a no es especial y el extremo b es especial, y $\arg G(A) = -\pi$, $\tilde{\kappa} = -\frac{\kappa+1}{2}$. No es difícil escribir una fórmula común para el índice $\tilde{\kappa}$ válida en todos los cuatro casos. Para este fin denotamos el número de extremos no especiales por m^- o, lo que es lo mismo, m^- es el número de puntos fijos del desplazamiento $\alpha(t)$ en los cuales el coeficiente $G(t)$ toma el valor -1. El número m^- puede tomar sólo uno de los tres valores: 0, 1, 2, siendo ya sea $m^- = 0$ o $m^- = 2$ si κ es par y $m^- = 1$ si κ es impar.
Así, en cada posible caso el índice del problema de Riemann (2.62), en la clase de funciones acotadas en ambos extremos, es calculado por la fórmula $\tilde{\kappa} = -\frac{\kappa+m^-}{2}$. Tomando en cuenta la conección, establecida arriba, entre los problemas de frontera (2.12) y (2.62) y también el Teorema 5.2, sobre la solubilidad del problema de frontera de Carleman (2.12), tenemos lo siguiente.

Teorema 2.6. *Si $\kappa + m^- \leq 0$, entonces el número l para el problema de frontera de Carleman homogéneo es calculado por la fórmula*

$$l = 1 - \frac{\kappa + m^-}{2},$$

y el correspondiente problema de Carleman no homogéneo es soluble incondicionalmente. Si $\kappa + m^- > 0$*, entonces el problema de Carleman homogéneo no tiene soluciones no triviales (*$l = 0$*), y existe un número*

$$\rho = \frac{\kappa + m^-}{2} - 1$$

de condiciones para la solubilidad del correspondiente problema no homogéneo.
La solución general del problema de frontera de Carleman es obtenida de la solución general del correspondiente problema de frontera de Riemann por la fórmula $\Phi^+(z) = \Phi_1^+(\omega^+(z))$*. La continuidad de la solución* $\Phi^+(z)$ *en los puntos fijos* $z = A$ *y* $z = B$ *es asegurada por las condiciones*

$$\Phi_1^+(a+0) = \Phi_1^-(a-0) = \Phi_1(a)\,,$$
$$\Phi_1^+(b-0) = \Phi_1^-(b+0) = \Phi_1(b),$$

las cuales se satisfacen por la solución del problema de Riemann (2.62) *en la clase de funciones considerada.*

CAPÍTULO 3

Factorización de Wiener-Hopf.

3.1 Definiciones.

Sea Γ una curva simple. Para un punto $t \in \Gamma$ y un número $\varepsilon \in (0, \infty)$, $\Gamma(t, \varepsilon) := \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$ es la porción de Γ contenida en el disco abierto de radio ε centrado en t. El cojunto $\Gamma(t, \varepsilon)$ es una unión a lo más numerable de arcos. Si todos esos arcos son rectificables y la suma de sus longitudes es un número finito, decimos que $\Gamma(t, \varepsilon)$ es *rectificable.* Si Γ es una curva compuesta (unión de dos o más curvas simples) la definición es la misma.

Una curva de Jordan es una curva cerrada simple. La curva Γ se llama *curva de Carleson* si

$$C_\Gamma := \sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{|\Gamma(t, \varepsilon)|}{\varepsilon} < \infty.$$

Si una curva de Jordan es una curva de Carleson, entonces se le llama curva de Jordan-Carleson. Sea Γ una curva de Jordan-Carleson. Una función medible $w : \Gamma \to [0, \infty]$ es llamada un *peso* si la preimagen $w^{-1}(\{0, \infty\})$ tiene medida cero. De esta manera, un peso es finito y no cero en casi todas partes. Definimos los espacios de Lebesgue con peso $L^p(\Gamma, w)$ $(1 < p < \infty)$ con la norma

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int_\Gamma |f(\tau)|^p \, w(\tau)^p \, |d\tau| \right)^{1/p}.$$

Fijamos $p \in (1, \infty)$. En lo que sigue, definimos $q \in (1, \infty)$ por $1/p + 1/q = 1$. Un peso $w \in A_p(\Gamma)$ que satisface la condición

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t,\varepsilon)} w^p(\tau) \, |d\tau| \right)^{1/p} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t,\varepsilon)} w^{-q}(\tau) \, |d\tau| \right)^{1/q} < \infty$$

se le llama *peso de Muckenhoupt.*

Una función f analítica en D^+ con la frontera $\Gamma = \partial D^+$ está en la *clase de Smirnov* $E^p(D^+)$ $(1 < p < \infty)$ si existe una sucesión de curvas rectificables de Jordan $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ en D^+ que tienden a la frontera Γ en el sentido que Γ_n eventualmente rodea cada subconjunto compacto de D^+ tal que

$$\sup_{n\geq 1} \int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| < \infty. \tag{3.1}$$

Se puede demostrar que una función analítica $f : D^+ \to \mathbb{C}$ pertenece a $E^p(D^+)$ si y sólo si

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty$$

donde $\Gamma_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\})$.

Se puede demostrar que cada función $f \in E^p(D^+)$ tiene límite no tangencial en casi todo Γ y que la función frontera pertenece a $L^p(\Gamma)$. Denotamos por $E^p_+(\Gamma)$ a la colección de todas las funciones límite de funciones en $E^p(D^+)$ y por

$$B_+ : E^p(D^+) \to E^p_+(\Gamma)$$

el operador lineal que envía $f \in E^p(D^+)$ a su función límite en $E^p_+(\Gamma)$. Se puede mostrar que E^p_+ es un subespacio cerrado de $L^p(\Gamma)$ para todo $p \in [1, \infty)$. Claramente $E^1(D^+) \supset E^p(D^+)$ y así $E^1(\Gamma) \supset E^p(\Gamma)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Definimos la *integral de Cauchy*:

$$\left(C_{\pm}\right)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau \qquad \left(z \in D^{\pm}\right), \tag{3.2}$$

entonces C_+ manda $E^p_+(\Gamma)$ biyectivamente sobre $E^p(D^+)$ y $B^+C^+ = I$, $C^+B^+ = I$.

Teorema 3.1. *[4, Teorema 6.2] Para cada curva rectificable de Jordan* Γ*,*

$$E^1_+(\Gamma) = \left\{ g \in L^1(\Gamma) \,:\, \int_{\Gamma} g(\tau)\tau^n d\tau = 0 \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots \right\} \tag{3.3}$$

$$= \left\{ g \in L^1(\Gamma) \,:\, \left(C_- g\right)(z) = 0, \left(z \in D^-\right) \right\}. \tag{3.4}$$

Denotamos por $\mathcal{R}(\Gamma)$ las funciones racionales sin polos en Γ. $\mathcal{R}_+(\Gamma)$ las funciones en $\mathcal{R}(\Gamma)$ que no tienen polos en D^+, y definimos $\mathcal{R}_-(\Gamma)$ como el conjunto de funciones en $\mathcal{R}(\Gamma)$ que no tienen polos en $D^- = \mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$ y se anulan en infinito. $\mathcal{R}(\Gamma)$ es denso en $L^p(\Gamma, w)$.

Corolario 3.1. *Si* Γ *es una curva de Jordan-Carleson,* $1 < p < \infty$*, y* $w \in A_p(\Gamma)$*, entonces*

$$S^2 g = g \text{ para } g \in L^p(\Gamma, w). \tag{3.5}$$

El teorema anterior muestra que los operadores acotados P y Q definidos por

$$P := P_\Gamma := \frac{1}{2}(I+S) \quad \text{y} \quad Q := Q_\Gamma := \frac{1}{2}(I-S) \tag{3.6}$$

son proyecciones complementarias $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $P + Q = I$. En consecuencia, sus imágenes en $L^p(\Gamma, w)$

$$L^p_+(\Gamma, w) := PL^p(\Gamma, w), \quad \dot{L}^p_-(\Gamma, w) := QL^p(\Gamma, w),$$

son subespacios cerrados de $L^p(\Gamma, w)$ y, más aún, $L^p(\Gamma, w)$ se descompone en la suma directa de esos dos subespacios:

$$L^p(\Gamma, w) = L^p_+(\Gamma, w) \dot{+} \dot{L}^p_-(\Gamma, w).$$

También defina $L^p_-(\Gamma, w) := \dot{L}^p_-(\Gamma, w) + \mathbb{C}$. Los espacios $L^p_+(\Gamma, w)$ y $L^p_-(\Gamma, w)$ son llamados los *espacios de Hardy* de $L^p(\Gamma, w)$.
Denotamos por $\dot{E}^p(D^-)$ las funciones en $E^p(D^-)$ que se anulan en infinito y por $\dot{E}^p_-(\Gamma)$ las funciones límite en Γ de las funciones en $\dot{E}^p(D^-)$.

Teorema 3.2. *Para cada curva rectificable de Jordan* Γ,

$$\begin{aligned} E^1_-(\Gamma) &= \left\{ g \in L^1(\Gamma) : \int_\Gamma g(\tau)\tau^{-n} d\tau = 0 \quad \text{para} \quad n = 2, 3, 4, \dots \right\} \\ &= \left\{ g \in L^1(\Gamma) : (C_+ g)(z) = (C_- g)(\infty) \quad \text{para} \quad z \in D^+ \right\}, \\ \dot{E}^1_-(\Gamma) &= \left\{ g \in L^1(\Gamma) : \int_\Gamma g(\tau)\tau^{-n} d\tau = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots \right\} \\ &= \left\{ g \in L^1(\Gamma) : (C_+ g)(z) = 0 \quad \text{para} \quad z \in D^+ \right\}. \end{aligned}$$

3.2 Factorización de Wiener-Hopf.

El siguiente lema nos ayudará a demostrar un resultado importante para la solución del problema de Riemann.

Lema 3.1. *Sea* Γ *una curva de Jordan-Carleson,* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, *y* $w \in A_p(\Gamma)$. *Entonces*

$$f \in L^p_\pm(\Gamma, w), \; g \in L^q_\pm(\Gamma, w^{-1}) \Rightarrow fg \in E^1_\pm(\Gamma).$$

Para cada $a \in L^\infty(\Gamma)$, sea $T(a) := PaP$ el operador de Toeplitz que actúa en el espacio $L^p_+(\Gamma, w)$. Entonces $T(a)$ es acotado en este espacio.

Sea Γ una curva de Jordan-Carleson, $1 < p < \infty$, y $w \in A_p(\Gamma)$. Si $T(a)$ es Fredholm entonces la función a está automáticamente en $GL^\infty(\Gamma)$. Así vamos a suponer desde el comienzo que $a \in GL^\infty(\Gamma)$. Se dice que a admite una *factorización de Wiener-Hopf en* $L^p(\Gamma, w)$ si a puede ser escrita en la forma

$$a(\tau) = a_-(\tau)\tau^\varkappa a_+(\tau) \text{ para casi todo } \tau \in \Gamma, \tag{3.7}$$

donde $\varkappa$ es un entero y las funciones $a_\pm$ cumplen las siguientes propiedades:

$$a_- \in L^p_-(\Gamma, w),\ a_-^{-1} \in L^q_-(\Gamma, w^{-1}),\ a_+ \in L^q_+(\Gamma, w^{-1}),\ a_+^{-1} \in L^p_+(\Gamma, w), \tag{3.8}$$

$$|a_+^{-1}|w \in A_p(\Gamma). \tag{3.9}$$

Teorema 3.3. ***(Coburn-Simonenko)*** *Sea Γ una curva de Jordan-Carleson, $p \in (1, \infty)$, $w \in A_p(\Gamma)$. Si $a \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$, entonces el operador de Toeplitz $T(a)$ tiene ya sea kernel trivial o su imagen es densa.*

Demostración. La demostración se encuentra en [4, Teorema 6.17]. □

Teorema 3.4. ***(Simonenko)*** *Sea Γ una curva de Carleson, $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\Gamma)$, y $a \in GL^\infty(\Gamma)$. Entonces $T(a)$ es Fredholm en $L^p_+(\Gamma, w) = PL^p(\Gamma, w)$ si y sólo si a admite una factorización de Wiener-Hopf en $L^p(\Gamma, w)$, $a = a_- t^\varkappa a_+$. En este caso ind $T(a) = -\varkappa$.*

Demostración. Primero supongamos que a admite una factorización de Wiener-Hopf en $L^p(\Gamma, w)$ con $\varkappa = 0$, es decir, sea $a = a_- a_+$. Mostramos que $\ker T(a) = \{0\}$. En efecto, si $T(a)g_+ = 0$ para $g_+ \in L^p_+(\Gamma, w)$, entonces $a_- a_+ g_+ =: g_- \in \dot{L}^p_-(\Gamma, w)$. Tenemos $a_+ g_+ = a_-^{-1} g_-$. Por (3.8) y el Lema 3.1, $a_+ g_+ \in E^1_+(\Gamma)$ y $a_-^{-1} g_- \in \dot{E}^1_-(\Gamma)$, y como $E^1_+(\Gamma) \cap \dot{E}^1_-(\Gamma) = \{0\}$ entonces $a_+ g_+ = 0$. Ya que a_+ es invertible, por lo tanto distinto de cero, se sigue que $g_+ = 0$, esto es, $\ker T(a) = \{0\}$.
Mostramos ahora que $T(a)$ es suprayectivo. El operador $a_+^{-1} P a_+ I$ es acotado en el espacio $L^p_+(\Gamma, w)$, el mapeo

$$\mathcal{R}(\Gamma) \cap E^1_+(\Gamma) \to L^p_+(\Gamma, w),\ g_+ \mapsto a_+^{-1} P(a_-^{-1} g_+) = a_+^{-1} P(a_+ a^{-1} g_+) \tag{3.10}$$

extiende a un operador lineal acotado A sobre $L^p_+(\Gamma, w)$ (usando $a_-^{-1} = a_+ a^{-1}$). Para g_+ en $\mathcal{R}(\Gamma) \cap E^1_+(\Gamma)$ tenemos

$$\begin{aligned} T(a)Ag_+ &= P\left(a_- a_+ a_+^{-1} P(a_-^{-1} g_+)\right) \\ &= P\left(a_- P(a_-^{-1} g_+)\right) = Pg_+ - P\left(a_- Q(a_-^{-1} g_+)\right) = Pg_+ = g_+, \end{aligned}$$

y ya que ambos $T(a)$ y A son acotados, resulta que $T(a)A = I$ en $L^p_+(\Gamma, w)$. Esto prueba que $T(a)$ es suprayectivo.
Entonces, si $\varkappa = 0$ entonces $T(a)$ es invertible. Si a tiene la factorización de Wiener-Hopf $a = a_- t^\varkappa a_+$, con $\varkappa \neq 0$, entonces

$$T(a) = T(a_- a_+)T(t^\varkappa)\,(\varkappa > 0) \text{ o } T(a) = T(t^\varkappa)T(a_- a_+)\,(\varkappa < 0).$$

El operador de Toeplitz $T(a)$ se puede considerar como el operador

$$T(a) = PaP\,:\;\text{Im}\,P \to\;\text{Im}\,P,$$

así, si $f \in L^p_+(\Gamma, w)$ entonces

$$\begin{aligned} Pa_-a_+PPt^\varkappa Pf =& Pa_-a_+t^\varkappa f = P(a_-a_+t^\varkappa)Pf \quad \text{ para } \varkappa > 0, \\ Pt^\varkappa PPa_-a_+Pf =& P(t^\varkappa a_-a_+)Pf - P(t^\varkappa Qa_-a_+Pf) \\ =& P(t^\varkappa a_-a_+)Pf \quad \text{ para } \varkappa < 0, \end{aligned}$$

con $P\dot{L}^p_-(\Gamma, w) = 0$ y $QL^p_+(\Gamma, w) = 0$. Si $\varkappa \in \mathbb{N}$ entonces $T(t^\varkappa) = (T(t))^\varkappa$, $T(t^\varkappa) = T(t^{\varkappa-1})T(t)$, el operador $T(t)$ es de Fredholm, $T(t^{-1})T(t) = T(1) = I$. $T(t^{-1})$ es de Fredholm e ind $T(t^{-1}) = 1$. Para probar la afirmación conversa, supongamos que $T(a)$ es Fredholm de índice $-\varkappa$. La función $b := at^{-\varkappa}$ pertenece a $L^\infty(\Gamma)$, obtenemos el índice ind $T(b)$, $T(b) = T(t^{-\varkappa})T(a)$ si $\varkappa > 0$, $T(b) = T(a)T(t^{-\varkappa})$ si $\varkappa \leq 0$. Entonces ind $T(b) = 0$, $b = b_-b_+$. Si tenemos un operador de Toeplitz con índice igual a cero, entonces o el kernel es trivial o el cokernel es trivial. Tenemos entonces que $\ker T(b) = \{0\}$ o $\ker(T(b))^* = \{0\}$, pero ind $T(b) = \dim\ker T(b) - \dim\ker(T(b))^*$ y por la condición anterior se tiene que ind $T(b) = 0$ y entonces $T(b)$ es invertible en $L^p_+(\Gamma, w)$. Luego $bP + Q$, $PbP + Q \in L^p_+(\Gamma, w)\dot{+}\dot{L}^p_-(\Gamma, w)$, ya que sus matrices son triangular y diagonal, respectivamente, entonces operadores son invertibles.

$$PbI + Q = (I + PbQ)(PbP + Q)$$

y $(I + PbQ)^{-1} = I - PbQ$, se sigue que $PbI + Q$ es invertible en el espacio $L^p(\Gamma, w)$ y el operador $b^{-1}P + Q = b^{-1}(P + bQ) = b^{-1}H_\Gamma(PbI + Q)^*H_\Gamma$ es invertible en el espacio $L^q(\Gamma, w^{-1})$. Aquí $H_\Gamma : L^q(\Gamma, w^{-1}) \to L^q(\Gamma, w^{-1})$, $(H_\Gamma g)(\tau) = e^{-i\theta_\Gamma(\tau)}\overline{g(\tau)}$, $\tau \in \Gamma$, y $\theta_\Gamma(\tau)$ es el ángulo entre tangente orientado de Γ en el punto τ y el semieje real positivo.
Sean $\varphi \in L^p(\Gamma, w)$ y $\psi \in L^q(\Gamma, w^{-1})$ las soluciones de las ecuaciones $(bP + Q)\varphi = 1$, $(b^{-1}P + Q)\psi = 1$, denotamos por $\varphi_+ := P\varphi$ y $\psi_+ := P\psi$, entonces $\varphi_+ \in L^p_+(\Gamma, w)$ y

$\psi_+ \in L^q_+(\Gamma, w^{-1})$ y $b\varphi_+ = 1 + h_-$ y $b^{-1}\psi_+ = 1 + f_-$ con $h_- \in \dot{L}^p_-(\Gamma, w)$, $f_- \in \dot{L}^q_-(\Gamma, w^{-1})$ y multiplicando tenemos

$$\varphi_+\psi_+ = b\varphi_+ b^{-1}\psi_+ = (1 + h_-)(1 + f_-) = 1$$

Así, introducimos las funciones $a_+ := \varphi_+^{-1}$ y $a_- := 1 + h_-$. Entonces $ba_+^{-1} = a_- \Leftrightarrow b = a_-a_+$ donde cada factor es invertible. Vamos a verificar propiedad de factorización de Wiener-Hopf

$$\begin{aligned} a_+ =& \varphi_+^{-1} = \psi_+ \in L^q_+(\Gamma, w^{-1}),\ a_+^{-1} = \varphi_+ \in L^p_+(\Gamma, w), \\ a_- =& 1 + h_- \in L^p_-(\Gamma, w),\ a_-^{-1} = (1 + h_-)^{-1} = 1 + f_- \in L^q_-(\Gamma, w^{-1}). \end{aligned}$$

Sea $g \in \mathcal{R}(\Gamma)$ y $g_+ := Pg$, $g_- := Qg$. Ya que

$$\begin{aligned} T(b)&\left(a_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+)\right) = P\left(ba_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+)\right) \\ &= P\left(a_-P(a_-^{-1}g_+)\right) = Pg_+ - P\left(a_-Q(a_-^{-1}g_+)\right) = g_+ \end{aligned}$$

y $T(b)$ es invertible, obtenemos que

$$\left\|a_+^{-1}P\left(a_-^{-1}g_+\right)\right\|_{p,w} \le \left\|(T(b))^{-1}\right\| \|g_+\|_{p,w}.$$

Ya que $P(a_-^{-1}g_-) = 0$, se sigue que

$$\left\|a_+^{-1}P\left(a_-^{-1}g\right)\right\|_{p,w} \le \left\|(T(b))^{-1}\right\| \|g_+\|_{p,w} \le \left\|(T(b))^{-1}\right\| \|P\| \|g\|_{p,w}$$

para toda $g \in \mathcal{R}(\Gamma)$. Como $a_+^{-1}Pa_+I = a_+^{-1}Pa_-^{-1}bI$, finalmente obtenemos

$$\left\|a_+^{-1}P(a_+g)\right\|_{p,w} = \left\|a_+^{-1}Pa_-^{-1}(bg)\right\|_{p,w} \le \left\|(T(b))^{-1}\right\| \|P\| \|b\|_\infty \|g\|_{p,w}$$

siempre que $bg \in \mathcal{R}(\Gamma)$. Entonces el operador $a_+^{-1}Pa_+I$ es acotado en el espacio $L^p(\Gamma, w)$ que es equivalente a (3.9). □

Con la demostración del Teorema de Simonenko indicamos en los casos siguientes cual es kernel del operador de Toeplitz.

Tomamos en cuenta el operador $A = P + aQ$, donde a admite una factorización de Wiener-Hopf, es decir

$$a = a_- t^{\varkappa} a_+$$

y consideramos la ecuación

$$T(a)f = g \tag{3.11}$$

con $f,\ g \in L^p_+(\Gamma, w)$.

Caso 1) $\varkappa = 0$.

En este caso el operador $T(a)$ es invertible en $L^p_+(\Gamma, w)$ y su inverso es

$$(T(a))^{-1} = a_+^{-1} P a_-^{-1} I.$$

Además, la solución de la ecuación (3.11) es única para cada parte derecha $g \in L^p_+(\Gamma, w)$, entonces

$$f = (T(a))^{-1} g = a_+^{-1} P a_-^{-1} g \in L^p_+(\Gamma, w)$$

y $\ker T(a) = \{0\}$.

Caso 2) $\varkappa > 0$.

Podemos ver el operador $T(a)$ como $T(a_- a_+) T(t^\varkappa)$, $T(a)$ es invertible a la izquierda. La ecuación (3.11) tiene solución única si y sólo si $T(a_- a_+) T(t^\varkappa) f = g$ si y sólo si $T(t^\varkappa) f = a_+^{-1} P a_-^{-1} g$. Entonces $f = T(t^{-\varkappa})(a_+^{-1} P a_-^{-1} g)$ si $a_+^{-1} P a_-^{-1} g \in$ Im $T(t^\varkappa)$.
Luego tenemos que

$$(P t^\varkappa P)^* = P^* t^{-\varkappa} P^*,\ P^* \in \mathcal{B}(L^q_+(\Gamma, w^{-1}))$$

En el caso cuando Γ es el círculo unitario $\mathbb{T}$ entonces $P^* = P$ y $(T(t^\varkappa))^* = T(t^{-\varkappa})$. Luego, para $\Psi \in L^q_+(\Gamma, w^{-1})$ tenemos lo siguiente

$$a_+^{-1} P a_-^{-1} g \perp \Psi$$

tal que $T(t^{-\varkappa})\Psi = 0$, o bien, $(T(t^\varkappa))^* \Psi = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(a_+^{-1} P a_-^{-1} g, \Psi\right) \\ &= \int_\Gamma (a_+^{-1} P a_-^{-1} g) \overline{\Psi} |dt|, \quad a_+^{-1} P a_-^{-1} g \overline{\Psi} \in L^1(\Gamma). \end{aligned}$$

Sea $P_{\varkappa-1}$ un polinomio arbitrario de grado $\varkappa - 1$.

$$P t^{-\varkappa} P P_{\varkappa-1} = P\left(t^{-\varkappa} P_{\varkappa-1}\right) = 0.$$

Entonces $\ker(T(t^\varkappa))^* = \{P_{\varkappa-1}\}$.
Consideremos ecuación $Af = g$, donde A es un operador de Fredholm. $\Psi \perp$ Im A entonces para toda f se tiene que $\Psi \perp Af$ si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= (Af, \Psi) = (f, A^* \Psi) \\ &= \Psi(Af) = (A^* \Psi) f \end{aligned} \tag{3.12}$$

f es arbitrario elemento del espacio, entonces de (3.12) tenemos que $A^*\Psi = 0$ si y sólo si $\Psi \in \ker A^*$.
Supongamos que $\Psi \in \ker A^*$ si y sólo si $A^*\Psi = 0$, entonces para toda f tenemos que $(Af, \Psi) = (f, A^*\Psi) = 0$ si y sólo si $\Psi \perp \text{ Im } A$. Por lo tanto existe f tal que $Af = g$ y el problema tiene solución en este caso. Entonces la ecuación $T(a)f = g$ tiene la solución única $f = T(t^{-\varkappa})(a_+^{-1}Pa_-^{-1}g)$ si

$$\int_\Gamma (a_+^{-1}Pa_-^{-1}g)\overline{P_{\varkappa-1}}|dt| = 0.$$

Caso 3) $\varkappa < 0$.

Para este caso el operador $T(a)$ lo vemos como $T(t^\varkappa)T(a_-a_+)$, con $T(a)$ invertible a la derecha. Im $T(a) = L_+^p(\Gamma, w)$ entonces $T(a)f = g$ es soluble para cada $g \in L_+^q(\Gamma, w)$.
$T(t^\varkappa)T(a_-a_+)f = g$, luego $T(t^\varkappa)f = 0$, entonces $f = P_{-\varkappa-1} = c_0 + c_1 + \ldots + c_{-\varkappa-1}t^{-\varkappa-1}$.
$Pt^\varkappa PP_{-\varkappa-1} = Pt^\varkappa P_{-\varkappa-1} = 0$. Por lo tanto si $T(t^\varkappa)T(a_-a_+)f = 0$ entonces $T(a_-a_+)f = P_{-\varkappa-1}$ si y sólo si $f = a_+^{-1}Pa_-^{-1}P_{-\varkappa-1} \in \ker T(a)$.
Por otro lado, la ecuación no homogénea $T(t^\varkappa)\varphi = g$, tiene la solución $\varphi = T(t^{-\varkappa})g$. Entonces, la ecuación $T(a)f = g$ para $\varkappa < 0$ tiene la solución general $f = a_+^{-1}Pa_-^{-1}(T(t^{-\varkappa})g + P_{-\varkappa-1})$ para cada $g \in L_+^p(\Gamma, w)$.

Corolario 3.2. *Si $a \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ y $T(a)$ es normalmente soluble, entonces $T(a)$ es un operador semiFredholm inyectivo o suprayectivo.*

Corolario 3.3. *Si $a \in L^\infty(\Gamma)$, entonces $T(a)$ es invertible si y sólo si $T(a)$ es Fredholm y su índice es igual a cero.*

Definimos el *espectro de un operador* $A \in \mathcal{B}(X)$ de la siguiente manera, $\sup_{\text{ess}} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, A - \lambda I \text{ no es invertible en } X\}$. Si un operador $A = T(a)$ es de Toeplitz, entonces $T(a) - \lambda I = T(a - \lambda)$ vuelve a ser un operador de Toeplitz. Una definición equivalente para el espectro de un operador acotado es la siguiente

$$\sup_{\text{ess}} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, A - \lambda I \text{ no es de Fredholm en } X\}.$$

Además sp $T(a) = \sup_{\text{ess}} T(a) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, T(a-\lambda) \text{ es de Fredholm con ind } (T(a-\lambda)) \neq 0\}$.
Si $a \in C(\Gamma)$ entonces $\sup_{\text{ess}} T(a) = a(\Gamma)$. La *imagen escencial* de una función es $R(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\{t \in \Gamma \,:\, |a(t) - \lambda| < \varepsilon\}| > 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\}$.

Teorema 3.5. ***(Hartman-Wintner-Simonenko)*** *Sea Γ una curva de Jordan-Carleson, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\Gamma)$. Si $a \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ y $T(a)$ es normalmente soluble ($Im\ T(a) = \overline{Im\ T(a)}$) entonces a es invertible en $L^\infty(\Gamma)$. En particular $R(a) \subset\ sup_{\text{ess}}\ T(a)$.*

Demostración. Supongamos que $a \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ y $T(a)$ es normalmente soluble. Por el Corolario 3.2 el operador $T(a)$ es semi Fredholm inyectivo o suprayectivo. Supongamos que $0 \in \mathcal{R}(\Gamma)$, entonces a no es invertible en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar una función $a_\varepsilon \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ tal que $a_\varepsilon(t) = 0$ para toda t en un conjunto de medida positiva en Γ y

$$\|a_\varepsilon P + Q - (aP + Q)\| \leq \|a_\varepsilon - a\|_{L^\infty(\Gamma)} \|P\| < \varepsilon.$$

Considerando que el operador $A_\varepsilon := a_\varepsilon P + Q$ es semi Fredholm inyectivo o suprayectivo si ε es suficientemente pequeño.
Supongamos primero que A_ε es suprayectivo. Sea $g \in L^p(\Gamma, w)$ solución de la ecuación $(a_\varepsilon P + Q)g = 1$. Ponemos $g_+ := Pg$ y $g_- := Qg$. Tenemos que $a_\varepsilon g_+ = 1 - g_-$, así $1 - g_-$ se anula en un conjunto de medida positiva, por el Teorema de Lusin-Privalov (ver [4, Teorema 6.1]) tenemos que $1 - g_- \equiv 0$. Pero esto es imposible ya que $g_- \in \dot{L}^p_-(\Gamma, w)$ y $1 \notin \dot{L}^p_-(\Gamma, w)$.
Consideremos que a_ε es inyectivo, necesitamos en este caso pasar a operadores adjuntos, A^*_ε tiene imagen densa. Ya que A^*_ε es normalmente soluble junto con A_ε, tenemos que $\text{Im}\ A^*_\varepsilon = \overline{\text{Im}\ A^*_\varepsilon} = L^q(\Gamma, w^{-1})$, y se sigue que A^*_ε es suprayectivo. $A^*_\varepsilon = H_\Gamma(Qa_\varepsilon I + P)H_\Gamma$ es suprayectivo y también $Qa_\varepsilon I + P$ es suprayectivo. Sea $g \in L^q(\Gamma, w^{-1})$ una solución de la ecuación $(Qa_\varepsilon I + P)g = 1$, entonces $Pg = 1$ y $Q(a_\varepsilon g) = 0$. Entonces $f_+ := a_\varepsilon g \in L^q_+(\Gamma, w^{-1})$. Ya que $a_\varepsilon = 0$ en un conjunto de medida positiva, el teorema de Lusin-Privalov nos dice que $f_+ \equiv 0$. Tenemos $g = Pg + Qg = 1 + g_-$, con $g_- := Qg \in \dot{L}^q_-(\Gamma, w^{-1})$. Así $a_\varepsilon g = a_\varepsilon(1 + g_-) = 0$. Pues $a_\varepsilon \neq 0$ en un conjunto de medida positiva, nuevamente por el teorema de Lusin-Privalov tenemos $1 + g_- = 0$ entonces $g_- \equiv -1$ pero $g_- \in \dot{L}^q_-(\Gamma, w^{-1})$ y tiene valor cero en infinito, $0 = -1$, esta contradicción prueba el teorema. □

3.3 Problema de Riemann.

Damos la reformulación del problema para la clase de funciones que estudiamos.
Sea Γ una curva cerrada simple que divide el plano complejo en una parte interior $D^+(\ni 0)$ y una parte exterior $D^-(\ni \infty)$. Sean $G \in L^\infty(\Gamma)$ y $g \in L^p(\Gamma, w)$ funciones definidas en Γ.

El *problema de frontera de Riemann* es enunciado en la siguiente manera:
Encontrar funciones $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ analíticas en D^+ y D^-, respectivamente, que son representadas mediante la integral de tipo de Cauchy y que satisfacen la condición

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{para } t \in \Gamma, \tag{3.13}$$

esta condición es impuesta en sus valores límite en el contorno Γ y tales valores límite pertenecen a la clase $L^p(\Gamma, w)$ al igual que la densidad φ de la representación de $\Phi^\pm(z)$.
Para obtener la solución completa al problema, vamos a estudiar el kernel, la imagen, las condiciones de solubilidad y la solución general de la ecuación no homogénea. Aplicamos el operador $A := P + aQ$, correspondiente al problema de Riemann, a la función f y buscamos solución de la ecuación

$$Af = g,$$

donde f, g pertenecen a $L^p(\Gamma, w)$. Consideramos la siguiente representación del operador A:

$$\begin{aligned} A = P + aQ &= (aI)\left(a^{-1}P + Q\right) \\ &= (aI)\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

y obtenemos la forma de la solución general mediante el estudio del kernel y la imagen del operador (3.14) y analizando cuales son condiciones de solubilidad, considerando además los casos en los que el índice es positivo, negativo o cero.

Kernel

Para hallar el kernel del operador A usaremos la representación (3.14) resolviendo $Af = 0$, es decir,

$$(aI)\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right) f = 0.$$

Puesto que a es invertible se tiene

$$\begin{aligned} \left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right) f = 0 \\ \left(I + Qa^{-1}P\right) f \in \ker T\left(a^{-1}\right), \end{aligned}$$

donde ahora $\ker T(a^{-1})$ consideramos como un subespacio de $L^p(\Gamma, w)$.
Como $\left(I + Qa^{-1}P\right)^{-1} = \left(I - Qa^{-1}P\right)$ entonces:

$$f \in \left(I - Qa^{-1}P\right) \ker T\left(a^{-1}\right).$$

Por lo tanto el kernel del operador A, en la forma general, es

$$\ker A = \left(I - Qa^{-1}P\right)\left(\ker T\left(a^{-1}\right)\right).$$

Imagen

Ahora veremos cual es la imagen del operador A. Primero analizamos la parte $(Pa^{-1}P+Q)$

$$\text{Im } \left(Pa^{-1}P + Q\right) = \text{ Im } T\left(a^{-1}\right) \dot{+} \dot{L}^p_-(\Gamma, w)$$

Ahora para $aI(Pa^{-1}P + Q)$ utilizamos la representación matricial de aI aplicándola al vector anterior:

$$aI = \begin{pmatrix} PaP & PaQ \\ QaP & QaQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Im } T\left(a^{-1}\right) \\ \dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right) \end{pmatrix} = PaP \text{ Im } T\left(a^{-1}\right) + PaQ\dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right)$$
$$+ QaP \text{ Im } T\left(a^{-1}\right) + QaQ\dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right),$$

donde $PaP \;\; \text{Im } T\left(a^{-1}\right), \; PaQ\dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right)$ son subespacios de $L^p_+(\Gamma, w)$ y $QaP \;\; \text{Im } T\left(a^{-1}\right)$, $QaQ\dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right)$ son subespacios de $\dot{L}^p_-(\Gamma, w)$, por eso, podemos ver este resultado como la suma directa

$$P\left[a\left(\text{ Im } T\left(a^{-1}\right) + \dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right)\right)\right] \dot{+} Q\left[a\left(\text{ Im } T\left(a^{-1}\right) + \dot{L}^p_-\left(\Gamma, w\right)\right)\right]$$

la cual es la imagen del operador A.

Solución del problema $Af = g$.

Mediante la representación (3.14) obtenemos la solución para una función g

$$(aI)\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right)f = g. \tag{3.15}$$

Mutiplicamos de ambos lados de la ecuación por a^{-1}

$$\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right)f = a^{-1}g.$$

Denotamos la función $\left(I + Qa^{-1}P\right)f := \varphi$, donde φ la podemos representar como la siguiente suma directa $\varphi = \varphi_+ \dot{+} \dot{\varphi}_-$, donde $\varphi_+ \in L^p_+(\Gamma, w)$, $\dot{\varphi_-} \in \dot{L}^p_-(\Gamma, w)$. De esta manera obtenemos la ecuación

$$\left(Pa^{-1}P + Q\right)\varphi = a^{-1}g$$

que también podemos ver como

$$\left(Pa^{-1}P\right)\varphi_+ + Q\dot{\varphi}_- = Pa^{-1}g + Qa^{-1}g$$

Usando nuevamente la representación matricial

$$f = \begin{pmatrix} P & 0 \\ -Qa^{-1}P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \dot{\varphi}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\varphi_+ \\ -Qa^{-1}P\varphi_+ + Q\dot{\varphi}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\varphi_+ \\ -Qa^{-1}P\varphi_+ + Qa^{-1}g \end{pmatrix}$$

o bien

$$f = \varphi_+ - Qa^{-1}P\varphi^+ + Qa^{-1}g, \tag{3.16}$$

donde φ_+ es una solución de la ecuación

$$\left(Pa^{-1}P\right)\varphi = Pa^{-1}g. \tag{3.17}$$

Sea $a^{-1} = a_-\chi_\varkappa a_+$ es la factorización de Wiener-Hopf de la función $a^{-1} \in L^\infty(\Gamma)$, donde $\chi_\varkappa = t^\varkappa$ para $t \in \Gamma$.

3.3.1 Caso 1. $\varkappa = 0$.

En este caso el operador de Toeplitz $T(a^{-1}) = Pa^{-1}P$ es invertible en el espacio $L^p_+(\Gamma, w)$. Por lo tanto $\operatorname{Im} T(a^{-1}) = L^p_+(\Gamma, w)$ y $\ker T(a^{-1}) = \{0\} \subset L^p_+(\Gamma, w)$, ya que $(T(a^{-1}))^{-1} = a_+^{-1}Pa_-^{-1}I$, tenemos por (3.17) que

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa^{-1}g \\ &= a_+^{-1}Pa_-^{-1}(I-Q)a^{-1}g \\ &= a_+^{-1}Pa_-^{-1}a^{-1}g - a_+^{-1}Pa_-^{-1}Qa^{-1}g \end{aligned}$$

pero $a_-^{-1}a = a_+$ y $Pa_-^{-1}Q = 0$, por eso

$$\varphi_+ = a_+^{-1}Pa_+g. \tag{3.18}$$

Por (3.16) y (3.18) finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} f &= a_+^{-1}Pa_+g - Qa^{-1}Pa_+^{-1}Pa_+g + Qa^{-1}g \\ &= a_+^{-1}Pa_+g - Qa^{-1}a_+^{-1}Pa_+g + Qa^{-1}g, \end{aligned}$$

luego, $a^{-1}a_+^{-1} = a_-$, entonces

$$f = a_+^{-1}Pa_+g - Qa_-Pa_+g + Qa^{-1}g = a_+^{-1}Pa_+g - Qa_-(I-Q)a_+g + Qa^{-1}g,$$

sustituimos $P = I - Q$ en el segundo término

$$= a_+^{-1}Pa_+g + Qa_-Qa_+g - Qa_-a_+g + Qa^{-1}g,$$

usando que $Qa_-Q = a_-Q$ tenemos

$$\begin{aligned}
&= a_+^{-1}Pa_+g + a_-Qa_+g - Qa^{-1}g + Qa^{-1}g \\
&= \left(a_+^{-1}P + a_-Q\right) a_+g \in L^p(\Gamma, w). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Además, la ecuación $Af = g$ tiene la solución única (3.19) por cada $g \in L^p(\Gamma, w)$.

3.3.2 Caso 2. $\varkappa > 0$.

El operador $T(a^{-1}) = T(a_-a_+)T(t^{\varkappa})$ es invertible por la izquierda.
De acuerdo con lo visto en sección 3.2, la ecuación $T(t^{\varkappa})f = a_+^{-1}Pa_-^{-1}g$ tiene una solución si y sólo si $\Psi \perp a_+^{-1}Pa_-^{-1}g$ para cada $\Psi \in \ker(T(t^{\varkappa}))^* = \ker T(t^{-\varkappa})$.
Por lo tanto la solución es única para este caso si $a_+^{-1}Pa_-^{-1}g$ pertenece a la imagen de $T(t^{\varkappa})$, es decir, que

$$\int_\Gamma a_+^{-1}Pa_-^{-1}g\overline{P_{\varkappa-1}}\,|dt| = 0, \qquad (3.20)$$

ya que $\ker T(t^{-\varkappa}) = \{P_{\varkappa-1} = c_0 + c_1t + \ldots + c_{\varkappa-1}t^{\varkappa-1}$ tal que $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa-1} \in \mathbb{C}\}$.
Ahora buscamos solución explícita para este caso, aplicando descomposición del operador A y usando que la función a es invertible, tenemos

$$\begin{aligned}
aI\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right) f &= g, \\
\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right) f &= a^{-1}g.
\end{aligned}$$

Denotamos por $\varphi := (I + Qa^{-1}P)f$, aplicamos a $\varphi_+ = P\varphi$ y $\dot{\varphi}_- = Q\varphi$ el operador $T(a^{-1})$ y tenemos

$$\begin{aligned}
T(a^{-1})\varphi_+ &= Pa^{-1}g \\
T(a^{-1})\dot{\varphi}_- &= Qa^{-1}g,
\end{aligned}$$

pero $T(a^{-1}) = T(a_-a_+)T(t^{\varkappa})$ donde $(T(a_-a_+))^{-1} = a_+^{-1}Pa_-^{-1}I$, por lo tanto

$$T(t^{\varkappa})\varphi_+ = \left(a_+^{-1}Pa_-^{-1}I\right) Pa^{-1}g = a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa^{-1}g = a_+^{-1}Pa_+g$$

por (3.18). Ya que $T(t^{-\varkappa})T(t^{\varkappa}) = I$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_+ &= T(t^{-\varkappa})a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa^{-1}g \\
&= Pt^{-\varkappa}a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa^{-1}g \\
&= Pt^{-\varkappa}a_+^{-1}Pa_+g.
\end{aligned}$$

Aplicando (3.16), tenemos

$$f = \left(P - Qa^{-1}P\right) t^{-\varkappa} a_+^{-1} P a_+ g + Qa^{-1} g. \tag{3.21}$$

La ecuación $Af = g$ tiene la solución única (3.21) si y sólo si

$$\int_\Gamma a_+^{-1} P a_-^{-1} P a^{-1} g \overline{P_{\varkappa-1}} |dt| = \int_\Gamma a_+^{-1} P a_+ g \overline{P_{\varkappa-1}}\, |dt| = 0,$$

donde aplicamos (3.20) para g sustituido por $Pa^{-1}g$.

3.3.3 Caso 3. $\varkappa < 0$.

Sea $\chi_\varkappa(t) = t^\varkappa$. El operador $T(a^{-1}) = T(\chi_\varkappa)T(a_- a_+)$ es invertible por la derecha en el espacio $L_+^p(\Gamma, w)$.
En el capítulo 3, sección 2, se obtuvo el resultado que $\ker T(a^{-1}) = \{a_+^{-1} P a_-^{-1} P_{-\varkappa-1}\}$ donde $P_{-\varkappa-1}$ es un polinomio arbitrario de grado $\varkappa - 1$. Entonces

$$\ker A = \left\{a_+^{-1} P a_-^{-1} P_{-\varkappa-1}\right\}.$$

Por lo tanto $\operatorname{Im} T(a^{-1}) = L_+^p(\Gamma, w)$ y por eso $\operatorname{Im} A = L^p(\Gamma, w)$.
La ecuación $Af = g$ es equivalente a la ecuación

$$\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(I + Qa^{-1}P\right) f = a^{-1} g.$$

Denotamos $(I + Qa^{-1}P)f = \Psi_+ + \dot{\Psi}_-$, donde $\Psi_+ \in L_+^p(\Gamma, w)$, $\dot{\Psi}_- \in \dot{L}_-^p(\Gamma, w)$. Entonces

$$\left(Pa^{-1}P + Q\right)\left(\Psi_+ + \dot{\Psi}_-\right) = a^{-1} g,$$

de aquí sigue que

$$\begin{aligned} \left(Pa^{-1}P\right)\Psi_+ &= Pa^{-1} g, \\ Q\dot{\Psi}_- = \dot{\Psi}_- &= Qa^{-1} g \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora consideremos la ecuación (3.22) que describimos en la forma

$$T\left(\chi_\varkappa\right) T\left(a_- a_+\right) \Psi_+ = Pa^{-1} g. \tag{3.23}$$

Denotamos $\widetilde{\Psi}_+ = T(a_- a_+)\Psi_+$. Entonces (3.23) tiene la forma

$$T\left(\chi_\varkappa\right) \widetilde{\Psi}_+ = Pa^{-1} g.$$

Su solución parcial es $\widetilde{\Psi}_+ = T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g$ y la solución general es $\widehat{\Psi}_+ = T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}$, donde $\ker T(\chi_{-\varkappa}) = P_{-\varkappa-1}$.
Entonces $T(a_-a_+)\Psi_+ = \widehat{\Psi}_+ = T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}$. Ya que $(T(a_-a_+))^{-1} = a_+^{-1}Pa_-^{-1}I$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi_+ &= \left(a_+^{-1}Pa_-^{-1}\right)\left(T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}\right)\\ &= \left(a_+^{-1}Pa_-^{-1}\right)\left(\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}\right)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\left(I + Qa^{-1}P\right)f = \Psi_+ + \dot{\Psi}_- = \left(a_+^{-1}Pa_-^{-1}\right)\left(\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}\right) + Qa^{-1}g,$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación $Af = g$ tiene la forma

$$f = \left(I - Qa^{-1}P\right)\left[\left(a_+^{-1}Pa_-^{-1}\right)\left(\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}\right) + Qa^{-1}g\right]$$

CAPÍTULO 4

Problema de Carleman con datos en $L_p(\Gamma)$ y $PC(\Gamma)$.

En este capítulo reformulamos los problemas de Riemann y Carleman para coeficientes en clases más generales de funciones.

4.1 Reformulación del problema de Carleman.

Encontrar una función $\Phi^+(z)$ analítica en el dominio D^+ con la condición de frontera

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^+(t) + g(t) \quad t \in \Gamma, \tag{4.1}$$

donde $\alpha(t)$ es un desplazamiento inverso de Carleman ($\alpha_-(\alpha_-(t)) \equiv t$), y $G(t) \in L^\infty(\Gamma)$, $g(t) \in L^p(\Gamma, w)$, $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.
Los resultados obtenidos en la sección 2.2, se obtienen de manera similar para la clase de funciones que son consideradas en este capítulo.

Aplicación al problema de Carleman.

Aplicamos el Teorema de representaciones integrales al problema de Carleman considerado para funciones en $L_p(\Gamma, w)$. Sea

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^+(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{4.2}$$

Usamos la representación integral

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(t))}{\tau - z}d\tau,$$

donde la densidad $\varphi \in L^p(\Gamma, w)$ satisface la condición

$$\varphi(\alpha(t)) = \varphi(t). \tag{4.3}$$

Entonces por las fórmulas de Sokhotsky-Plemelj tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi^+(\alpha(t)) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - \alpha(t)}d\tau \\
&= \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}d\tau \\
&= \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + (K\varphi)(t),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde K es un operador compacto en el espacio $L^p(\Gamma, w)$ dado por

$$(K\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)d\tau, \ t \in \Gamma.$$

Por otro lado, por las fórmulas de Sokhotsky-Plemelj,

$$\begin{aligned}
\Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(\alpha(t)) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - t}d\tau \\
&= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sustituyendo (4.4) y (4.5) en (4.2), tenemos

$$\frac{1}{2}(1 - G(t))\varphi(t) - \frac{(1 + G(t))}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + K\varphi(t) = g(t), \ t \in \Gamma \tag{4.6}$$

o bien,

$$(A\varphi)(t) = g(t), \quad A = \frac{1 - G}{2}I - \frac{1 + G}{2}S_\Gamma + K.$$

Entonces el problema de frontera de Carleman (4.2) está reducido equivalentemente a la ecuación integral singular (4.6). Las soluciones de (4.6) corresponden a la solución del problema de Carleman, las cuáles son la función densidad de la ecuación integral de tipo Cauchy, además satisface la condición (4.3).

4.2 Solución al problema de Carleman por reducción al problema de Riemann.

La otra forma para resolver el problema de Carleman es reducirlo al problema de Riemann mediante la aplicación del Teorema de adhesión conforme, el cual se aplica de manera directa ya que los valores límite de la función (2.60) en $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pertenecen a $L^p_+(\mathbb{T}, w)$, la clase no cambia porque los valores $z^{\pm}(w)$ pertenecen a la clase de Hölder. Ahora vamos a aplicar un desplazamiento particular (1.4) el cual manda el interior del disco sobre el exterior, y $\mathbb{T}$ lo manda a él mismo pero invirtiendo la orientación en $\mathbb{T}$.

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^+(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{4.7}$$

donde $G \in \mathcal{G}L^\infty(\mathbb{T})$, el grupo de elementos invertibles en $L^\infty(\mathbb{T})$, $g \in L^p(\mathbb{T}, w)$, y las condiciones (2.16) y (2.17) se cumplen.
Ahora consideramos las funciones

$$\begin{aligned} \Psi^-(z) = \Phi^+(\alpha(z)) \ , &\qquad \Psi^+(z) = \Phi^+(z) \\ \Psi^- : D^+ \to D^- \ , &\qquad \Psi^+ : D^+ \to D^+. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Estas funciones son analíticas. Sustituyendo en (4.7) obtenemos

$$\Psi^-(t) = G(t)\Psi^+(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}. \tag{4.9}$$

Por lo tanto obtenemos el problema de Riemann

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{G(t)}\Psi^-(t) - \frac{g(t)}{G(t)}, \quad t \in \mathbb{T}. \tag{4.10}$$

Representamos $(\Psi^-(z), \Psi^+(z))$ como la integral de tipo Cauchy

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z} \quad , \quad z \in D^+ \\ \Psi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z} \quad , \quad z \in D^- \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $f \in L^p(\mathbb{T}, w)$, es una solución de la ecuación $Af = \widetilde{g}$, donde $A = P + G^{-1}Q$ y $\widetilde{g} = -\frac{g}{G}$.
Supongamos que $G \in L^\infty(\mathbb{T})$ es invertible en $L^\infty(\mathbb{T})$. Consideremos la factorización de Wiener-Hopf de G^{-1}:

$$G^{-1} = G_-\chi_\varkappa G_+$$

Aplicando los resultados de la sección 3.3 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *(1) Si $\varkappa = 0$, el problema de Carleman (4.7) con coeficiente G que satisface (2.16), tiene la solución única (4.11) para cada $g \in L^p(\mathbb{T}, w)$ tal que $g/G = g \circ \alpha$, donde la densidad $f \in L^p(\mathbb{T}, w)$ está dada por la fórmula*

$$f = \left(G_+^{-1}P + G_-Q\right) G_+\widetilde{g}$$

(2) Si $\varkappa > 0$, *el problema de Carleman* (4.7) *con* $G(G \circ \alpha) = 1$ *tiene la solución única* (4.11) *con la densidad*

$$f = \left(P - QG^{-1}P\right)\chi_{-\varkappa}G_+^{-1}PG_+\widetilde{g} + QG^{-1}g \ \in L^p(\mathbb{T}, w),$$

si $\widetilde{g} = g \circ \alpha$ *y satisface la condición*

$$\int_{\mathbb{T}} G_+^{-1}PG_+\widetilde{g}\overline{P_{\varkappa-1}}\,|dt| = 0,$$

donde $P_{\varkappa-1}$ *es un polinomio arbitrario de grado* $\varkappa - 1$.

(3) Si $\varkappa < 0$, *el problema de Carleman* (4.7) *con* $G(G \circ \alpha) = 1$ *tiene la solución general* $f \in L^p(\mathbb{T}, w)$ *para cada* $g \in L^p(\mathbb{T}, w)$ *tal que* $g/G = g \circ \alpha$, *que tiene la forma*

$$f = \left(I - QG^{-1}P\right)\left[\left(G_+^{-1}PG_-^{-1}\right)\left(\chi_{-\varkappa}PG^{-1}g + P_{-\varkappa-1}\right)QG^{-1}g\right],$$

donde $P_{-\varkappa-1}$ *es un polinomio arbitrario de grado* $-\varkappa - 1$.

CAPÍTULO 5

Operadores integrales singulares con coeficientes continuos a trozos.

5.1 Funciones no singulares y su índice.

Para esta sección fue utilizado el libro [12, Capítulo 9].
Sea Γ una curva cerrada sin intersecciones. Por $PC(\Gamma)$ denotamos la clase de todas las funciones a en $L^{\infty}(\Gamma)$ con las siguientes propiedades:

1. La función a es continua en Γ con la posible excepción de un número finito de puntos;

2. los límites laterales

$$a\left(t_0+0\right)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\succ t_0}} a(t) \text{ y } a\left(t_0-0\right)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\prec t_0}} a(t)$$

   existen en cada punto de discontinuidad t_0 de a y son finitos. Note que por $t \prec t_0$ nos referimos a que el punto t está localizado antes de t_0 con respecto a la orientación de Γ;

3. en cualquier punto de discontinuidad se tiene $a(t_0-0)=a(t_0)$.

Ahora, dado un par (z_1, z_2) de puntos en el plano complejo $\mathbb{C}$ y un número δ dentro del intervalo $(0,\pi)$, designamos por $l(z_1, z_2; \delta)$ el arco circular que une el punto z_1 con z_2 y se distingue por la siguiente propiedad:
De cualquier punto z $(z \neq z_1, z_2)$ del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ la línea recta entre z_1 y z_2 se ve bajo

el ángulo δ, y si z corre el arco $l(z_1, z_2; \delta)$ de z_1 a z_2, esta línea recta se encuentra en el lado izquierdo.
Además, para números δ en el intervalo $\pi < \delta < 2\pi$ definimos $l(z_1, z_2; \delta) = l(z_2, z_1; 2\pi - \delta)$, y denotamos por $l(z_1, z_2; \pi)$ la linea recta entre z_1 y z_2. El arco $l(0, 1; \delta)$ $(0 < \delta < \pi)$ puede ser representado analíticamente en la forma parametrizada

$$z = \frac{\sin \theta\mu}{\sin \theta} e^{i\theta(\mu-1)} \; (0 \leq \mu \leq 1), \tag{5.1}$$

donde $\theta = \pi - \delta$, y la representación paramétrica del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ $(0 < \delta < \pi)$ es

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) f_\delta(\mu),$$

donde $f_\delta(\mu)$ denota la función en el lado derecho de la igualdad (5.1).
Como μ increse desde cero a uno, entonces el valor de la función $1 - f_\delta(\mu)$ corre a través del arco $l(1, 0; 2\pi - \delta)$. Por lo tanto, si $\pi < \delta < 2\pi$ entonces la representación paramétrica del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ esta dado por

$$z = z_2 + (z_1 - z_2)(1 - f_\delta(\mu)).$$

Resumiendo tenemos la ecuación de arco $l(z_1, z_2; \delta)$ como $z = z_2 f_\delta(\mu) + z_1(1 - f_\delta(\mu))$ con

$$f_\delta(\mu) := \begin{cases} \frac{\sin \theta\mu}{\sin \theta} e^{i\theta(\mu-1)} \quad (\theta = \pi - \delta) & \text{si } \; 0 < \delta < 2\pi, \delta \neq \pi \\ \mu & \text{si } \; \delta = \pi. \end{cases} \tag{5.2}$$

Sean p y $\beta_1, \ldots, \beta_r$ números reales que satisfacen $1 < p < \infty$ y $-1 < \beta_k < p - 1$ $(k = 1, \ldots, r)$. Considere la función

$$\rho(t) := \prod_{j=1}^{r} |t - t_j|^{\beta_j},$$

donde los t_j son ciertos puntos distintos por pares de la curva Γ. Para cada función $a \in PC(\Gamma)$ asociamos la función $a^{p,\rho} : \Gamma \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por

$$a^{p,\rho}(t, \mu) := a(t + 0) f(t, \mu) + a(t)(1 - f(t, \mu))$$

$(t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$, donde ponemos $f(t, \mu) := f_{\delta(t)}(\mu)$ y

$$\delta(t) := \begin{cases} \frac{2\pi}{p} & \text{si } \; t \in \Gamma \setminus \{t_1, \ldots, t_r\} \\ \frac{2\pi(1+\beta_k)}{p} & \text{si } \; t = t_k \; (k = 1, \ldots, r). \end{cases} \tag{5.3}$$

Si la función a es continua en t_0 entonces $a^{p,\rho}(t_0,\mu) = a(t_0)$, pero si t_0 es un punto de discontinuidad de a entonces el rango de la función $a^{p,\rho}(t_0,\mu)$ $(0 \leq \mu \leq 1)$ coincide con el arco (o posiblemente línea recta) $l(a(t_0), a(t_0+0); \delta(t_0))$.

Denotamos por $W_{p,\rho}(a)$ la curva plana que resulta del rango de la función a por adición de los arcos $l(a(\tau_k), a(\tau_k+0); \delta(\tau_k))$ para todos los puntos $t_k (k = 1,\ldots,m)$ de discontinuidad de a. Obviamente, la curva $W_{p,\rho}(a)$ coincide con el rango de la función $a^{p,\rho}$. Orientamos la curva $W_{p,\rho}(a)$ en la forma natural. Sobre intervalos de continuidad de a, el movimiento a lo largo de $W_{p,\rho}(a)$ es igual al movimiento de t a lo largo de Γ en dirección positiva, y a lo largo de los arcos suplementarios de la curva $W_{p,\rho}(a)$ es orientada de $a(\tau_k)$ hacia $a(\tau_k + 0)$.

Una función a $(\in PC(\Gamma))$ será llamada $\{p,\rho\}$-*no-singular* si la curva $W_{p,\rho}(a)$ no contiene el origen, es decir, si $a^{p,\rho}(t,\mu) \neq 0$ $t \in \Gamma, \mu \in [0,1]$. Si la función a es $\{p,\rho\}$-no-singular entonces el índice de la curva $W_{p,\rho}(a)$ alrededor del punto $z = 0$ es llamado su $\{p,\rho\}$-*índice*. Este índice será abreviado por ind $a^{p,\rho}$. Si a es una función continua en Γ y $a(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ entonces ind $a^{p,\rho} =$ ind a, pero si la función a es discontinua entonces su $\{p,\rho\}$-índice depende de p y ρ. Consideremos algunos ejemplos. Denotamos por $\mathbb{T}$ al círculo unitario $|\zeta| = 1$ orientado en el sentido de las manecillas del reloj, y ponemos $\rho(t) := |t-1|^\beta$ y $a(t) = t^{1/2}$ $(= e^{i(\theta/2)}, 0 < \theta \leq 2\pi)$. El rango de la función a es el semicírculo superior, y $a(1) = -1$, $a(1+0) = 1$. Si $(1+\beta)/p < 1/2$ entonces el arco de círculo $l(-1,1; 2\pi(1+\beta)/p)$ está localizado en el semiplano inferior, y si $(1+\beta)/p > 1/2$, en el semiplano superior. Para $2(1+\beta) = p$ uno tiene $l(-1,1;\pi) = [-1,1]$. En el último caso, la función a poseé un cero (en el punto $t = 1, \mu = 1/2$). Por otro lado, la función a es $\{p,\rho\}$-no-singular si $2(1+\beta) \neq p$, y no es difícil ver que

$$\text{ind } a^{a,\rho} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 2(1+\beta) < p \\ 0 & \text{si } \ 2(1+\beta) > p \end{cases}$$

Después explicaremos que el producto de dos funciones $\{p,\rho\}$-no-singulares no necesariamente es $\{p,\rho\}$-no-singular. Considere, por ejemplo, $a(t) = t^{1/4}$ $(= e^{i(\theta/4)},\ 0 < \theta \leq 2\pi)$ y $2(1+\beta) = p$. Fácilmente se puede checar que la función a es $\{p,\rho\}$-no-singular mientras que la función a^2 no lo es. Además mencionamos que, incluso en el caso que las funciones a, b y ab son $\{p,\rho\}$-no-singular, el $\{p,\rho\}$-índice del producto ab no necesariamente coincide con la suma de los $\{p,\rho\}$-índices de las funciones a y b. Por ejemplo, si $a(t) = b(t) = t^{1/3}$ y $2(1+\beta) = p$ entonces ind $a^{p,\rho} =$ ind $b^{p,\rho} = 0$ pero ind $(ab)^{p,\rho} = 1$. Sin embargo, se tiene lo siguiente

Teorema 5.1. *Si las dos funciones $\{p,\rho\}$-no-singulares a y b no tienen puntos de discontinuidad en común entonces su producto $c = ab$ es también $\{p,\rho\}$-no-singular, y*

$$ind\ c^{p,\rho} = ind\ a^{p,\rho} + ind\ b^{p,\rho}. \tag{5.4}$$

Escribiremos *"función p-no-singular"* en lugar de "función $\{p,1\}$-no-singular", en el caso $\rho \equiv 1$. Ahora establecemos un criterio para la $\{p,\rho\}$-no-singularidad de una función a.

Teorema 5.2. *Las siguientes dos condiciones son necesarias y suficientes para la $\{p,\rho\}$-no-singularidad de la función a:*

1. *los límites laterales $a(t \pm 0) \neq 0$ para todos los puntos $t \in \Gamma$;*
2. *en cualquier punto de discontinuidad t_k de a, el cociente $a(t_k)/a(t_k + 0)$ puede ser escrito como $\exp(i\gamma_k)$ donde $\delta(t_k) - 2\pi < Re\ \gamma_k < \delta(t_k)$ y la función $\delta(t)$ es definida por* (5.3).

5.2 Criterio para la factorización generalizada de funciones potenciales.

En esta sección formulamos condiciones suficientes y necesarias para la factorización en $L^p(\Gamma,\rho)$ de funciones de la forma $(t-z)^\gamma$ y de sus productos. Se verá que esas funciones admiten una factorización en $L^p(\Gamma,\rho)$ si y sólo si son funciones $\{p,\rho\}$-no-singulares.
Primero suponga que Γ es una curva cerrada simple, z_0 un punto en D_Γ^+, γ un número complejo, y $\Psi_0(z)$ una rama fija de la función $(z-z_0)^\gamma$ en el plano complejo $\mathbb{C}$ con un corte de z_0 a ∞ que intersecta la curva Γ sólo en el punto t_0. La función $\Psi_0(z)$ es continua en cada punto $t \in \Gamma$ excepto, posiblemente, en t_0; $\Psi_0(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ y

$$\frac{\Psi_0(t_0)}{\Psi_0(t_0+0)} = \exp(2\pi i\gamma). \tag{5.5}$$

Teorema 5.3. *La función Ψ_0 es $\{p,\rho\}$-no-singular si y sólo si la diferencia $Re\ \gamma - \delta(t_0)/2\pi$ no es un entero. Si esta condición se satisface y si κ se refiere al entero que satisface*

$$0 < \kappa + \delta(t_0)/2\pi - Re\ \gamma < 1$$

entonces $ind\ \Psi_0^{p,\rho} = \kappa$.

Ahora sea Γ una curva cerrada que es la unión finita de curvas de Jordan Γ_k. Para cada punto $\tau \in \Gamma$ y cada número complejo γ asociamos cierta función $\Psi_{\tau,\gamma}$ la cual vamos a definir. Si τ_k es un punto en la curva cerrada simple $\Gamma_k(\subset \Gamma)$ entonces denotamos por $\Psi_{\tau_k,\gamma}$ la función continua en cada punto $t \neq \tau_k$ definida por

$$\Psi_{\tau_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t-z_k)^{\varepsilon\gamma} & \text{si } \; t \in \Gamma_k \\ 1 & \text{si } \; t \in \Gamma \setminus \Gamma_k, \end{cases} \tag{5.6}$$

donde $\varepsilon = 1$ si Γ_k esta orientada en dirección positiva, y $\varepsilon = -1$ en otro caso. El punto z_k se asume que pertenece a D_Γ^+ si $\varepsilon = 1$ y a D_Γ^- si $\varepsilon = -1$, y se elige en tal manera que la línea recta entre los puntos τ_k y z_k toca a la curva Γ en sólo un punto, llamado τ_k.

Teorema 5.4. *Sea $\rho(t) = \prod_{k=1}^{r} |t-t_k|^{\beta_k}$ y $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1} \ldots \Psi_{t_n,\gamma_n}$ $(n \le r)$. Para la $\{p,\rho\}$-no-singularidad de la función Ψ es necesario y suficiente que ninguno de los números*

$$\nu_k := (1+\beta_k)/p - Re\ \gamma_k \ (k = 1, \ldots, n)$$

sea un entero. Si esta condición se satisface y si $\kappa_1, \ldots \kappa_n$ son enteros que satisfacen las desigualdades $0 < \kappa_k + \nu_k < 1$ entonces ind $\Psi^{p,\rho} = \kappa_1 + \ldots + \kappa_n$.

Nuestra siguiente meta es establecer condiciones que garanticen la factorización de la función Ψ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$. Para empezar con eso consideramos el caso cuando Γ es una curva cerrada simple lo cual implica que $\Psi_{\tau,\gamma} = (t-z_0)^\gamma$. Definimos

$$\Psi_{\tau,\gamma}^+ := (t-\tau)^\gamma \ \text{ y } \ \Psi_{\tau,\gamma}^- := \left(\frac{t-\tau}{t-z_0}\right)^{-\gamma}, \tag{5.7}$$

donde $\{(t-\tau)/(t-z_0)\}^{-\gamma}$ denota una rama de esa función la cual es holomorfa en el plano complejo excepto por el corte a lo largo de la línea recta que une z_0 con τ e igual a uno en infinito, y $(t-\tau)^r$ corresponde a una rama de esa función la cual es holomorfa en el plano complejo excepto por un corte a lo largo de un rayo que empieza desde τ hasta infinito y no toca la región D_Γ^+. Además suponemos que esta rama es elegida en tal manera que la igualdad $\Psi_{\tau,\gamma} = \Psi_{\tau,\gamma}^+ \Psi_{\tau,\gamma}^-$ se mantiene.

Teorema 5.5. *Sea $t_1 \in \Gamma$ y*

$$\frac{1+\beta_1}{p} - 1 < Re\ \gamma < \frac{1+\beta_1}{p}. \tag{5.8}$$

Entonces la función $\Psi_{t_1,\gamma}$ admite la factorización $\Psi_{t_1,\gamma} = \Psi_{t_1,\gamma}^+ \Psi_{t_1,\gamma}^-$ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ con

$$\rho(t) := \prod_{k=1}^{r} |t-t_k|^{\beta_k} \ (1 < p < \infty, \ -1 < \beta_k < p-1, \ t_k \in \Gamma).$$

Ahora consideramos el caso más general cuando Γ es una curva cerrada que consiste de un número finito de curvas cerradas simples disjuntas por pares. Sea $\Gamma_k(\subset \Gamma)$ una curva cerrada simple que contien al punto t_k, y denotamos por F_k la región acotada en el plano complejo el cual tiene Γ_k como su frontera. Además, ponemos

$$\Psi^{+}_{t_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t-t_k)^{\gamma} & \text{si } \ t \in \Gamma'_k, \\ \left(\frac{t-t_k}{t-z_k}\right)^{\gamma} & \text{si } \ t \in \Gamma \setminus \Gamma'_k, \end{cases}$$

$$\Psi^{-}_{t_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t-t_k)^{-\gamma} & \text{si } \ t \in \Gamma''_k, \\ \left(\frac{t-t_k}{t-z_k}\right)^{\gamma} & \text{si } \ t \in \Gamma \setminus \Gamma''_k, \end{cases}$$

donde $\Gamma'_k := \Gamma_k \cup (\Gamma \cap F_k)$, $\Gamma''_k := \Gamma \cap F_k$ en el caso cuando Γ_k está orientada en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y $\Gamma'_k := \Gamma \cap F_k$, $\Gamma''_k := \Gamma_k \cup (\Gamma \cap F_k)$ en otro caso. Las ramas de esas funciones son elegidas como antes.

Teorema 5.6. *La función $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1} \ldots \Psi_{t_n,\gamma_n}$ es factorizable en $L_p(\Gamma,\rho)$ si y sólo si es $\{p,\rho\}$-no-singular. Si la función Ψ es $\{p,\rho\}$-no-singular entonces su factorización en $L_p(\Gamma,\rho)$ es de la forma*

$$\Psi = \Psi_{-} t^{\kappa} \Psi_{+}$$

con

$$\kappa := ind\ \Psi^{p,\rho},$$

$$\Psi_{+} := \Psi^{+}_{t_1,\gamma'_1} \ldots \Psi^{+}_{t_n,\gamma'_n} f^{+}_1 \ldots f^{+}_n, := \Psi_{-} := \Psi^{-}_{t_1,\gamma'_1} \ldots \Psi^{-}_{t_n,\gamma'_n} f^{-}_1 \ldots f^{-}_n, \tag{5.9}$$
$$\gamma'_k := \gamma_k - \kappa_k,\ \kappa_k := ind\ \Psi^{p,\rho}_{t_k,\gamma_k}\ \ (k = 1,\ldots,n)\,,$$

y

$$f^{+}_k(t) := \begin{cases} 1 & si \ \ t \in \Gamma'_k, \\ (t-z_k)^{-\kappa_k} & si \ \ t \in \Gamma \setminus \Gamma'_k, \end{cases}$$

$$f^{-}_k(t) := \begin{cases} t^{-\kappa_k} & si \ \ t \in \Gamma''_k, \\ \left(\frac{t-z_k}{t}\right)^{+\kappa_k} & si \ \ t \in \Gamma \setminus \Gamma''_k. \end{cases}$$

Por el Teorema 5.4, los números $\gamma'_k := \gamma_k - \kappa_k$ satisfacen las condiciones

$$\frac{1+\beta_k}{p} - 1 < \mathrm{Re}\ \gamma'_k < \frac{1+\beta_k}{p}.$$

Uno puede mostrar que la función $\Psi_0 = \Psi_{t_1,\gamma_1} \ldots \Psi_{t_n,\gamma_n}$ admite la factorización $\Psi_0 = \Psi^{-}_0 \Psi^{+}_0$ en $L_p(\Gamma,\rho)$ con los factores

$$\Psi^{-}_0 = \Psi^{-}_{t_1,\gamma'_1} \cdots \Psi^{-}_{t_n,\gamma'_1},\ \Psi^{+}_0 = \Psi^{+}_{t_1,\gamma'_1} \cdots \Psi^{+}_{t_n,\gamma'_1}.$$

5.3 Inverso de operadores singulares integrales en una curva cerrada.

En esta sección establecemos condiciones necesarias y suficientes para la invertibilidad unilateral de operadores integrales singulares con coeficientes continuos a trozos a lo largo de una curva Γ en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$.

Teorema 5.7. *Sea* Γ *una curva cerrada,* $\rho(t) := \prod_{k=1}^{n} |t-t_k|^{\beta_k}$, $(-1 < \beta_k < p-1,$ $k = 1,\ldots,n)$, *y* $a, b \in PC(\Gamma)$. *Entonces el operador* $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ *es al menos invertible unilateral en* $L_p(\Gamma,\rho)$ *si y sólo si la condición*

$$a(t+0)\,b(t)f(t,\mu) + a(t)b(t+0)(1-f(t,\mu)) \neq 0 \ \ (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1) \tag{5.10}$$

se satisface. Si se cumple esta condición y $c := a/b$, *entonces el operador* A *es invertible, invertible sólo por la izquierda o invertible sólo por la derecha denpendiendo de si el número* $\kappa = ind\ c^{p,\rho}$ *es igual a cero, positivo o negativo, respectivamente. Si* $\kappa > 0$ *entonces* $\dim$ *coker* $A = \kappa$, *y si* $\kappa < 0$ *entonces* $\dim\ker A = -\kappa$.

Siguiendo [12, Sección 6.7], utilizaremos la siguiente notación en la siguiente proposición. Un operador A es llamado un $\Phi-$operador (o bien, operador de Fredholm), si este es normalmente soluble y si los números $\dim\ker A$ y $\dim \operatorname{coker} A$ son finitos. Un operador A es llamado Φ_+-operador si es normalmente soluble, $\dim\ker A < \infty$ y $\dim\operatorname{coker} A = \infty$. Un operador A es llamado Φ_--operador si es normalmente soluble, $\dim\ker A = \infty$ y $\dim\operatorname{coker} A < \infty$.

Proposición 5.1. *Sean* $a, b \in PC(\Gamma)$ *con* Γ *una curva cerrada. Si el operador* $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ *es un* $\Phi-$ *o* $\Phi_\pm-$*operador, entonces las funciones* a *y* b *están sujetas a la condición* (5.10).

Corolario 5.1. *Sea* $a \in PC(\Gamma)$. *Para la factorización en* $L_p(\Gamma,\rho)$ *de la función* a *es necesario y suficiente que* a *sea* $\{p,\rho\}-$*no-singular. Si la función* a *es* $\{p,\rho\}-$*no-singular entonces* $ind\ a|L_p(\Gamma,\rho) = ind\ a^{p,\rho}$.

CAPÍTULO 6

Álgebra $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ con datos en PSO.

6.1 Introducción.

Sea $\mathcal{B}(X)$ denota el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach X, sea $\mathcal{K}(X)$ el ideal bilateral cerrado de todos los operadores compactos en $\mathcal{B}(X)$, y sea $\mathcal{B}^\pi(X) = \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ el álgebra cociente (también llamada álgebra de Calkin) de las clases $A^\pi := A + \mathcal{K}(X)$ donde $A \in \mathcal{B}(X)$. Un operador $A \in \mathcal{B}(X)$ se dice que es *Fredholm* si su imagen es cerrada y los espacios $\ker A$ y $\ker A^*$ son de dimensión finita. Equivalentemente, $A \in \mathcal{B}(X)$ es Fredholm si y sólo si la clase A^π es invertible en el álgebra $\mathcal{B}^\pi(X)$.

Una función medible $w : \mathbb{T} \to [0, \infty]$ es llamado un peso si la preimagen $w^{-1}(\{0, \infty\})$ del conjunto $\{0, \infty\}$ tiene medida cero. Para $1 < p < \infty$, un peso w pertenece a la *clase de Muckenhoupt* $A_p(\mathbb{T})$ si

$$c_{p,w} := \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^p(\tau) d\,|\tau| \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-q}(\tau) d\,|\tau| \right)^{1/q} < \infty, \tag{6.1}$$

donde $1/p + 1/q = 1$, y el supremo es tomado sobre todos los intervalos $I \subset \mathbb{T}$ de longitud finita $|I|$.

En lo que sigue asumimos que $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{T})$, y consideramos los espacios de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{T}, w)$ equipados con la norma

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T},w)} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\tau)|^p\, w^p(\tau) d\,|\tau| \right)^{1/p}.$$

Como es sabido, el operador integral singular de Cauchy $S_{\mathbb{T}}$ dado por

$$(S_{\mathbb{T}} f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{6.2}$$

es acotado en los espacios $L^p(\mathbb{T}, w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{T})$.
Consideramos los pesos potenciales de la forma

$$\rho(t) = \prod_{j=1}^{n} |t - t_j|^{\beta_j}, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{6.3}$$

donde t_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) son puntos distintos en $\mathbb{T}$ y $\beta_j \in (-1/p, 1/q)$ para toda $j = 1, 2, \ldots, n$. Se puede ver de (6.1) que $w = \rho$ pertenece al conjunto $A_p(\mathbb{T})$ si y sólo si toda $\beta_j \in (-1/p, 1/q)$. Poniendo $\mathcal{B}_{p,\rho} := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{T}, \rho))$ y $\mathcal{K}_{p,\rho} := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{T}, \rho))$ para $p \in (1, \infty)$ y $\rho \in A_p(\mathbb{T})$ dado por (6.3), consideramos las álgebras de Banach

$$\mathfrak{A}_{p,\rho} := \text{alg}\ (aI, S_{\mathbb{T}} : a \in PSO^\diamond) \subset \mathcal{B}_{p,\rho}, \tag{6.4}$$

$$\mathcal{Z}_{p,\rho} := \text{alg}\ (aI : a \in SO^\diamond) \subset \mathfrak{A}_{p,\rho} \tag{6.5}$$

generadas por los operadores de multiplicación aI donde, respectivamente, $a \in PSO^\diamond$ y $a \in SO^\diamond$, y por el operador $S_{\mathbb{T}}$ en el caso de $\mathfrak{A}_{p,\rho}$. El álgebra $PSO^\diamond \subset L^\infty(\mathbb{T})$ de funciones lentamente oscilatorias a trozos y el álgebra $SO^\diamond \subset L^\infty(\mathbb{T})$ consiste de funciones lentamente oscilatorias que admiten, respectivamente, discontinuidades lentamente oscilatorias a trozos y discontinuidades lentamente oscilatorias en arbitrarios puntos de $\mathbb{T}$.

6.2 Las C^*-álgebras $SO^\diamond$ y $PSO^\diamond$

6.2.1 La C^*-álgebra $SO^\diamond$ de funciones lentamente oscilatorias

Sea $L^\infty(\mathbb{T})$ la C^*-álgebra de todas las funciones medibles y acotadas en el círculo unitario $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sea $C := C(\mathbb{T})$ y $PC := PC(\mathbb{T})$ denotan las C^*-subálgebras de $L^\infty(\mathbb{T})$ que consisten, respectivamente , de todas las funciones continuas en $\mathbb{T}$ y todas las funciones continuas a trozos en $\mathbb{T}$, esto es, las funciones que tienen límites unilaterales finitos en cada punto $t \in \mathbb{T}$.
Para una función medible $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ y un conjunto $I \subset \mathbb{T}$, sea

$$\text{osc}\ (f, I) = \ \text{sup}_{\text{ess}}\ \{|f(t) - f(s)| : t, s \in I\}.$$

Siguiendo [1, Sección 4], decimos que una función $f \in L^\infty(\Gamma)$ es *lentamente oscilatoria en el punto* $t \in \mathbb{T}$ si para cada $r \in (0, 1)$ o, equivalentemente, para algún $r \in (0, 1)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \text{osc}\ (f, \mathbb{T}_{r\varepsilon,\varepsilon}(t)) = 0,$$

donde

$$\mathbb{T}_{r\varepsilon,\varepsilon}(t) := \{z \in \mathbb{T} : r\varepsilon \leq |z - t| \leq \varepsilon\} \text{ para } t \in \mathbb{T}.$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$, sea $SO_t(\mathbb{T})$ denota la C^*-sub álgebra de $L^\infty(\mathbb{T})$ dada por

$$SO_t(\mathbb{T}) := \{f \in C_b(\mathbb{T} \setminus \{t\}) : \ f \text{ oscila lentamente en } t\},$$

donde $C_b(\mathbb{T} \setminus \{t\}) := C(\mathbb{T} \setminus \{t\}) \cap L^\infty(\mathbb{T})$. Sea $SO^\diamond$ la mínima sub álgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que contiene todas las C^*-álgebras $SO_t(\mathbb{T})$ con $t \in \mathbb{T}$. En particular, $SO^\diamond$ contiene $C(\mathbb{T})$.

Proposición 6.1. *Para cada $\lambda \in \mathbb{T}$, el mapeo $a \mapsto a \circ \beta_\lambda$ definida por el homeomorfismo*

$$\beta_\lambda : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \ t \mapsto \lambda t \tag{6.6}$$

es un *-isomorfismo isométrico de la C^*-álgebra SO_λ sobre la C^*-álgebra SO_1.

Sea H^∞ la sub álgebra cerrada de $L^\infty(\mathbb{T})$ que consiste de todas las funciones que son límites no tangenciales en $\mathbb{T}$ de funciones analíticas en el semiplano superior. Aplicando [25], tenemos lo siguiente (ver [14, Teorema 4.2] y [5, Sección 9.35]).

Teorema 6.1. *La C^*-álgebra $SO^\diamond$ está contenida en la C^*-álgebra QC de funciones cuasicontinuas en $\mathbb{T}$, donde*

$$QC := (H^\infty + C(\mathbb{T})) \cap \left(\overline{H^\infty} + C(\mathbb{T})\right). \tag{6.7}$$

6.2.2 La C^*-álgebra $PSO^\diamond$ de funciones lentamente oscilatorias a trozos

Sea

$$PSO^\diamond := \text{alg}\,(SO^\diamond, PC) \tag{6.8}$$

la C^*-sub álgebra de $L^\infty(\mathbb{T})$ generada por las C^*-álgebras $SO^\diamond$ y PC. Obviamente, $PSO^\diamond$ es una generalización natural de la clase PC con el reemplazo de límites unilaterales por oscilaciones lentas unilaterales.

Dada una C^*-álgebra conmutativa con unidad $\mathcal{A}$, denotamos por $M(\mathcal{A})$ el espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}$. Como es bien sabido, $M(C(\mathbb{T})) = \mathbb{T}$ y $M(PC(\mathbb{T})) = \mathbb{T} \times \{0, 1\}$, respectivamente, donde los puntos $t \in \mathbb{T}$ están identificados con los funcionales de evaluación δ_t dados por $\delta_t(f) = f(t)$ para $f \in C(\mathbb{T})$. Las parejas $(t, 0)$ y $(t, 1)$ son los funcionales lineales multiplicativos definidos para $a \in PC(\mathbb{T})$ por $(t,0)a = a(t-0)$ y $(t,1)a = a(t+0)$, donde $a(t-0)$ y $a(t+0)$ son los límites unilaterales izquierdo y derecho de a en el punto $t \in \mathbb{T}$, y la base de conjuntos abiertos para $\mathbb{T} \times \{0,1\}$ consiste de todos los conjuntos de la forma $(t,\tau) \times \{0,1\}$, $((t,\tau] \times \{0\}) \cup ([t,\tau) \times \{1\})$ donde $t,\tau \in \mathbb{T}$. Esto también es conocido (ver [1]) que

$$M(SO^\diamond) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} M_t(SO^\diamond), \quad M(PSO^\diamond) = \bigcup_{\xi \in M(SO^\diamond)} M_\xi(PSO^\diamond), \tag{6.9}$$

donde las fibras correspondientes están dadas para $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M(SO^\diamond)$ por

$$\begin{aligned} M_t(SO^\diamond) &= \left\{\xi \in M(SO^\diamond) : \xi|_{C(\mathbb{T})} = t\right\}, \\ M_\xi(PSO^\diamond) &= \{y \in M(PSO^\diamond) : y|_{SO^\diamond} = \xi\}. \end{aligned}$$

Las fibras $M_\xi(PSO^\diamond)$ para $\xi \in M(SO^\diamond)$ pueden caracterizarse como sigue [1, Teorema 4.6].

Teorema 6.2. *Si $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ con $t \in \mathbb{T}$, entonces*

$$M_\xi(PSO^\diamond) = \{(\xi,0),(\xi,1)\}, \tag{6.10}$$

donde, para $\mu \in \{0,1\}$, $(\xi,\mu)|_{SO^\diamond} = \xi$, $(\xi,\mu)|_{C(\mathbb{T})} = t$, $(\xi,\mu)|_{PC(\mathbb{T})} = (t,\mu)$.

Por (6.9) y (6.10), $M(PSO^\diamond) = M(SO^\diamond) \times \{0,1\}$. La topología de Gelfand en $M(PSO^\diamond)$ puede ser descrita como sigue. Si $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ donde $t \in \mathbb{T}$, entonces una base de vecindades para $(\xi,\mu) \in M(PSO^\diamond)$ consiste de todos los conjuntos abiertos de la forma

$$U_{(\xi,\mu)} = \begin{cases} (U_{\xi,t} \times \{0\}) \cup \left(U^-_{\xi,t} \times \{0,1\}\right) & \text{si } \mu = 0, \\ (U_{\xi,t} \times \{1\}) \cup \left(U^+_{\xi,t} \times \{0,1\}\right) & \text{si } \mu = 1, \end{cases}$$

donde $U_{\xi,t} = U_\xi \cap M_t(SO^\diamond)$, U_ξ es una vecindad abierta de ξ en $M(SO^\diamond)$, y $U^-_{\xi,t}$, $U^+_{\xi,t}$ consisten de todos $\zeta \in U_\xi$ tales que $\tau = \zeta|_{C(\mathbb{T})}$ pertenecen, respectivamente, a los conjuntos $(-t,t) := \{z \in \mathbb{T} : -\pi < \arg z/t < 0\}$ y $(t,-t) := \{z \in \mathbb{T} : 0 < \arg z/t < \pi\}$.
Dados $a \in PSO^\diamond$ y $\xi \in M(SO^\diamond)$, ponemos

$$a(\xi^-) := a(\xi,0) \quad \text{y} \quad a(\xi^+) := a(\xi,1). \tag{6.11}$$

6.3 Las álgebras de Banach $\mathcal{Z}_{p,\varrho}$ y $\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho}$

Dados $p \in (1,\infty)$ y un peso potencial $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$, vamos a estudiar el álgebra de Banach con unidad $\mathcal{Z}_{p,\varrho} \subset \mathcal{B}_{p,\varrho}$ dada por (6.5). Junto con $\mathcal{Z}_{p,\varrho}$, consideramos el álgebra cociente de Banach

$$\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho} := \left(\mathcal{Z}_{p,\varrho} + \mathcal{K}_{p,\varrho}\right)/\mathcal{K}_{p,\varrho} \tag{6.12}$$

que consiste de las clases $[aI]^{\pi} := aI + \mathcal{K}_{p,\varrho}$ para toda $a \in SO^{\diamond}$.

Lema 6.1. *Si $p \in (1,\infty)$ y un peso potencial $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$, entonces los espacios de ideales maximales $M(\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho})$ y $M(SO^{\diamond})$ pueden ser identificadas:*

$$M(\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho}) = M(SO^{\diamond}). \tag{6.13}$$

Demostración. Si $a \in SO^{\diamond}$ es invertible en $L^{\infty}(\mathbb{T})$, entonces la función $1/a$ pertenece a la C^*-álgebra $SO^{\diamond}$. Por lo tanto la clase $[(1/a)I]^{\pi}$ es el inverso de la clase $[aI]^{\pi}$ en el álgebra de Banach $\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho}$, lo cual implica que

$$\mathrm{sp}([aI]^{\pi}) \subset \mathrm{sp}(a) \ \text{ para toda } \ a \in SO^{\diamond}, \tag{6.14}$$

donde $\mathrm{sp}(x)$ denota el espectro de un elemento x en un álgebra de Banach con unidad. Si la clase $[aI]^{\pi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_{p,\varrho}$, entonces existe una función $b \in SO^{\diamond}$ y un operador compacto $K \in \mathcal{K}_{p,\varrho}$ tal que $(ab-1)I = K$. Por lo tanto $ab = 1$ porque $\mathcal{Z}_{p,\varrho} \cap \mathcal{K}_{p,\varrho} = \{0\}$, lo cual implica la inclusión

$$\mathrm{sp}(a) \subset \mathrm{sp}([aI]^{\pi}) \ \text{ para toda } \ a \in SO^{\diamond}. \tag{6.15}$$

Por (6.14) y (6.15),

$$\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}([aI]^{\pi}) \ \text{ para toda } \ a \in SO^{\diamond}. \tag{6.16}$$

Más aún, el mapeo $a \mapsto [aI]^{\pi}$ es una biyección de $SO^{\diamond}$ sobre $\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho}$. Ya que

$$\|[aI]^{\pi}\| := \inf_{K \in \mathcal{K}_{p,\varrho}} \|aI + K\|_{\mathcal{B}_{p,\varrho}} \le \|aI\|_{\mathcal{B}_{p,\varrho}} = \|a\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})}$$

y ya que, en vista de (6.5),

$$\|a\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} = r(a) = r\left([aI]^{\pi}\right) \le \|[aI]^{\pi}\|,$$

donde $r(x)$ denota el radio espectral de un elemento x, concluimos que $\|[aI]^{\pi}\| = \|a\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})}$, y por lo tanto el mapeo $a \mapsto [aI]^{\pi}$ es un isomorfismo isométrico de $SO^{\diamond}$ sobre $\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho}$. Esto permite identificar el espacio de ideales maximales de $SO^{\diamond}$ y $\mathcal{Z}^{\pi}_{p,\varrho}$ por la fórmula $\tilde{\mu}\left([aI]^{\pi}\right) = \mu(a)$, donde $a \in SO^{\diamond}$, $\mu \in M(SO^{\diamond})$ y $\tilde{\mu} \in M(\mathcal{Z}_{p,\varrho})$, lo cual da (6.13). $\square$

Similarmente a la prueba de [16, Teorema 3.2], el teorema de interpolación de Stein-Weiss (ver [2, Corolario 5.5.4]) implica el siguiente análogo importante del teorema de Krasnoselskii [17, Teorema 3.10] sobre la interpolación de compacidad.

Teorema 6.3. *Sea $1 < p < \infty$, $w_i \in A_{p_i}(\mathbb{T})$ y $T \in \mathcal{B}(L^{p_i}(\mathbb{T}, w_i))$ para $i = 1, 2$. Si el operador T es compacto en el espacio $L^{p_1}(\mathbb{T}, w_1)$, entonces T es compacto en cada espacio $L^p(\mathbb{T}, w)$ donde*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad w = w_1^{1-\theta} w_2^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{6.17}$$

Note que según, [16], el Teorema 6.3 también sigue del teorema de interpolación de Stein-Weiss (ver [2, Corolario 5.5.2]) y del resultado de compacidad unilateral obtenido por el método de interpolación real en [7, Teorema 1.1] (ver también [6]). Aplicando el Teorema 6.3 se puede establecer lo siguiente (ver también [1, Teorema 6.2]).

Teorema 6.4. *Sea $p \in (0, \infty)$, $w \in A_p(\mathbb{T})$ y $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. El conmutador $[aI, S_{\mathbb{T}}] = aS_{\mathbb{T}} - S_{\mathbb{T}} aI$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbb{T}, w)$ si y sólo si $a \in QC$.*

Teoremas 6.1 y 6.4 implican lo siguiente.

Corolario 6.1. *Si $p \in (0, \infty)$, $w \in A_p(\mathbb{T})$ y $a \in SO^\diamond$, entonces el conmutador $[aI, S_{\mathbb{T}}] = aS_{\mathbb{T}} - S_{\mathbb{T}} aI$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbb{T}, w)$.*

Para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ definido por (6.4), introducimos el álgebra cociente de Banach $\mathfrak{A}^\pi_{p,\varrho} := \mathfrak{A}_{p,\varrho}/\mathcal{K}_{p,\varrho}$ (recuerde que $\mathcal{K}_{p,\varrho} \subset \mathfrak{A}_{p,\varrho}$). Por el Corolario 6.1, el álgebra de Banach $\mathcal{Z}^\pi_{p,\varrho}$ es una subálgebra central de $\mathfrak{A}^\pi_{p,\varrho}$.

6.4 Estudio local del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$

6.4.1 Aplicación del principio local de Allan-Douglas

Sea $\Lambda_{p,\varrho}$ denota la subálgebra de Banach de $\mathcal{B}_{p,\varrho}$ que consiste de todos los operadores en $\mathcal{B}_{p,\varrho}$ que conmutan con cada operador $A \in \mathcal{Z}_{p,\varrho}$ módulo operadores compactos. Claramente, $\Lambda_{p,\varrho}$ contiene $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ y por lo tanto, el álgebra cociente $\Lambda^\pi_{p,\varrho} := \Lambda_{p,\varrho}/\mathcal{K}_{p,\varrho}$ contiene el álgebra de Banach $\mathfrak{A}^\pi_{p,\varrho} = \mathfrak{A}_{p,\varrho}/\mathcal{K}_{p,\varrho}$. Además, $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$ es el conmutante del álgebra cociente $\mathcal{Z}^\pi_{p,\varrho}$, y por lo tanto el álgebra $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}^\pi_{p,\varrho} = \mathcal{B}_{p,\varrho}/\mathcal{K}_{p,\varrho}$ que consiste de las clases $A^\pi := A + \mathcal{K}_{p,\varrho}$ para toda $A \in \mathcal{B}_{p,\varrho}$, esto es, el espectro de todos los operadores $A^\pi \in \Lambda^\pi_{p,\varrho}$ en las álgebras $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$ y $\mathcal{B}^\pi_{p,\varrho}$ coinciden.

Por el Lema 6.1, $M(SO^\diamond) = M(\mathcal{Z}^\pi_{p,w})$. Para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$, sea $\mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es el más pequeño ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$ que contiene al ideal maximal

$$\mathcal{I}^\pi_{p,\varrho,\xi} := \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond, a(\xi) = 0\}$$

del álgebra central $\mathcal{Z}^\pi_{p,\varrho}$ de $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$. Considere el álgebra cociente $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi} := \Lambda^\pi_{p,\varrho}/\mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi}$.
Por el principio local de Allan-Douglas (ver [5, Teorema 1.35]), inmediatamente obtenemos el siguiente resultado.

Lema 6.2. *Una clase $A^\pi \in \Lambda^\pi_{p,\varrho}$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$ si y sólo si para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$ la clase $A^\pi_{p,\varrho,\xi} := A^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$.*

Sea $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ la subálgebra cerrada más pequeña de $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$ que contiene las clases $A^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para todo $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$.

Corolario 6.2. *Dados $p \in (1,\infty)$ y un peso potencial $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$, un operador $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$ es Fredholm en el espacio de Lebesgue con peso $L^p(\mathbb{T},\varrho)$ (equivalentemente, la clase $A^\pi \in \mathfrak{A}^\pi_{p,\varrho}$ es invertible en el álgebra de Banach $\mathfrak{A}^\pi_{p,\varrho}$) si y sólo si para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$ la clase $A^\pi_{p,\varrho,\xi} \in \mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$.*

6.4.2 Representantes locales

Vamos a identificar las clases $A^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para toda $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$ y toda $\xi \in M(SO^\diamond)$, donde $p \in (1,\infty)$ y un peso potencial $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$. Para $t \in \mathbb{T}$, sea χ^-_t y χ^+_t denotan las funciones características de los intervalos $(-t,t)$ y $(t,-t)$ de $\mathbb{T}$, respectivamente.

Lema 6.3. *[1, Lema 6.6] Si $a \in PSO^\diamond$, $t \in \mathbb{T}$, $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, y*

$$a(\xi^\pm) = 0 \quad si \quad \xi \in M_t(SO^\diamond), \tag{6.18}$$

entonces $[aI]^\pi_{p,\varrho,\xi} = [0]^\pi_{p,\varrho,\xi} = \mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi}$.

Teorema 6.5. *Para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, el mapeo $\delta_\xi : A \mapsto A^\pi_{p,\varrho,\xi}$ definida sobre los generadores aI $(a \in PSO^\diamond)$ y $S_\mathbb{T}$ del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ por*

$$\delta_\xi(aI) := \left[\left(a(\xi^+)\chi^+_t + a(\xi^-)\chi^-_t\right) I\right]^\pi_{p,\varrho,\xi}, \tag{6.19}$$

$$\delta_\xi(S_\mathbb{T}) := [S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\varrho,\xi}, \tag{6.20}$$

extiende a un homomorfismo de álgebra de Banach $\delta_\xi : \mathfrak{A}_{p,\varrho} \to \mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$. Más aún,

$$\sup_{\xi \in M(SO^\diamond)} \|\delta_\xi(A)\|_{\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}} \le \|A^\pi\| := \inf_{K \in \mathcal{K}_{p,\varrho}} \|A + K\| \quad para\ todo \quad A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}.$$

Demostración. Sea $\xi \in M(SO^\diamond)$. Considere los homomorfismos naturales de álgebra de Banach

$$\delta_\xi : \mathfrak{A}_{p,\varrho} \to \mathfrak{A}^\pi_{p,\varrho} \to \mathcal{A}^\pi_\xi, \quad A \mapsto A^\pi \mapsto A^\pi_\xi.$$

Para cada $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$,

$$\sup_{\xi \in M_t(SO^\diamond)} \|\delta_\xi(A)\|_{\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}} \leq \|A^\pi\|.$$

Resta probar las igualdades (6.19) y (6.20) para $a \in PSO^\diamond$.
Fijamos $t \in \mathbb{T}$ y tomamos $\xi \in M_t(SO^\diamond)$. La función

$$\widehat{a}_\xi := a - a(\xi^+)\chi^+_t - a(\xi^-)\chi^-_t$$

pertenece a $PSO^\diamond$. Más aún, de (6.11) y el Lema 6.3 se tiene

$$[\widehat{a}_\xi I]^\pi_{p,\varrho,\xi} = [0]^\pi_{p,\varrho,\xi} = \mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi},$$

lo cual implica que para $\xi \in M_t(SO^\diamond)$,

$$[aI]^\pi_{p,\varrho,\xi} =[(a(\xi^+)\chi^+_t + a(\xi^-)\chi^-_t)I]^\pi_{p,\varrho,\xi},$$
$$[S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\varrho,\xi} =[S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\varrho,\xi}.$$

Entonces, para toda $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, las fórmulas (6.19) y (6.20) están demostradas. □

Teorema 6.5 y Lema 6.2 implican inmediatamente lo siguiente.

Corolario 6.3. *Un operador $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{T}, \varrho)$ si y sólo si las clases $A^\pi_{p,\varrho,\xi} = \delta_\xi(A) \in \mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ son invertibles en las álgebras cociente $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para toda $\xi \in M(SO^\diamond)$.*

6.4.3 Estructura de álgebras locales

Sean $P_\pm := (I \pm S_\mathbb{T})/2$ las proyecciones mutuas en los espacios $L^p(\mathbb{T}, \varrho)$, donde $p \in (1, \infty)$ y un peso potencial $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$. Teorema 6.5 implica el siguiente resultado sobre la estructura de álgebras locales $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$.

Lema 6.4. *Dados $p \in (1, \infty)$, un peso potencial $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, las álgebras locales $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ generadas por las clases $[S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\varrho,\xi}$ y $[aI]^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para toda $a \in PSO^\diamond$ tienen las siguiente estructura: el álgebra cociente de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es generada por la unidad $I^\pi_{p,\varrho,\xi}$ y dos idempotentes*

$$P^\pi_{p,\varrho,\xi} := [P_+]^\pi_{p,\varrho,\xi}\,, \quad Q^\pi_{p,\varrho,\xi} := \left[\chi^+_t I\right]^\pi_{p,\varrho,\xi}\,; \tag{6.21}$$

Demostración. Si $t \in \mathbb{T}$, $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ y $a \in PSO^\diamond$, entonces

$$[aI]^\pi_{p,\varrho,\xi} = \left[\left(a(\xi^+)\chi_t^+ + a(\xi^-)\chi_t^-\right) I\right]^\pi_{p,\varrho,\xi} = I^\pi_{p,\varrho,\xi} + \widehat{a}(\xi)\left[\chi_t^+ I\right]^\pi_{p,\varrho,\xi},$$
$$[S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\varrho,\xi} = [P_+ - P_-]^\pi_{p,\varrho,\xi} = 2\,[P_+]^\pi_{p,\varrho,\xi} - I^\pi_{p,\varrho,\xi},$$

donde $\widehat{a}(\xi) := a(\xi^+) - a(\xi^-)$. Por lo tanto, el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es generada por la unidad $I^\pi_{p,\varrho,\xi}$ y dos idempotentes (6.21). $\square$

Aún resta estudiar la invertibilidad de las clases $A^\pi_{p,\varrho,\xi}$ en el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$.

6.5 Operadores de convolución de Mellin y sus aplicaciones.

6.5.1 Operadores de convolución de Mellin.

Para estudiar el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ aplicamos la teoría de operadores de convolución de Mellin mediante una equivalencia entre estos y los multiplicadores de Fourier. Sea M_p es el álgebra de Banach de los multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$, $\|a\|_{M_p} := \|W^0(a)\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))}$, donde $W^0(a)$ es el operador de convolución de Fourier con $a \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Sea $d\mu(t) = dt/t$ la medida invariante (normalizada) en $\mathbb{R}_+$. Considere la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, la cual es usualmente referida como la transformada de Mellin y es definida por

$$M : L^2(\mathbb{R}_+, d\mu) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (Mf)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{-ix}\frac{dt}{t}.$$

Este es un operador invertible, con la inversa dada por

$$M^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad \left(M^{-1}g\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(t)t^{ix}dx.$$

Sea E un isomorfismo isométrico

$$E : L^p(\mathbb{R}_+, d\mu) \to L^p(\mathbb{R}), \quad (Ef)(x) := f(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.22}$$

Entonces el mapeo $A \mapsto E^{-1}AE$ transforma el operador de convolución de Fourier dado por $W^0(a) = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$ al operador de convolución de Mellin

$$\mathrm{Co}(a) := M^{-1}aM$$

con el mismo símbolo a. Por lo tanto la clase M_p de multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ coincide con la clase de multiplicadores de Mellin en $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Así, el operador de convolución de Mellin $\mathrm{Co}(a)$ es acotado en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ si y sólo si $a \in M_p$.

6.5.2 Multiplicadores continuos en la recta real.

Si a es una función absolutamente continua de variación total finita $V(a)$ en $\mathbb{R}$, entonces $a' \in L^1(\mathbb{R})$ y $V(a) = \int_{\mathbb{R}} |a'(x)|\, dx$ (ver, e.g., [20, Capítulo VIII, Sección 3; Capítulo IX, Sección 4]). El conjunto $V(\mathbb{R})$ de todas las funciones absolutamente continuas de variación total finita en $\mathbb{R}$ forma un álgebra de Banach equipada con la norma

$$\|a\|_V := \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + V(a).$$

El siguiente teorema da un importante subconjunto de M_p. Su demostración puede encontrarse, e.g., en [4, Teorema 17.1].

Teorema 6.6 (**Desigualdad de Stechkin**). *Si $a \in PC$ tiene variación total finita $V(a)$, entonces $a \in M_p$ y*

$$\|a\|_{M_p} \leq \|S_{\mathbb{R}}\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))} \Big(\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + V(a) \Big),$$

donde $S_{\mathbb{R}}$ es el operador integral singular de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Sea $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$. De acuerdo a [4], sea $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ la cerradura en M_p del conjunto de todas las funciones $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ con variación total finita en $\mathbb{R}$.

6.5.3 Álgebra generada por el operador integral singular de Cauchy.

Suponga que $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach y $\mathcal{G}$ es un subconjunto de $\mathfrak{A}$. Sea $\operatorname{alg}_{\mathfrak{A}}\mathcal{G}$ denota la más pequeña subálgebra cerrada de $\mathfrak{A}$ que contiene a $\mathcal{G}$ y sea $\operatorname{id}_{\mathfrak{A}}\mathcal{G}$ denota el más pequeño ideal bilateral cerrado de $\mathfrak{A}$ que contiene a $\mathcal{G}$.
Sea $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ y $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{R}_+))$. Considere los operadores $S_{\mathbb{R}_+,\beta} \in \mathcal{B}$ dados para funciones $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ y constantes $\beta \in (-1/p, 1/q)$ por

$$\begin{aligned} (S_{\mathbb{R}_+,\beta} f)(x) &:= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(x/y)^\beta f(y)}{y - x} dy, \\ (R_{\mathbb{R}_+,\beta} f)(x) &:= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(x/y)^\beta f(y)}{y + x} dy \end{aligned} \tag{6.23}$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}_+$, donde las integrales son entendidas en el sentido del valor principal. Estos operadores son acotados en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$ para toda $p \in (1, \infty)$ (ver [22, Capítulo 4]).

Considere la subálgebra de Banach $\mathcal{A} := \text{alg}_{\mathcal{B}}\left\{I, S_{\mathbb{R}_+,\beta}\right\}$ del álgebra de Banach $\mathcal{B}$ e introducimos el isomorfismo isométrico

$$\Phi : L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad (\Phi f)(t) := t^{1/p} f(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+). \tag{6.24}$$

El siguiente resultado es bien conocido (ver [22] y [23]).

Teorema 6.7. *El álgebra $\mathcal{A}$ es la más pequeña subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$ que contiene los operadores $\Phi^{-1}Co(a)\Phi$ con $a \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$. Las funciones*

$$s_{p,\beta}(x) := \coth\left[\pi\left(x + i\left(1/p + \beta\right)\right)\right],\ r_{p,\beta}(x) := 1/\sinh\left[\pi\left(x + i\left(1/p + \beta\right)\right)\right]\ (x \in \mathbb{R}), \tag{6.25}$$

extendidas por continuidad a $\pm\infty$, pertenecen a $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ y los operadores $S_{\mathbb{R}_+,\beta}$ y $R_{\mathbb{R}_+,\beta}$ son similares a los operadores de convolución de Mellin:

$$\Phi S_{\mathbb{R}_+,\beta}\Phi^{-1} = Co(s_{p,\beta}), \quad \Phi R_{\mathbb{R}_+,\beta}\Phi^{-1} = Co(r_{p,\beta}). \tag{6.26}$$

6.6 Continuación del estudio local del álgebra $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$

6.6.1 Reducción.

En lo que sigue, asumimos que $p \in (1,\infty)$ y un peso $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$ esta dado por (6.3): $\varrho(t) = \prod_{j=1}^{n} |t - t_j|^{\beta_j}$ para $t \in \mathbb{T}$.
Sea $\gamma = [0,\delta]$, donde $U_t = [-\delta,\delta]$ y $0 < \delta < \pi/2$, y sea $\chi_{u_t^+}$ la función característica del arco $u_t^+ := \{te^{ix} : x \in U_t \cap \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{T}$. Considere el isomorfismo isométrico

$$\Upsilon_t : L^p\left(u_t^+, \varrho\right) \to L^p(\gamma),\ \left(\Upsilon_t f\right)(x) = \varrho(te^{ix}) f(te^{ix}),\ x \in \gamma. \tag{6.27}$$

Ponemos $\varrho_t(x) := \varrho(te^{ix})$ para $x \in [0,\delta]$. Entonces la función ϱ_t es continua en γ si $t \notin \{t_j : j = 1,2,\ldots,n\}$, y $\varrho_t(x) = |e^{ix} - 1|^{\beta_j}\, \tilde{\varrho}_t(x)$, donde la función $\tilde{\varrho}_t$ es continua en γ, si $t = t_j$ para algún $j = 1,2,\ldots,n$. Ponemos $\varrho_{t_j}(t) := |t - t_j|^{\beta_j}$. Por lo tanto

$$\chi_{u_t^+}\rho S_{\mathbb{T}}\varrho^{-1}\chi_{u_t^+}I = \chi_{u_t^+}S_{\mathbb{T}}\chi_{u_t^+}I + K_t \text{ si } t \neq t_j,$$
$$\chi_{u_t^+}\rho S_{\mathbb{T}}\varrho^{-1}\chi_{u_t^+}I = \chi_{u_t^+}\varrho_{t_j}S_{\mathbb{T}}\varrho_{t_j}^{-1}\chi_{u_t^+}I + K_t \text{ si } t = t_j,$$

donde K_t son operadores compactos en los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para toda $t \in \mathbb{T}$. Entonces para funciones $\psi \in L^p(\gamma)$ y $x \in \gamma$,

$$\left[\Upsilon_t\left(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+}\right)\Upsilon_t^{-1}\psi\right](x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{ie^{iy}\psi(y)dy}{e^{iy}-e^{ix}} & \text{si } t \neq t_j, \\ \frac{|e^{ix}-1|^{\beta_j}}{\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{|e^{iy}-1|^{-\beta_j}\, ie^{iy}\psi(y)dy}{e^{iy}-e^{ix}} & \\ +\left[\Upsilon_t K_t \Upsilon_t^{-1}\psi\right](x) & \text{si } t = t_j \end{cases} \tag{6.28}$$

Sea $t \neq t_j$. Para $0 \leq x < y \leq \pi/2$, uno puede probar que

$$\left|\frac{ie^{iy}}{e^{iy}-e^{ix}} - \frac{1}{y-x}\right| \leq M < \infty. \tag{6.29}$$

En vista de (6.29), inferimos que el operador dado para $x \in \gamma$ por

$$\psi \mapsto \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \left[\frac{ie^{iy}}{e^{iy}-e^{ix}} - \frac{1}{y-x}\right]\psi(y)dy$$

es compacto en los espacios $L^p(\gamma)$. En consecuencia, se sigue de (6.28) que

$$[\Upsilon(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]^\pi = [S_\gamma]^\pi, \tag{6.30}$$

donde el operador S_γ esta dado por

$$(S_\gamma\psi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(y)dy}{y-x} \quad (x \in \gamma).$$

Sea ahora $t = t_j$. Entonces, para $0 \leq x < y \leq \pi/2$, uno puede probar que

$$\left|\frac{(|e^{ix}-1|/|e^{iy}-1|)^{\beta_j} ie^{iy}}{e^{iy}-e^{ix}} - \frac{(x/y)^{\beta_j}}{y-x}\right| \leq M < \infty. \tag{6.31}$$

En vista de (6.31), inferimos que el operador dado para $x \in \gamma$ por

$$\psi \mapsto \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \left|\frac{(|e^{ix}-1|/|e^{iy}-1|)^{\beta_j} ie^{iy}}{e^{iy}-e^{ix}} - \frac{(x/y)^{\beta_j}}{y-x}\right|\psi(y)dy$$

es compacto en el espacio $L^p(\gamma)$. En consecuencia, se sigue de (6.28) que

$$[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]^\pi = [S_{\gamma,\beta_j}]^\pi, \tag{6.32}$$

donde el operador S_{γ,β_j} esta dado por

$$(S_{\gamma,\beta_j}\psi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{(x/y)^{\beta_j}\psi(y)dy}{y-x} \quad (x \in \gamma).$$

Considere el isomorfismo isométrico

$$\mathcal{T} : \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+)) \to \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)),\ A \mapsto \Phi A \Phi^{-1}, \tag{6.33}$$

donde Φ es el isomorfismo isométrico de $L^p(\mathbb{R}_+)$ sobre $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ dado por (6.24). Entonces se sigue del Teorema 6.7 que

$$\mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+}) = \mathrm{Co}(s_p),\ \mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+,\beta}) = \mathrm{Co}(s_{p,\beta}), \tag{6.34}$$

donde $\mathcal{T}$ está dada por (6.33) y (6.24), las funciones $s_p = s_{p,0},\ s_{p,\beta} \in C(\overline{\mathbb{R}})$ están dadas por (6.25) para $\beta \in (-1/p, 1/q)$.
Sea $\mathcal{T}_\gamma : L^p(\gamma) \to \chi_\gamma L^p(\mathbb{R}_+ d\mu)$ una restricción de $\mathcal{T}$. Por (6.34), obtenemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_\gamma(S_\gamma)]^\pi &= [\chi_\gamma \mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I]^\pi = [\chi_\gamma \mathrm{Co}(s_p)\chi_\gamma I]^\pi, \\ [\mathcal{T}_\gamma(S_{\gamma,\beta})]^\pi &= [\chi_\gamma \mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+,\beta})\chi_\gamma I]^\pi = [\chi_\gamma \mathrm{Co}(s_{p,\gamma})\chi_\gamma I]^\pi. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Considere la C^*-álgebra $SO^\diamond(\gamma)$ de funciones lentamente oscilatorias en γ, la cual es definida por analogía con $SO^\diamond(\mathbb{T})$. Dado que las funciones $a \in SO^\diamond(\gamma)$ conmutan con el operador S_γ módulo operadores compactos $K \in \mathcal{K}_p(\gamma)$, concluimos que el conmutador $[aI, \chi_\gamma \mathrm{Co}(c_p)\chi_\gamma I]$ pertenece a $\mathcal{K}(\chi_\gamma L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ para toda $a \in SO^\diamond(\gamma)$.
Sea $\Lambda_p(\gamma)$ la subálgebra de Banach de $\mathcal{B}(L^p(\gamma))$ que consiste de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L^p(\gamma))$ tal que los conmutadores $[aI, A]$ son compactos para toda $a \in SO^\diamond(\gamma)$. Sea $M_0(SO^\diamond(\gamma))$ la fibra del espacio de ideales maximales de $SO^\diamond(\gamma)$ sobre el punto $0 \in \gamma$. Sea $\Lambda_p^\pi(\gamma) := \Lambda_p(\gamma)/\mathcal{K}_p(\gamma)$. Dado $\xi \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$, sea $\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi(\gamma)$ el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\Lambda_p^\pi(\gamma)$ generada por el ideal maximal $\mathcal{I}_{p,\xi}^\pi(\gamma) := \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond(\gamma),\ a(\xi) = 0\}$ del álgebra central $\mathcal{Z}_p^\pi(\gamma) := \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond(\gamma)\}$ del álgebra de Banach $\Lambda_p^\pi(\gamma)$. También consideramos el álgebra cociente de Banach $\Lambda_{p,\xi}^\pi(\gamma) := \Lambda_p^\pi(\gamma)/\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi(\gamma)$.
Dado $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, consideramos los ideales bilaterales cerrados $\mathcal{J}_{p,\varrho,\xi}^\pi$ del álgebra cociente $\Lambda_{p,\varrho}^\pi$. Junto con $\mathcal{J}_{p,\varrho,\xi}^\pi$, consideramos el ideal $\mathcal{J}_{p,\tilde{\xi}}^\pi(\gamma)$, donde $\tilde{\xi} \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$ está asociada con $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ como sigue. Sea $\tilde{a} \in SO^\diamond(\gamma)$ es definida por $\tilde{a}(x) = a(te^{ix})$ para toda $x \in \gamma$ y toda $a \in SO^\diamond(\mathbb{T})$. Entonces $\tilde{\xi}(\tilde{a}) = \xi(a)$ para cada $a \in SO^\diamond(\mathbb{T})$ y cada $\xi \in M_t(SO^\diamond(\mathbb{T}))$.
Análogamente, el álgebra de Banach $\Lambda_p(\mathbb{R}_+)$ es la subálgebra de Banach de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ que consiste de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ tal que los conmutadores $[aI, A]$ son compactos para toda $a \in SO^\diamond(\mathbb{R}_+)$. Sea $M_0(SO^\diamond(\mathbb{R}_+))$ la fibra del espacio de ideales maximales de $SO^\diamond(\mathbb{R}_+)$ sobre el punto $0 \in \mathbb{R}_+$. Sea $\Lambda_p^\pi(\mathbb{R}_+) := \Lambda_p(\mathbb{R}_+)/\mathcal{K}_p(\mathbb{R}_+)$. Dado

$\xi \in M_0(SO^\diamond(\mathbb{R}_+))$, sea $\mathcal{J}^\pi_{p,\tilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$ el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\Lambda^\pi_p(\mathbb{R}_+)$ generada por el ideal maximal $\mathcal{I}^\pi_{p,\xi}(\mathbb{R}_+) := \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond(\mathbb{R}_+), a(\xi) = 0\}$ del álgebra central $\mathcal{Z}^\pi_p(\mathbb{R}_+) := \{[aI]^\pi : a \in SO^\diamond(\mathbb{R}_+)\}$ del álgebra de Banach $\Lambda^\pi_p(\mathbb{R}_+)$.
Junto con el ideal $\mathcal{J}^\pi_{p,\tilde{\xi}}(\gamma)$, consideramos el ideal $\mathcal{J}^\pi_{p,\tilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$, donde identificamos los puntos $\widetilde{\xi} \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$ y $\xi \in M_0(SO^\diamond(\mathbb{R}_+))$ asumiendo que la función $\widetilde{a} \in SO^\diamond(\gamma)$ es extendida a una función $\widetilde{a} \in SO^\diamond(\mathbb{R}_+)$ (aquí conservamos la notación $\widetilde{a}$ para la extensión).
Se sigue de (6.30) y (6.32) que para cada $t \in \mathbb{T}$, cada $\xi \in M_t(SO^\diamond(\mathbb{T}))$ y el correspondiente $\widetilde{\xi} \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$,

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}[S_{\mathbb{T}}]^\pi_{p,\xi} &= \mathrm{sp}[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} \quad \text{si} \quad t \neq t_j, \\ \mathrm{sp}[S_{\mathbb{T}}]^\pi_{p,\xi} &= \mathrm{sp}[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} \quad \text{si} \quad t = t_j, \end{aligned} \tag{6.36}$$

donde $\mathrm{sp}(x)$ es el espectro de un elemento x, y

$$\begin{aligned} [\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} &= [S_\gamma]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} = [S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} \quad \text{si} \quad t \neq t_j, \\ [\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} &= [S_{\gamma,\beta_j}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} = [S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} \quad \text{si} \quad t = t_j. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Aplicando (6.34), concluimos que

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi &= \mathrm{sp}[\mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+})]^\pi = \mathrm{sp}[\mathrm{Co}(s_p)]^\pi \quad \text{si} \quad t \neq t_j, \\ \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi &= \mathrm{sp}[\mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})]^\pi = \mathrm{sp}[\mathrm{Co}(s_{p,\beta_j})]^\pi \quad \text{si} \quad t = t_j. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi &= \mathrm{sp}[\mathrm{Co}(s_p)]^\pi = s_p(\overline{\mathbb{R}}) \quad \text{si} \quad t \neq t_j, \\ \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi &= \mathrm{sp}[\mathrm{Co}(s_{p,\beta_j})]^\pi = s_{p,\beta_j}(\overline{\mathbb{R}}) \quad \text{si} \quad t = t_j. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Pero

$$\begin{aligned} s_p(\overline{\mathbb{R}}) &= \{\coth(\pi x + \pi i/p) : x \in \overline{\mathbb{R}}\} \text{ si } t \neq t_j, \\ s_{p,\beta_j}(\overline{\mathbb{R}}) &= \{\coth(\pi x + \pi i(1/p + \beta_j)) : x \in \overline{\mathbb{R}}\} \text{ si } t = t_j. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Es obvio que la invertibilidad de las clases $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi$ y $[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+)$ implica la invertibilidad de las clases $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{\widetilde{\xi}}$ y $[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi_{\widetilde{\xi}}$, respectivamente, en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$ para cada $\widetilde{\xi} \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$. Aplicando el método de operadores límite, uno puede probar la afirmación conversa: para cualquier $\widetilde{\xi} \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$, la invertibilidad de las clases $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{\widetilde{\xi}}$ y $[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi_{\widetilde{\xi}}$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$ implica, respectivamente, la invertibilidad de las clases $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi$ y $[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+)$.

6.6.2 Espectro local de operadores de convolución de Mellin

Fijamos $p \in (1, \infty)$. Dado $s \in \{0, \infty\}$, denotamos por $SO_s(\mathbb{R}_+)$ la C^*-subálgebra de $SO(\mathbb{R}_+)$ que consiste de todas las funciones en $SO(\mathbb{R}_+)$ que tienen límites finitos en el punto $\widetilde{s} \in \{0, \infty\} \setminus \{s\}$. Sea $\Lambda(\mathbb{R}_+, s)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ que conmutan módulo operadores compactos con todos los operadores de multiplicación aI donde $a \in SO_s(\mathbb{R}_+)$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+) := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$, $[aI]^\pi := aI + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$. Obviamente, el espacio de ideales maximales de la C^*-álgebra conmutativa $\mathcal{Z}_s^\pi := \{[aI]^\pi : a \in SO_s(\mathbb{R}_+)\}$ puede identificarse con el conjunto

$$M(SO_s(\mathbb{R}_+)) := M_s(SO^\diamond) \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\widetilde{s}\}.$$

Dado $\xi \in M(SO_s(\mathbb{R}_+))$, sea $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es el ideal bilateral cerrado del álgebra cociente de Banach $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s) := \Lambda(\mathbb{R}_+, s)/\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ generada por el ideal maximal $\mathcal{I}_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s) := \{[aI]^\pi : a \in SO_s(\mathbb{R}_+), \xi(a) = 0\}$ de la C^*-álgebra conmutativa $\mathcal{Z}_s^\pi$. Considere el álgebra cociente de Banach $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s) := \Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)/J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ que consiste de las clases $A_\xi^\pi := A^\pi + J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$.

Considere la subálgebra de Banach $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ generada por todos los operadores de multiplicación aI $(a \in SO(\mathbb{R}_+))$ y todos los operadores de convolución de Mellin $\mathrm{Co}(b) = M^{-1}bM$ $(b \in C_p(\overline{\mathbb{R}}))$. Aplicando la transformada $A \mapsto EAE^{-1}$, donde E está dado por (6.22), inferimos de [14, Teorema 4.6] que los conmutadores $[aI, \mathrm{Co}(b)]$, donde $a \in SO(\mathbb{R}_+)$ y $b \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$, son compactos en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Por lo tanto, $\mathcal{D} \subset \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$ para cada $s \in \{0, \infty\}$, y además el álgebra conmutativa de Banach $\mathcal{Z}_s^\pi$ es una subálgebra central de las álgebras de Banach $\mathcal{D}^\pi := \mathcal{D}/\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ y $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$. El álgebra $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es el conmutador de $\mathcal{Z}_s^\pi$, y por lo tanto $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}^\pi(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)) := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))/\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$.

Dado $s \in \{0, \infty\}$ y $\xi \in M(SO_s(\mathbb{R}_+))$, consideramos la más pequeña subálgebra D_ξ^π de $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ que contiene el conjunto $\{A_\xi^\pi : A \in \mathcal{D}\}$. Por el principio local de Allan-Douglas, la clase $A^\pi \in \mathcal{D}^\pi$ es invertible en $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ (respectivamente, en $\mathcal{D}^\pi$) si y sólo si las clases A_ξ^π son invertibles en las álgebras cociente $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ (respectivamente, en $\mathcal{D}_\xi^\pi$) para toda $\xi \in M(SO_s(\mathbb{R}_+))$.

Estudiaremos el espectro local de algunos operadores de convolución de Mellin $A = \mathrm{Co}(b) \in \mathcal{D}$, esto es, el espectro de las clases A_ξ^π en las álgebras de Banach $\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+)$ y $\mathcal{D}_\xi^\pi$ para $\xi \in M_s(SO^\diamond)$, donde $s \in \{0, \infty\}$.

Teorema 6.8. *Sea* $1 < p < \infty$, $\nu \in (0,1)$, $s \in \{0,\infty\}$, $\xi \in M_s(SO^\diamond)$, *y sea*

$$b_\nu(\lambda) := \coth(\pi\lambda + \pi i\nu) \quad para \quad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{6.41}$$

Entonces $b_\nu \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$ *y*

$$sp_{\Lambda^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s)}[Co(b_\nu)]^\pi_\xi = sp_{\mathcal{D}^\pi_\xi}[Co(b_\nu)]^\pi_\xi = sp_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+,d\mu))}Co(b_\nu) = \mathcal{L}_\nu, \tag{6.42}$$

donde

$$\mathcal{L}_\nu := \{\coth(\pi\lambda + \pi i\nu) : \lambda \in \overline{\mathbb{R}}\}. \tag{6.43}$$

Demostración. Fijamos $s \in \{0,\infty\}$ y $\xi \in M_s(SO^\diamond)$, y ponemos $A := \mathrm{Co}(b_\nu)$. Como es sabido (ver [22, Proposición 4.2.11]), para cada $\nu \in (0,1)$ y cada $p \in (1,\infty)$, la función b_ν pertenece al álgebra de Banach $C_p(\overline{\mathbb{R}})$. Ya que $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+,s)$ es inversamente cerrada en $\mathcal{B}^\pi(L^p(\mathbb{R}_+,d\mu))$ y por [8] (ver también [23]), tenemos

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+,s)}A^\pi = \mathrm{sp}_{ess}A = \mathrm{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+,d\mu))}A = b_\nu(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{L}_\nu. \tag{6.44}$$

Por lo tanto, deducimos del principio local de Allan-Douglas que

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s)}A^\pi_\xi \subset \mathrm{sp}_{\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+,s)}A^\pi = \mathcal{L}_\nu. \tag{6.45}$$

Ya que el espectro $\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s)}A^\pi_\xi$ no separa $\mathbb{C}$ en vista de (6.45) y (6.43), inferimos de [24, Corolarios del Teorema 10.18] que

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s)}A^\pi_\xi = \mathrm{sp}_{\mathcal{D}^\pi_\xi}A^\pi_\xi. \tag{6.46}$$

Obviamente, también tenemos que

$$\mathrm{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+,d\mu))}A = \mathrm{sp}_{\mathcal{D}}A. \tag{6.47}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}_{\mathcal{D}^\pi_\xi}A^\pi_\xi$. Ya que la clase $[\lambda I - A]^\pi_\xi$ es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{D}^\pi_\xi$, existe un operador $B \in \mathcal{D}$ tal que la clase B^π_ξ es el inverso de la clase $[\lambda I - A]^\pi_\xi$ en $\mathcal{D}^\pi_\xi$. Por lo tanto, existen operadores C, $D \in \mathcal{D}$ tales que C^π, $D^\pi \in J^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s)$ y

$$[\lambda I - A]^\pi B^\pi = I^\pi + C^\pi,\ B^\pi[\lambda I - A]^\pi = I^\pi + D^\pi. \tag{6.48}$$

Tomando en cuenta las definiciones de los ideales $\mathcal{I}^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s) \subset \mathcal{Z}^\pi_s$ y $J^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s) \subset \Lambda^\pi(\mathbb{R}_+,s)$ y el hecho de que $\mathcal{Z}^\pi_s$ es una C^*-álgebra, inferimos de [22, Proposición 2.2.5] (véase también

[4, Proposición 8.6]) que cada elemento en el ideal $J_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ del álgebra $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+, s)$ es de la forma $Q'a_\xi I + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ donde $Q' \in \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$, $a_\xi \in SO_s(\mathbb{R}_+)$ y $a_\xi(\xi) = 0$. Por lo tanto,

$$C^\pi = a_\xi Q + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+), \quad D^\pi = \tilde{a}_\xi \tilde{Q} + \mathcal{K}(\mathbb{R}_+), \tag{6.49}$$

donde $Q, \tilde{Q} \in \Lambda(\mathbb{R}_+, s)$, $a_\xi, \tilde{a}_\xi \in SO_s(\mathbb{R}_+)$, y

$$a_\xi(\xi) = \tilde{a}_\xi(\xi) = 0. \tag{6.50}$$

En vista de (6.48) y (6.49), existen operadores $K, \tilde{K} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ tales que

$$(\lambda I - A)B = I + a_\xi Q + K, \quad B(\lambda I - A) = I + \tilde{a}_\xi \tilde{Q} + \tilde{K}. \tag{6.51}$$

Sea ahora $\xi \in M_\infty(SO^\diamond)$ (la demostración para $\xi \in M_0(SO^\diamond)$ es análoga). Aplicando [15, Proposición 3.1, Lema 7.1] y (6.50) concluimos que para los operadores A, B, $a_\xi I$, $\tilde{a}_\xi I \in \mathcal{D}$ existe una sucesión $\{y_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $y_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$,

$$\text{s-lim}_{n\to\infty}(V_{y_n} A V_{y_n^{-1}}) = A, \tag{6.52}$$

donde $(V_{y_n} f)(x) = (y_n)^{1/p} f(y_n x)$ para $x \in \mathbb{R}_+$, existe el límite fuerte

$$B_\infty := \text{s-lim}_{n\to\infty}(V_{y_n} B V_{y_n^{-1}}), \tag{6.53}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} a_\xi(y_n) = a_\xi(\xi) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_\xi(y_n) = \tilde{a}_\xi(\xi) = 0. \tag{6.54}$$

Más aún, de [13, Lema 4.4] se sigue que para cada operador $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ y cada sucesión $\{y_n\} \subset (0, +\infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$,

$$\text{s-lim}_{n\to\infty}(V_{y_n} K V_{y_n^{-1}}) = 0 \tag{6.55}$$

en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Por lo tanto, inferimos de (6.54) y (6.55) que

$$\text{s-lim}_{n\to\infty}(V_{y_n}(a_\xi Q + K)V_{y_n^{-1}}) = 0, \ \text{s-lim}_{n\to\infty}(V_{y_n}(\tilde{a}_\xi \tilde{Q} + \tilde{K})V_{y_n^{-1}}) = 0. \tag{6.56}$$

Así, de (6.51)-(6.53) y (6.56) se sigue que

$$(\lambda I - A)B_\infty = B_\infty(\lambda I - A) = I.$$

Por lo tanto, la invertibilidad de la clase $[\lambda I - A]_\xi^\pi$ en el álgebra cociente $\mathcal{D}_\xi^\pi$ implica la invertibilidad del operador $\lambda I - A$ en el álgebra de Banach $\mathcal{D}$. En consecuencia, $\text{sp}_\mathcal{D} A \subset \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi} A_\xi^\pi$. De esta manera, tomando en cuenta (6.44), (6.47) y (6.46), obtenemos

$$L_\nu = \text{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))} A = \text{sp}_\mathcal{D} A \subset \text{sp}_{\mathcal{D}_\xi^\pi} A_\xi^\pi = \text{sp}_{\Lambda_\xi^\pi(\mathbb{R}_+, s)} A_\xi^\pi. \tag{6.57}$$

Combinando (6.57) y (6.45), obtenemos

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_\xi(\mathbb{R}_+,s)} A^\pi_\xi = \mathrm{sp}_{\mathcal{D}^\pi_\xi} A^\pi_\xi = \mathrm{sp}_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+,d\mu))} A = \mathcal{L}_\nu,$$

lo cual completa la demostración. □

Por lo tanto, inferimos de (6.39) que para cada $\widetilde{\xi} \in M_0(SO^\diamond(\gamma))$,

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{\widetilde{\xi}} &= \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi = s_p(\overline{\mathbb{R}}) \text{ si } t \neq t_j, \\ \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j}]^\pi_{\widetilde{\xi}} &= \mathrm{sp}[S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})]^\pi = s_{p,\beta_j}(\overline{\mathbb{R}}) \text{ si } t = t_j. \end{aligned} \tag{6.58}$$

donde $s_p(\overline{\mathbb{R}})$ y $s_{p,\beta_j}(\overline{\mathbb{R}})$ están dadas por (6.40).

6.7 El teorema de dos idempotentes y sus aplicaciones.

6.7.1 Álgebras generadas por idempotentes.

Sea $\mathcal{B}(\Gamma) := \mathcal{B}(L^p(\Gamma, w))$, $\mathcal{K}(\Gamma) := \mathcal{K}(L^p(\Gamma, w))$, Γ la curva de Carleson-Jordan, $p \in (1, \infty)$ y $w \in A_p(\Gamma)$. Sea π el mapeo canónico de $\mathcal{B}(\Gamma)$ sobre $\pi(\mathcal{B}(\Gamma)) := \mathcal{B}(\Gamma)/\mathcal{K}(\Gamma)$ definido por la fórmula $\pi(A) := A + \mathcal{K}(\Gamma)$ para todos $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Sean

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\Gamma) := \{\pi(cI) \ : \ c \in C(\Gamma)\}, \\ &\Lambda(\Gamma) := \{A \in \mathcal{B}(\Gamma) \ : \ \pi(A)\pi(cI) = \pi(cI)\pi(A) \ \text{ para todas } c \in C(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

El espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}(\Gamma)$ se puede identificar con Γ tal que el ideal maximal asociado con $t \in \Gamma$ es el conjunto

$$\{\pi(cI) : c \in C(\Gamma),\ c(t) = 0\}. \tag{6.59}$$

Para $t \in \Gamma$, sea $\mathcal{J}_t(\Gamma)$ el ideal más pequeño cerrado bilateral de $\pi(\Lambda(\Gamma))$ que contiene el conjunto (6.59). Sea

$$\mathcal{B}_t(\Gamma) := \pi(\Lambda(\Gamma))/\mathcal{J}_t(\Gamma),\ \pi_t(A) := \pi(A) + \mathcal{J}_t(\Gamma).$$

El álgebra local $\mathcal{B}_t(\Gamma) = \pi_t(\Lambda(\Gamma))$ es de estructura muy intrincada. Sin embargo, para estudiar operadores en alg $(S_\Gamma, PC(\Gamma))$, tenemos que tratar principalmente con una cierta subálgebra de $\mathcal{B}_t(\Gamma)$, a saber, con la más pequeña subálgebra cerrada $\mathcal{A}_t(\Gamma)$ de $\mathcal{B}_t(\Gamma)$ que contiene el conjunto $\{\pi_t(A) : A \in \text{alg } (S_\Gamma, PC(\Gamma))\}$. Resulta que el álgebra $\mathcal{A}_t(\Gamma)$ es

mucho mejor que $\mathcal{B}_t(\Gamma)$: bajo de ciertas circunstancias, es generada por un número finito de idempotentes. Recordar que un elemento p de un álgebra de Banach es llamado un *idempotente* (o, un tanto impreciso, también una *proyección*), si $p^2 = p$.
Suponga que Γ es una curva de Jordan-Carleson. Sabemos de [4, Corolario 6.6] que entonces $S_\Gamma^2 = I$ y por lo tanto, $P_\Gamma := (I + S_\Gamma)/2$ es una projección. Claramente, alg $(S_\Gamma, PC(\Gamma))$ = alg $(P_\Gamma, PC(\Gamma))$. Por tanto P_Γ es una proyección, el elemento $r := \pi_t(P_\Gamma)$ es un elemento idempotente del álgebra $\mathcal{A}_t(\Gamma)$. Además, cada función $a \in PC(\Gamma)$ puede escribirse en la forma

$$a(\tau) = a(t+0)\chi_t(\tau) + a(t-0)(1 - \chi_t(\tau)) + \varphi(\tau)$$

donde χ_t es la función característica de cualquier subarco propio de Γ empezando en t y φ es continua en Γ y cero en t. Se sigue que

$$\begin{aligned}\pi_t(aI) =& a(t+0)\pi_t(\chi_t I) + a(t-0)(\pi_t(I) - \pi_t(\chi_t I))\\ =& a(t+0)s + a(t-0)(e - s)\end{aligned}$$

donde $e := \pi_t(I)$ y $s := \pi_t(\chi_t I)$. Ya que $\chi_t^2 = \chi_t$, el elemento s es también un idempotente en $\mathcal{A}_t(\Gamma)$. En resumen, vemos que $\mathcal{A}_t(\Gamma)$ es generada por la identidad e y los dos idempotentes r y s.
El siguiente “teorema de dos idempotentes” es sólo el resultado empleado para operadores en curvas de Jordan.

Teorema 6.9. *[4, Teorema 8.7]Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach con identidad e y sean r y s idempotentes en $\mathcal{B}$. Sea además $\mathcal{A}$ la subálgebra más pequeña cerrada de $\mathcal{B}$ que contiene e, r, y s. Poner*

$$X := rsr + (e - r)(e - s)(e - r)$$

y suponga que los puntos 0 y 1 son puntos de acumulación del espectro $sp_{\mathcal{B}}X$. Defina el mapeo $\sigma_x : \{e, r, s\} \to C^{2\times 2}$ para $x \in C \setminus \{0, 1\}$ por

$$\sigma_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x(s) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ -x & 1-x \end{pmatrix}. \tag{6.60}$$

y para $x \in \{0, 1\}$ por

$$\sigma_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x(s) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}. \tag{6.61}$$

(a) *Para cada* $x \in sp_{\mathcal{A}}X$ *el mapeo* σ_x *extiende a un homomorfismo de álgebra de Banach* σ_x *de* $\mathcal{A}$ *sobre* $C^{2\times 2}$.

(b) *Un elemento* $a \in \mathcal{A}$ *es invertible en* $\mathcal{B}$ *si y sólo si* $\sigma_x(a)$ *es invertible en* $C^{2\times 2}$ *para cada* $x \in sp_{\mathcal{B}}X$.

(c) *Un elemento* $a \in \mathcal{A}$ *es invertible en* $\mathcal{A}$ *si y sólo si* $\sigma_x(a)$ *es invertible en* $C^{2\times 2}$ *para cada* $x \in sp_{\mathcal{A}}X$.

Aquí nos limitaremos a la siguiente observación. Para $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, sea $\sqrt[4]{x/(1-x)}$ cualquier número con $\left(\sqrt[4]{x/(1-x)}\right)^4 = x/(1-x)$ y defina $\sqrt[4]{(1-x)/x}$ como $\left(\sqrt[4]{x/(1-x)}\right)^{-1}$. Poner

$$E_x = \operatorname{diag}\left(\sqrt[4]{x/(1-x)}, -\sqrt[4]{(1-x)/x}\right).$$

Entonces

$$E_x \begin{pmatrix} x & x-1 \\ -x & 1-x \end{pmatrix} E_x^{-1} = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix}, \tag{6.62}$$

$$E_x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $x \in \{0,1\}$, entonces la matriz derecha de (6.62) coincide con la matriz para $\sigma_x(s)$ en (6.61). De esta manera, las conclusiones (a), (b), (c) del Teorema 6.9 siguen siendo verdaderas con (6.60) y (6.61) sustituidas por

$$\sigma_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_x(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_x(s) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix}$$

para toda $x \in \mathbb{C}$. Preferimos la versión sin raíces del teorema ya que esta versión puede ser extendida al caso de más de dos idempotentes sin recurrir a raíces n-ésimas.

Teorema 6.10. *[4, Teorema 8.20] Sean* $p \in (1,\infty)$, *y* $w \in A_p(\mathbb{T})$. *Para* $t \in \mathbb{T}$, *denotamos por* α_t *y* β_t *las funciones de indicador de* $\mathbb{T}$, p, w *en* t *(ver [4, Sección 3.5]). Definimos el "haz de hojas"* $\mathcal{M}$ *por*

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mathbb{T},p,w} := \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \left(\{t\} \times \mathcal{L}(0,1;p,\alpha_t,\beta_t)\right). \tag{6.63}$$

Para $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ *y* $a \in PC(\mathbb{T})$ *ponemos*

$$Sim_{t,x}(aI) = \begin{pmatrix} a(t+0) & 0 \\ 0 & a(t-0) \end{pmatrix}, \tag{6.64}$$

para $(t,x) \in \mathbb{T} \times (\mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ *sea*

$$Sim_{t,x}(P_{\mathbb{T}}) = \begin{pmatrix} x & x(1-x) \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}, \tag{6.65}$$

y para $(t,x) \in \mathbb{T} \times \{0,1\}$ *tenemos*

$$Sim_{t,x}(P_{\mathbb{T}}) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

(a) *Para cada* $(t,x) \in \mathcal{M}$ *el mapeo* $Sim_{t,x} : \{aI : a \in PC(\mathbb{T})\} \cup \{P_{\mathbb{T}}\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ *dado por* (6.64), (6.65), (6.66) *extiende a un homomorfismo de álgebra de Banach*

$$Sim_{t,x} : alg\ (S_{\mathbb{T}}, PC(\mathbb{T})) \to \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(b) *Un operador* $A \in alg\ (S_{\mathbb{T}}, PC(\mathbb{T}))$ *es Fredholm en* $L^p(\mathbb{T}, w)$ *si y sólo si*

$$\det\left(Sim_{t,x}(A)\right) \neq 0 \ \ \textit{para todos} \ \ (t,x) \in \mathcal{M}.$$

(c) *Si un operador* $A \in alg\ (S_{\mathbb{T}}, PC(\mathbb{T}))$ *es Fredholm, entonces tiene un regularizador en el álgebra* $alg\ (S_{\mathbb{T}}, PC(\mathbb{T}))$.

6.7.2 Aplicación al operador $A := aP_+ + bP_-$

Ahora consideramos el operador $A := aP_+ + bP_-$, con $a, b \in PC$ para calcular sus símbolos de acuerdo al Teorema 6.10. Tomando en cuenta la transformación (6.62), procedemos a calcular los símbolos del operador A.
Para aP_+, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Sim}_{t,x}\ (aP_+) &= \begin{pmatrix} a(t+0) & 0 \\ 0 & a(t-0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(t+0)x & a(t+0)\sqrt{x(1-x)} \\ a(t-0)\sqrt{x(1-x)} & a(t-0)(1-x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Para bP_-, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sim}_{t,x}\,(bP_-) = \\
&= \begin{pmatrix} b(t+0) & 0 \\ 0 & b(t-0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b(t+0) & 0 \\ 0 & b(t-0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b(t+0)(1-x) & -b(t+0)\sqrt{x(1-x)} \\ -b(t-0)\sqrt{x(1-x)} & b(t-0)x \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.68}
$$

Por lo tanto el símbolo del operador $A = aP_+ + bP_-$ queda de la siguiente manera

$$
\mathrm{Sim}_{t,x}(A) = \begin{pmatrix} a(t+0)x + b(t+0)(1-x) & [a(t+0) - b(t+0)]\sqrt{x(1-x)} \\ [a(t-0) - b(t-0)]\sqrt{x(1-x)} & a(t-0)(1-x) + b(t-0)x \end{pmatrix}. \tag{6.69}
$$

Sin embargo cuando $a, b \in PSO^\diamond$, no tenemos sólo un límite lateral, sino que tenemos familia de límites en cada punto de discontinuidad t, por lo cual debemos considerar fibras $M_t(SO^\diamond)$ en el espacio de ideales maximales $M(SO^\diamond)$ para los cuales se tiene como objetivo probar el siguiente resultado.

Teorema 6.11. *Para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t(SO^\diamond)$,*

$$
spX^\pi_{p,\rho,\xi} = \mathcal{L}_t := \begin{cases} (1 + \coth \pi x + \pi i/p)/2 : x \in \overline{\mathbb{R}} & si\ t \neq t_j, \\ (1 + \coth \pi x + \pi i\,(1/p + \beta_j))/2 : x \in \overline{\mathbb{R}} & si\ t = t_j. \end{cases} \tag{6.70}
$$

Entonces la matriz de símbolos está definida para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ en el arco $\mathcal{L}_t$ si $t \in \mathbb{T}$ es un punto de discontinuidad lentamente oscilatoria a trozos de los coeficientes $a_\pm \in PSO^\diamond$ del operador $A = a_+P_+ + a_-P_-$.

6.7.3 El teorema de dos idempotentes

Si $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, donde $M_t(SO^\diamond)$ es dada en la Subsección 6.2.2, entonces del Lema 6.4 se sigue que el cálculo de símbolos para el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\rho,\xi}$ puede ser obtenido aplicando el teorema de dos idempotentes (ver, e.g., [3], [4], [22] y las referencias en ellos).

Aplicaremos la siguiente versión del teorema de dos idempotentes (ver [4, Teorema 8.7]) obtenido de [9] y [10].

Teorema 6.12. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach con identidad e y sean p y q idempotentes no cero en $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}$ que contiene e, p y q. Ponemos $X := e - (p-q)^2$ y suponemos que los puntos 0 y 1 no son aislados en $sp_{\mathcal{B}}X$. Definimos el mapeo $\omega_\mu : \{e,p,q\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ para $\mu \in \mathbb{C}$ por*

$$\omega_\mu(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \omega_\mu(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ \omega_\mu(q) = \begin{bmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{bmatrix},$$

donde $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ significa un valor arbitrario de la raíz cuadrada. Entonces

(a) para cada $\mu \in sp_{\mathcal{A}}X$ el mapeo ω_μ extiende a un homomorfismo de álgebra de Banach ω_μ de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}^{2\times 2}$;

(b) un elemento $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra $\mathcal{B}$ si y sólo si $\det \omega_\mu(A) \neq 0$ para toda $\mu \in sp_{\mathcal{B}}X$;

(c) un elemento $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra $\mathcal{A}$ si y sólo si $\det \omega_\mu(A) \neq 0$ para toda $\mu \in sp_{\mathcal{A}}X$.

Necesitamos aplicar el Teorema 6.12 para cada $\xi \in M(SO^\diamond)$, y

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi},\ \mathcal{A} = \mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi},\ e = I^\pi_{p,\varrho,\xi},\ p = P^\pi_{p,\varrho,\xi},\ q = Q^\pi_{p,\varrho,\xi}, \\ X = [X_t]^\pi_{p,\varrho,\xi} := I^\pi_{p,\varrho,\xi} - (P^\pi_{p,\varrho,\xi} - Q^\pi_{p,\varrho,\xi})^2, \end{aligned} \tag{6.71}$$

donde $P^\pi_{p,\varrho,\xi}$ y $Q^\pi_{p,\varrho,\xi}$ están dadas por (6.21), y el punto $t \in \mathbb{T}$ es asociado con el carácter $t = \xi|_C$.

6.7.4 Espectro de las clases $[X]^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(SO^\diamond)$

Dado $t \in \mathbb{T}$, consideramos el álgebra conmutativa de Banach $\mathcal{D}^\pi_t \subset \mathcal{B}^\pi_{p,\varrho}$ generada por las clases I^π y $[X_t]^\pi$, donde

$$X_t := I - (\chi_t^+ I - P_+)^2 \in \mathfrak{A}_{p,\varrho} \subset \Lambda_{p,\varrho}. \tag{6.72}$$

Entonces el espacio de ideales maximales $M(\mathcal{D}^\pi_t)$ del álgebra $\mathcal{D}^\pi_t$ coincide con el espectro $\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_{p,\varrho}}[X_t]^\pi$ del elemento $[X_t]^\pi$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho}$ (ver, p. ej., [5, Sección 1.19]). Para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, de acuerdo a (6.71) y (6.21), consideramos la clase

$$[X_t]^\pi_{p,\varrho,\xi} := [I - (\chi_t^+ I - P_+)^2]^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi}, \tag{6.73}$$

la cual pertenece al álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$. Vemos de (6.72) y (6.73) que $[X_t]^\pi_{p,\varrho,\xi} = [X_t]^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para todo $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ y toda $t \in \mathbb{T}$.

Teorema 6.13. *Para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t(SO^\diamond)$,*

$$sp_{\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}} X^\pi_{p,\varrho,\xi} = sp_{\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}} X^\pi_{p,\varrho,\xi} = \mathcal{L}_t, \tag{6.74}$$

donde

$$\mathcal{L}_t := \begin{cases} (1+\coth(\pi x + \pi i/p))/2 : \ x \in \overline{\mathbb{R}} & si \ \ t \neq t_j, \\ (1+\coth(\pi x + \pi i(1/p+\beta_j)))/2 : \ x \in \overline{\mathbb{R}} & si \ \ t = t_j. \end{cases} \tag{6.75}$$

Demostración. Fijamos $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(SO^\diamond)$. Obviamente, para una vecindad suficientemente pequeña $u_t \subset \mathbb{T}$ del punto t, obtenemos

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}}[X_t]^\pi_{p,\varrho,\xi} = \begin{cases} \mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[\chi_{u_t} X_t \chi_{u_t} I]^\pi_{p,\xi} & \text{si} \ \ t \neq t_j, \\ \mathrm{sp}_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[\chi_{u_t} \varrho_{t_j} X_t \varrho_{t_j}^{-1} \chi_{u_t} I]^\pi_{p,\xi} & \text{si} \ \ t = t_j. \end{cases} \tag{6.76}$$

donde $\varrho_{t_j} = |t - t_j|^{\beta_j}$.

Sea $\gamma = [0,\delta)$, donde $U_t = (-\delta,\delta)$ y $0 < \delta < \pi/2$. Considere el isomorfismo isométrico

$$\widetilde{\Upsilon}_t : \ L^p(u_t) \to L^p_2(\gamma), \ (\widetilde{\Upsilon}_t f)(x) = \left\{ \begin{array}{c} f(te^{ix}) \\ f(te^{-ix}) \end{array} \right\}, \ x \in \gamma. \tag{6.77}$$

Entonces inferimos que

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Upsilon}_t[\chi_{u_t}(I - (\chi_t^+ I - P_+)^2)\chi_{u_t} I]\widetilde{\Upsilon}_t^{-1} \\ &\simeq \begin{bmatrix} \chi_\gamma 2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I & 0 \\ 0 & \chi_\gamma 2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I \end{bmatrix} \quad \text{si} \ \ t \neq t_j, \end{aligned} \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Upsilon}_t[\chi_{u_t}\varrho_{t_j}(I - (\chi_t^+ I - P_+)^2)\varrho_{t_j}^{-1}\chi_{u_t} I]\widetilde{\Upsilon}_t^{-1} \\ &\simeq \begin{bmatrix} \chi_\gamma 2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})\chi_\gamma I & 0 \\ 0 & \chi_\gamma 2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})\chi_\gamma I \end{bmatrix} \quad \text{si} \ \ t = t_j, \end{aligned} \tag{6.79}$$

donde $A \simeq B$ significa que $A - B$ es un operador compacto. Identificando los puntos $\xi \in M_t(SO^\diamond)$ y los puntos $\widetilde{\xi}$ en $M_0(SO^\diamond(\gamma))$ y $M_0(SO^\diamond(\mathbb{R}_+))$, concluimos que si $A^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$, entonces

$$\widetilde{\Upsilon}_t(\chi_{u_t} A^\pi \chi_{u_t})\widetilde{\Upsilon}_t^{-1} = [\chi_\gamma I]^\pi [A^\pi_{i,j}]^2_{i,j=1}, [\chi_\gamma I]^\pi,$$

donde $A^\pi_{i,j} \in \mathcal{J}_{p,\widetilde{\xi},\mathbb{R}_+}$ para $i,j = 1,2$. Por lo tanto, por (6.76)-(6.79), la invertibilidad de la clase $[X_t]^\pi_{p,\varrho,\xi}$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es equivalente a la invertibilidad de la matriz diagonal

$$\begin{aligned} \mathrm{diag}\left\{[2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+})]^\pi_{p,\widetilde{\xi}}, [2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+})]^\pi_{p,\widetilde{\xi}}\right\} \ \ &\text{si} \ \ t \neq t_j, \\ \mathrm{diag}\left\{[2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})]^\pi_{p,\widetilde{\xi}}, [2^{-1}(I + S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})]^\pi_{p,\widetilde{\xi}}\right\} \ \ &\text{si} \ \ t = t_j, \end{aligned} \tag{6.80}$$

con entradas en $\Lambda^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$. En consecuencia,

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\varrho,\xi}}[X_t]^{\pi}_{p,\varrho,\xi}=\begin{cases}\mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)}[2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+})]^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}} & \text{si } t\neq t_j,\\ \mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)}[2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})]^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}} & \text{si } t=t_j.\end{cases} \tag{6.81}$$

Por otra parte, por el teorema del mapeo espectral y por las igualdades (6.58) seguidas del Teorema 6.8, obtenemos

$$\begin{cases}\mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)}[2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+})]^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}=2^{-1}(1+s_p(\overline{\mathbb{R}})) & \text{si } t\neq t_j,\\ \mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)}[2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+,\beta_j})]^{\pi}_{p,\widetilde{\xi}}=2^{-1}(1+s_{p,\beta_j}(\overline{\mathbb{R}})) & \text{si } t=t_j,\end{cases}$$

donde $s_p(\overline{\mathbb{R}})$ y $s_{p,\beta_j}(\overline{\mathbb{R}})$ están dadas por (6.40). Esto implica inmediatamente en vista de (6.81) que

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\varrho,\xi}}X^{\pi}_{p,\varrho,\xi}=\mathcal{L}_t, \tag{6.82}$$

donde $\mathcal{L}_t$ está dado por (6.75).
Finalmente, ya que el conjunto $\mathcal{L}_t$ dado por (6.75) no separa el plano complejo $\mathbb{C}$ y debido a que $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\varrho,\xi}$ es una subálgebra de Banach de $\Lambda^{\pi}_{p,\varrho,\xi}$ inferimos de [24, Corolarios del Teorema 10.18] que

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\varrho,\xi}}[X_t]^{\pi}_{p,\varrho,\xi}=\mathrm{sp}_{\mathcal{A}^{\pi}_{p,\varrho,\xi}}[X_t]^{\pi}_{p,\varrho,\xi}. \tag{6.83}$$

Combinando (6.82) y (6.83), obtenemos (6.74). □

La matriz de símbolos está definida para cada $t\in\mathbb{T}$ y cada $\xi\in M_t(SO^{\diamond})$ en el arco circular $\mathcal{L}_t$ si $t\in\mathbb{T}$ es un punto de discontinuidad lentamente oscilatoria a trozos de los coeficientes $a_{\pm}\in PSO^{\diamond}$ del operador $A=a_+P_++A_-P_-$.

6.7.5 Corolario del teorema de dos idempotentes

Para cada $t\in\mathbb{T}$ y $\xi\in M_t(SO^{\diamond})$, concluimos del Teorema 6.13 que

$$\mathrm{sp}_{\Lambda^{\pi}_{p,\varrho,\xi}}[X_t]^{\pi}_{p,\varrho,\xi}=\mathrm{sp}_{\mathcal{A}^{\pi}_{p,\varrho,\xi}}[X_t]^{\pi}_{p,\varrho,\xi}=\mathcal{L}_t,$$

donde $\mathcal{L}_t$ es dada por (6.75). Aplicando ahora el Teorema 6.12 con

$$\begin{aligned}\mathcal{B}=\Lambda^{\pi}_{p,\varrho,\xi},\ \mathcal{A}=\mathcal{A}^{\pi}_{p,\varrho,\xi},\ e=I^{\pi}_{p,\varrho,\xi},\ p=P^{\pi}_{p,\varrho,\xi},\ q=Q^{\pi}_{p,\varrho,\xi},\\ X=[X_t]^{\pi}_{p,\varrho,\xi}:=I^{\pi}_{p,\varrho,\xi}-(P^{\pi}_{p,\varrho,\xi}-Q^{\pi}_{p,\varrho,\xi})^2,\end{aligned} \tag{6.84}$$

donde $P^{\pi}_{p,\varrho,\xi}$ y $Q^{\pi}_{p,\varrho,\xi}$ están dadas por (6.21), inmediatamente obtenemos lo siguiente.

Teorema 6.14. *Sea $p \in (1,\infty)$, sea $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$ es un peso potencial dado por (6.3), sea $t \in \mathbb{T}$ y sea $\xi \in M_t(SO^\diamond)$. Entonces el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$, y*

(i) para cada $\mu \in \mathcal{L}_t$, el mapeo $\pi_\mu : \{I^\pi_{p,\varrho,\xi}, P^\pi_{p,\varrho,\xi}, Q^\pi_{p,\varrho,\xi}\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ dado por

$$\pi_\mu(I^\pi_{p,\varrho,\xi}) = I_{2\times 2},$$
$$\pi_\mu(P^\pi_{p,\varrho,\xi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \pi_\mu(Q^\pi_{p,\varrho,\xi}) = \begin{bmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{bmatrix}$$

extiende a un homomorfismo de álgebra de Banach $\pi_\mu : \mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, donde $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ significa un arbitrario valor de la raíz cuadrada;

(ii) una clase $A^\pi_{p,\varrho,\xi} \in \mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\varrho,\xi}$ (equivalentemente, en el álgebra $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$) si y sólo si $\det[\pi_\mu(A^\pi_{p,\varrho,\xi})] \neq 0$ para toda $\mu \in \mathcal{L}_t$.

6.8 El estudio de Fredholm del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$

Con el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ dada por (6.4), asociamos el conjunto

$$\mathfrak{M} := \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathfrak{M}_t, \tag{6.85}$$

donde, para cada $t \in \mathbb{T}$,

$$\mathfrak{M}_t := M_t(SO^\diamond) \times \mathcal{L}_t \tag{6.86}$$

y $\mathcal{L}_t$ está dado por (6.75). Sea $B(\mathfrak{M}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ la C^*-álgebra de todas las funciones matriciales $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Aplicando los resultados de las Secciones 6.4.1 y 6.7, establecemos el resultado principal de la tesis que contiene un cálculo de símbolos para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ y un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$.

Teorema 6.15. *Sea $p \in (1,\infty)$, sea $\varrho \in A_p(\mathbb{T})$ es un peso potencial dado por (6.3). Entonces el mapeo $Sim : \{aI : a \in PSO^\diamond\} \cup \{S_\mathbb{T}\} \to B(\mathfrak{M}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ dado por las funciones* *matriciales*

$$(Sim\, S_{\mathbb{T}})(\xi,\mu) := diag\,\{1,-1\} \;\; para\ todo \;\; (\xi,\mu)\in\mathfrak{M},$$

$$(Sim\, aI)(\xi,\mu) := \begin{bmatrix} a(\xi,1)\mu + a(\xi,0)(1-\mu) & [a(\xi,1)-a(\xi,0)]\,\varrho(\mu) \\ [a(\xi,1)-a(\xi,0)]\,\varrho(\mu) & a(\xi,1)(1-\mu)+a(\xi,0)\mu \end{bmatrix} \tag{6.87}$$
$$para\ todo \;\; (\xi,\mu)\in\mathfrak{M},$$

donde $a(\xi,\mu)$ *es la transformada de Gelfand de una función* $a \in PSO^\diamond$ *para* $(\xi,\mu) \in M(PSO^\diamond)$ *y* $\varrho(\mu) = \sqrt{\mu(1-\mu)}$ *para toda* $\mu \in \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{L}_t$*, extiende a un homomorfismo de álgebra de Banach*

$$Sim : \mathfrak{A}_{p,\varrho} \to B(\mathfrak{M}, \mathbb{C}^{2\times 2}) \tag{6.88}$$

cuyo kernel contiene todos los operadores compactos sobre $L^p(\mathbb{T},\varrho)$*. El álgebra de Banach* $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$ *es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin* $\mathcal{B}^\pi_{p,\varrho}$*, y un operador* $A \in \mathfrak{A}_{p,\varrho}$ *es Fredholm en el espacio* $L^p(\mathbb{T},\varrho)$ *si y sólo si*

$$\det((Sim\, A)(\xi,\mu)) \neq 0 \;\; para\ todo \;\; (\xi,\mu)\in\mathfrak{M}. \tag{6.89}$$

Demostración. Aplicando el Teorema 6.5 obtenemos los representantes de las clases $A^\pi_{p,\varrho,\xi}$ para el álgebra $\mathfrak{A}_{p,\varrho}$, usando el Lema 6.3 sabemos la estructura de las álgebras $\mathcal{A}^\pi_{p,\varrho,\xi}$, después, del Teorema 6.14 obtenemos el criterio del Teorema 6.15. □

6.8.1 Criterio de Fredholm para el problema de Carleman.

Para lograr un resultado análogo al obtenido en la Sección 6.7.2 para funciones $a, b \in PSO^\diamond$ debemos considerar, en lugar de límites unilaterales, límites laterales parametrizados por puntos de fibras en cada punto de discontinuidad, es decir, $a(\xi^+)$ en lugar de $a(t+0)$ y $a(\xi^-)$ en lugar de $a(t-0)$, donde $\xi \in M_t(SO^\diamond)$, $a \in SO^\diamond$.
$\xi \mapsto a(\xi)$ es la transformada de Gelfand de la función $a \in SO^\diamond$. El espacio de ideales maximales en $SO^\diamond$ es

$$M(SO^\diamond) = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t(SO^\diamond).$$

Para una función $a \in PSO^\diamond$ la podemos expresar como $a \sim a_+\chi_t^+ + a_-\chi_t^-$ donde $a_\pm \in SO^\diamond$. De esta forma la función a se identifica $a \to (a(\xi^+), a(\xi^-))$ $\forall \xi \in M_t(SO^\diamond)$, con $a(\xi^+) = a_+(\xi)$, $a(\xi^-) = a_-(\xi)$.

Teorema 6.16. *El operador $A = aP_+ + bP_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{T}, \varrho)$ si y sólo si la matriz*

$$A(\xi, x) = \begin{pmatrix} a(\xi^+)x + b(\xi^+)(1-x) & [a(\xi^+) - b(\xi^+)]\sqrt{x(1-x)} \\ [a(\xi^-) - b(\xi^-)]\sqrt{x(1-x)} & a(\xi^-)(1-x) + b(\xi^-)x \end{pmatrix}$$

es invertible $(\det A(\xi, x) \neq 0)$ *para todos* $(\xi, x) \in \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t(SO^\diamond) \times \mathcal{L}_t$*, donde el arco* $\mathcal{L}_t$ *esta definido por* (6.70)*.*

De la condición $(\det A(\xi, x) \neq 0)$ se tiene lo siguiente

$$a(\xi^+)b(\xi^-)x + a(\xi^-)b(\xi^+)(1-x) \neq 0.$$

Hemos mencionado que para el problema de Carleman haremos uso de el desplazamiento especial (1.3) el cual reduce el problema de Carleman al problema de Riemann.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, and Yu.I. Karlovich, *C^*-algebras of integral operators with piecewise slowly oscillating coefficients and shifts acting freely.* Integr. Equ. Oper. Theory **55** (2006), 19-67.

[2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolacion Spaces. An Introduction.* Springer, Berlin, 1976.

[3] A. Böttcher, I. Gohberg, Yu. Karlovich, N. Krupnik, R. Roch, B. Silbermann, I. Spitkovsky, *Banach algebras generated by N idempotents and applications.* In: Singular Integral Operators and Related Topics. Joint German-Israeli Workshop, Tel-Aviv, March 1-10, 1995. Operator Theory: Advances and Applications, vol. **90**, pp. 19-54. Birkhäuser, Basel, 1996.

[4] A. Böttcher and Yu.I. Karlovich, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators.* Progress in Mathematics **154**, Birkhäuser, Basel, 1997.

[5] A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators.* 2nd edition. Springer, Berlin, 2006.

[6] F. Cobos, T. Kühn, and T. Schonbek, *One-sided compactness results for Aronszajn-Gagliardo functors*, J. Funct. Anal. **106** (1992), 274-313.

[7] M. Cwikel, *Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators*, Duke Math. J. **65** (1992), no. 2, 333-343.

[8] R.V. Duduchava, *Integral Equations with Fixed Singularities.* Teubner, Leipzig, 1979.

[9] T. Finck, S. Roch, and B. Silbermann, *Two projection theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra.* Math. Nachr. **162** (1993), 167-185.

[10] I. Gohberg and N. Krupnik, *Extension theorems for invertibility symbols in Banach algebras.* Integr. Equ. Oper. Theory **15** (1992), 991-1010.

[11] I. Gohberg and N. Krupnik, *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. I: Introduction.* Oper. Theory: Adv. Appl., Vol. **53**. Birkhäuser, Basel, 1992.

[12] I. Gohberg and N. Krupnik, *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. Vol. II: General Theory and Applications.* Oper. Theory: Adv. Appl. Vol. **54** Birkhäuser, Basel, 2013.

[13] A.Yu. Karlovich, Yu.I. Karlovich, A.B. Lebre, *Necessary conditions for Fredholmness of singular integral operators with shifts and slowly oscillating data.* Integr. Equ. Oper. Theory **71**, (2011), 29-53.

[14] Yu.I. Karlovich and I. Loreto Hernández, *On convolution type operators with piecewise slowly oscillating data.* In: Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics. The Vladimir Rabinovich Anniversary Volume, Oper. Theory: Adv. Appl. **228** (2013), pp 185-207.

[15] Yu.I. Karlovich and I. Loreto Hernández, *Algebras of convolution type operators with piecewise slowly oscillating data. I: Local and structural study.* Integr. Equ. Oper. Theory **74** (2012), 377-415.

[16] Yu.I. Karlovich and E. Ramírez de Arellano, *Singular integral operators with semi-almost periodic matrix symbols on weighted Lebesgue spaces.* Integr. Equ. Oper. Theory **48** (2004), 331-363.

[17] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustylnik, and P.E. Sobolevskii, *Integral Operators in Spaces of Summable Functions.* Nauka, Moscow, 1966 (Russian); English transl.: Noordhoff I.P., Leyden, 1976.

[18] G. S. Litvinchuk, *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[19] G.J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, Boston, 1990

[20] M.A. Naimark, *Normed Algebras.* Wolters-Noordhoff,, Groningen, 1972.

[21] L.P. Primachuk, *On a boundary value problem with conjugation.* Izv. Akad. Nauk Bel. SSR., ser. fis-matem. nauk, **4**, 59-62, 1967 (in Russian).

[22] S. Roch, P.A. Santos, and B. Silbermann, *Non-commutative Gelfand Theories. A Tool-kit for Operator Theorists and Numerical Analysts.* Springer, London, 2011.

[23] S. Roch and B. Silbermann, *Algebras of Convolution Operators and Their Image in the Calkin Algebra.* Report R-Math-05/90. Akademie der Wissenschaften der DDR, Karl Weierstrass-Institut für Mathematik, Berlin, 1990.

[24] W. Rudin, *Functional Analysis.* 2nd edn. McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[25] D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation.* Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 817–838.

DR. VICTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada "*Problema de frontera de Carleman con datos discontinuos*" que presenta el alumno **Mazatl Alberto Dominguez Dominguez (10009547)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias.**

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Emilio Marmolejo Olea IM-UNAM	Aprobado	Emilio MO
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Gennadiy Burlak CIICAP-UAEM	Aprobado	
Dr. Yuri Karlovich CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM		