



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
Centro de Investigación en Ciencias

“3-variedades hiperbólicas que fibran sobre el círculo”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA

L. en M. DULCE MARÍA GUERRERO TÁNORI

DIRECTOR DE TESIS
Dra. Gabriela Hinojosa Palafox

Introducción

En 1998, William P. Thurston publicó un artículo llamado *Hyperbolic Structures on 3-Manifolds II: Surface group and 3-manifolds which fiber over the circle* en el cual se prueba el teorema de hiperbolización. Dicho teorema establece una condición suficiente, en la topología de una variedad compacta de dimensión 3, para que su interior sea una variedad hiperbólica.

En el año 1996, Jean Pierre Otal publica el libro *Le Théorème d'Hyperbolisation pour les Variétés Fibrées de Dimension 3*, donde se puede consultar una demostración alternativa al teorema de hiperbolización de Thurston, ya que, Otal utilizó el teorema del doble límite mientras que Thurston utilizó superficies plisadas. Así, la importancia del teorema del doble límite radica en su participación como paso esencial para la demostración de teorema de hiperbolización de Thurston.

El propósito de este trabajo es presentar una demostración del teorema del doble límite utilizando la compactificación de Thurston del espacio de Teichmüller. A continuación, enunciamos dicho teorema del doble límite que es mostrado en el capítulo 6.

Teorema 0.0.1. Sean λ^+ y λ^- laminaciones geodésicas medibles aracionales. Sea $\rho_i = (\sigma_i^+, \sigma_i^-)$ una sucesión de representaciones de $\mathcal{QF}(\Gamma)$ tal que σ_i^+ tiende a λ^+ y σ_i^- tiende a λ^- en la compactificación de Thurston del espacio de Teichmüller y supongamos que $\lambda^+ \cap \lambda^- \neq \emptyset$. Entonces la sucesión (ρ_i) tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{R}(\Gamma)$.

En el capítulo 1, se da una introducción a la geometría hiperbólica y a los grupos kleinianos y se exploran resultados para grupos discretos como el lema de Margulis. Luego, se presenta la definición de dominio de discontinuidad y conjunto límite de un grupo kleiniano y se dan algunos ejemplos. Se estudian los resultados de finitud de Ahlfors y se exhibe una clasificación para las cúspides en la variedad hiperbólica \mathbb{H}^n/Γ . En la última sección de este capítulo se analizan laminaciones geodésicas medibles, su geometría y topología.

En el capítulo 2, se presenta una noción de homeomorfismos cuasiconformes y luego formalizamos este concepto. Después introducimos el concepto de espacio de Teichmüller utilizando grupos kleinianos y homeomorfismos cuasiconformes. Aplicando la teoría antes vista, se define el isomorfismo de Ahlfors-Bers para parametrizar el espacio de homeomorfismos cuasiconformes por medio del producto de dos espacios de Teichmüller. Por último se da una clasificación de difeomorfismos mediante

laminaciones geodésicas y se explica cómo es su dinámica.

En el capítulo 3, se introduce el concepto de *árbol real* y *acciones isométricas* de un grupo Γ en un árbol real y se explica cómo éstas permiten compactificar el espacio de isometrías fieles y discretas del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .

En el capítulo 4, se presenta la descomposición en pantalones de una superficie orientable y se triangula. Luego, se analiza dicha triangulación mediante n -esqueletos y se muestra el concepto de laminación geodésica realizada en un árbol.

En el capítulo 5, se establece que si una laminación geodésica cumple con ciertas condiciones, entonces satisface una noción de continuidad para la topología de Gromov. Para mostrar esto, se presenta a las *vías de tren*.

En el capítulo 6, se muestra el teorema del doble límite por contradicción, utilizando resultados del capítulo 5 y aplicando el lema de Ahlfors. Finalmente, se verifica el criterio de convergencia en el espacio de grupos cuasifuchsianos.

Índice general

1.. Preliminares	5
1.1. Geometría Hiperbólica	5
1.1.1. Espacio Hiperbólico	5
1.2. Grupos Kleinianos	8
1.2.1. Definición	8
1.2.2. Transformaciones de Möbius	8
1.2.3. Lema de Margulis	16
1.2.4. Dominio de Discontinuidad y Conjunto Límite	21
1.2.5. Teorema de Finitud de Ahlfors	23
1.3. Laminaciones Geodésicas	24
2.. Espacio de Teichmüller	39
2.1. Homeomorfismo Cuasiconforme	39
2.2. Espacios de Teichmüller y Grupos Cuasifuchsianos	42
2.2.1. Definición de Grupos Fuchsianos	42
2.2.2. Normalización del grupo Γ	43
2.2.3. Espacio de Teichmüller	43
2.3. El Espacio de Deformaciones Cuasi-fuchsianas de Γ	45
2.4. Isomorfismo de Ahlfors-Bers	46
2.4.1. La Acción del Grupo Modular de S en $\mathcal{T}(\Gamma)$ y $\mathcal{QF}(\Gamma)$	47
2.4.2. La Compactificación de Thurston del Espacio de Teichmüller	49
2.4.3. Clasificación de los Elementos del Grupo $\text{Mod}(S)$	50
3.. Árboles Reales y Degeneración de Estructuras Hiperbólicas	53
4.. Laminaciones Geodésicas y Árboles Reales	78
5.. Laminaciones Geodésicas y Topología de Gromov	93

<i>6.. Teorema del Doble Límite</i>	107
<i>Bibliografía</i>	113

Índice de figuras

1.2. Horoesfera con punto fijo ς	7
1.3. Una 2-variedad hiperbólica con ϵ -parte delgada y ϵ -parte gruesa.	20
1.4. Inversiones	21
2.1. Deformación de \mathbb{H}^2 bajo ϕ_+	46
2.2. Relación entre \tilde{f} y f	47
3.1. Árbol Simplicial.	53
3.2. Proyección del punto y en \mathcal{A}	54
3.3. Ángulo α del triángulo ABC	65
3.4. Cuadrilátero $ABCD$	66
3.5. Triángulo $0\rho_i(g)(0)\rho_i(g')(0)$	67
3.6. Cuadrilátero $\rho_i(g'')(0)\pi^i(g'')\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$	68
3.7. Triángulo $0\rho_i(g_j)(0)\rho_i(g_j^2)(0)$	69
3.8. Triángulo $0\rho_i(g_1^{-1})(0)\rho_i(g_2)(0)$	71
3.9. Círculo inscrito en triángulo Υ	74
4.1. Pantalones	78
4.2. Descomposición en pantalones de una 2-variedad hiperbólica.	79
4.3. Triangulación de la superficie S	81
4.4. Triángulos con la laminación medible.	83
4.5. vía de tren	87
4.6. Realización de la vía de tren	87
4.7. Interruptor y empalmes de la vía de tren \mathcal{R}	92
5.1. Cuadrilátero $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$	105

1. PRELIMINARES

1.1. Geometría Hiperbólica

1.1.1. Espacio Hiperbólico

En geometría hiperbólica hay distintos modelos los cuales son utilizados a conveniencia. A continuación presentamos dos modelos que usaremos en este trabajo.

Para $n \geq 2$, denotamos por \mathbb{H}^n al semiespacio superior

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \quad (1.1)$$

con la métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)}{x_n^2}. \quad (1.2)$$

Denotamos a la frontera de \mathbb{H}^n como $\partial\mathbb{H}^n$

$$\partial\mathbb{H}^n = \overline{\mathbb{R}^{n-1}} = \{x_n = 0\} \cup \{\infty\}, \quad (1.3)$$

donde $\overline{\mathbb{R}^{n-1}}$ es la cerradura de \mathbb{R}^{n-1} .

Las geodésicas en este modelo son líneas y semicírculos ortogonales al plano $x_n = 0$. También presentamos el modelo del disco unitario \mathbb{D}^n

$$\mathbb{D}^n = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum \xi_i^2 < 1\} \quad (1.4)$$

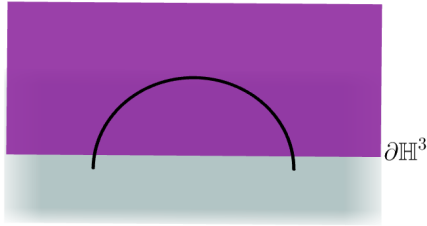
con la métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)}{(1 - \sum \xi_i^2)^2}. \quad (1.5)$$

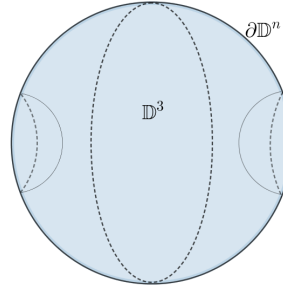
con frontera

$$\partial\mathbb{D}^n = \{\xi_i = 1\}. \quad (1.6)$$

Las geodésicas son diámetros del disco y arcos de círculos ortogonales a $\partial\mathbb{D}^n$.



(a) Modelo \mathbb{H}^n cuando $n = 3$.



(b) Modelo \mathbb{D}^n cuando $n = 3$.

En el siguiente resultado veremos que \mathbb{H}^n y \mathbb{D}^n son isomorfos mediante la existencia de una isometría entre ellos.

Proposición 1.1.1. Los modelos \mathbb{H}^n y \mathbb{D}^n son equivalentes como variedades riemannianas. Esto es, son isomorfas como variedades riemannianas.

Demostración: Para la prueba de esta equivalencia nos apoyaremos en la proyección estereográfica $J : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ definida por

$$J(x) = \left(\frac{2x_1}{1-|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1-|x|^2}, \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2} \right) \quad (1.7)$$

con su inversa dada por

$$J^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{1+y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1+y_{n+1}} \right). \quad (1.8)$$

La demostración completa de este hecho puede encontrar en [Rat94], página 122.

□

Definición 1.1.1. Sea g una isometría de \mathbb{H}^n y c un número real. Decimos que la imagen de un hiperplano $x_n = c$, bajo g , es llamada una horoesfera centrada en $g(\infty)$. La imagen del semiespacio $x_n \geq c$ bajo alguna isometría es una horobola.

Definición 1.1.2. Si $g \neq id$ es una isometría de \mathbb{H}^n que preserva la orientación, decimos que g es un elemento:

- I. Elíptico, si fija un solo punto en \mathbb{H}^n ,
- II. Parabólico, si fija un único punto en $\partial\mathbb{H}^n$,
- III. Hiperbólico, si fija dos puntos distintos en $\partial\mathbb{H}^n$.

Definición 1.1.3. Sean $x, y \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ los puntos fijos de un elemento hiperbólico g y sea $A(g)$ su eje de traslación. Si g traslada a $A(g)$ en dirección del punto x , decimos que x es el punto atractor. En el caso de y decimos que es el punto repulsor.

Si tenemos un elemento hiperbólico g , entonces un *eje de la isometría hiperbólica* g es una geodésica invariante $A(g)$ bajo g . Este eje actúa como traslación.

En el caso de los elementos parabólicos no hay ejes ya que solo fijan un punto en \mathbb{H}^n , pero sí dejan superficies euclidianas invariantes en \mathbb{R}^{n-1} , llamadas horoesferas (Figura 1.2).

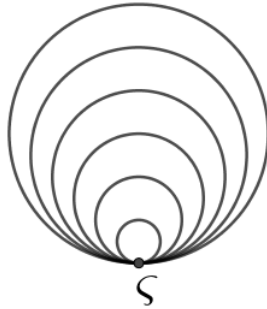


Fig. 1.2: Horoesfera con punto fijo ς .

Ahora, definamos la distancia de traslación de una isometría g de \mathbb{H}^n como la cantidad

$$\delta(g) = \inf\{d(x, g(x)), x \in \mathbb{H}^n\}. \quad (1.9)$$

También podemos clasificar a las isometrías de acuerdo a su distancia de traslación. Decimos que g es parabólica o elíptica si su distancia de traslación $\delta(g)$ es igual a 0, en el caso hiperbólico, la distancia de traslación $\delta(g)$ es mayor a 0.

Lema 1.1.1. El grupo de isometrías que preservan la orientación del modelo \mathbb{H}^n es isomorfo al grupo de Möbius de dimensión $n - 1$.

Denotamos este grupo por $Isom(\mathbb{H}^n)$.

Demostración: Esta demostración puede consultarse en [\[Rat94\]](#).

□

En particular, $Isom(\mathbb{H}^2) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y $Isom(\mathbb{H}^3) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Estos comentarios serán estudiados con más detalle en la siguiente subsección.

La acción definida a continuación es utilizada para ver el comportamiento de ciertos grupos, en especial nos ayuda a visualizar el comportamiento de manera geométrica.

Definición 1.1.4. Si X es un espacio topológico y Γ es un grupo de homeomorfismos de X , la acción de Γ sobre X se dice que es propiamente discontinua, si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que $gU \cap U = \emptyset$, siempre que $g \neq e$, donde e es el elemento neutro de Γ .

1.2. Grupos Kleinianos

1.2.1. Definición

Utilizando la definición [1.1.4](#), podemos dar el concepto de grupo kleiniano.

Definición 1.2.1. Un subgrupo Γ de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 es llamado un grupo kleiniano si actúa en \mathbb{H}^3 de manera propiamente discontinua.

Podemos notar que una consecuencia de [1.2.1](#) es que la acción es libre. Equivalentemente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.2. Decimos que un grupo kleiniano es un subgrupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , de tipo finito y sin torsión.

La definición de grupo torsión puede ser consultada en [\[Kap18\]](#).

1.2.2. Transformaciones de Möbius

Definición 1.2.3. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Decimos que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (1.10)$$

es una transformación de Möbius, donde, si $c \neq 0$, definimos $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y si $c = 0$ entonces $T(\infty) = \infty$.

Denotaremos por $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ al conjunto de transformaciones de Möbius.

Notemos que una transformación de Möbius no está determinada de manera única debido a sus coeficientes, ya que, si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$T(\lambda z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az + b)}{\lambda(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d} = T(z). \quad (1.11)$$

Además, las transformaciones de Möbius son funciones biyectivas y conformes; la composición y la inversa de una transformación de Möbius es de nuevo una transformación de Möbius. En particular, forman un grupo bajo la composición.

Lema 1.2.1. Si $T(z)$ es una transformación de Möbius, entonces $T(z)$ es biyectiva.

Demostración: Vamos a probar que para cada transformación de Möbius T , existe su inversa T^{-1} que también es transformación de Möbius. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y definamos $T^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Por cálculo directo

$$T^{-1}(T(z)) = \frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - b}{-c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + a} = \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = id(z),$$

$$T(T^{-1}(z)) = \frac{a\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + b}{c\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + d} = \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = id(z).$$

Por tanto T es biyectiva. □

Proposición 1.2.1. El conjunto $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo. Más aún, es un grupo de homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Demostración:

- I. Asociatividad. Sabemos que la composición de funciones es asociativa.
- II. Identidad. La identidad está dada por $id(z) = z$, transformación de Möbius con $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$, tal que $ad - bc = 1$.
- III. Cerradura. Sean $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $\tilde{T}(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ con coeficientes tales que $ad - bc = 1$ y $eh - fg = 1$. Veamos que la composición es cerrada.

$$T(\tilde{T}(z)) = \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}, \quad (1.12)$$

con

$$\begin{aligned}
(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) &= acef + adeh + bcfg + bdgh \\
&\quad - acef - adfg - bceh - bdgh \\
&= ad(eh - fg) + bc(fg - eh) \\
&= ad + (-bc) \\
&= ad - bc \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Notemos que T es continua, biyectiva y con inversa continua por 1.2.1. Por lo tanto T es un homeomorfismo. □

La demostración de que las transformaciones de Möbius forman un grupo sugiere una forma de calcular la composición de manera más sencilla.

Proposición 1.2.2. Existe un homomorfismo entre $GL(2, \mathbb{C})$ y $Möb(\widehat{\mathbb{C}})$ vía

$$\begin{aligned}
\eta : GL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow Möb(\widehat{\mathbb{C}}) \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Demostración: Sean $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $g(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ con $a, b, c, d, A, B, C, D \in \mathbb{C}$. Así

$$\begin{aligned}
g(f(z)) &= \frac{A(f(z)) + B}{C(f(z)) + D} \\
&= \frac{Aaz + Ab + Bcz + Bd}{cz + d} \cdot \frac{cz + d}{Caz + Cb + Dcz + Dd} \\
&= \frac{(Aa + Bc)z + (Ab + Bd)}{(Ca + Dc)z + (Cb + Dd)}.
\end{aligned}$$

El producto de sus matrices asociadas es

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}.$$

Notemos que los coeficientes en las operaciones son equivalentes. Por lo tanto, η es un homomorfismo.

□

Teorema 1.2.1. El grupo $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ es isomorfo a $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Demostración: Utilizaremos el homomorfismo η . Si $T(z) = y$ con $T \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces $z = \frac{dy-b}{-cy+a}$, por lo que η es sobreyectiva. Denotamos por I la matriz identidad de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$. Por el primero teorema de isomorfismos, tenemos

$$\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\} \cong \text{Im}(\eta) = \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}). \quad (1.15)$$

□

Teorema 1.2.2. El grupo $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ es isomorfo al grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Demostración: Sean $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $m' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ con $m \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ y $m' \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Sean $\frac{1}{\lambda}m = m'$ y $\lambda^2 = \det(m)$ tales que

$$a' = \frac{a}{\sqrt{\det(m)}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{\det(m)}}, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{\det(m)}}, \quad d' = \frac{d}{\sqrt{\det(m)}}. \quad (1.16)$$

Notemos que

$$\det(m') = \frac{ad}{\det(m)} - \frac{bc}{\det(m)} = \frac{ad-bc}{\det(m)} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1, \quad (1.17)$$

es decir, la matriz m pertenece a $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Supongamos que existe una matriz $\lambda'm''$ tal que $m = \lambda m' = \lambda' m''$, con $m', m'' \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ y $\lambda'^2 = \det(m)$. Entonces $m'' = \pm m'$ siempre que $\lambda' = \pm \lambda$.

Definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \text{GL}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ m &\mapsto \varphi(m) = m'. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Sean $m, n \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ tales que $m = \lambda m'$ y $n = \lambda' m''$ con $\lambda^2 = \det(m)$ y $\lambda'^2 = \det(n)$. Como

$$\varphi(m)\varphi(n) = m'm'' = (\lambda m')(\lambda' m'') = \varphi(mn), \quad (1.19)$$

entonces φ es un homomorfismo de grupos. Sea $\pi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ la función proyección. Entonces la composición $\pi \circ \varphi$ es sobreyectiva con kernel igual a λI , donde

I es la matriz identidad.

Por lo tanto

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) / \lambda I = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}). \quad (1.20)$$

□

Cuando la dimensión es igual a 2 o a 3, podemos visualizar la manera en la que actúan los elementos del grupo Möb utilizando los puntos fijos y las trazas cuando estos son representados por matrices en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Definición 1.2.4. Sean g, h elementos de un grupo Γ . Decimos que g y h son conjugados si existe un elemento a tal que $g = aha^{-1}$.

Es fácil ver que noción de elementos conjugados anteriores define una relación de equivalencia.

Proposición 1.2.3. Denotamos la conjugación $g = aha^{-1}$ por $g \sim h$. Esta conjugación es una relación de equivalencia.

Demostración:

- I. Reflexividad: Sea $g \in \Gamma$. Como $g = (id)g(id)^{-1} = (id)g(id)$, entonces $g \sim g$.
- II. Simetría: Sean $g, h \in \Gamma$ y $f \in \Gamma$ tales que $g = fhf^{-1}$, es decir, $g \sim h$. Como $g = fhf^{-1}$, entonces $f^{-1}gf = h$ con $f = (f^{-1})^{-1}$. Por lo tanto $h \sim g$.
- III. Transitividad: Sean $f, g, h \in \Gamma$ tales que $f \sim g$ y $g \sim h$, es decir, existen elementos j, k de Γ tales que $f = jgj^{-1}$ y $g = khk^{-1}$, respectivamente. Por lo tanto, $f = jgj^{-1} = j(khk^{-1})j^{-1} = (jk)h(k^{-1}j^{-1}) = (jk)h(jk)^{-1}$. Tomando como jk un elemento de Γ , entonces $f \sim h$.

□

Decimos que las clases de equivalencia de la conjugación son *clases de conjugación*.

En el siguiente resultado estudiaremos los puntos fijos de una transformación de Möbius.

Teorema 1.2.3. Sea $T \in \mathrm{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ con $ad - bc = 1$. Entonces

- I. si $(a + d)^2 \neq 4$, T fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$.
- II. si $(a + d)^2 = 4$ y T es distinto de la identidad, T fija un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Demostración: Si $c = 0$, entonces $T(z) = \frac{az+b}{d} = \alpha z + \beta$ donde $\alpha = a/d$ y $\beta = b/d$. Como $T(\infty) = \infty$, lo que quiere decir que T fija al elemento ∞ . Si $\alpha \neq 1$, tenemos el punto fijo $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$ de la transformación $z = \alpha z + \beta$. En este caso si $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$ no tenemos puntos fijos finitos. Ahora resolvamos la siguiente ecuación

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \quad (1.21)$$

si $z \neq \infty$ y $z \neq -\frac{d}{c}$, es decir,

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \quad (1.22)$$

Utilizando la ecuación general para resolver 1.22, obtenemos el discriminante

$$(d-a)^2 + 4bc. \quad (1.23)$$

Si la expresión 1.23 es igual a 0, la ecuación 1.22 tiene una raíz doble y T tendría un único punto fijo. Por otro lado, si el discriminante es distinto de cero, entonces tiene dos raíces y T tiene dos puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Si utilizamos la hipótesis $ad - bc = 1$ en la expresión 1.23 obtenemos

$$(d-a)^2 + 4bc = a^2 - 2ad + 4bc + d^2 = (a+d)^2 = 4. \quad (1.24)$$

□

En consecuencia del resultado 1.2.3 sabemos que si una transformación de Möbius tiene más de dos puntos fijos, esta transformación debe ser la transformación identidad $id(z) = z$.

A continuación estudiaremos la traza de las matrices y su relación con las transformaciones de Möbius.

Definición 1.2.5. Sea $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con matriz de representación

$$T(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Definimos la traza de T de la siguiente manera

$$\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d. \quad (1.26)$$

Ahora consideremos una $T \in \operatorname{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ representada por la matriz $A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

con $\operatorname{tr}^2(T) = \left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$. Estudiemos sus clases de conjugación.

Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ definimos

$$T_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z & \text{si } \lambda \neq 1 \\ z + 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \quad (1.28)$$

Teorema 1.2.4. Si $T \in \operatorname{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$, distinta de la identidad, entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $T \sim T_\lambda$.

Demostración: Supongamos que T tiene un punto fijo z_0 . Sabemos que existe $S \in \operatorname{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $S(z) = \infty$. Notemos que $S \circ T \circ S^{-1}(z) = z + t$ con $t \in \mathbb{C} - \{0\}$. Lo anterior es visto como una traslación T_t .

Consideremos un elemento $g = \frac{z}{t}$, entonces $g \circ T_t \circ g^{-1}(z) = z + 1$ y $g \circ S \circ T \circ S^{-1} \circ g^{-1} = T_1$. En consecuencia $T \sim T_1$.

Ahora debemos suponer que T tiene dos puntos fijos, llamémosles z_1 y z_2 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $f \in \operatorname{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $f(z_1) = 0$ y $f(z_2) = \infty$. Es claro que $f \circ T \circ f^{-1}(0) = 0$ y $f \circ T \circ f^{-1}(\infty) = \infty$. Por lo tanto $f \circ T \circ f^{-1} = T_\lambda$ y en consecuencia $T \sim T_\lambda$.

□

Teorema 1.2.5. La matriz T_κ es conjugada a T_λ si y sólo si $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \frac{1}{\lambda}$.

Demostración: Si $\lambda = 1$, entonces $T_1(\infty) = \infty$ y $S \circ T_1 \circ S^{-1}$ fija a $S(\infty)$ para cada $S \in \operatorname{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$. Es claro que T_1 no puede conjugarse con T_λ . Ahora supongamos que $T_\kappa \sim T_\lambda$, entonces sus trazas cumplen con

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2, \quad (1.29)$$

esto significa que $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. De manera inversa, $G(z) = \frac{1}{z}$, el conjugado de T_κ es $T_{\frac{1}{\kappa}}$, entonces $G \circ T_\kappa \circ G^{-1} = T_{\frac{1}{\kappa}}$.

□

Es fácil ver que, si $T_1, T_2 \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$, distintas de la identidad, entonces $T_1 \sim T_2$ si y sólo si $\text{tr}^2(T_1) = \text{tr}^2(T_2)$.

Debido a los resultados anteriores, podemos hablar de una clasificación geométrica de los elementos de $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$. De la ecuación

$$\text{tr}^2(T) = \text{tr}^2(T_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \quad (1.30)$$

obtenemos que tanto λ como $\frac{1}{\lambda}$ son raíces de $z^2 + 2 - \text{tr}^2(T)z + 1 = 0$.

Definición 1.2.6. Sea $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ distinta de la identidad. Decimos que T es

- I. Parabólica si tiene un punto fijo en $\widehat{\mathbb{C}}$ y $|\lambda| = 1$. Además cumple con $\text{tr}^2(T) = 4$
- II. Hiperbólica si tiene dos puntos fijos: $\lambda \in \mathbb{R}_+$ con $|\lambda| \neq 1$ y tiene $\text{tr}^2(T) > 4$.
- III. Loxodrómica si tiene dos puntos fijos $\text{tr}^2(T) < 0$ o $\text{tr}^2(T) \notin \mathbb{R}$ y $|\lambda| \neq 1$.
- IV. Elíptica si tiene dos puntos fijos y $|\lambda| = 1$ y $0 \leq \text{tr}^2(T) < 4$.

Ahora veamos qué sucede con la geometría de los elementos que tienen orden finito.

Lema 1.2.2. Sea $T \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ un elemento distinto de la identidad con orden finito. Entonces T es elíptico.

Demostración: Sea n un número entero. Supongamos que $T \neq id$, $T^n = id$ y sea T el conjugado de algún elemento S_λ , siguiendo la notación del teorema 1.2.5. Entonces T^n es el conjugado de S_λ^n para cada n . Por lo tanto, el elemento S_λ tiene orden finito.

Es claro que, si $\lambda = 1$, entonces $S_\lambda^n(z) = z + n$ tiene periodo no finito, por lo que $\lambda \neq 1$. Así, S_λ debe ser de la forma $S_\lambda^n(z) = \lambda^n z$. Si $S_\lambda^m(z) = z$ tiene orden finito, entonces S_λ también tiene orden finito, por lo que $\lambda^m = 1$. Esto implica que $|\lambda| = 1$ y T es un elemento elíptico.

□

Es claro que un grupo kleiniano no puede tener elementos elípticos. En efecto, supongamos que Γ actúa de manera propiamente discontinua, entonces la acción no tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n . Por 1.1.2, los únicos elementos de Γ que hacen esto son los elípticos. Por el lema 1.2.2, los elementos de orden finito son elípticos, así Γ es libre de torsión. Por lo tanto, todo grupo kleiniano solo contiene elementos hipérbolicos y parabólicos.

1.2.3. Lema de Margulis

En esta sección veremos el lema de Margulis y algunas de sus aplicaciones a grupo kleinianos. Para estudiar más acerca de este lema, se puede consultar [BP92].

Definición 1.2.7. Decimos que un grupo es elemental o virtualmente finito si contiene un subgrupo abeliano de índice finito.

Sea $Isom(\mathbb{E}^n)$ el grupo de isometrías del espacio euclidiano \mathbb{E}^n . El teorema de Bieberbach nos dice que si $\rho: \Gamma \rightarrow Isom(\mathbb{E}^n)$ es una representación discreta, entonces Γ es virtualmente abeliano y finitamente generado. Utilizaremos el siguiente resultado en el lema 1.2.3.

Teorema 1.2.6. Si Γ es un grupo cocompacto y discreto en $Isom(\mathbb{R}^n)$, entonces el conjunto de traslaciones $\Gamma \cap (I \times \mathbb{R}^n)$ es un grupo abeliano finitamente generado de rango n libre de torsión. Más aún, $\Gamma \cap (I \times \mathbb{R}^n)$ genera un subgrupo abeliano maximal y normal de orden finito de Γ .

Demostración: Esta prueba puede encontrarse en [Szc12].

□

Lema 1.2.3. Sean g, h dos isometrías de \mathbb{H}^n distintas de la identidad que generan un grupo kleiniano $\langle g, h \rangle$, entonces cumplen las siguientes condiciones

- I. El grupo $\langle g, h \rangle$ es elemental si y sólo si g y h tienen los mismos conjuntos de puntos fijos.
- II. Si los conjuntos de puntos fijos de g y h se intersectan, entonces éstos coinciden.
- III. Si el grupo $\langle g, h \rangle$ es no elemental, entonces contiene un grupo libre de 2 generadores, los cuales son hiperbólicos.

Demostración:

- I. Denotamos por $\text{Fix}(g)$ a los puntos fijos de g . Por definición de grupo elemental generado por g y h , algunas potencias no nulas de estos elementos conmutan. Además, como los elementos de un grupo kleiniano tiene los mismos puntos fijos que sus potencias no nulas, algunas potencias de h fijan a $\text{Fix}(g)$ y algunas potencias de g fijan el conjunto $\text{Fix}(h)$. Concluimos que los elementos g y h tienen los mismos puntos fijos.

De manera inversa, supongamos que g y h son elementos hiperbólicos que tienen los mismos puntos fijos y dejan invariante la geodésica $A(g) \subset \mathbb{H}^n$ entre los dos puntos fijos de g ya que actúan como traslación en $A(g)$. El homomorfismo $\delta : \langle g, h \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia un elemento con su longitud de traslación, es inyectivo por su construcción. Por la discretez de $\langle g, h \rangle$, es cíclico.

Ahora supongamos que g y h son parabólicos con puntos fijos en común. Sabemos que estos elementos son traslaciones euclidianas en \mathbb{R}^{n-1} . Por el teorema de Bieberbach 1.2.6, terminamos.

- II. Sean g un elemento hiperbólico y h un elemento parabólico que tiene como punto fijo el punto atractor de g . Consideremos $g(z) = \lambda z$ y $h(z) = z + k$ con $k \neq 0$ y $\lambda > 1$ y tomemos su composición. Así

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g^{-i} \circ h \circ g^i(z) = z + \frac{1}{\lambda^i} k = z. \quad (1.31)$$

Por el lema 1.2.4 tenemos $\|g^{-i} \circ h \circ g^i\| = (2^2 + (\lambda^{-i} k) 2)^{\frac{1}{2}}$, con $\lambda > 1$. Por lo tanto, $\langle g, h \rangle$ es no discreto.

- III. Utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.7. Sea $\Gamma = \langle g, h \rangle$ un grupo generado por g y h , ambos elementos de orden infinito y tal que Γ actúa en un conjunto X . Supongamos que existen subconjuntos no vacíos X_1 y X_2 de X tales que X_2 no está contenido en X_1 y para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ se cumple

$$g^n X_2 \subset X_1, \quad h^n X_1 \subset X_2. \quad (1.32)$$

Entonces el grupo Γ es libre.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [Loh15].

□

Este teorema se aplica a las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

las cuales son representantes de elementos hiperbólicos y generan un subgrupo libre de rango 2.

□

El siguiente lema es una herramienta utilizada para caracterizar a los grupos no elementales y para probar la existencia de la constante de la que se habla en el lema [1.2.5](#).

Lema 1.2.4. Si $\langle g, h \rangle$ es un grupo kleiniano no elemental, entonces la desigualdad

$$\mu(g, h) = \|\operatorname{tr}^2 g - 4\| + \|(\operatorname{tr}(ghg^{-1}h^{-1}) - 2)\| \geq 1 \quad (1.34)$$

se satisface. Este resultado es llamado Lema de Jørgensen.

Demostración: Puede consultarse en [\[MT98\]](#).

□

Lema 1.2.5. Existe una constante positiva $\epsilon(n) > 0$ tal que para cualquier punto $p \in \mathbb{H}^n$ y cualquier grupo kleiniano Γ libre de torsión, el subgrupo generado por los elementos que trasladan a x a una distancia menor o igual a $\epsilon(n)$ es elemental.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [\[Thu02\]](#).

□

Llamamos a $\epsilon(n) > 0$ la constante de Margulis. Denotaremos por $\mathcal{R}(\Gamma)$ al espacio de representaciones del grupo Γ a \mathbb{H}^n . Vamos a dotar a $\mathcal{R}(\Gamma)$ con la topología de convergencia puntual.

Definición 1.2.8. Sean X, Y espacios. Dado un punto $x \in X$ y un conjunto abierto U en Y , sea

$$S(x, U) = \{f \mid f \in Y^X \text{ y } f \in U\}. \quad (1.35)$$

Los conjuntos $S(x, U)$ son subbases para una topología en Y^X . La topología anterior es llamada topología de convergencia puntual.

La topología anterior también es conocida como topología algebraica. Denotamos por $\mathcal{DF}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(\Gamma)$ al conjunto de representaciones fieles y discretas.

Definición 1.2.9. Definimos el conmutador de dos elementos $g, h \in \Gamma$ como $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$

Proposición 1.2.4. Sea $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ un grupo kleiniano no elemental. Entonces el conjunto $\mathcal{DF}(\Gamma)$ es cerrado en $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Demostración: Vamos a demostrar que el límite de una sucesión (ρ_i) de representaciones discretas y fieles de Γ , es una representación ρ discreta y fiel.

Primero demostraremos que ρ es fiel. Sean $g, h \in \Gamma$ distintos de la identidad tales que $\rho(g) = id$ y sea $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ el conmutador.

Para cada $h \in \Gamma$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho([g, h]) &= ([\rho(g), \rho(h)]) \\ &= ([id, \rho(h)]) \\ &= (id\rho(h)id^{-1}\rho^{-1}(h)) \\ &= id. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Como $\rho_i \rightarrow \rho$ cuando $i \rightarrow \infty$ y utilizando el lema 1.2.4, si i es suficientemente grande, el grupo generado por $\rho_i(g)$ y $\rho_i([g, h])$ es elemental ya que

$$\mu(\rho_i(g), \rho_i([g, h])) = \|\text{tr}^2(\rho_i(g)) - 4\| + \|(\rho_i[g, h]) - 2\| < 1. \tag{1.37}$$

Por el lema 1.2.3 inciso (i), los elementos $\rho_i(g)$ y $\rho_i([g, h])$ tienen el mismo conjunto de puntos fijos. Aplicando el razonamiento anterior a los elementos $\rho_i(g^{-1}hg)$ y $\rho_i([g, h])$ con $\rho(g^{-1}hg) = id$, éstos también generan un grupo elemental. Lo anterior significa que los elementos $\rho_i(g)$ y $\rho_i(h)$ tienen los mismos puntos fijos, y en consecuencia generan un grupo elemental, lo cual es una contradicción a la hipótesis de $g \neq id$ tal que $\rho(g) = id$.

Ahora veamos que ρ es discreta. Sea $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ un sistema de generadores del grupo Γ , y sea K un subconjunto compacto de $Isom(\mathbb{H}^n)$ que contiene a los elementos $\rho_i(g_j)$, para toda $i = \{1, \dots, k\}$. Consideremos una vecindad $U \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ del elemento

$id \in \Gamma$, tal que el conmutador entre cualquier elemento de U y cualquier elemento de K satisface

$$d(0, uku^{-1}k^{-1}(0)) < \epsilon(n) \quad (1.38)$$

donde 0 es el origen, $u \in U$, $k \in K$ y $\epsilon(n)$ es la constante de Margulis de dimensión n . Supongamos que U es suficientemente pequeña, de tal manera que todo elemento de U traslada a 0 a una distancia menor a $\epsilon(n)$.

Si ρ es una representación no discreta, entonces existe un elemento $h \in \Gamma$ distinto de la identidad cuya imagen $\rho_i(h)$ está en U . Por el lema de Margulis y la elección de U , los elementos $\rho_i(h)$ y $\rho_i(g_j)$ tienen los mismos puntos fijos. Por lo tanto, el grupo Γ es elemental ya que es generado por $\rho_i(h)$ y $\rho_i(g_j)$.

□

Definición 1.2.10. Sea Γ un grupo kleiniano. Decimos que el cociente \mathbb{H}^3/Γ es una 3-variedad hiperbólica si es una variedad riemanniana completa de curvatura seccional constante -1 .

Definición 1.2.11. Para una variedad hiperbólica completa M y una constante positiva ϵ , definimos $M_{(0,\epsilon)}$ como el subconjunto de puntos p en M , tal que existe una geodésica cerrada no trivial que pasa por p , cuya longitud es menor que ϵ . Definimos el complemento de $M_{(0,\epsilon)}$ como $M_{[\epsilon,\infty)}$.

Llamamos a $M_{(0,\epsilon)}$ la ϵ -parte delgada de M , y a $M_{[\epsilon,\infty)}$ la ϵ -parte gruesa de M .

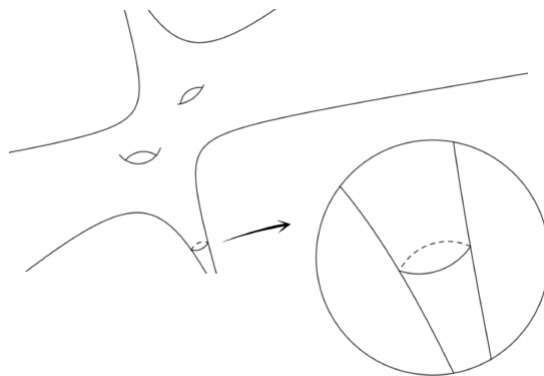


Fig. 1.3: Una 2-variedad hiperbólica con ϵ -parte delgada y ϵ -parte gruesa.

Otra propiedad del lema de Margulis es describir la topología del conjunto de puntos de \mathbb{H}^3 que son trasladados, por un elemento $g \in \Gamma$, a una distancia menor a un número

ϵ dado.

Por ejemplo, si g es un elemento hiperbólico, entonces el conjunto es un tubo T de radio constante alrededor del eje de g .

1.2.4. Dominio de Discontinuidad y Conjunto Límite

Definición 1.2.12. Sea Γ un grupo kleiniano. Definimos su conjunto límite como el conjunto de puntos de acumulación de la órbita de un punto z del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n . Lo denotamos por $\Lambda(\Gamma)$.

Utilizando este concepto y el lema 1.2.3 inciso (i) podemos clasificar a los grupos kleinianos en: *elementales* si $\Lambda(\Gamma)$ consiste de a lo más dos puntos, ya que este conjunto tiene rango 1 o 2 si y sólo si Γ es elemental. En otro caso, el inciso (iii) implica que el conjunto $\Lambda(\Gamma)$ es un cerrado sin puntos aislados y decimos que Γ es *no elemental*.

Definición 1.2.13. Sea Γ un grupo kleiniano cuyo conjunto límite es $\Lambda(\Gamma)$. Definimos al complemento del conjunto límite $\overline{\mathbb{H}^n} - \Lambda(\Gamma)$ denotado por $\Omega(\Gamma)$, como el conjunto de discontinuidad de Γ .

Si $\Omega(\Gamma) = \emptyset$ decimos que Γ es de primer tipo. En caso contrario es de segundo tipo.

Ejemplo 1.2.1. Sea $r \geq 3$. Consideremos los círculos C_1, C_2, \dots, C_r en \mathbb{C} , los cuales son del mismo radio cuyos centros son las r -ésimas raíces de la unidad, tales que C_i es tangente a C_{i+1} como se observa en la figura 1.4.

Consideremos la inversión c_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$ en el círculo C_i y denotamos por Γ al grupo generado por la composición par de las inversiones c_i , por lo que Γ no tiene puntos fijos y es un grupo finitamente generado, entonces Γ es un grupo kleiniano.

Como cada inversión deja al círculo unitario fijo, entonces el conjunto límite de Γ es el círculo unitario.

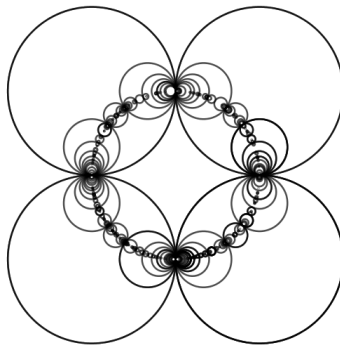


Fig. 1.4: Inversiones

Para estudiar más propiedades del conjunto límite necesitamos la definición de conjunto convexo en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .

Definición 1.2.14. Sea C un subconjunto de $\overline{\mathbb{H}^n}$. Decimos que C es un subconjunto convexo hiperbólico si cualesquiera dos puntos de C distintos entre sí, pueden ser unidos por un segmento de geodésica que está totalmente contenido en C .

Definición 1.2.15. Sea S un subconjunto de $\overline{\mathbb{H}^n}$. Definimos la envolvente conexa $C(S)$ de S como la intersección de todos los subconjuntos convexos hiperbólicos de $\overline{\mathbb{H}^n}$ que contienen a S .

Consideremos un grupo kleiniano Γ tal que su conjunto de discontinuidad $\Omega(\Gamma)$ es no vacío. Entonces podemos asociarle una variedad con frontera utilizando su envolvente conexa $C(\Gamma)$.

Consideremos la función retracción $r : \mathbb{H}^n \rightarrow C(\Gamma)$, que asocia al punto $p \in \mathbb{H}^n$, el punto $r(p) \in C(\Gamma)$, es decir; si $p \in C(\Gamma)$ entonces $r(p) = p$, el cual es el punto más cercano a p , y se extiende continuamente a la unión $\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)$. La función r está bien definida ya que $\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$ y $C(\Gamma)$ es convexo. La acción de Γ es propiamente discontinua en el espacio \mathbb{H}^n , por lo que también lo es en $C(\Gamma)$, además es por definición Γ -invariante. Como la función retracción r conmuta con la acción de Γ y es continua, entonces la acción $\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)$ es propiamente discontinua. Así, $\overline{M(\Gamma)} = (\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)) / \Gamma$ es una variedad topológica llamada el kernel de Nielsen. Esto último es demostrado en [CEM06]. En general, el kernel de Nielsen no es siempre de clase C^∞ . Consideremos la δ -vecindad cerrada

$$C_\delta(\Gamma) = \{p \in \mathbb{H}^n / \Gamma \mid d(p, C(\Gamma)) \leq \delta\} \text{ con } \delta > 0 \text{ fija.} \quad (1.39)$$

Teorema 1.2.8. Para cada $\delta > 0$, el conjunto $C_\delta(\Gamma)$ es una variedad de dimensión n cuya frontera es de clase C^1 y estrictamente convexa. Además, existe una retracción natural $r_\delta : (\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)) \rightarrow C_\delta(\Gamma)$ definida de la misma manera que r .

Demostración: Esta prueba puede encontrarse en [CEM06].

□

La variedad convexa con frontera de clase C^1 está contenida en $M(\Gamma)$ y está dotada con la métrica hiperbólica en su interior. La variedad $N_\delta = C_\delta(\Gamma) / \Gamma$ contiene todas las geodésicas cerradas de $M(\Gamma)$ debido a que la frontera de $C_\delta(\Gamma)$ es convexa.

Teorema 1.2.9. La cerradura del complemento de $N_\delta(\Gamma)$ en $M(\Gamma)$ es difeomorfa a $\partial N_\delta(\Gamma) \times [0, \infty)$. En particular, las variedades $N_\delta(\Gamma)$ y $\overline{M(\Gamma)}$ son difeomorfas.

1.2.5. Teorema de Finitud de Ahlfors

A partir de esta sección, asumiremos que el conjunto de discontinuidad $\Omega(\Gamma)$ de un grupo $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ es no vacío a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.2.16. Una superficie de Riemann S es de tipo finito si es conformemente equivalente a S menos un número finito de cúspides; esto es, a una superficie de Riemann compacta.

Si cada una de las componentes conexas de una superficie de Riemann es de tipo finito y tiene característica de Euler negativa, entonces decimos que esta superficie es hiperbólica.

En 1964, Lars Ahlfors demuestra el teorema de finitud de Ahlfors, el cual implica que si tenemos un grupo kleiniano $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ no elemental cuyo conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es distinto del vacío, entonces la frontera de $\overline{M(\Gamma)}$ es una superficie topológica de tipo finita. Si bien utilizamos este resultado para mostrar nuestro teorema principal, la demostración del teorema de finitud puede encontrarse en [Ahl64].

Lema 1.2.6. La superficie de Riemann $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ es hiperbólica si y sólo si el grupo Γ es no elemental y tiene conjunto de discontinuidad distinto del vacío.

Demostración: Por el teorema de uniformización de Riemann sabemos que una superficie de Riemann conexa es hiperbólica si es distinta de \mathbb{C} , $\overline{\mathbb{C}}$ o un toro. Si alguna componente de $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ es de este tipo, su conjunto límite tendría cardinal 1 o 2 y por el lema 1.2.3 Γ debe ser elemental.

□

El siguiente resultado es el Teorema de Finitud de Ahlfors y relaciona el cociente de un grupo kleiniano con su dominio de discontinuidad.

Teorema de Finitud de Ahlfors 1.2.1. Sea $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ un grupo kleiniano no elemental con región de discontinuidad $\Omega(\Gamma)$ distinta del vacío. Entonces $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ es una superficie de Riemann de tipo finito.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [Ahl64].

□

El siguiente lema es llamado el lema de Ahlfors. Demostraremos una versión de este lema en el capítulo 6.

Lema 1.2.7. Sea γ un elemento del grupo fundamental de una componente de $\Omega(\Gamma)/\Gamma = \partial\overline{M(\Gamma)}$ el cual representa un lazo alrededor de una cúspide de $\Omega(\Gamma)/\Gamma$. Entonces la imagen de γ en el grupo $\Gamma = \pi_1(\overline{M(\Gamma)})$ bajo el homomorfismo de inclusión es un elemento hiperbólico.

Modificando este lema para demostrar nuestro teorema objetivo, obtendremos el lema 6.0.1. Además podemos clasificar a las cúspides utilizando su kernel de Nielsen.

Proposición 1.2.5. Sea $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ un grupo kleiniano. La intersección de preimágenes de las componentes de la parte cuspidal de la superficie $M(\Gamma)$ con el kernel de Nielsen $N(\Gamma)$ es uno de los siguientes tipos:

- I. si \tilde{C} es una horobola que levanta una cúspide $C \subset M(\Gamma)$ de tipo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, entonces existe una horobola concéntrica $\tilde{C}' \subset \tilde{C}$ que está enteradamente contenida en $C(\Gamma)$.
- II. si $C \subset M(\Gamma)$ es una cúspide de tipo \mathbb{Z} , entonces es isométrica al cociente de una horobola

$$\tilde{C} = H_{z_0} = \{(x, y, z) : z > z_0\} / (x, y, z) \mapsto (x + 1, y, z), \quad (1.40)$$

entonces existe un $z'_0 \geq z_0$ tal que la intersección de $C(\Gamma)$ con $H_{z'_0}$ es igual al conjunto

$$\{(x, y, z) \mid z \geq z'_0, \quad y_0 \leq y \leq y_1\} \quad (1.41)$$

donde y_0, y_1 son constantes eventualmente infinitas.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [Mor84], sección 3.

□

En el inciso II de la proposición 1.2.5, notemos que la intersección del kernel de Nielsen $N_\delta(\Gamma)$, con una cúspide concéntrica C' de la cúspide C es conexa, y su frontera interseca a lo largo de 0, 1 o 2 anillos totalmente geodésicos a C' . Luego, si $\delta > 0$, entonces cada punta de $\partial N_\delta(\Gamma)$ está contenida en una componente de $M(\Gamma)^{(0, \epsilon]}$.

1.3. Laminaciones Geodésicas

En esta sección vamos a considerar una superficie compacta cuya característica de Euler es negativa, la cual se identifica con el interior del cociente \mathbb{H}^2/Γ , donde Γ es un grupo fuchsiano.

Definición 1.3.1. Decimos que la imagen de una geodésica en \mathbb{H}^2 bajo la función cubriente de \mathbb{H}^2 en \mathbb{H}^2/Γ es una geodésica completa de la superficie \mathbb{H}^2/Γ . Además, una geodésica de \mathbb{H}^2/Γ es un encaje, si como curva, también lo es.

Definición 1.3.2. Una laminación geodésica λ de la superficie \mathbb{H}^2/Γ es un subconjunto compacto que es una unión disjunta de geodésicas encajadas y completas. Llamamos hoja a cada geodésica.

Denotamos por $\mathcal{L}(S)$ al conjunto de laminaciones geodésicas.

La unión de estas geodésicas forma un conjunto cerrado en \mathbb{H}^2/Γ al que llamamos el *soporte de λ* . Notemos que el soporte de λ tiene medida 0 en \mathbb{H}^2/Γ : en particular es denso en ninguna parte.

También podemos hablar de *sublaminaciones* las cuales se definen a partir de la definición 1.3.2: si una laminación geodésica $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ contiene un cerrado λ' que es unión de geodésicas completas, entonces es una laminación. A λ' lo llamamos una *sublaminación de λ* .

Para verificar que una laminación geodésica es un conjunto cerrado propio y compacto debemos utilizar el concepto de fibra tangente unitaria.

Definición 1.3.3. Denotamos por $T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ a la fibra tangente unitaria del cociente \mathbb{H}^2/Γ . Tomamos su proyectivización $\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$.

Llamamos foliación geodésica a la foliación canónica \mathcal{F} que existe sobre $\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$.

Sea λ una laminación geodésica. Por cada punto de λ pasa una única geodésica contenida en λ pues cada uno de sus elementos es disjunto.

Definimos una función $\mathcal{D} : \lambda \rightarrow \mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ de la siguiente manera: sea $p \in \lambda$. Asociamos a p la dirección tangente de la hoja de λ que pasa por p . Todas las hojas de \mathcal{F} que se intersectan con $\mathcal{D}(\lambda)$ están contenidas en $\mathcal{D}(\lambda)$, es decir, el conjunto $\mathcal{D}(\lambda)$ es invariante.

Proposición 1.3.1. La función \mathcal{D} es continua.

Demostración: Sea λ una laminación geodésica. Consideremos una sucesión de puntos (p_i) que converge a un punto $p \in \lambda$ y denotamos por $\mathcal{D}(p_i)$ a las direcciones que convergen a una dirección d en p . Como λ es un conjunto cerrado, la geodésica que pasa por p en la dirección d debe estar contenida en λ . Dado que los elementos de λ son disjuntos, hay una única geodésica contenida en λ y que pasa por p en la dirección $\mathcal{D}(p)$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{D}(p_i) = \mathcal{D}(p) \tag{1.42}$$

Por lo tanto, la función \mathcal{D} es continua. □

Notemos que $\mathcal{D} : \lambda \rightarrow \mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ es inyectiva pues las hojas de λ son disjuntas, es continua por la proposición 1.3.1 con dominio compacto. Entonces $\mathcal{D}(\lambda)$ es un conjunto compacto y por lo tanto \mathcal{D} es un homeomorfismo en su imagen.

Corolario 1.3.1. Si λ es una laminación geodésica en \mathbb{H}^2/Γ , entonces λ es un conjunto cerrado propio. Más aun, el interior de λ es vacío.

Demostración: Para verificar que λ es un conjunto cerrado propio, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\lambda = \mathbb{H}^2/\Gamma$ y recordemos que \mathbb{H}^2/Γ tiene característica de Euler negativa. Por definición de laminación geodésica y por la igualdad anterior, el cociente \mathbb{H}^2/Γ es compacto. El campo de direcciones en p induce una sección continua de la fibra $\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$, pero \mathbb{H}^2/Γ es una superficie con característica de Euler negativa, es decir, el haz tangente no admite secciones no nulas. Por lo anterior, λ es un conjunto cerrado propio.

Ahora mostraremos que el interior de λ es vacío si y solamente si el interior de la preimagen $\tilde{\lambda}$ de λ en \mathbb{H}^2 es vacío. Sea k un segmento de geodésica contenido en $\tilde{\lambda}$ que es transversal a una hoja ℓ de $\tilde{\lambda}$ y sean ℓ_p las hojas de λ que pasan por el punto $p \in k$. Notemos que la unión de hojas ℓ_p forman un rectángulo R donde sus lados son hojas que pasan por los extremos del segmento k , en consecuencia dos de estas hojas deben tener al menos dos de sus puntos finales en la frontera de \mathbb{H}^2 , digamos b_1 y b_2 tales que $b_1 \neq b_2$. Por la definición de dominio fundamental para la acción de Γ sobre \mathbb{H}^2 , deben estar contenido en R : sea $\gamma \in \Gamma$ un elemento hiperbólico con un punto fijo en el intervalo (b_1, b_2) . Por tanto, $\Gamma = \pi_1(S)$, es decir, que la laminación geodésica λ cubre a toda la superficie \mathbb{H}^2/Γ . Lo cual contradice que λ es un conjunto cerrado propio. □

Lema 1.3.1. Sea ℓ una hoja no compacta de una laminación geodésica λ . Entonces los puntos de acumulación de cada semi-hoja de ℓ forman una sublaminación de λ .

Demostración: Sea ℓ^+ una semi-hoja de ℓ y sea (p_i) una sucesión infinita en ℓ^+ que tiende a un punto $p \in \lambda$. Para una constante T estrictamente positiva, los puntos que están a una distancia T del punto p son los límites de la sucesión infinita. Por lo tanto, cada punto de la hoja que pasa por p , es un punto de acumulación de ℓ^+ , así estos puntos de acumulación forman una sublaminación de λ .

□

Para mostrar algunas propiedades topológicas de las sublaminações, introducimos la noción de distancia entre subconjuntos compactos de espacios métricos.

Definición 1.3.4. Sea X un espacio métrico localmente compacto. Denotamos por $\mathcal{K}(X)$ al conjunto de todos los compactos de X dotados con la siguiente distancia

$$d_H(Y, Y') = \inf\{\epsilon > 0 \mid Y \subset N_\epsilon(Y') \text{ y } Y' \subset N_\epsilon(Y)\}, \quad (1.43)$$

donde $N_\epsilon(Y)$ denota el conjunto de puntos de X cuya distancia a Y es menor a ϵ . Decimos que $d_H(Y, Y')$ es la distancia de Hausdorff.

Intuitivamente, esta distancia mide la longitud mayor de todas las distancias de un punto en un conjunto al punto más cercano del otro conjunto. La definición de esta distancia implica que el espacio $\mathcal{K}(X)$ es localmente compacto.

Lema 1.3.2. Si X es un espacio compacto, entonces $\mathcal{K}(X)$ también lo es.

Demostración: Esto puede demostrarse utilizando el teorema de subbase de Alexander y con el teorema de Tychonoff.

□

Usando esta distancia, veremos que $\mathcal{L}(S)$ es un espacio acotado y cerrado en \mathbb{H}^2/Γ dando como resultado su compacidad.

Proposición 1.3.2. El espacio $\mathcal{L}(S)$ es compacto con la distancia d_H .

Demostración: Supongamos que \mathbb{H}^2/Γ es una superficie con volumen finito. Sea C una cúspide tal que C es igual al espacio cociente

$$\tilde{C} = \{y \geq y_0\} / \gamma(z) = z + 1 \quad (1.44)$$

Sea $\lambda \in \mathcal{L}(S)$ y sea $\tilde{\lambda}$ la preimagen de la laminación geodésica λ en \mathbb{H}^2 . Si λ si ℓ es una hoja contenida en $\tilde{\lambda}$, entonces que la intersección $\ell \cap C$ es compacta ya que λ es compacta (por definición).

Si la hoja ℓ es una geodésica vertical, y como \mathbb{H}^2/Γ es no acotado; concluimos que ℓ debe ser un círculo ortogonal a $\partial\mathbb{H}^2$. Por definición de dominio fundamental, la hoja ℓ

no interseca a $\gamma^m(\ell)$ con $m \in \mathbb{N}$, en particular a $\gamma(\ell)$, por lo tanto ℓ tiene radio menor o igual a $\frac{1}{2}$. Por lo anterior, λ es disjunta de la cúspide

$$C' = \{y \geq \sup\{y_0, \frac{1}{2}\}\} / \gamma(z) = z + 1. \quad (1.45)$$

El complemento de las cúspides en el cociente \mathbb{H}^2/Γ es un espacio compacto que contiene todas las laminaciones geodésicas de $\mathcal{L}(S)$.

Ahora debemos mostrar que $\mathcal{L}(S)$ es cerrada en $\mathcal{K}(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ y, por ende, compacto en la distancia de Hausdorff.

Sea (λ_i) una sucesión de laminaciones geodésicas que convergen a un conjunto compacto λ en $\mathcal{K}(\mathbb{H}^2/\Gamma)$. Debemos mostrar que λ es una laminación geodésica. El espacio $\mathcal{K}(\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma))$ es localmente compacto, pues $\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ es compacto y por el lema 1.3.2. En efecto, utilizando la continuidad de \mathcal{D} , tenemos que los conjuntos cerrados $\mathcal{D}(\lambda_i)$ convergen a un conjunto compacto K en $\mathcal{K}(\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma))$.

Consideremos la función proyección $\pi : \mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ y recordemos que \mathbb{H}^2/Γ tiene curvatura seccional negativa. En consecuencia π no incrementa la distancia de las geodésicas, por lo que $\pi(K) = \lambda$.

Ahora debemos ver que el conjunto λ es una laminación geodésica. Para esto basta verificar que $\pi|_K$ es inyectiva. Si no lo fuera, existirían dos geodésicas de λ que pasan por un mismo punto y que forman un ángulo no nulo en dicho punto; por la definición de topología de Hausdorff sobre $\mathcal{K}(\mathbb{P}T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma))$, existen dos geodésicas de λ_i con esta propiedad para i suficientemente grande. Pero esto contradice que los cerrados λ_i son laminaciones geodésicas. □

Denotamos por $M(S)$ al espacio de puntos distintos de $\overline{\mathbb{R}}$ y denotamos por b a la función que asocia a cada geodésica de \mathbb{H}^2 a sus dos puntos distintos.

Lema 1.3.3. Sea $\lambda \in \mathcal{L}(S)$ una laminación geodésica. Entonces el cerrado $b(\lambda)$ es totalmente discontinuo.

Demostración: Sea $C(p)$ la componente conexa de un punto $p \in b(\lambda)$, sea $\tilde{C}(p)$ la preimagen de $C(p)$ en el cubriente de $M(S)$ igual a $\overleftarrow{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} - \Delta$. Si $C(p) = p$, entonces la proyección de $\tilde{C}(p)$ sobre uno de los factores $\overline{\mathbb{R}}$ contiene un intervalo no trivial $I \subset \overline{\mathbb{R}}$. Sea $\gamma \in \Gamma$ un elemento representado por una geodésica de \mathbb{H}^2/Γ que se autointerseca de manera transversal y que tiene un punto fijo $q \in I$, así que la hoja de $C(p)$ cuya punta

es q no puede encajarse en \mathbb{H}^2/Γ bajo la proyección cubriente. Pero esto contradice que λ es una laminación geodésica .

Por lo tanto, la componente conexa de cada punto $p \in b(\lambda)$ se reduce a p .

□

A continuación, estudiaremos la geometría del complemento de una laminación geodésica .

Proposición 1.3.3. Sea λ una laminación geodésica. El complemento de λ en el espacio \mathbb{H}^2/Γ , tiene un número finito de componentes conexos. El complemento de cada uno de estas componentes, para la distancia inducida por la métrica de Riemann, es una superficie completa con frontera geodésica y de volumen finito.

Demostración: Sea U una componente que es complemento de λ y sea \tilde{U} una componente conexa de la preimagen de U en \mathbb{H}^2 . Veremos que \tilde{U} es un espacio convexo.

Sean x y y dos puntos de \tilde{U} y consideremos un segmento de geodésica que los une: si este segmento está totalmente contenido en \tilde{U} , terminamos. En caso contrario, este segmento intersecta transversalmente a una geodésica ℓ de $\tilde{\lambda}$; así x y y están en componentes conexas de $\mathbb{H}^2 - \ell$ y por continuidad, x y y están en $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$. Por tanto, \tilde{U} es convexo, en particular es simplemente conexo.

Ahora, consideremos un punto p en la frontera de \tilde{U} en \mathbb{H}^2 y sea ℓ una hoja de $\tilde{\lambda}$ que pasa por p y $o \in \tilde{U}$. El segmento geodésico op que une los puntos o y p intersecta a $\tilde{\lambda}$ en p . Para todo punto $q \in \ell$, el segmento $[oq]$ está contenido en \tilde{U} ; si $x \in [op]$ y $y \in [oq]$, el segmento xy está en \tilde{U} ; más aun, xy está contenido en la cerradura de \tilde{U} denotada por \bar{U} , en consecuencia ℓ está contenida en \bar{U} .

Por lo tanto, \bar{U} es una superficie con frontera geodésica, convexa y completa.

Sea Γ_U el estabilizador de \tilde{U} en Γ . El cociente \bar{U}/Γ_U es una superficie completa con frontera geodésica e isométrica al conjunto $C(U)$ de U , para la distancia asociada a la métrica riemanniana.

Como \mathbb{H}^2/Γ tiene volumen finito, entonces U también. Las geodésicas en la frontera de \tilde{U} forman un conjunto numerable pues estas geodésicas definen intervalos con interiores disjuntos en $\bar{\mathbb{R}}$. Por lo anterior, el volumen de $C(U)$ es igual al volumen de U .

La superficie $D(U)$ es una superficie completa, de volumen finito y de curvatura constante igual a -1 . Aplicado el teorema de Gauss-Bonnet, el volumen de $C(U)$ es

mayor a 2π . Esto implica que el volumen de $C(U)$ está acotado inferiormente por π . Entonces el complemento de λ en \mathbb{H}^2/Γ tiene un número finito de componentes conexas.

□

En el capítulo 4 utilizamos el concepto de hoja espiral. Presentaremos este concepto para mostrar que las hojas de una laminación geodésica son densas en una laminación geodésica λ .

Definición 1.3.5. Una geodésica de $\tilde{\lambda}$ en la cerradura de una componente conexa del complemento de $\tilde{\lambda}$ es llamada aislada por un lado. La imagen de una geodésica aislada por un lado en \mathbb{H}^2/Γ también es llamada aislada por un lado.

Corolario 1.3.2. Sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica. Entonces λ solamente contiene un número finito de hojas aisladas por un lado y su unión es densa en λ .

Demostración: Cada componente de la frontera de $C(U)$ corresponde a una geodésica de λ que está aislada por un lado. Es suficiente demostrar que $C(U)$ tiene un número finito de componentes en la frontera.

Cada geodésica no compacta $\ell \subset \partial C(U)$ tiene uno de sus lados extremos contenido en el extremo de $D(U)$ que se estabiliza mediante una involución, es decir, una isometría que revierta la orientación. Los extremos de $D(U)$ son cúspides ya que $D(U)$ tiene volumen finito. Consideremos una cúspide $C \subset D(U)$ que intersecta a ℓ y que es isométrica al cociente de un semiplano $\{y \geq y_0\}$ por la traslación $z \rightarrow z + 1$. La isometría del doble $D(U)$ a \mathbb{H}^2 se levanta a una simetría con respecto al eje y . Esto implica que la involución en $D(U)$ fija solamente dos geodésicas propiamente encajadas en la cúspide C . Entonces cada extremo de $D(U)$ contiene a lo más dos geodésicas no compactas de la frontera de $C(U)$. Puesto que el número de extremos de $D(U)$ es finito, el número de componentes no compactas en la frontera de $C(U)$ también es finito.

Los componentes compactos de la frontera de $C(U)$ nos dotan de geodésicas cerradas, disjuntas y sin cúspides en $D(U)$, por lo que, las geodésicas forman un conjunto finito pues $D(U)$ tiene volumen finito.

Ahora consideremos un arco geodésico k transversal a λ y que contiene a p . La intersección $k \cap \lambda$ es un cerrado con interior vacío de k . Entonces, existe un punto $q \in \lambda$, arbitrariamente cercano a p , el cual es extremo de un intervalo $\kappa \subset k$ del complemento de λ .

El levantamiento del intervalo κ en \mathbb{H}^2 es un arco cuyo interior está contenido en una componente del complemento de $\tilde{\lambda}$ y el extremo q de este intervalo pertenece a

una hoja de $\tilde{\lambda}$ aislada por un lado. Por lo tanto, el punto q pertenece a una hoja de λ aislada por un lado.

□

Definición 1.3.6. Una hoja ℓ' de una laminación geodésica λ es espiral alrededor de la geodésica cerrada ℓ en el cubriente universal \mathbb{H}^2 , si un levantamiento $\tilde{\ell}'$ de ℓ' tiene un extremo en común con un levantamiento $\tilde{\ell}$ de ℓ .

Proposición 1.3.4. Sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ y sea $\ell \subset \lambda$ una geodésica cerrada. Entonces toda hoja de λ suficientemente cercana a ℓ es una espiral en ℓ .

Demostración: Si ℓ' es una hoja cercana a ℓ , entonces uno de sus puntos extremos se levanta por medio de $\tilde{\ell}'$ que es una hoja cercana a un levantamiento $\tilde{\ell}$ de ℓ . Supongamos que existe una sucesión de hojas ℓ_i en λ , tal que la sucesión de levantamientos $\tilde{\ell}_i$ converge a $\tilde{\lambda}$ en \mathbb{H}^2 ; donde cada hoja $\tilde{\lambda}_i$ de $\tilde{\lambda}$ tiene puntos extremos distintos a a y b de $\tilde{\ell}$.

Los dos puntos finales de $\tilde{\ell}_i$ en $\partial\mathbb{H}^2$ tienden a a y b . En particular, la distancia entre las proyecciones ortogonales de dos puntos finales de $\tilde{\ell}_i$ en $\tilde{\ell}$ tiende a infinito cuando i es suficientemente grande.

Las geodésicas $\tilde{\ell}_i$ y $\gamma(\tilde{\ell}_i)$ se intersectan cuando la distancia entre las proyecciones ortogonales es mayor a la distancia de traslación de γ en $\tilde{\ell}$. Pero esto contradice que la hoja ℓ_i es una curva encajada de \mathbb{H}^2/Γ .

□

Definición 1.3.7. Sea λ una laminación geodésica contenida en \mathbb{H}^2/Γ . Asignamos a cada intervalo κ encajado en S transversalmente a λ una medida de Borel λ_κ positiva, de masa total finita y que cumple:

- I. El soporte de λ_κ es igual a $\lambda \cap \kappa$.
- II. Si κ y κ' son dos arcos homotópicos a través de un arco transversal, por una homotopía tal que los extremos están en la misma hoja de λ , o en el mismo componente del complemento de λ . Entonces $\lambda_\kappa(\kappa) = \lambda_{\kappa'}(\kappa')$.

A continuación analizaremos un ejemplo de una laminación geodésica medible, pero antes daremos la definición de medida de Dirac para un conjunto.

Definición 1.3.8. Sea X un espacio medible. Para cada conjunto medible $A \subseteq X$, y $x \in X$, definimos a la medida de Dirac δ_x en x como

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \quad (1.46)$$

Intuitivamente, esta medida asigna un tamaño a un conjunto basándonos si contiene un elemento o no. En nuestro caso, sí hay intersección de dicho conjunto con una geodésica dada.

Ejemplo 1.3.1. Sea $\alpha \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una geodésica simple cerrada donde la medida transversal asignada a cada arco transversal a α es la medida de Dirac. Sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica la cual es unión de geodésicas cerradas. Damos un número positivo para cada componente de λ que determina una laminación geodésica medible con soporte λ . Es suficiente definir la medida en un arco κ transversal a λ como la suma de las medidas de Dirac en los puntos de intersección con λ con peso en cada punto el número positivo asociada a la componente.

Llamamos multicurva a una laminación geodésica medible definida como la anterior. El soporte de una multicurva es la unión de hojas compactas.

Denotamos por $\mathcal{ML}(S)$ al conjunto de laminaciones geodésicas medibles en la superficie $S \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$ y dotamos a este conjunto con la topología vaga (para más detalles, ver [Die70]).

Al asignar una medida transversal a cada arco de una laminación geodésica, tenemos que \mathbb{R}_+ actúa en $\mathcal{ML}(S)$. Definimos al espacio de laminaciones geodésicas proyectivas como el cociente

$$\mathcal{PML}(S) = \mathcal{ML}(S) / \mathbb{R}_+. \quad (1.47)$$

Lo dotamos con la topología cociente de la topología vaga.

Lema 1.3.4. Cada sucesión en el espacio proyectivo de laminaciones geodésicas medibles $\mathcal{PML}(S)$ contiene una subsucesión convergente.

Demostración: Sea (λ_i) una sucesión en $\mathcal{ML}(S)$. Por la proposición 1.3.2, podemos suponer que los soportes de las laminaciones medibles λ_i convergen a $\lambda \in \mathcal{L}(S)$ en la topología de Hausdorff.

Más aun, las laminaciones geodésicas de $\mathcal{ML}(S)$ están contenidas en el mismo compacto de \mathbb{H}^2/Γ . Entonces existe un conjunto finito de intervalos cerrados disjuntos

$(I_1, J_1), \dots, (I_k, J_k)$ tales que las hojas de las laminaciones geodésicas tienen un levantamiento a \mathbb{H}^2 cuyos extremos están en el interior de algún rectángulo $I_j \times J_j$. Sea

$$\frac{1}{\alpha} = \sum_j \lambda_i(I_j \times J_j). \quad (1.48)$$

Posiblemente después de extraer una subsucesión, las medidas $\alpha_i \lambda_i$ convergen, en la topología vaga, a algún $I_j \times J_j$ e inducen medidas de masa total menor a 1 en estos intervalos. Por lo tanto, la medida $\alpha_i \lambda_i$ converge a una medida Γ -invariante en el espacio $\mathcal{ML}(S)$.

Luego, por el corolario 1.3.1, el soporte de la medida $\bar{\lambda}$ está contenido en $b(\lambda) = \lim b(\lambda_i)$. El soporte de $\bar{\lambda}$ es una laminación geodésica. Por lo tanto, el límite de las laminaciones geodésicas medibles $\alpha_i \lambda_i$ es una laminación geodésica medible.

Así, hemos extraído una subsucesión convergente de la sucesión (λ_i) . □

Corolario 1.3.3. Sea (λ_i) una sucesión de laminaciones geodésicas medibles que converge a una laminación geodésica medible en $\mathcal{PM}\mathcal{L}(S)$. Entonces el soporte de λ está contenido en la cerradura de los soportes de las laminaciones λ_i en la topología de Hausdorff.

Demostración: Este resultado se desprende de la demostración del lema 1.3.4. □

Sea \mathcal{C} el conjunto de clases de conjugación de elementos hiperbólicos de Γ , sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica medible y sea γ una geodésica cerrada en \mathbb{H}^2/Γ , la cual es representante de la clase de conjugación $[\bar{\gamma}] \in \mathcal{C}$. Denotamos por $\tilde{\gamma}$ al levantamiento de γ que deja invariante a $\bar{\gamma}$. Un intervalo $[a\bar{\gamma}(a))$ es un dominio fundamental para la acción de $\bar{\gamma}$ en $\tilde{\gamma}$.

Definición 1.3.9. Sea $\tilde{\gamma}$ una geodésica que no es una hoja de $\tilde{\lambda}$ y no es disjunta de $\tilde{\lambda}$, entonces intersecciona transversalmente a $\tilde{\lambda}$. La masa total de la medida que $\tilde{\lambda}$ deposita en el segmento $[a\bar{\gamma}(a))$ es llamado el número de intersección de γ y λ , denotado $i(\gamma, \lambda)$.

Una manera alternativa de definir el número de intersección utilizando intervalos aprovechando la medida.

Sea $I \subset \bar{\mathbb{R}}$ un intervalo con puntos fijos γ^+ y γ^- de $\bar{\gamma}$ y sea $J = [z, \bar{\gamma}(z)) \subset \bar{\mathbb{R}}$ que no intersecciona a I . Sea $\lambda(I \times J)$ la medida del producto en $M(S)$ asociada a λ . Dado que λ

es Γ -equivariante, el número de intersección no depende de la elección de I y del punto z .

Lema 1.3.5. Utilizando la notación anterior, tenemos

$$i(\gamma, \lambda) = \lambda(I \times J) \quad (1.49)$$

Demostración: Notemos que $\tilde{\gamma}$ es una unión de intervalos de la forma $[\bar{\gamma}^p(a)\bar{\gamma}^{p+1}(a)]$. Por definición, $i(\lambda, \gamma)$ es la masa del conjunto F de las geodésicas ℓ de $\tilde{\lambda}$ que interseca transversalmente a $[a\bar{\gamma}a]$.

Si dividimos este conjunto de acuerdo a $\bar{\gamma}^p(J)$ que contiene el extremo de ℓ que no está en I . Entonces

$$i(\lambda, \gamma) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda((I \times \bar{\gamma}^p(J)) \cap F). \quad (1.50)$$

La masa de $(I \times \bar{\gamma}^p(J)) \cap F$ es igual a la masa de las geodésicas $\tilde{\lambda}$ que interseca transversalmente a $\bar{\gamma}^{-p}(a)\bar{\gamma}^{-p+1}(a)$ y tiene un extremo en J ya que la medida λ es Γ -invariante.

Por lo anterior, tenemos

$$i(\lambda, \gamma) = \lambda(I \times J). \quad (1.51)$$

□

A continuación mostramos algunas características del soporte de una laminación geodésica medible. Veremos que una laminación geodésica es un conjunto minimal excepcional.

Definición 1.3.10. Una laminación geodésica λ es un conjunto minimal excepcional si cada una de sus hojas es no compacta y si toda media hoja es densa en λ .

Esta definición implica que cada semi-hoja no puede ser propia.

Lema 1.3.6. Sea λ una laminación geodésica medible. Toda hoja compacta del soporte de λ está aislada en λ .

Demostración: Sea γ una hoja compacta en el soporte de λ y denotamos por $\tilde{\lambda}$ a la preimagen de λ en \mathbb{H}^2 . Supongamos que γ no es aislada; esto es, existe una geodésica ℓ en $\tilde{\lambda}$ la cual tiene un extremo en común con una geodésica $\tilde{\gamma}$ que es un levantamiento de γ .

Supongamos que unos de los extremos de ℓ es el punto fijo atractor γ^+ del elemento $\bar{\gamma}$ el cual deja invariante a $\tilde{\gamma}$. Sea $\ell^- \neq \gamma^-$ el otro extremo. El conjunto compacto $\gamma^+ \times [\ell^-, \gamma^-]$ está contenido en alguna traslación bajo $\bar{\gamma}$. Pero esto no es posible ya que la medida λ es invariante bajo $\bar{\gamma}$, es finita en compactos y su soporte está en $b(\tilde{\lambda})$.

□

Lema 1.3.7. Sea $\lambda' \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica abierta en λ . Entonces λ' es un conjunto minimal excepcional.

Demostración: Denotamos por U a una componente del complemento de λ' . La cerradura $C(U)$ de U es una superficie con frontera geodésica de área finita (proposición 1.3.3). Cada punta de esta superficie es una cúspide de \mathbb{H}^2/Γ o una cúspide isométrica a la banda infinita $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, y_0 \leq y\}$.

Supongamos que λ' no es abierta en λ , esto es, existe una hoja $\ell' \subset \lambda$ tal que ℓ' está cerca de λ' pero es disjunta. Entonces ℓ' está contenida en alguna $U \subset C(U)$ del complemento de λ' y es cercana a una componente de $\partial C(U)$. Como cada componente de la frontera es no compacta, cada extremo de la hoja ℓ' se “inserta” en una punta de $C(U)$ que es isométrica a una banda.

Entonces una semi-hoja de ℓ' es asintótica a una semi-geodésica $\ell'' \subset \lambda'$ en la frontera de una banda de $C(U)$. Si k es un arco geodésica suficientemente lejos de esta punta y une los dos lados de esta banda, entonces el arco k es transversa a λ y su medida es positiva.

Sea k' un arco transversal a λ que cruza transversalmente una cantidad no numerable de veces a la semi-geodésica ℓ'' . La intersección $k' \cap U$ contiene un cantidad no numerable de intervalos disjuntos cuya medida es igual a la medida del arco k . Pero ésto implica que la medida de k' es infinita, lo cual es imposible.

□

Ahora aplicamos los lemas previos 1.3.6 y 1.3.7.

Proposición 1.3.5. Si λ es una laminación geodésica medible, entonces el soporte de λ es una unión disjunta de sublaminaciones de geodésicas cerradas o conjuntos minimales excepcionales.

Demostración: Asumimos la proposición 1.3.6. Consideremos una hoja no compacta ℓ de λ . Sabemos que los puntos de acumulación de una semi-hoja de ℓ forman una

sublaminación λ' de λ (ver lema 1.3.1). Luego la laminación λ' es abierta en λ y es un conjunto minimal excepcional.

La cantidad finita de componentes de λ implica que la cantidad de hojas de λ que son aisladas por un lado es finita. Aplicando el corolario 1.3.2, obtenemos la proposición 1.3.5.

□

Enseguida presentamos un resultado que se utilizará en el capítulo 4.

Definición 1.3.11. Una semi-geodésica se dice que es espiral hacia una componente minimal $\bar{\lambda}'$ de una laminación geodésica medible $\bar{\lambda}$ si cada uno de sus levantamientos en \mathbb{H}^2 tienen un extremo en común con una geodésica en la preimagen de $\bar{\lambda}'$.

Proposición 1.3.6. Sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica que es la unión del soporte de una laminación geodésica medible $\bar{\lambda}$ y un número finito de geodésicas no compactas ℓ_i . Entonces cada semi-geodésica de ℓ_i es espiral en una componente minimal de $\bar{\lambda}$.

Demostración: Sabemos que cada geodésica ℓ_i está contenida en una componente U del complemento de $\bar{\lambda}$ en \mathbb{H}^2/Γ . Si una semi-geodésica de ℓ_i no está totalmente contenida en un conjunto compacto $K \subset U$, entonces está contenida en una punta de tipo banda de $C(U)$ o está contenida en un vecindad de una hoja compacta de $\bar{\lambda} \cap \partial C(U)$. Si estuviera contenida en una punta tipo banda, la semi-geodésica es asintótica a un conjunto minimal excepcional de $\bar{\lambda}$, si estuviera contenida en el compacto K , la semi-geodésica es asintótica a una geodésica cerrada de $\bar{\lambda}$.

Mostraremos por reducción al absurdo que una semi-geodésica de ℓ_i no puede estar totalmente contenida en un compacto del complemento de $\bar{\lambda}$. Si este fuera el caso, por el lema 1.3.1, los puntos de acumulación forman una sublaminación μ de λ ; μ es disjunta de $\bar{\lambda}$.

Entonces la laminación μ es la unión finita de hojas ℓ_j y, por lo tanto, contiene una sublaminación μ_0 que tiene la propiedad de cada una de sus hojas son densas en μ_0 .

Consideremos un arco k transversal a μ_0 . Cada hoja que pasa por el punto $p \in k \cap \mu_0$ pasa arbitrariamente cerca de U . Ya que las geodésicas de μ_0 son no compactas, concluimos que $k \cap \mu_0$ es un cerrado $F \subset k$ sin puntos aislados. Así, F es no numerable. Pero esto contradice que μ_0 la unión finita de geodésicas.

□

Definición 1.3.12. Una laminación geodésica medible $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ es aracional, si cada una de las componentes de su complemento es simplemente conexa y homeomorfa a una vecindad anular de una cúspide de \mathbb{H}^2/Γ .

De la definición de laminación geodésica medible aracional se desprende que el número de intersección es distinto de cero.

Lema 1.3.8. El soporte de una laminación geodésica medible aracional es un conjunto minimal excepcional.

Demostración: Por el lema 1.3.6, cada hoja compacta de una laminación geodésica medible está en la frontera de una componente del complemento de λ . Entonces en la descomposición de una laminación aracional λ en componentes minimales, no puede haber hojas compactas. Si esta descomposición tiene al menos dos componentes, uno de los componentes conexos del complemento de λ tiene a lo más dos puntas distintas, cada uno de los cuales está contenido en una vecindad de uno de sus componentes minimales. Pero esto contradice la definición de laminación geodésica medible. Entonces su soporte es un conjunto minimal excepcional.

□

Lema 1.3.9. Sea λ una laminación geodésica que contiene al soporte de una laminación geodésica aracional $\bar{\lambda}$. Entonces $\lambda - \bar{\lambda}$ es un conjunto cerrado compuesto por un número finito de hojas, donde todas son no compactas.

Demostración: Sea U una componente simplemente conexa del complemento del soporte de $\bar{\lambda}$. Entonces al completar $C(U)$, ésta es isométrica al envolvente conexo de un número finito de puntos en $\bar{\mathbb{R}}$. Una hoja de λ contenida en $C(U)$ es no compacta y une dos extremos distintos de $C(U)$ pues el número de hojas de este tipo es finito.

Sea U una componente del complemento del soporte de $\bar{\lambda}$ que es una vecindad anular de una cúspide. Su complemento $C(U)$ es homeomorfo a un anillo cuyo grupo fundamental está generado por un elemento parabólico. Esto implica que no pueden existir geodésicas compactas en dicho anillo. Los dos extremos de una hoja de λ contenida en U están contenidas en las puntas de $C(U)$ que son tipo banda. Por el corolario 1.3.2, los extremos de este tipo son finitos. Puesto que las hojas de $\lambda - \bar{\lambda}$ están encajadas, entonces su unión es finita.

□

Definición 1.3.13. Sean μ y λ dos laminaciones geodésicas medibles. Decimos que μ interseca a λ si cada hoja del soporte de μ interseca transversalmente a λ .

Proposición 1.3.7. Si λ es una laminación geodésica medible aracional, entonces cada laminación geodésica medible μ , cuyo soporte sea distinto al soporte de λ , interseca a λ .

Demostración: Si una hoja ℓ de μ es disjunta de λ , esta hoja está contenida en una componente del complemento de λ . Por el lema 1.3.9, existe una cantidad finita de geodésicas encajadas y disjuntas en cada componente del complemento de λ y estas geodésicas deben ser no compactas. Así, ℓ es una hoja aislada en μ . Pero esto es imposible para una hoja no compacta de una laminación geodésica medible (ver proposición 1.3.5).

Por el lema 1.3.8, cada hoja de λ es densa en λ . Si una hoja de μ está contenida en el soporte de λ , entonces el soporte de λ está contenida en el soporte de μ de aquí que los soportes deben ser iguales. Por lo tanto, cada hoja de μ interseca de manera transversal a λ .

□

2. ESPACIO DE TEICHMÜLLER

2.1. Homeomorfismo Cuasiconforme

Sea \mathbb{C} el plano complejo con la base estándar $\{1, i\}$ y sean $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$. Así, cualquier función lineal $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ puede ser expresada en coordenadas (z, \bar{z}) de la siguiente manera

$$L(z) = az + b\bar{z}, \quad a, b, z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Como

$$L(1) = a + b, \quad L(i) = ai - b. \quad (2.2)$$

De esta forma, el cuadrado unitario en \mathbb{C} generado por 1 e i es transformado al paralelogramo generado por $a + b$ y $ai - bi$.

Definimos el coeficiente de Beltrami como

$$\mu(L) = \left| \frac{b}{a} \right| e^{i2\pi\theta}, \quad \text{donde } \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Notemos que $\mu(L)$ está en el disco unitario \mathbb{D} siempre que la función L preserve la orientación.

Denotamos a la imagen inversa del círculo unitario como $E(L)$. Si $\mu(L) = 0$, entonces L es un círculo y $E(L)$ es una elipse.

Vamos a calcular el eje mayor y menor de $E(L)$. Notemos que $e^{i\theta}$ y $e^{i(\theta+\pi/2)}$ son eigenvectores con eigenvalores $|a|(1 - |\mu|)$ y $|a|(1 + |\mu|)$, respectivamente. Calcularemos la ecuación de la elipse como una sección de una forma cuadrática.

Haciendo la multiplicación de las matrices de eigenvalores y eigenvectores, obtenemos

$$\frac{(e^{i\theta}x)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{|a|(1+|\mu|)}}\right)^2} + \frac{(e^{i(\theta+\pi/2)}x)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{|a|(1-|\mu|)}}\right)^2} = 1 \quad (2.4)$$

Definimos la dilatación $K(L)$ de L como el cociente del eje mayor entre el eje menor de

$E(L)$; esto es,

$$K(L) = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|}. \quad (2.5)$$

Esta dilatación determina la forma de la elipse $E(L)$ y $\mu(L)$ determina la posición de sus ejes.

Ahora, dada una función L es fácil ver que

$$L^{-1}(w) = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2}(\bar{a}w - b\bar{w}), \quad (2.6)$$

satisface

- I. $\mu(L^{-1}) = -\mu(L)e^{i(2\pi \arg a)}$,
- II. $|\mu(L^{-1})| = |\mu(L)|$,
- III. $K(L^{-1}) = K(L)$,
- IV. $K(L \circ L') \leq K(L)K(L')$.

Antes de formalizar el concepto de homeomorfismo cuasiconforme, introducimos el concepto de distribución. Consideremos una función $\phi : U \rightarrow V$ con U, V subconjuntos de \mathbb{C} .

Decimos que una *función test* es una función de clase C^∞ con soporte compacto en U . Sea $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ el espacio de todas las funciones test con la topología usual. Así, $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ es un espacio vectorial topológico. Las funcionales lineales continuas $L : \mathcal{C}_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ son llamadas *distribuciones*.

Definición 2.1.1. Sean L una distribución y h una función test, definimos su derivada de la siguiente manera

$$(\partial L)(h) = -L(\partial_z h) \text{ y } (\bar{\partial} L)(h) = -L(\partial_{\bar{z}} h). \quad (2.7)$$

Sea L_{loc}^1 el espacio de funciones localmente integrables. Consideremos las funciones $\phi_1, \phi_2 \in L_{loc}^1(U)$ tales que

$$\partial L_\phi = L_{\phi_1} \text{ y } \bar{\partial} L_\phi = L_{\phi_2}, \quad (2.8)$$

entonces las funciones $\phi_1 = \partial\phi$ y $\phi_2 = \bar{\partial}\phi$ son llamadas las derivadas de ϕ en el sentido de distribuciones en $L_{loc}^1(U)$.

Un ejemplo de función localmente integrable que define una distribución es la siguiente: Si $\phi \in L^1_{loc}(U)$ y h es una función test, entonces ϕ define una distribución

$$L_\phi(h) = \int_U \phi \cdot h dm \quad (2.9)$$

donde m es la medida de Lebesgue. Notemos que, por definición, si h es una función test, entonces $\partial_z h$ y $\partial_{\bar{z}} h$ son también funciones test.

Ya estamos listos para dar la definición de homeomorfismo cuasiconforme.

Definición 2.1.2. Sea $\phi : U \rightarrow V$ un homeomorfismo que preserva la orientación entre dos subconjuntos de \mathbb{C} . Decimos que ϕ es cuasiconforme si satisface las siguientes condiciones

I. Las derivadas de ϕ , con respecto a x y y en el sentido de distribución, están en el espacio L^2_{loc} .

II. Si tomamos

$$\partial\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \quad y \quad \bar{\partial}\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

entonces existe una función $\mu \in L^\infty(U, \mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_\infty < 1$ y para casi cualquier punto $z \in U$

$$\bar{\partial}\phi(z) = \mu(z) \partial\phi(z) \quad (2.11)$$

Además diremos que ϕ es K -cuasiconforme si la norma de la función μ en $L^\infty(U)$ satisface

$$\frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty} \leq K. \quad (2.12)$$

Intuitivamente, ϕ manda círculos a elipses con excentricidad acotada. Llamamos a μ el coeficiente de Beltrami de ϕ y a

$$\frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty} \quad (2.13)$$

la excentricidad de ϕ .

Un ejemplo de homeomorfismo cuasiconforme es $\phi(x + iy) = Kx + iy$ con $K > 1$. El siguiente teorema es llamado Teorema de Ahlfors-Bers. Fue demostrado en el año 1966.

Teorema 2.1.1. Sea μ una función de $L^\infty(\bar{\mathbb{C}})$ con norma menor a 1. Entonces existe un único homeomorfismo cuasiconforme $\phi = \phi_\mu$ de $\bar{\mathbb{C}}$ que cumple con lo siguiente:

- I. $\frac{\bar{\partial}\phi}{\partial\bar{\phi}}(z) = \mu(z)$ para casi todo punto z ,
- II. ϕ fija a los puntos $0, 1$ e ∞ .

Más aun, la función $\mu \mapsto \phi_\mu$ es continua siempre que el conjunto de homeomorfismos de $\bar{\mathbb{C}}$ está dotado con la topología de la convergencia uniforme.

Demostración: Esta demostración puede consultarse en [Ahl87].

□

2.2. Espacios de Teichmüller y Grupos Cuasifuchsianos

Sea S una superficie compacta y orientable con característica de Euler estrictamente negativa e identificamos su interior con \mathbb{H}^2/Γ donde $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es un grupo discreto y sin torsión que actúa en \mathbb{H}^2 . Usando la proposición 1.2.5 y el lema de Margulis, podemos ver que cada punta en S está contenida en un cociente de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid y \geq y_0\} / (x, y) \mapsto (x+1, y). \quad (2.14)$$

Más aun, el volumen del cociente \mathbb{H}^2/Γ es finito. En efecto,

$$\int_0^1 dx \int_{y_0}^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y_0}. \quad (2.15)$$

2.2.1. Definición de Grupos Fuchsianos

Definición 2.2.1. Un grupo fuchsiano es un subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Notemos que un grupo es fuchsiano si y sólo si actúa de manera propiamente discontinua. La demostración puede consultarse en [Kat92], teorema 2.2.6.

Ejemplo 2.2.1. El siguiente ejemplo de grupo fuchsiano es llamado el *grupo modular*. Se define de la siguiente manera

$$\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}. \quad (2.16)$$

2.2.2. Normalización del grupo Γ

Durante esta sección supondremos que el grupo Γ está normalizado; esto es, los puntos 0 , 1 e ∞ están fijos por los elementos de Γ . De manera más precisa, para dos elementos hiperbólicos g y h que generan un grupo libre de dos generadores, supongamos que

- I. el elemento g tiene como punto fijo atractor a 0 ,
- II. gh tiene a ∞ como punto fijo atractor,
- III. h tiene como punto fijo repulsor a 1 .

2.2.3. Espacio de Teichmüller

Definición 2.2.2. Sea ρ un representación de $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ y sea $\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ un homeomorfismo cuasiconforme normalizado. Decimos que la pareja (ρ, ϕ) es llamada una deformación fuchsiana de Γ en $PSL(2, \mathbb{R})$ si es tal que

- I. Para toda $\gamma \in \Gamma$ tenemos

$$\rho(\gamma) = \phi \circ \gamma \circ \phi^{-1} \quad (2.17)$$

- II. El homeomorfismo cuasiconforme ϕ deja invariante a \mathbb{R} .

Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de deformaciones fuchsianas de Γ de la siguiente manera:

$$(\rho, \phi) \simeq (\rho', \phi') \text{ si y sólo si } \rho = \rho'. \quad (2.18)$$

Al espacio cociente de deformaciones fuchsianas con la relación de equivalencia (2.18). Se le denomina espacio de Teichmüller del grupo Γ y se denota como $\mathcal{T}(\Gamma)$. Más aún, este espacio es un espacio métrico, para mostrar ésto definimos una distancia en $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Definición 2.2.3. Sean $\sigma_1 = (\rho_1, \phi_1)$ y $\sigma_2 = (\rho_2, \phi_2)$ dos elementos de un espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$. Definimos la distancia entre ellos de la siguiente manera

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2} \inf \log K(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}), \quad (2.19)$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas los representantes de σ_1 , y σ_2 . Denotamos por $K(\psi)$ a la excentricidad del homeomorfismo cuasiconforme ψ .

Verificamos que la función d es en efecto una métrica.

- I. $d(\sigma_1, \sigma_2) \geq 0$. Es consecuencia de que $\log K(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$ siempre es igual a cero o mayor. Por lo que d es no negativa.
- II. Debemos ver que $d(\sigma_1, \sigma_2) = d(\sigma_2, \sigma_1)$, lo cual se reduce a mostrar que $K(\psi) = K(\psi^{-1})$ lo cual se probó en la primera sección. Por lo que d es simétrica.
- III. Sea $d(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2} \inf \log K(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = 0$: Entonces existe una sucesión $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})^n = 1 \quad (2.20)$$

Concluimos que $\sigma_1 = \sigma_2$. Inversamente, sea $\sigma_1 = \sigma_2$. Entonces

$$\begin{aligned} (\rho_1, \phi_1) &= (\rho_2, \phi_2) \\ &= \frac{1}{2} \inf \log K(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \inf \log K(\phi_2 \circ \phi_2^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \inf \log K(id) \\ &= K(id). \end{aligned}$$

Como la excentricidad del homeomorfismo identidad es cero, concluimos $d(\sigma_1, \sigma_2) = 0$.

- IV. Desigualdad del triángulo: Esto se desprende de las propiedades del coeficiente de Beltrami.

□

Proposición 2.2.1. Denotamos por $\ell_\sigma(\gamma)$ la distancia de traslación de $\rho(\gamma)$ en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y $\ell(\gamma)$ como la distancia de traslación de γ en \mathbb{H}^2 .

Sean (ρ, ϕ) y el origen (id, id) dos puntos del espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$ tales que la distancia entre ellos es menor a una constante C . Entonces para todo elemento hiperbólico $\gamma \in \Gamma$ se cumple

$$\frac{\ell(\gamma)}{e^{2C}} \leq \ell_\sigma(\gamma) \leq e^{2C} \ell(\gamma) \quad (2.21)$$

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [Ahl64], teorema 3.

□

2.3. El Espacio de Deformaciones Cuasi-fuchsianas de Γ

Vamos a generalizar lo anterior al espacio de deformaciones fuchsianas. Definimos a una deformación cuasifuchsiana como una pareja (ρ, ϕ) donde ρ es una representación de Γ a $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ y ϕ es un homeomorfismo cuasiconforme de la esfera $\bar{\mathbb{C}}$ que conjuga las representaciones Γ y $\rho(\Gamma)$ fijando a los puntos 0, 1 y al elemento ∞ .

De la misma manera definimos una relación de equivalencia

$$(\rho_1, \phi_1) \simeq (\rho_2, \phi_2) \text{ si y sólo si } \rho_1 = \rho_2. \quad (2.22)$$

La verificación de que la relación anterior es una relación de equivalencia, es análoga al caso de las deformaciones fuchsianas.

Denotamos al espacio de las deformaciones cuasifuchsianas de Γ por $\mathcal{QF}(\Gamma)$.

Proposición 2.3.1. Sea (ρ, ϕ) una deformación cuasifuchsiana de Γ . Un elemento γ de Γ es parabólico si y sólo si $\rho(\gamma)$ es parabólico.

Demostración: Los elementos parabólicos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tienen un punto fijo en $\bar{\mathbb{R}}$, así que las puntas de la superficie $\mathbb{H}^2/\rho(\Gamma)$ están contenidas en las cúspides. Entonces $\mathbb{H}^2/\rho(\Gamma)$ tiene volumen finito. Por la fórmula de Gauss-Bonnet, el volumen es independiente de la representación ρ .

□

Observemos que el espacio $\mathcal{QF}(\Gamma)$ está contenido, por definición, en el espacio de representaciones de Γ en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Uniformización de Riemann). Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [IT91].

□

Teorema 2.3.2. Si Ω es un subconjunto simplemente conexo del plano complejo \mathbb{C} distinto de \mathbb{C} , entonces un homeomorfismo holomorfo $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [IT91].

□

En particular el semiplano superior \mathbb{H}^2 es conformemente equivalente al disco unitario \mathbb{D}^2 .

2.4. Isomorfismo de Ahlfors-Bers

Vamos a parametrizar al espacio de homeomorfismos cuasiconformes $\mathcal{QF}(\Gamma)$ por medio del producto de dos espacios de Teichmüller.

Consideremos una deformación cuasiconforme (ρ, ϕ) del grupo Γ y denotamos por $\overline{\mathbb{H}^2}$ al semiplano inferior. En nuestro caso el isomorfismo conforme resultado del teorema 2.3.1, ϕ_+ transforma el dominio simplemente conexo $\phi(\mathbb{H}^2)$ a \mathbb{H}^2 , es decir, $\phi_+ : \phi(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathbb{H}^2$ es un isomorfismo cuasiconforme.

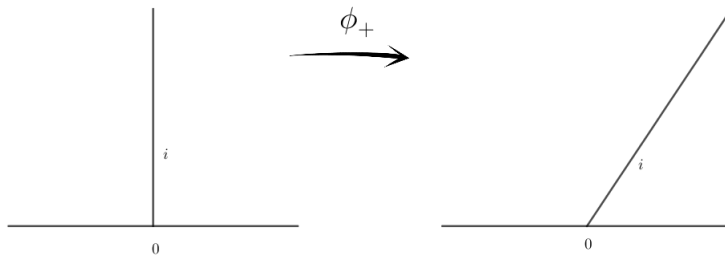


Fig. 2.1: Deformación de \mathbb{H}^2 bajo ϕ_+ .

La frontera de \mathbb{H}^2 es invariante bajo ϕ por lo que la frontera de $\phi(\mathbb{H}^2)$ en $\overline{\mathbb{C}}$ es una curva de Jordan. Por el teorema de Caratheorody podemos extender ϕ a la frontera de \mathbb{H}^2 de tal manera que fije los puntos $0, 1$ e ∞ , si es necesario podemos componerlo con algún homeomorfismo cuasiconforme. Por lo tanto $(\phi_+ \circ \rho \circ \phi_+^{-1}, \phi_+ \circ \phi)$ es una deformación fuchsiana. Denotamos por $\overline{\mathbb{H}^2}$ al semiplano inferior. De manera similar, $(\phi_- \circ \rho \circ \phi_-^{-1}, \phi_- \circ \phi)$, donde ϕ_- es su representación conforme y normalizada de $\phi(\overline{\mathbb{H}^2})$ en $\overline{\mathbb{H}^2}$. Así el homeomorfismo $\phi_- \circ \phi : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ es cuasiconforme y conjuga las acciones de Γ y $\phi_- \circ \rho(\Gamma) \circ \phi$ en $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Por conjugación compleja, el espacio $\mathcal{T}(\Gamma)$ es isomorfo a $\mathcal{T}(\overline{\Gamma})$

Definición 2.4.1. La función

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{QF}(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{T}(\Gamma) \times \mathcal{T}(\overline{\Gamma}) \\ \mathcal{B}(\rho, \phi) &= (\phi_+ \circ \rho \circ (\phi_+)^{-1}, \phi_- \circ \rho \circ (\phi_-)^{-1}) \end{aligned} \tag{2.23}$$

es llamada el isomorfismo de Ahlfors-Bers.

Proposición 2.4.1. La función de Ahlfors-Bers es un isomorfismo.

Demostración: Nos concentramos en mostrar la sobreyectividad ya que es lo único que usaremos en este trabajo.

Sea $(\sigma^+, \sigma^-) \in \mathcal{T}(\Gamma) \times \mathcal{T}(\bar{\Gamma})$ tal que $\sigma^+ = (\rho^+, \phi^+)$ donde $\phi^+ = \phi_{\mu^+}$ para alguna función $\mu^+ \in L^\infty(\mathbb{H}^2)$ con norma menor a 1. De manera similar, $\sigma^- = (\rho^-, \phi^-)$ donde $\phi^- = \phi_{\mu^-}$ para alguna función $\mu^- \in L^\infty(\overline{\mathbb{H}^2})$ con norma menor a 1.

Definimos una función medible μ en \mathbb{C} de la siguiente manera: $\mu = \mu^+$ en \mathbb{H}^2 , $\mu = \mu^-$ en $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Sea Φ un homeomorfismo cuasiconforme normalizado con coeficiente de Beltrami μ dado por el teorema de Ahlfors-Bers visto en la primera sección, así éste conjuga la representación id del grupo Γ a una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Así, $\mathcal{B}(\rho, \Phi) = (\sigma^+, \sigma^-)$.

□

2.4.1. La Acción del Grupo Modular de S en $\mathcal{T}(\Gamma)$ y $\mathcal{QF}(\Gamma)$

En esta sección vamos a denotar por S a una superficie compacta e identificamos el interior de S con el cociente \mathbb{H}^2/Γ , donde Γ es un grupo fuchsiano.

Consideremos un difeomorfismo f de la superficie compacta S . Entonces f es isotópica a un difeomorfismo bi-Lipschitz del interior de S a \mathbb{H}^2/Γ .

Cada levantamiento \tilde{f} de f al semiplano \mathbb{H}^2 es un difeomorfismo bi-Lipschitz, más aún, \tilde{f} y \tilde{f}^{-1} son homeomorfismos cuasiconformes de \mathbb{H}^2 .

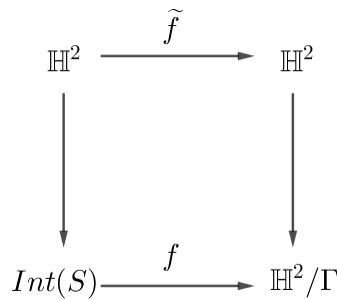


Fig. 2.2: Relación entre \tilde{f} y f .

Si (ρ, ϕ) es una deformación fuchsiana de Γ , entonces $\phi \circ \tilde{f}^{-1}$ es un homeomorfismo de \mathbb{H}^2 y además conjuga Γ a un subgrupo de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Sea a^{-1} un elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$

tal que

$$a^{-1}(0) = \phi \circ \tilde{f}^{-1}(0), \quad a^{-1}(1) = \phi \circ \tilde{f}^{-1}(1), \quad a^{-1}(\infty) = \phi \circ \tilde{f}^{-1}(\infty). \quad (2.24)$$

Entonces el homeomorfismo cuasiconforme $a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1}$ conjugua la representación id de Γ a una representación $\rho_{\tilde{f}}$, es decir,

$$(a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})(id)(a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})^{-1} = \rho_{\tilde{f}}. \quad (2.25)$$

En consecuencia $(\rho_{\tilde{f}}, a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})$ es una deformación fuchsiana de Γ .

Esta clase también es independiente de la elección del levantamiento \tilde{f} . En efecto, para cada levantamiento \tilde{f} de f , existe un automorfismo de Γ tal que $\tilde{f}(\gamma(z)) = f_*(\gamma)\tilde{f}(z)$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Entonces la representación $\rho_{\tilde{f}}$ está conjugada en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ a la representación $f^*(\rho) : \gamma \rightarrow \rho \circ (f_*)^{-1}(\gamma)$. Si \tilde{f} y \tilde{f}' son dos levantamientos de f , los automorfismos f_* y f'_* difieren por un isomorfismo interno de Γ .

Por lo tanto, las representaciones $\rho_{\tilde{f}}$ y $\rho_{\tilde{f}'}$ están conjugadas en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Se sigue que el punto $(\rho_{\tilde{f}}, a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})$ es independiente del levantamiento de \tilde{f} .

La clase de $(\rho_{\tilde{f}}, a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})$ depende solamente de la clase de isotopía de f . En efecto, los automorfismos de $\pi_1(S)$ asociados con los levantamientos \tilde{f}_1^{-1} y \tilde{f}_2^{-1} de dos difeomorfismos homotópicos f_1 y f_2 los cuales difieren por un automorfismo interno de Γ . Entonces podemos aplicar el razonamiento anterior.

Denotamos por $f^*(\sigma)$ al punto asociado a σ . Por la definición de la distancia de Teichmüller, f^* es una isometría de $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Definición 2.4.2. El grupo modular de la superficie S es el conjunto de clases de isotopías de difeomorfismos que preservan la orientación de S . Lo denotamos por $\mathcal{M}(S)$.

El nombre de grupo modular es por la composición de difeomorfismos. Además, es un invariante algebraico de este espacio topológico.

Notemos que la función $[f] \mapsto f^*$ define una acción por la izquierda del grupo $\mathcal{M}(S)$ en el espacio $\mathcal{T}(\Gamma)$ y la llamamos *la acción natural del grupo modular en $\mathcal{T}(\Gamma)$* .

A nivel de representaciones, si f^* es la acción de f en $\pi_1(S)$, entonces la representación fuchsiana $f^*(\rho, \phi)$ es conjugada a la representación $\gamma \rightarrow \rho \circ (f_*)^{-1}(\gamma)$, lo cual está bien definido salvo conjugación en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Usaremos las coordenadas de Ahlfors-Bers para definir una acción del grupo modular en el espacio de deformaciones cuasifuchsianas de Γ . Sea $f^*(\sigma_+, \sigma_-) = (f^*(\sigma_+), f^*(\sigma_-))$ para cada difeomorfismo f representando una clase de $\text{Mod}(S)$.

Si (ρ, ϕ) es una deformación cuasifuchsiana de Γ , entonces la representación $f^*(\rho, \phi)$ es conjugada a la representación $\gamma \rightarrow \rho \circ (f^*)^{-1}(\gamma)$.

2.4.2. La Compactificación de Thurston del Espacio de Teichmüller

Los elementos parabólicos son aquellos que no alcanzan el ínfimo de la longitud de traslación. Denotamos por \mathcal{C} al conjunto de las clases de conjugación de elementos no parabólicos de $\Gamma - \{id\}$. Por lo anterior, existe una identificación al conjunto de geodésicas cerradas de \mathbb{H}^2/Γ .

Denotamos al conjunto de los números reales positivos por \mathbb{R}_+ . Sea $\ell_\sigma(\gamma)$ la distancia de traslación de γ a $\rho(\gamma)$ en \mathbb{H}^2 . Definimos la función

$$\mathcal{L} : \mathcal{T}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}} \quad (2.26)$$

de la siguiente manera: consideramos $\sigma = (\rho, \phi)$ un punto en el espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$ y le asociamos el punto $\mathcal{L}(\sigma) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ cuya coordenada en la clase de $[\gamma]$ es igual a $\ell_\sigma(\gamma)$. Además, \mathcal{L} resulta ser un homeomorfismo.

La multiplicación usual por un número real define rayos en $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ y el conjunto de estos es el espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$ con la topología cociente. Por lo que tenemos las siguientes funciones

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}} - \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}). \quad (2.27)$$

donde $\iota_*(\alpha)(\beta) = \iota(\alpha, \beta)$. Por propiedades de la función ι se puede mostrar que $\pi \circ \iota_*$ es inyectiva.

Sea $\bar{\mathcal{C}}$ la cerradura de $\pi \circ \iota_*(\mathcal{C})$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$ y sea \mathcal{C}' el espacio de clases de homotopías de curvas cerradas simples, pero no necesariamente conexas en S cuyas componentes representan un elemento de \mathcal{C} .

Como antes, definimos la función $\iota : \mathcal{C}' \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ y obtenemos el siguiente diagrama

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}} - \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}). \quad (2.28)$$

Como ι_* respeta la multiplicación por escalares, $\pi \circ \iota_*$ no es inyectiva en \mathcal{C}' , sin embargo podemos mostrar que $\overline{\pi \circ \iota_*(\mathcal{C})} = \overline{\pi \circ \iota_*(\mathcal{C}')}$.

Definimos una función $\mathcal{J} : \mathcal{ML}(S) \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$. Denotamos por \mathcal{ML} al espacio de laminaciones medibles y lo dotamos con la topología producto. Esta topología induce su proyectivización \mathcal{PML} .

Proposición 2.4.2. En $(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$, los espacios \mathcal{T} y \mathcal{ML} son disjuntos.

Demostración: Esta demostración puede consultarse en [FLP02].

□

Teorema 2.4.1. Las funciones $\pi \circ \mathcal{L}$ y $\pi \circ \mathcal{J}$ son respectivos encajes de \mathcal{T} y de $\mathcal{PML}(S)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$ de imágenes disjuntas.

La unión de sus imágenes es homeomorfa a una bola.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [FLP02].

□

El teorema 2.4.1 es llamado el teorema de compactificación de Thurston.

Proposición 2.4.3. Sea (σ_i) una sucesión en $\mathcal{T}(\Gamma)$ que converge en el sentido de Thurston hacia una laminación geodésica medible λ . Entonces existe una sucesión de geodésicas cerradas $\gamma_i \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ tal que

- I. La sucesión (γ_i) converge hacia λ en el espacio proyectivo $\mathcal{PML}(S)$.
- II. Se satisface $\frac{\ell_{\sigma_i}(\gamma_i)}{\ell(\gamma_i)} \rightarrow 0$.

Demostración: Esta demostración puede encontrarse en [FLP02].

2.4.3. Clasificación de los Elementos del Grupo $Mod(S)$

Cada elemento de $Mod(\Gamma)$ actúa en el espacio $\mathcal{T}(\Gamma)$ y su acción se prolonga de manera continua a un homeomorfismo ϕ^* de la compactificación de Thurston. Como dicha compactificación es vista como una bola, por el teorema del punto fijo de Brouwer, el elemento ϕ^* tiene un punto fijo. Utilizaremos esto para clasificar a los elementos del grupo $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Caso Periódico

Si ϕ^* tiene un punto fijo en $\mathcal{T}(\Gamma)$, entonces la clase de isotopía de ϕ está representada por la correspondiente isometría de la métrica hiperbólica.

Este representante es de orden finito, por lo que ϕ es isotópico a un difeomorfismo periódico de S .

Caso Reducible

La clase de isotopía de ϕ contiene un difeomorfismo que permuta una colección finita de geodésicas simples y disjuntas, es decir, el homeomorfismo ϕ^* deja invariante a una multicurva de la superficie S .

Caso Pseudo-Anosov

Un punto fijo de ϕ^* es una laminación medible aracional. De hecho cuando ϕ^* es pseudo-Anosov fija un punto atractor y un punto repulsor, es decir, dos laminaciones medibles aracionales λ^+ y λ^- llamadas *laminación estable de ϕ* y *laminación inestable de ϕ* , respectivamente. Por la proposición 1.3.7 sabemos que λ^+ y λ^- se intersectan.

$$i(\phi_*(\gamma), \lambda^+) = \frac{1}{k}i(\gamma, \lambda^+), \quad i(\phi_*(\gamma), \lambda^-) = ki(\gamma, \lambda^-) \quad (2.29)$$

Por la definición de laminación geodésica aracional, el número $i(\gamma, \lambda^+)$ es distinto de cero.

En este caso el homeomorfismo ϕ^* nunca es periódico o reducible: si $i(\phi_*(\gamma), \lambda^-) = ki(\gamma, \lambda^-)$, entonces el homeomorfismo ϕ_* no puede ser periódico. Además como $k > 1$, entonces ϕ_*^m con $m \neq 0$ no deja ninguna curva invariante. Por lo tanto, este caso es distinto de los casos periódicos y reducibles.

Definición 2.4.3. Sea (σ_i) una sucesión de deformaciones fuchsianas. Si existe una laminación geodésica medible λ y una sucesión (ϵ_i) que converge a 0 tal que, para todo $g \in \mathcal{C}$

$$\epsilon_i \ell_{\sigma_i} \rightarrow i(\lambda, \gamma) \quad (2.30)$$

entonces decimos que la laminación geodésica medible converge en el sentido de Thurston.

Proposición 2.4.4. Sea $\phi \in \text{Mod}(\Gamma)$ un elemento pseudo-Anosov.

I. Para toda deformación fuchsiana $\sigma \in \mathcal{T}(\Gamma)$, tenemos

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\phi^*)^i(\sigma) = \lambda^+, \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} (\phi^*)^i(\sigma) = \lambda^-. \quad (2.31)$$

convergen en el sentido de Thurston.

II. Para todo $g \in \mathcal{C}$ representado por una curva simple, tenemos

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{(\phi_*)^i(\gamma)}{\ell((\phi_*)^i(\gamma))} \rightarrow \lambda^+, \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{(\phi_*)^i(\gamma)}{\ell((\phi_*)^i(\gamma))} \rightarrow \lambda^- \quad (2.32)$$

en la topología inducida en $\mathcal{ML}(S)$.

Demostración: Esta demostración puede consultarse en [\[FLP02\]](#).

□

3. ÁRBOLES REALES Y DEGENERACIÓN DE ESTRUCTURAS HIPERBÓLICAS

Debido que, necesitamos acciones isométricas de un grupo Γ en árboles reales que nos permite compactificar el espacio de representaciones fieles y discretas de Γ en el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n , estudiaremos en este capítulo dicha teoría.

Definición 3.0.1. Un espacio métrico (\mathcal{T}, d) es un árbol real si cualesquiera dos puntos x y y pueden ser unidos mediante un único arco.

Este arco es isométrico al intervalo $[0, d(x, y)]$ y lo llamamos el segmento entre los puntos x y y y es denotado por xy .

Ejemplo 3.0.1. El ejemplo más sencillo de árbol real es \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 3.0.2. Un ejemplo de árbol real es un árbol simplicial donde $[0, d(x, y)] = [0, d(x', y)] = [0, d(y, y')] = [0, 1]$

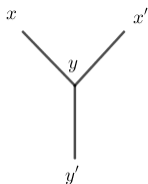
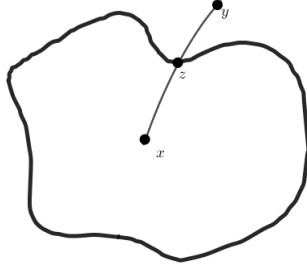


Fig. 3.1: Árbol Simplicial.

Observación. Un subconjunto conexo $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ es convexo y cerrado.

Definición 3.0.2. Supongamos que $x \in \mathcal{A}$ es un punto cualquiera y $y \in \mathcal{T}$, la intersección $xy \cap \mathcal{A}$ es un segmento xz para un único punto $z \in \mathcal{A}$. El punto z es llamado la proyección de y en \mathcal{A} .

Definición 3.0.3. Decimos que g es una isometría de \mathcal{T} si satisface $d(x, y) = d(gx, gy)$ para puntos x, y en \mathcal{T} .

Fig. 3.2: Proyección del punto y en A .

Al igual que en las isometrías de \mathbb{H}^n , podemos definir a la distancia de traslación $\delta(g)$ de una isometría g como $\delta(g) = \inf\{d(x, g(x)) : x \in \mathcal{T}\}$. Con base en la cantidad $\delta(g)$, podemos clasificar a las isometrías de los árboles reales.

Una isometría g hiperbólica es aquella sin puntos fijos la cual tiene como recta $A(g)$ en \mathcal{T} tal que g actúa en $A(g)$ como una traslación. Llamamos a $A(g)$ *el eje de la isometría de la isometría g* . En este caso, la distancia de traslación $\delta(g)$ es mayor a 0.

Una isometría g elíptica es aquella que solo tiene un punto fijo y satisface $\delta(g) = 0$.

Sea Γ un grupo de tipo finito. Consideremos una acción isométrica de Γ en un árbol real de la siguiente manera. Dados $p \in \mathcal{T}$, $g \in \Gamma$, denotamos por $|g|$ a la distancia $d(p, g(p))$.

Sean dos elementos g y g' en Γ definimos

$$[g, g'] = \frac{1}{2}(|g| + |g'| - |g^{-1}g'|) \quad (3.1)$$

que es la longitud de la intersección de los segmentos $pg(p)$ y $pg'(p)$ y es también la distancia al punto p de la proyección de $g'(p)$ en el segmento $pg(p)$. Notemos que $[g, g'] \geq 0$.

Teorema 3.0.1. Sea Γ un grupo actuando isométricamente en un árbol real \mathcal{T} , $p \in \mathcal{T}$ y consideramos $|g| = d(p, g(p))$. Entonces la función $|\cdot| : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ cumple con lo siguiente:

- I. Si g es la isometría identidad, entonces $|g| = 0$.
- II. Sea $g \in \Gamma$, entonces $|g| = |g^{-1}|$.
- III. Si $[g, g'] < [g, g'']$, entonces $[g, g'] = [g', g'']$.

Demostración:

I. Es claro que $[g, g'] > 0$. Como g es la isometría identidad, entonces $|g| = d(p, g(p)) = d(p, p) = 0$.

II. Usando que g es una isometría

$$|g^{-1}| = d(p, g^{-1}(p)) = d(g(p), gg^{-1}(p)) = d(g(p), p) = d(p, g(p)) = |g|.$$

III. Igualando y acomodando las siguientes expresiones

$$[g, g'] = \frac{1}{2}(|g| + |g'| - |g^{-1}g'|) = \frac{1}{2}(d(p, g(p)) + d(p, g'(p)) - d(p, g'g(p))),$$

$$[g, g''] = \frac{1}{2}(|g| + |g''| - |g^{-1}g''|) = \frac{1}{2}(d(p, g(p)) + d(p, g''(p)) - d(p, g''g(p)))$$

obtenemos $d(p, g'(p)) - d(p, g'g(p)) = d(p, g''(p)) - d(p, g''g(p))$.

Ahora, como la proyección del punto $g'(p)$ en $pg(p)$ es más cercana a p que la proyección del punto $g''(p)$ en $pg(p)$ y la proyección de $g'(p)$ en $pg(p)$ es igual a la proyección de $g'(p)$ en $pg''(p)$ tenemos $[g, g'] = [g', g'']$.

□

De manera similar, si una función $|\cdot| : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface (i), (ii), (iii), entonces existe una acción de Γ en un árbol real \mathcal{T} y un punto p de \mathcal{T} tal que

$$|g| = d(p, g(p)) \quad \text{para cada } g \in \Gamma. \quad (3.2)$$

Notemos que por las propiedades del teorema 3.0.1, esta función es no negativa y lo asumiremos de ahora en adelante.

En efecto, consideremos el espacio X que consiste en la unión disjunta de intervalos en \mathbb{R}_+

$$X = \bigcup_{g \in \Gamma} [0, |g|] \quad (3.3)$$

e introducimos una relación de equivalencia \mathcal{R} en X que identifica isométricamente los intervalos $[0, |g|]$ y $[0, |g'|]$ a lo largo del intervalo $[0, [g, g']]$.

Esta relación es reflexiva por el inciso I, es simétrica por el inciso II y es transitiva por el inciso III.

Ahora introducimos una distancia en $\mathcal{T} = X/\mathcal{R}$ de la siguiente manera: Si $x \in [0, |g|]$ y $y \in [0, |g'|]$, entonces

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{si } x \text{ o } y \text{ es menor que } [g, g'] \\ x + y - 2[g, g'], & \text{si } x \text{ y } y \text{ son mayores o iguales a } [g, g']. \end{cases} \quad (3.4)$$

Para mostrar que d es una distancia solo falta verificar la desigualdad del triángulo. En efecto, dados $g, g', g'' \in \Gamma$ y $x \in [0, |g|]$, $y \in [0, |g'|]$ y $z \in [0, |g''|]$, tenemos cuatro posibles opciones: $[g, g'] < [g, g'']$, $[g, g'] > [g, g'']$, $[g, g'] = [g, g'']$ y $[g, g''] < [g, g']$, $[g, g'] = [g, g'']$ y $[g', g''] = [g, g']$. Veamos el primer caso.

$$\begin{aligned} [g, g'] &= \frac{1}{2} (|g| + |g'| - |g^{-1}g'|) = \frac{1}{2} (d(p, g(p)) + d(p, g'(p)) - d(p, g^{-1}g'(p))) \\ &< [g, g''] = \frac{1}{2} (|g| + |g''| - |g^{-1}g''|) = \frac{1}{2} (d(p, g(p)) + d(p, g''(p)) - d(p, g^{-1}g''(p))). \end{aligned}$$

Entonces

$$|g'| - |g^{-1}g'| < |g''| - |g^{-1}g''|.$$

Se sigue que

$$|g| - |g^{-1}g'| = |g''| - |(g')^{-1}g''|.$$

Lema 3.0.1. El espacio $\mathcal{T} = X/\mathcal{R}$ dotado con la distancia d es un árbol real.

Demostración: Sea $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{Z}$ elementos del grupo Γ . El espacio cociente \mathcal{T} , por construcción, es una unión creciente de espacios \mathcal{T}_i los cuales son obtenidos del cociente de la unión disjunta de los intervalos $[0, |g_k|]$ para $k = 0, \dots, i$ bajo \mathcal{R} . Proponemos a $\iota: \mathcal{T}_i \rightarrow \mathcal{T}_{i+1}$ como función inclusión de tal manera que sea isométrica (Lema 5.20, [BH99]).

Sea $p \in \mathcal{T}_i$ la imagen bajo del punto 0. Como la proyección de cada intervalo $[0, |g_k|]$ en \mathcal{T}_i bajo ι es una isometría siempre que $k \leq i$, cualquier punto $x \in \mathcal{T}_i$ puede ser unido a p mediante un segmento px el cual es isométrico al intervalo $[0, d(p, x)]$.

Utilizando la expresión 3.4, podemos ver que debe existir un punto $z \in \mathcal{T}_i$ tal que $px \cap py = pz$ para $x, y \in \mathcal{T}_i$.

Entonces existe una retracción de \mathcal{T}_i sobre el punto p , así que cada cociente \mathcal{T}_i dotado con la distancia inducida, es un árbol real simplicial.

Por lo anterior, para $x, y \in \mathcal{T}_i$ Como hemos mostrado que \mathcal{T}_i es un árbol real, por

definición existe un único arco encajado isométrico a $[0, d(x, y)]$ que los une. Ahora debemos probar que \mathcal{T} es un árbol real. Usamos el siguiente afirmación

Afirmación 3.0.1. Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia en \mathcal{T} de puntos de la forma $[g, g'] \in [0, |g|]$ con $g, g' \in \Gamma$. Entonces cada punto de $xy - (\mathcal{B} \cap xy)$ desconecta a los puntos x e y en \mathcal{T} .

Demostración: El segmento xy está contenido en \mathcal{T}_j siempre que $j \geq i$. Como xy es un conjunto cerrado y conexo, consideramos la función proyección $\pi_j : \mathcal{T}_j \rightarrow xy$. Considerando que las inclusiones $\mathcal{T}_i \rightarrow \mathcal{T}_{i+1}$ son isométricas, las funciones π_j y π_{j+1} son iguales en \mathcal{T}_j . Si unimos las imágenes de las funciones π_j y π_{j+1} obtenemos una función π que disminuye las distancias en \mathcal{T} y es continua.

Si $q \in xy$ no pertenece a \mathcal{B} , entonces q es el único punto que cumple con $\pi(z) = q$. Por lo tanto $\mathcal{T} - \{q\}$ es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos

$$U_x = \{z : d(x, \pi(z)) < d(x, q)\} \quad (3.5)$$

y

$$U_y = \{z : d(y, \pi(z)) < d(y, q)\} \quad (3.6)$$

los cuales contienen a los puntos x y y , respectivamente.

□

Ahora, como \mathcal{B} es un conjunto numerable, la intersección $xy - (\mathcal{B} \cap xy)$ es densa en xy . Por la afirmación 3.0.1, cada camino que une a x con y en \mathcal{T} también contiene a xy . Por lo tanto, existe un único arco encajado en \mathcal{T} que une a x con y . En consecuencia, el espacio \mathcal{T} es un árbol real.

□

Aún falta mostrar la última parte del teorema 3.0.1. Vamos a construir una acción de Γ en un árbol real que satisfaga $|g| = d(p, g(p))$.

Denotamos por $g(p)$ a la imagen del punto $|g| \in [0, |g|]$ bajo la función $\vartheta : X \rightarrow X/\mathcal{R}$. Notemos que $h(p) = h'(p)$ si y sólo si $|h^{-1}h'| = 0$.

Si $g \in \Gamma$, denotamos $g(h(p)) = gh(p)$, así el grupo Γ actúa en el conjunto de puntos $\{h(p)\} \subset \mathcal{T}$. Por definición, la distancia entre dos puntos $h(p)$ y $h'(p)$ de \mathcal{T} es $|h^{-1}h'|$.

Por lo anterior, la acción de Γ en la órbita $\{h(p)\}$ está bien definida y es una isometría. Ahora queremos extender esta isometría a toda el árbol \mathcal{T} .

Por construcción, cada punto $x \in \mathcal{T}$ está en un segmento $ph(p)$. Puesto que \mathcal{T} es un árbol, para cada $g \in \Gamma$, los puntos $g(p)$ y $gh(p)$ son unidos por un único segmento el cual es isométrico a $ph(p)$. Definimos la función g en el segmento $ph(p)$ como la isometría única entre los segmentos que transforman p a $g(p)$ y $h(p)$ a $gh(p)$.

Por la construcción anterior $d(p, g(p)) = |g|$. Con esto termina la demostración del teorema 3.0.1.

□

Definición 3.0.4. Una acción isométrica de un grupo Γ en un árbol real \mathcal{T} es minimal si Γ no deja invariante ningún árbol distinto del vacío y propiamente contenido en \mathcal{T} .

Lema 3.0.2. Si g es un elemento de Γ , entonces g debe ser elíptico o hiperbólico.

Demostración: Si $g \in Isom(\mathcal{T})$ tiene un punto fijo en \mathcal{T} , entonces terminamos. Supongamos que la acción de g es libre en \mathcal{T} .

Sea $x \in \mathcal{T}$ un punto y sea $xg(x)$ un segmento geodésico, llamémosle α . Consideremos $gxg(x)$ y $g^{-1}xg(x)$. Sea a el punto de intersección entre $xg(x)$ y $g^{-1}xg(x)$ el cual sea más distante del punto x y sea $b = g(a)$ y $\beta \subset xg(x)$ el subsegmento de geodésica entre a y b . Dado que hemos supuesto que la acción de g es libre, debe pasar que $b \neq a$. Denotamos por A a la g -órbita de β . Por lo anterior, A es isométrica al eje real de \mathcal{T} , entonces

$$d(z, gz) = 2d(x, A) + d(a, b), \quad \text{si } z \neq A. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, $\delta(g) = d(a, b) \neq 0$.

□

De la demostración anterior, se desprende el hecho de que, si $\delta(g) \neq 0$ con $g \in Isom(\mathcal{T})$ entonces g no puede tener puntos fijos en \mathcal{T} .

Ahora, si Γ solo contiene elementos elípticos, entonces tiene un punto fijo global en \mathcal{T} . En efecto, sean g, h, gh isometrías elípticas y sean C_g, C_h, C_{gh} los conjuntos fijos de las isometrías g, h, gh respectivamente, tales que son disjuntos entre sí. Sea xy el segmento geodésico que une a los puntos $x \in C_g$ y $y \in C_h$, sea $pq \subset xy$ el subsegmento más pequeño tal que $p \in C_g$ y $q \in C_h$. La concatenación de pq con hpq es una geodésica,

llamémosla ω . Los segmentos ω y $hg(\omega)$ se intersectan en un punto $h(p)$, el cual es un extremo de ω .

Por lo tanto, la hg -órbita de ω es una geodésica en \mathcal{T} , esto implica que hg no tiene puntos fijos en \mathcal{T} , lo cual es una contradicción.

□

Proposición 3.0.1. Sea \mathcal{T} un árbol real y sean $g, h \in \Gamma$ elementos hiperbólicos cuyos ejes se intersectan en un conjunto acotado. Entonces para $x \in A(g)$ y $y \in A(h)$, existen constantes m, n tales que $h^m g^n$ es hiperbólico y los puntos x y y pertenecen a $A(h^m g^n)$

Demostración: Es suficiente considerar los casos $x \notin A(h)$ y $y \notin A(g)$. Sea $A(h) \cap xy = xq$ y $A(g) \cap xy = py$. Podemos suponer que q está entre x y $h(x)$ y que p está en $g^{-1}(y)$ y y . Para n suficientemente grande, la composición $g^n h^n$ induce una isometría que preserva la orientación del segmento geodésico $h^{-n}(p)g^n(q)$ y está contenido en el eje de $g^n h^n$. Además, $xy \subset h^{-n}(p)g^n(q)$. Por lo tanto $h^m g^n$ es hiperbólico.

□

Como consecuencia de la proposición 3.0.1, la unión de los ejes de elementos hiperbólicos es conexa.

Proposición 3.0.2. La acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ construida en el teorema 3.0.1 es mínima si y sólo si existe un elemento $g \in \Gamma$ tal que $|g^2| = 2|g|$ y $|g| \neq 0$.

Demostración: La acción construida en el teorema 3.0.1 es minimal si y sólo si $p \in A(g)$ para algún $g \in \Gamma$, así, $|g^2| = d(p, g^2(p)) = 2d(p, g(p))$.

De manera inversa, veamos que la acción de g es minimal. Por definición, los puntos del eje $A(g)$ de $g \in \Gamma$ son aquellos que cumplen con $d(x, g(x)) = \delta(g)$. Debemos mostrar que el punto p está en el eje de algún elemento $g \in \Gamma$ cuando $|g^2| = 2|g|$.

Sea $g \in \Gamma$ una isometría elíptica de \mathcal{T} . El conjunto de sus puntos fijos $\text{Fix}(g)$ es no vacío y convexo. Unimos el punto p a su proyección en $\text{Fix}(g)$ por un segmento de longitud $\alpha \geq 0$ cuyo interior es disjunto a $\text{Fix}(g)$. Entonces $|g| = 2\alpha$ y $|g^2| = \leq 2\alpha$.

Similarmente, si g tiene un eje de traslación $A(g)$, unimos p a $A(g)$ mediante un segmento de longitud $\alpha \geq 0$. Por lo tanto, $|g| = 2\alpha + \delta(g)$ y $|g^2| = 2\alpha + 2\delta(g)$. Debido a lo anterior, podemos expresar a $\delta(g)$ como

$$\delta(g) = \sup\{0, |g^2| - |g|\}. \quad (3.8)$$

De aquí que el punto $p \in A(g)$ cuando $|g^2| = 2|g|$.

□

Definición 3.0.5. Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 árboles reales. Decimos que las acciones $\Gamma \times \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ y $\Gamma \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$ son isométricas si existe una isometría de \mathcal{T}_1 a \mathcal{T}_2 que conjuga las acciones de Γ .

Sea $\Delta(\mathcal{T})$ una función del conjunto de clases de isometría de acciones minimales $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ al espacio $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ que asigna la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ al punto $\Delta(\mathcal{T})$, donde la coordenada de $\Delta(\mathcal{T})$ es una clase de conjugación $[g] \in \mathcal{C}$.

Para mostrar el teorema de hiperbolización, se utilizaron de algunas herramientas de superficies plisadas. Sin embargo, Thurston logra obtener una demostración alternativa usando el concepto de árbol real visto en la sección anterior.

Podemos ver un punto en el espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$ como una representación fiel y discreta de Γ en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ salvo conjugación.

Sean Γ un grupo finitamente generado, \mathcal{C} el conjunto de clases de conjugación de elementos de Γ y ρ una representación de Γ en $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Definimos la distancia de traslación $\mathcal{L}(\rho)$ de $\rho(g)$ en \mathbb{H}^n asignando a ρ el punto $\mathcal{L}(\rho)(p)$ en $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$, como

$$\mathcal{L}(\rho)(g) = \inf d(x, \rho(g)(x)), \quad x \in \mathbb{H}^n$$

Por medio de esta función distancia definiremos un tipo de convergencia.

Teorema 3.0.2. Sea (ρ_i) una sucesión de representaciones fieles del grupo Γ en $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Entonces tenemos la siguiente dicotomía

- I. La sucesión (ρ_i) converge, salvo conjugación, a una representación de Γ en $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$,
o
- II. existe una acción minimal no trivial de Γ en un árbol real \mathcal{T} y una sucesión (ϵ_i) que tiende a 0 tal que $\epsilon_i \mathcal{L}(\rho_i) \rightarrow \Delta(\mathcal{T})$.

La demostración del teorema 3.0.2 utiliza herramientas de geometría algebraica (ver [MS85]). Sin embargo, veremos que el árbol de la proposición 3.0.3 es isomorfo al árbol del teorema 3.0.2.

En el caso II del teorema 3.0.2, decimos que la sucesión de representaciones fieles (ρ_i) del grupo Γ en $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ converge en el sentido de Morgan-Shalen a la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$

Definición 3.0.6. Sea $\epsilon > 0$ y sean (X, d) , (X', d') dos espacios métricos. Definimos una ϵ -aproximación entre (X, d) y (X', d') como una relación sobreyectiva en $X \times X'$ tal que para $x, y \in X$ y para $x', y' \in X'$, si $\{x\mathcal{R}x \wedge y\mathcal{R}y'\}$, entonces

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq \epsilon. \quad (3.9)$$

Definición 3.0.7. Sea $(\Gamma \times X_i \rightarrow X_i)$ una sucesión de acciones del grupo Γ en los espacios métricos (X_i, d_i) . Decimos que $(\Gamma \times X_i \rightarrow X_i)$ converge en el sentido de Gromov a la acción $\Gamma \times X_\infty \rightarrow X_\infty$ si para cada conjunto compacto $K_\infty \subset X_\infty$, cada conjunto finito $P \subset \Gamma$, cada $\epsilon > 0$ y para cada i suficientemente grande, existe un conjunto compacto $K_i \subset X_i$ y una P -equivariante ϵ -aproximación \mathcal{R}_i entre K_i y K_∞ .

Esto es, \mathcal{R}_i satisface

$$\{x\mathcal{R}_i x_i, \quad \gamma(x) \in K_\infty, \quad \gamma(x)\mathcal{R}_i y_i\},$$

entonces $d(\gamma(x_i), y_i) \leq \epsilon$ para $x \in K_\infty, \gamma \in P$ y $x_i, y_i \in K_i$.

Teorema 3.0.3. Sea (ρ_i) una sucesión de representaciones discretas y fieles del grupo Γ en $Isom(\mathbb{H}^n)$. Entonces (ρ_i) converge a la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ en el sentido de Morgan-Shalen si y sólo si existe una sucesión (ϵ_i) que tiende a cero tal que la sucesión de acciones (ρ_i) del grupo Γ en el espacio $\epsilon_i \mathbb{H}^n$ converge en el sentido de Gromov a la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$.

Denotamos por $\epsilon \mathbb{H}^n$ a los espacios dotado con la distancia dilatada por ϵ .

A cada representación, le asignamos una función $|\cdot|_p$ para medir su longitud. De forma análoga a la función longitud en el sentido de Chiswell para una acción de Γ en un árbol \mathcal{T} , asignamos una función longitud $|\cdot|_\rho$ a una representación ρ y a un punto $x \in \mathbb{H}^n$ de la siguiente manera.

Definición 3.0.8. Sea (ρ_i) una representación y sea $x \in \mathbb{H}^n$ punto base. Definimos la función longitud $|\cdot|_\rho$ como $|g|_p = d(x, \rho(g)(x))$.

Notemos que la función anterior definida no es una función longitud en el sentido de Chiswell, ya que la propiedad [III](#) en el teorema [3.0.1](#) no se cumple.

Proposición 3.0.3. Sea (ρ_i) una sucesión de representaciones fieles y discretas de Γ en el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n , $Isom(\mathbb{H}^n)$. Entonces, salvo considerar una subsucesión de ser necesario, tenemos

- I. La sucesión (ρ_i) converge salvo conjugación.

II. Existe una acción minimal no trivial de Γ en un árbol real \mathcal{T} , puntos $p_i \in \mathbb{H}^n$, $p \in \mathcal{T}$ y una sucesión (ϵ_i) que tiende a 0, tal que si $|\cdot|_{\rho_i}$ es la función longitud de la representación de ρ_i asociada al punto p_i , entonces las funciones $\epsilon_i |\cdot|_{\rho_i}$ asociadas a los puntos p_i converge a la función longitud $|\cdot|$ del árbol real \mathcal{T} asociado al punto p .

En el caso II decimos que (ρ_i) converge en el sentido de Gromov a la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$. Para mostrar la proposición 3.0.3, necesitamos asegurar la existencia del punto $p_i \in \mathbb{H}^n$.

Lema 3.0.3. Sea Γ un grupo no elemental de tipo finito (o finitamente generado), sea $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_k\}$ un conjunto que genera a Γ y sea ρ una representación fiel y discreta de Γ en el grupo $Isom(\mathbb{H}^n)$. Entonces existe un punto $x \in \mathbb{H}^n$ que minimiza la siguiente función

$$\max_j \{d(x, \rho(g_j)(x))\}. \quad (3.10)$$

Demostración: Sean $x \in \mathbb{H}^n$ y sea $y \in \partial\mathbb{H}^n$ tal que $y \notin \text{Fix}(g_j)$. Para cada elemento g_j ,

$$\lim_{x \rightarrow y} d(x, \rho(g_j)(x)) = \infty. \quad (3.11)$$

Por el lema 1.2.3 y la hipótesis de que Γ no es elemental, tenemos que para cada punto en $\partial\mathbb{H}^n$ existe un elemento $\rho(g_j)$ que no fija a x . Como la función $\max_j \{d(x, \rho(g_j)(x))\}$ es continua y $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ es un conjunto compacto, el mínimo se alcanza en un punto $x \in \mathbb{H}^n$.

□

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto x del lema anterior es el origen 0 pues podemos conjugar la representación ρ_i para asegurar ésto. Para mostrar los siguientes resultados utilizaremos el modelo del disco \mathbb{D}^n .

Establecemos el conjunto

$$\frac{1}{\epsilon_i} = \max_j \{d(0, \rho_i(g_j)(0))\}. \quad (3.12)$$

Consideremos dos casos con respecto a la sucesión (ϵ_i) :

- I. la sucesión (ϵ_i) está acotada inferiormente por una constante positiva $\frac{1}{M}$.
- II. la sucesión (ϵ_i) tiene una subsucesión convergente a 0.

Comencemos con el caso **I**. Para cada índice $j = 1, \dots, r$, cada isometría $\rho_i(g_j)$ traslada el origen $0 \in \mathbb{H}^n$ a una distancia menor o igual a una constante positiva M . Los elementos de $Isom(\mathbb{H}^n)$ que trasladan el origen a una distancia menor o igual a M forman un conjunto compacto. Así, posiblemente extrayendo una sucesión, podemos asumir que las isometrías $\rho_i(g_j)$ convergen a una isometría $\rho(g_j)$. En consecuencia, la representación ρ_i converge a la representación ρ . Por lo tanto, la sucesión (ϵ_i) está acotada por la constante positiva $\frac{1}{M}$.

Para el caso **II**, usaremos la función longitud $|\cdot|_{\rho_i}$ en el sentido de Chiswell

Lema 3.0.4. La sucesión de funciones $\epsilon_i |\cdot|_{\rho_i}$ converge débilmente a una función de longitud no trivial en el sentido de Chiswell en Γ , esto posiblemente extrayendo una subsucesión.

Demostración: Por construcción, $\epsilon_i |g_j|_{\rho_i} \leq 1$ pues $g_j \in \mathcal{G}$ y el valor de 1 es alcanzado por uno de estos elementos. Cada $g \in \Gamma$ puede escribirse en términos de $r = r(g)$ elementos del conjunto generador $\{g_1, \dots, g_k\}$

$$g = g_{i_1} \cdot g_{i_r}. \quad (3.13)$$

En consecuencia, haciendo uso de la desigualdad del triángulo para cada i tenemos

$$\begin{aligned} d(0, \rho_i(g)(0)) &\leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0)) + d(\rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0), \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_r}(0))) \\ &\leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0)) + d(0, \rho_i(g_{i_r}(0))) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esto es,

$$|g|_{\rho_i} \leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0)) + d(0, \rho_i(g_{i_r}(0))). \quad (3.15)$$

De aquí que, por inducción, $\epsilon_i |g|_{\rho_i} \leq r(g)$.

□

Vamos a demostrar un resultado de geometría hiperbólica el cual nos permitirá demostrar la desigualdad del triángulo y concluir que la función $|\cdot|_{\rho_i}$ es una función de longitud en el sentido de Chiswell.

Lema 3.0.5. Sea α una constante tal que $0 < \alpha \leq \pi$. Entonces existe una constante $c(\alpha)$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $L = L(\alpha, \epsilon)$ de manera que para cualquier triángulo ABC cuyo ángulo $\widehat{B} \in [\alpha, \pi]$ y cuya longitud del lado BC es mayor o igual a L se cumple lo siguiente:

- I. $|AB + BC - AC| \leq c(\alpha)$,
- II. el ángulo \widehat{C} es menor o igual a ϵ .

Demostración:

- I. La segunda ley del coseno para triángulos hiperbólicos establece que

$$\cosh(AC) = \cosh(AB) \cosh(BC) - \sinh(AB) \sinh(BC) \cos(\widehat{B}). \quad (3.16)$$

Para más detalle, consultar [Bea95], sección 7.12.

Primero acotemos superiormente a $\cosh(AC)$. Utilizando la definición de la función $\cosh(x)$.

$$\cosh(AC) = \frac{1}{2} (e^{AC} + e^{-AC}) \neq e^{AB+BC} + e^{AB+BC} = 2e^{AB+BC} \quad (3.17)$$

A continuación acotamos inferiormente a $\cosh(AC)$. Usamos el siguiente hecho

$$\cosh(AB) \cosh(BC) \geq \frac{1}{2} e^{AB} \frac{1}{2} e^{BC}. \quad (3.18)$$

Si $\widehat{B} \geq \frac{\pi}{2}$, entonces $\cosh(AC) \geq \frac{1}{4} e^{AB+BC}$. Si $\widehat{B} \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$ con $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\cosh(AC) \geq \frac{1}{4} e^{AB+BC} - \cos(\alpha) \frac{1}{4} e^{AB+BC}. \quad (3.19)$$

Combinando las desigualdades anteriores, se produce la siguiente desigualdad

$$C_1(\alpha) e^{AB+BC} \leq \cosh(AC) \leq C_2(\alpha) e^{AB+BC}. \quad (3.20)$$

Si AB y BC son mayores a 1, entonces

$$\begin{aligned} C_1(\alpha) e^{AB+BC} &\leq \cosh(AC) \leq C_2(\alpha) e^{AB+BC} \\ C_1(\alpha) &\leq e^{-(AB+BC)} \cosh(AC) \leq C_2(\alpha) \\ C_1(\alpha) &\leq \frac{1}{2} (e^{AC} + e^{-AC}) e^{-(AB+BC)} \leq C_2(\alpha) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Además, $C_1(\alpha) \leq \frac{1}{2} (e^{AC} + e^{-AC}) e^{-(AB+BC)} \leq e^{AC-(AB+BC)} \leq C_2'(\alpha)$.

Así

$$\ln C_1(\alpha) \leq AC - (AB + BC) \leq \ln C_2' \quad (3.22)$$

y usando la simetría de la función exponencial

$$-C(\alpha) \leq AC - (AB + BC) \leq C(\alpha). \quad (3.23)$$

Finalmente

$$|AB + BC - AC| \leq C(\alpha). \quad (3.24)$$

- II. Utilizamos la propiedad anterior. Si la longitud del segmento $BC \geq L$ es suficientemente grande, entonces \hat{B} tiende a π y $\hat{C} \leq \epsilon$.

□

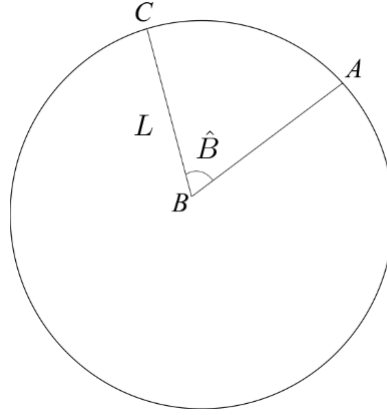


Fig. 3.3: Ángulo α del triángulo ABC .

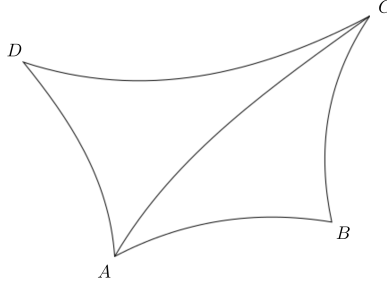
De ésto se desprende el siguiente corolario. Consideremos un cuadrilátero y lo subdividimos en dos triángulos que satisfacen las condiciones del lema anterior 3.0.5.

Corolario 3.0.1. Sea $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Entonces existen dos constantes M y L tales que cualquier cuadrilátero geodésico $ABCD \subset \mathbb{H}^n$ cuyos ángulos $\hat{B}, \hat{C} \in [\alpha, \pi - \alpha]$, y la longitud de su lado BC es igual o menor a L , se cumple

$$|AB + BC + CD - AD| \leq M. \quad (3.25)$$

Demostración: Construimos el cuadrilátero $ABCD$ y lo dividimos en dos triángulos geodésicos ABC y ACD como en la figura 3.4 y aplicamos el lema 3.0.5 a cada uno de los triángulos ABC y ACD .

□

Fig. 3.4: Cuadrilátero $ABCD$.

Proposición 3.0.4. La función $|\cdot|_{\rho_i} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función longitud de Chiswell.

Demostración: Consideremos un triángulo geodésico $0\rho_i(g)(0)\rho_i(g')(0)$ donde $g, g' \in \Gamma$. Denotamos por $\pi^i(g')$ a la proyección del punto $\rho_i(g')(0)$ en el segmento $0\rho_i(g)(0)$, es decir, $\pi^i(g')$ es el punto más cercano a $\rho_i(g')(0)$ que se encuentra en el segmento $0\rho_i(g)(0)$ como se muestra en la figura 3.5.

Si $\pi^i(g')$ está en el interior del segmento $0\rho_i(g)(0)$, entonces el ángulo que se forma al intersectar la geodésica de proyección y el segmento $0\rho_i(g)(0)$ es un ángulo recto para los triángulos $0\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$ y $\rho_i(g)(0)\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$. En caso de que el punto $\pi^i(g')$ sea 0 o $\rho_i(g)(0)$, el triángulo $0\rho_i(g)(0)\rho_i(g')(0)$ debe tener un ángulo mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$ en cualquiera de ellos.

Ahora, para mostrar la propiedad III, debemos verificar que se cumple la siguiente convergencia haciendo uso de la definición 3.0.7, y de la convergencia en el sentido de Gromov. Primero debemos probar la siguiente expresión.

$$[g, g'] = \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i d(0, \pi^i(g')). \quad (3.26)$$

Sea $\ell_i = d(\pi^i(g'), 0)$ y $\ell'_i = d(\pi^i(g'), \rho_i(g)(0))$. Supongamos que ambas cantidades no están acotadas, así

$$\ell_i + \ell'_i = d(\pi^i(g'), 0) + d(\pi^i(g'), \rho_i(g)(0)) = d(0, \rho_i(g)(0)) = |g|_{\rho_i}. \quad (3.27)$$

Usando el lema 3.0.5, para i suficientemente grande tenemos

$$\left| |g'|_{\rho_i} - \ell_i - d(\pi^i(g')(0), \rho_i(g')(0)) \right| \leq c \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (3.28)$$

$$\left| |g^{-1}g'|_{\rho_i} - \ell'_i - d(\pi^i(g')(0), \rho_i(g')(0)) \right| \leq c \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (3.29)$$

Por lo tanto,

$$\left| 2\ell_i - |g'|_{\rho_i} - |g|_{\rho_i} + |g^{-1}g'|_{\rho_i} \right| \leq 2c \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (3.30)$$

Multiplicamos por ϵ_i obtenemos 3.26 para el caso no acotado.

Análogamente, supongamos que tanto ℓ_i como ℓ'_i están acotadas superiormente por alguna constante N que es independiente de i . Así, las desigualdades 3.28 y 3.29 se siguen cumpliendo si reemplazamos la constante $c \left(\frac{\pi}{2} \right)$ por $c \left(\frac{\pi}{2} \right) + 2N$. Por lo que obtenemos

$$\left| 2\ell_i - |g'|_{\rho_i} - |g|_{\rho_i} + |g^{-1}g'|_{\rho_i} \right| \leq 2c \left(\frac{\pi}{2} \right) + 4N \quad (3.31)$$

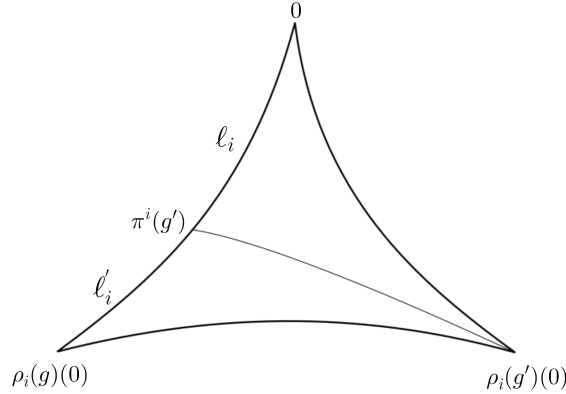


Fig. 3.5: Triángulo $0\rho_i(g)(0)\rho_i(g')(0)$.

Sean g, g', g'' elementos de Γ tales que

$$[g, g'] < [g', g'']. \quad (3.32)$$

Sean $\pi^i(g')$ y $\pi^i(g'')$ las proyecciones de los puntos $\rho_i(g')(0)$ y de $\rho_i(g'')(0)$ en el segmento $0\rho_i(g)(0)$, respectivamente. Utilizando la expresión 3.26, tenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(\pi^i(g'), \pi^i(g'')) = \infty. \quad (3.33)$$

Dados las proyecciones de los puntos $\rho_i(g')(0)$ y $\rho_i(g'')(0)$, podemos construir un cuadrilátero $\rho_i(g'')(0)\pi^i(g'')\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$ con lados geodésicos, para luego acotar las sumas de las distancias de los puntos que lo conforman.

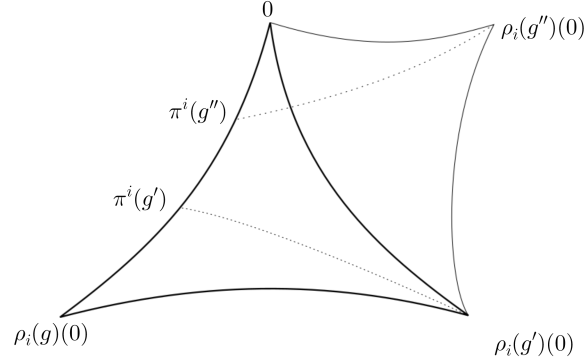


Fig. 3.6: Cuadrilátero $\rho_i(g'')(0)\pi^i(g'')\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$.

Notemos que los ángulos en los vértices $\pi^i(g'')$ y $\pi^i(g')$ son mayores o iguales a $\frac{\pi}{2}$, por lo que podemos aplicar el corolario 3.0.1. Así

$$\left| |(g')^{-1}g''|_{\rho_i} - d(\pi^i(g''), \rho_i(g'')(0))d(\pi^i(g')(0), \pi^i(g'')) - d(\pi^i(g'), \rho_i(g')(0)) \right| \leq M, \quad (3.34)$$

para i suficientemente grande.

Nuevamente aplicamos el lema 3.0.5

$$\left| |g''|_{\rho_i} - d(0, \pi^i(g'')) - d(\rho_i(g'')(0), \pi^i(g'')) \right| \leq c \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (3.35)$$

y

$$\left| |g'|_{\rho_i} - d(0, \pi^i(g')) - d(\rho_i(g')(0), \pi^i(g')) \right| \leq c \left(\frac{\pi}{2} \right) + 2N. \quad (3.36)$$

De aquí que, después de multiplicar por ϵ_i , tenemos

$$[g', g''] = \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i d(0, \pi^1(g')) \quad (3.37)$$

Por lo anterior $[g, g'] = [g', g'']$. Con esto concluimos que la función $\left| \cdot \right|_{\rho_i}$ es efectivamente una función longitud en el sentido de Chiswell.

Definición 3.0.9. Dada una acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$. Decimos que una acción tiene pequeños estabilizadores de arco si cada subgrupo de Γ que deja invariante un segmento no degenerado de \mathcal{T} es elemental. Dicho de otra manera, cada subgrupo contiene un subgrupo abeliano de índice finito.

Teorema 3.0.4. Consideremos una sucesión (ρ_i) de representaciones fieles y discretas de Γ en $Isom(\mathbb{H}^2)$. Entonces la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es minimal y tiene pequeños estabilizadores de arco.

Demostración: Primero veamos que la acción es minimal. Para esto debemos encontrar un elemento $g \in \Gamma$ tal que $|g^2| = 2|g| \neq 0$.

Sean g_1, \dots, g_k , $k \in \mathbb{N}$, elementos de Γ para los cuales el mínimo se alcanza. Sabemos que esto es posible pues de nuestra normalización, se tiene la propiedad del mínimo para la función $\max_j \{d(x, \rho_i(g_j)(0))\}$, donde $g_i \in \mathcal{G}$ y \mathcal{G} es un grupo de generadores. Además, $|g_j| \neq 0$. Notemos que $|g_j|_{\rho_i} \rightarrow \infty$.

Consideremos el triángulo geodésico $0\rho_i(g_j)(0)\rho_i(g_j^2)(0)$ y sea $p \in \mathbb{H}^n$ un punto que no está en el eje de ningún g_j , con $1 \leq j \leq k$. Si el ángulo en el vértice $\rho_i(g_j)(0)$ está acotada

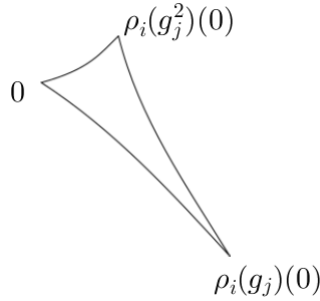


Fig. 3.7: Triángulo $0\rho_i(g_j)(0)\rho_i(g_j^2)(0)$.

inferiormente por una constante $\alpha > 0$ independiente de i , aplicamos de nuevo el lema 3.0.5, donde $AB + BC = d(0, \rho_i(g_j)(0)) + d(\rho_i(g_j)(0), \rho_i(g_j^2)(0))$ y $AC = d(0, \rho_i(g_j^2)(0))$, tenemos

$$\left| |g_j^2|_{\rho_i} - 2|g_j|_{\rho_i} \right| \leq c(\alpha). \quad (3.38)$$

Entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i \left| |g_j^2|_{\rho_i} - 2|g_j|_{\rho_i} \right| = 0 \quad (3.39)$$

En consecuencia $|g_j^2| = 2|g_j|$. Por lo anterior, podemos suponer que el ángulo en el vértice $\rho_i(g_j)(0)$, de cada triángulo $0\rho_i(g_j)(0)\rho_i(g_j^2)(0)$ con $1 \leq i \leq k$, tiende a 0 siempre que

i tienda a ∞ .

Entonces el gradiente de cada función $d(\cdot, \rho_i(g_j)(\cdot))$ en x es colinear al vector en x tangente a la geodésica que une a x con el eje de $\rho_i(g_j)$ si g es un elemento hiperbólico, o la geodésica que une x y al punto fijo de g si g es un elemento parabólico.

Debido a que el origen es un mínimo de la función $\max_j \{d(\cdot, \rho_i(g_j)(\cdot))\}$, entonces existen dos elementos g_1, g_2 tales que el ángulo entre los vectores gradientes de las dos funciones correspondientes en 0 es mayor o igual a $\pi/2$.

Empleamos el siguiente lema

Lema 3.0.6. Sean $g_1, g_2 \in \Gamma$. Entonces $|g_1 g_2| \neq 0$ y en consecuencia se cumple

$$d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2)(0)) \rightarrow \infty \quad \text{siempre que } i \rightarrow \infty \quad (3.40)$$

y los ángulos en los vértices $\rho_i(g_1^{-1})(0)$ y $\rho_i(g_2)(0)$ del triángulo $0\rho_i(g_1^{-1})(0)\rho_i(g_2)(0)$ tienden a 0.

Demostración: Sean $g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}$ elementos de Γ . La distancia entre los elementos $g_1^{-1}(0)$ y $g_2(0)$ es distinta de 0 pues

$$d(g_1^{-1}(0), g_2(0)) = |g_1 g_2| = d(g_1^{-1}(0), g_2(0)) = d(0, g_1 g_2(0)) \neq 0. \quad (3.41)$$

En consecuencia, $d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2)(0)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ y los ángulos en $\rho_i(g_1^{-1})(0)$ y $\rho_i(g_2)(0)$ deben tender a 0, pues si no, tendríamos $|g_1 g_2| = 0 = d(0, g_1 g_2(0))$ y el triángulo sería degenerado.

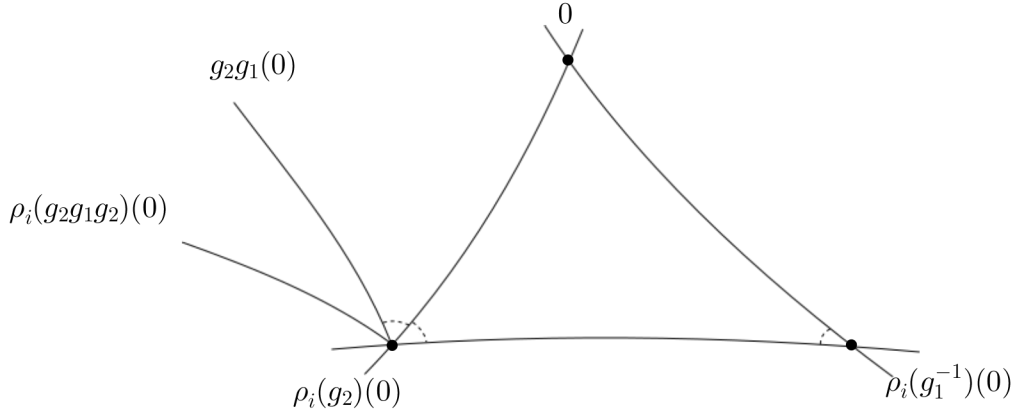
Aplicando nuevamente el lema 3.0.5

$$\left| d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2 g_1 g_2)(0)) - 2d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2)(0)) \right| \leq C \left(\frac{\pi}{4} \right) \quad (3.42)$$

entonces $|(g_1 g_2)^2| = 2|g_1 g_2| \neq 0$. Por tanto, la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es mínima.

A continuación, veamos que la acción tiene pequeños estabilizadores de arco. Procedemos por contradicción.

Recordemos que un grupo kleiniano no elemental contiene a un grupo libre en dos generadores $\langle g, h \rangle$. Tomemos un arco κ invariante bajo g y h y contenido en un segmento $pf(p)$.

Fig. 3.8: Triángulo $0\rho_i(g_1^{-1})(0)\rho_i(g_2)(0)$

Para $\gamma \in \Gamma$ y $0 < x < 1$, sea $x\gamma(p)$ el punto del arco $p\gamma(p)$ a una distancia $xd(p, \gamma(p))$ del punto p . Si $x \in [a, b] \subset [0, 1]$, entonces el arco κ es el conjunto $xf(p)$, que denotamos como $[a, b]f(p)$.

Sea γ_i^g la geodésica que une a 0 con $\rho_i(g)(0)$ parametrizada por la longitud de arco de manera que tiene velocidad unitaria, y sea γ_i^{gf} la geodésica con velocidad unitaria entre 0 y $\rho_i(gf)(0)$. Entonces la geodésica $\rho_i(g) \circ \gamma_i^f$ une a $\rho_i(g)(0)$ y $\rho_i(gf)(0)$ y está parametrizada con velocidad unitaria.

Primero veamos que se cumple el siguiente lema.

Lema 3.0.7. Sea $\epsilon > 0$ y sea $a < a' < b' < b$. Si i es suficientemente grande y

$$a'd(0, \rho_i(f)(0)) \leq t \leq b'd(0, \rho_i(f)(0)). \quad (3.43)$$

Entonces

$$d(\rho_i(g) \circ \gamma_i^f(t), \gamma_i^f(t + d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0))) \leq \epsilon. \quad (3.44)$$

Demostración: Usando la expresión $[f, gf] = \frac{1}{2}(|f| + |gf| - |f^{-1}gf|)$ y el hecho de $[f, gf] = \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i d(0, \pi^i(gf))$, tenemos

$$\frac{\epsilon_i d(0, \pi^i(gf))}{\epsilon_i d(0, \rho_i(f)(0))} \rightarrow_{i \rightarrow \infty} \frac{[f, gf]}{|f|} \quad (3.45)$$

esto es

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d(0, \pi^i(gf))}{d(0, \rho_i(f)(0))}. \quad (3.46)$$

Entonces la distancia ℓ_i de 0 a la proyección del punto $\rho_i(gf)(0)$ en el segmento $0\rho_i(f)(0)$ satisface

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ell_i}{d(0, \rho_i(f)(0))} \geq b, \quad (3.47)$$

ya que $b'd(0, \rho_i(f)(0)) < bd(0, \rho_i(f)(0))$ y $\pi^i(gf)$ es el punto más cercano a $\rho_i(gf)(0)$. La distancia del punto $\gamma_i^f(b'd(0, \rho_i(f)(0)))$ a su proyección tiende a infinito por el lema 3.0.5.

Por lo anterior, si $t \leq b'd(0, \rho_i(f)(0))$ y si i es suficientemente grande, tenemos

$$d(\gamma_i^f(t), \gamma_i^{gf}(t)) \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.48)$$

De manera similar, consideramos el triángulo geodésico $0\rho_i(gf)(0)\rho_i(g)(0)$, si i es suficientemente grande y $t \geq a'd(0, \rho_i(f)(0))$, tenemos

$$d(\gamma_i^{gf}(t), \rho_i(g) \circ \gamma_i^f(t + d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0)))) \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.49)$$

Sumando las expresiones 3.48 y 3.49 tenemos el resultado deseado.

□

El resultado anterior establece que en el segmento

$$\gamma_i^f(a'd(0, \rho_i(f)(0)))\gamma_i^f(b'd(0, \rho_i(f)(0))) \subset 0\rho_i(f)(0),$$

la isometría g es cercana a la función traslación por la longitud $d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0))$.

Así, en un segmento $\gamma_i^f(a''d(0, \rho_i(f)(0)))\gamma_i^f(b''d(0, \rho_i(f)(0)))$ contenido en el segmento

$$\gamma_i^f(a'd(0, \rho_i(f)(0)))\gamma_i^f(b'd(0, \rho_i(f)(0))) \subset 0\rho_i(f)(0),$$

los conmutadores $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ y $[g, h^2] = gh^2g^{-1}(h^2)^{-1}$ actúan como traslación por 4ϵ .

Si ϵ es suficientemente pequeño, aplicando el lema de Margulis obtenemos que

$$\langle ghg^{-1}h^{-1}, gh^2g^{-1}(h^2)^{-1} \rangle \quad (3.50)$$

genera un grupo elemental, lo cual es una contradicción. □

El siguiente resultado será útil en la última sección para describir qué pasa con la distancia de traslación de un elemento hiperbólico.

Teorema 3.0.5. Sea (ρ_i) una sucesión de representaciones fieles y discretas del grupo Γ en el grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$, sea (ϵ_i) una sucesión que tiende a 0 tal que $(\epsilon_i) \Big|_{\rho_i}$ converge a una función longitud en el sentido de Chiswell asociado con una acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$. Entonces $\epsilon_i \mathcal{L}(\rho_i)$ converge a $\Delta(\mathcal{T})$ para la topología producto de $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$.

Demostración: Si la distancia de traslación $\delta(g)$ es distinta de cero, entonces la proyección q del elemento $g^2(p)$ en el segmento $pg(p)$ es más cercano a $g(p)$ que al punto p . Así, el segmento $qg(q)$ es un dominio fundamental para el eje de g , ya que Γ es un grupo no elemental. Tenemos $\delta(g) = d(q, g(q))$.

Denotamos por q_i la proyección ortogonal de $\rho_i(g^2)(0)$ en la geodésica $0\rho_i(g)(0)$. Ya que la distancia entre q_i a 0 es mayor a la distancia entre q_i y $\rho_i(g)(0)$, por el lema 3.0.5 el ángulo entre las geodésicas $q_i\rho_i(g)(q_i)$ y $\rho_i(g)(q_i)\rho_i(g^2)(0)$ tiende a 0, así como el ángulo entre las geodésicas $q_i\rho_i(g)(q_i)$ y $q_i\rho_i(g^2)(0)$. Entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i d(q_i, \rho_i(g)(q_i)) = d(q, g(q)) = \delta(g), \quad (3.51)$$

cuando $(\epsilon_i) \rightarrow 0$. Así la geodésica por pedazos en \mathbb{H}^n que se obtiene pegando los arcos geodésicos $\rho_i(g^p)(q_i)\rho_i(g^{p+1})(q_i)$, lo cual es posible debido al lema del pegado, tienen esquinas cuyos ángulos tienden a $\pi/2$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Si $\delta(g) = 0$, entonces la proyección de $g^2(p)$ en el segmento $pg(p)$ es más cercana al punto p que el punto $g(p)$. Denotamos por q_i al punto medio de la geodésica $0\rho_i(g)(0)$ y sea $\pi_i(g^2)$ la proyección de $\rho_i(g^2)(0)$ en la geodésica $0\rho_i(g)(0)$, así

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i d(\rho_i(g)(0), \pi_i(g^2)) \geq \frac{1}{2} d(p, g(p)). \quad (3.52)$$

Nota 3.0.1. Recordemos la fórmula de Gauss-Bonnet.

Teorema 3.0.6. Sean $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ángulos de un triángulo geodésico Υ , entonces

$$\text{área}(\Upsilon) = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (3.53)$$

Demostración: Esta prueba puede consultarse en [Rat94], lema 3.5.5.

□

Del teorema 3.0.6 se desprenden varios hechos, pero resaltamos el siguiente: el área de un triángulo geodésico es menor a π y así su círculo inscrito tiene un área menor a π . En consecuencia, el radio de dicho círculo está acotado por una constante, digamos $C/2$. Sean v_1, v_2, v_3 puntos en cada lado del triángulo geodésico, entonces la distancia entre dos de estos puntos está acotada por una constante C .

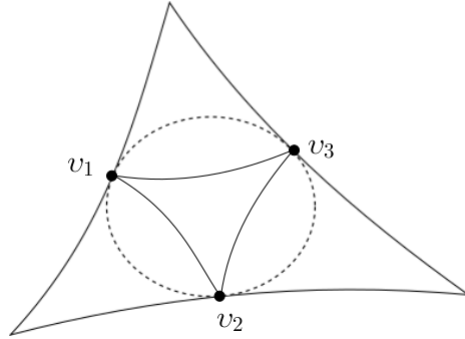


Fig. 3.9: Círculo inscrito en triángulo Υ .

Sean $\rho_i(g)(q_i)$, z_i puntos en lados distintos del triángulo $\pi_i(g^2)\rho_i(g)(0)\rho_i(g^2)(0)$. Aplicamos la consecuencia del teorema 3.0.6 y obtenemos que la distancia entre estos dos puntos es menor a una constante C .

La sucesión (ϵ_i) tiende a 0 y $d(z_i, q_i)$ es una cantidad finita y pequeña por lo que

$$\epsilon_i d(q_i, \rho_i(g)(q_i)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \quad (3.54)$$

Como $\ell_{\rho_i} = d(q_i, \rho_i(g)(q_i))$, entonces $\epsilon_i \ell_{\rho_i}(g) \rightarrow \delta(g)$.

□

Usando la construcción del árbol dual veremos que acciones mínimas con estabilizadores pequeños en árboles reales son duales a las laminaciones geodésicas medibles. En consecuencia, cuando la dimensión de las variedades hiperbólicas es 2, la compactificación de Thurston y la compactificación de Morgan-Shalen de espacios de Teichmüller son equivalentes.

En esta sección definiremos el árbol dual a una laminación geodésica medible λ asignando una acción a λ en un árbol real \mathcal{T} .

A partir de este momento, denotamos por Γ a un grupo fuchsiano que actúa en \mathbb{H}^2 y sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica medible que consiste solamente de geodésicas ℓ . Si bien la laminación medible no necesariamente es geodésica, este caso no se va a discutir en este trabajo. Para más información de este caso, ver [Ota96].

El primer paso para asignar a λ una acción de Γ en un árbol real es descomponer a λ de la siguiente manera:

Descomponemos a λ en una unión disjunta de un número finito de componentes mínimas (ver proposición (1.3.5)). Reemplazamos cada geodésica ℓ por la familia de curvas equidistantes de ℓ a una distancia t , donde $t \leq r$. Asignamos a este paquete de hojas como medida transversal la medida de Lebesgue, así la masa total de μ es $\mu(J)$ donde J es un arco suficientemente pequeño transversal a ℓ , esto es, la masa total es igual al peso transversal de la curva ℓ .

Haciendo lo anterior, para r suficientemente pequeña obtenemos un conjunto λ' cerrado el cual es una unión disjunta de conjuntos minimales excepcionales de λ o conjuntos de geodésicas cerradas.

Cada hoja de la preimagen $\tilde{\lambda}'$ de λ' en \mathbb{H}^2 es una hoja de la preimagen $\tilde{\lambda}$ o una curva a distancia constante $t \leq r$ de una geodésica que es un levantamiento de una geodésica cerrada de λ .

Lema 3.0.8. Las dos componentes conexas de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ tienen cerraduras disjuntas en \mathbb{H}^2 .

Demostración: Por construcción, cada componente de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ está contenido en una única componente de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$. Supongamos que las dos componentes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ tienen cerraduras que se intersectan, entonces las cerraduras de las dos componentes de la preimagen $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$ también se intersectan.

Entonces estas cerraduras deben intersectarse en una geodésica la cual es un levantamiento de una hoja aislada de λ . Hemos visto que las únicas hojas aisladas son las hojas compactas, pero estas no pueden ser aisladas por el engrosamiento λ' de λ . Entonces las cerraduras de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ no tienen ningún punto en común.

□

Ahora definimos una partición \mathcal{T} de \mathbb{H}^2 por conjuntos cerrados. Cada conjunto cerrado es la cerradura de alguna componente $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ o una hoja de $\tilde{\lambda}'$ la cual no está contenida en la cerradura de alguna componente $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$. Por el lema anterior, \mathcal{T} es en efecto una partición.

Definimos una distancia en \mathcal{T} de la siguiente manera. Sean dos puntos de \mathcal{T} que son cerraduras de componentes C y C' del complemento de $\tilde{\lambda}'$. Si el tamaño del engrosamiento es suficientemente pequeño, entonces existe un punto $x \in C$ y un punto $x' \in C'$ tal que la geodésica xx' es transversal a $\tilde{\lambda}'$ e interseca a cada hoja en a lo más un punto (debido a la definición de laminación geodésica medible). Así, la intersección de cada conjunto cerrado de \mathcal{T} con xx' es un segmento. La medida transversal a $\tilde{\lambda}'$ asigna la geodésica xx' una medida positiva en $xx' \cap \tilde{\lambda}'$. Por integración, esta medida induce una distancia sobre el conjunto de cerrados de \mathcal{T} que intersectan a xx' .

Lema 3.0.9. La distancia d es independiente de la elección de los puntos x , x' y de $\tilde{\lambda}'$.

Demostración: Sean ω y ω' dos arcos geodésicos que unen a los puntos $x, x' \in C$ con los $y, y' \in C'$ y sea $k \in C$ el arco que une al punto x con x' y $k' \in C'$ es el arco que une a y con y' . Entonces cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ que interseca a ω también se interseca con ω' . La función de $\tilde{\lambda}' \cap \omega$ a $\tilde{\lambda}' \cap \omega'$ es un homeomorfismo que translada la masa μ_ω a $\mu_{\omega'}$, así que las masas totales de μ_ω y $\mu_{\omega'}$ coinciden y $d(C, C')$ está bien definida.

□

Proposición 3.0.5. La función d es una distancia que convierte a \mathcal{T} en un árbol real. La acción natural de Γ en \mathcal{T} es isométrica.

Demostración: Es claro que $d(C, C'') \geq 0$ y $d(C, C') = 0$ si y sólo si $C = C'$ pues son laminaciones geodésicas disjuntas. Debemos verificar la desigualdad del triángulo. Si el engrosamiento λ' es lo suficientemente pequeño, entonces existen $x \in C$, $x' \in C'$, $x'' \in C''$ tales que las geodésicas xx' , xx'' y $x'x''$ intersecan cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ en al menos un punto. Cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ interseca al arco xx'' y a la unión $xx' \cup x'x''$ en un punto, por lo tanto, la función d satisface que $d(C, C'') \leq d(C, C') + d(C', C'')$. En consecuencia, d es una distancia. Sean C y C' dos subconjuntos cerrados de \mathcal{T} y sea xx' una geodésica de \mathbb{H}^2 entre $x \in C$ y $x' \in C'$ que interseca cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ en un punto. Sea CC' el conjunto de subconjuntos cerrados de \mathcal{T} que interseca al segmento geodésico xx' . Llamamos segmento CC' al arco construido entre los puntos C y C' . Los puntos en el segmento CC' son subconjuntos cerrados de la partición \mathcal{T} que interseca al arco

geodésico xx' y en consecuencia la intersección CC' y CC'' coincide con el conjunto de subconjuntos cerrados de \mathcal{T} que intersecta a xx' y xx'' .

Sea D un conjunto cerrado en la partición \mathcal{T} . Existe una hoja $\ell \in \tilde{\lambda}'$ en D de manera que las hojas en $\tilde{\lambda}'$ que intersectan a xx' y xx'' también intersectan a $x(\ell \cap xx')$ pues $\tilde{\lambda}'$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $CC' \cap CC'' = CD$.

Finalmente fijamos un punto $C \in \mathcal{T}$ y notamos que \mathcal{T} es una unión de segmentos $C\gamma(C)$ y por lo tanto es un árbol simplicial, entonces es un árbol real.

□

Definición 3.0.10. El árbol que se acaba de construir es llamado el árbol dual a la laminación geodésica medible y es denotado por \mathcal{T}_λ .

Definición 3.0.11. Sea $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica medible. Una acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ que es isométrica a la acción $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ es llamada geométrica.

Definición 3.0.12. El árbol que construimos es denominado árbol dual de la laminación geodésica medible λ y lo denotamos por \mathcal{T}_λ . La acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ isométrica a la acción $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ con λ una laminación geodésica medible es llamada geométrica.

En la construcción del árbol dual, hemos visto que las laminaciones geodésicas medibles pueden ser asociadas a una acción de Γ en un árbol real \mathcal{T} , pero no cómo son estas acciones. En 1990, Richard Skora probó el teorema 3.0.7 en el cual estas acciones se caracterizan, véase [Sko90].

Teorema 3.0.7. Sea \mathcal{T}_λ el árbol dual de una laminación geodésica medible $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$. Sea $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ una acción mínima no trivial con pequeños estabilizadores de arco del grupo Γ sobre un árbol real \mathcal{T} , tal que la distancia de traslación de elementos parabólicos de Γ es 0. Entonces existe una laminación geodésica medible λ , tal que la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es isométrica a la acción de Γ sobre \mathcal{T}_λ .

Demostración: Se procede por contradicción y utilizando la construcción de un árbol dual con una laminación geodésica medible la cual se compone por curvas no necesariamente geodésicas.

Los detalles de esta demostración se pueden consultar en [Ota96], sección 8.4.

□

4. LAMINACIONES GEODÉSICAS Y ÁRBOLES REALES

En este capítulo, vamos a considerar una superficie S compacta con característica de Euler estrictamente negativa. Identificamos al interior de S con el cociente \mathbb{H}^2/Γ , donde Γ es un grupo fuchsiano. Para mostrar el teorema objetivo de este trabajo, necesitamos relacionar una laminación geodésica en \mathbb{H}^2/Γ con un árbol real, con la finalidad de utilizar la propiedad de continuidad en algunos espacios métricos. Esto se dará mediante una función $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ continua y Γ -equivariante. Antes de ver estos resultados, presentamos algunos conceptos de superficies hiperbólicas.

Definición 4.0.1. Un pantalón P es una superficie homeomorfa a una esfera con tres agujeros, es decir, a una esfera con 3 componentes en su frontera.

También es llamado un par de pantalones.

Los pantalones (figura 4.1) son superficies orientables, compactas y con frontera. Estos pueden partir a la superficie mediante las curvas que los definen.

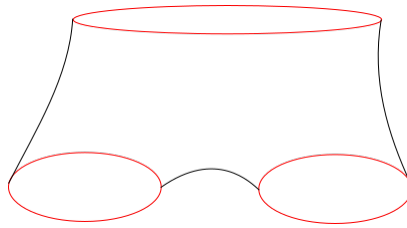


Fig. 4.1: Pantalones

Definición 4.0.2. Sea S una superficie orientable cuyo género es mayor o igual a 2. Una descomposición en pantalones de una superficie S es un conjunto de curvas no orientadas y mutuamente disjuntas que descomponen a S en pantalones.

Teorema 4.0.1. Sea S una superficie orientable con género mayor o igual a 2. Dada una descomposición en pantalones D_P de S , ésta descompone a S en $2g - 2$ en pantalones. Además D_P contiene $3g - 3$ curvas.

Demostración: Esta descomposición puede encontrarse en [Rat94] sección 9,7 y en [IT91] sección 3.2.1.

□

Ejemplo 4.0.1. Sea S una superficie orientable de género 2. Esta superficie admite una descomposición en 2 pantalones y 3 curvas.

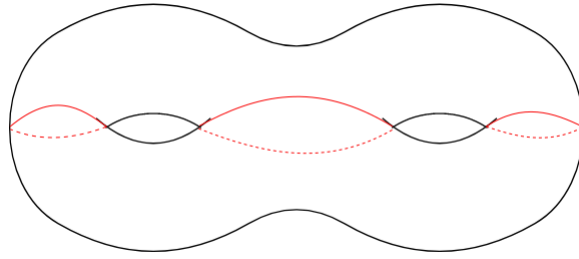


Fig. 4.2: Descomposición en pantalones de una 2-variedad hiperbólica.

Definición 4.0.3. Sea Γ un grupo y sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y $g \in \Gamma$. Decimos que f es Γ -equivariante si

$$f(gx) = gf(x). \quad (4.1)$$

Lema 4.0.1. Sea \mathcal{T} un árbol dual. Entonces existe un conjunto numerable $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ tal que

- I. \mathcal{S} es invariante bajo Γ .
- II. Para todo segmento no degenerado $[ab] \subset \mathcal{T}$, la intersección $\mathcal{S} \cap [ab]$ es denso en $[ab]$.
- III. Los vértices de \mathcal{T} están contenidos en \mathcal{S} .
- IV. Todo elemento de Γ que tiene un punto fijo en \mathcal{T} también tiene un punto fijo en \mathcal{S} .

Demostración: Sea $p \in \mathcal{T}$. Si la acción de Γ es minimal, entonces el árbol real \mathcal{T} es una unión numerable creciente de árboles simpliciales T_i . Tomemos la envolvente conexa de cada T_i (definición 1.2.15) de los puntos $\gamma_j(p)$ para $j \leq i$. Todo segmento $[ab]$ está contenido en un árbol real T_i para i suficientemente grande, entonces todo vértice de \mathcal{T}

también es vértice de T_i para i suficientemente grande.

Sea \mathcal{S}_i un conjunto numerable y denso en T_i de manera que contenga todos los vértices de T_i , sea \mathcal{S}' el conjunto de elementos de \mathcal{S}_i bajo la acción de Γ y añadimos a \mathcal{S}' el conjunto de puntos fijos que tienen un único punto fijo obteniendo el conjunto \mathcal{S} .

□

Definición 4.0.4. Sea \mathcal{T} un árbol real. Sea $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ una acción de Γ en \mathcal{T} , sea \tilde{F} la preimagen de una laminación medible $F \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$. Decimos que una función $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ es transversal a lo largo de \tilde{F} , si es una función continua y Γ -equivariante tal que $f|_{U_i}(\tilde{F})$ con U_i abierto, se factoriza de la siguiente manera

$$f : U_i \xrightarrow{f_i} (0,1) \times (0,1) \xrightarrow{p} (0,1) \rightarrow \mathcal{T} \quad (4.2)$$

donde f_i es la proyección sobre el segundo factor y p es una función que toma valores de un segmento de \mathcal{T} isométrico al intervalo $[ab] \subset \mathbb{R}$ y se obtiene integrando la medida transversal $\mu_i : x \rightarrow a + \int_0^x d\mu_i$.

Proposición 4.0.1. Sea $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ una acción no trivial y minimal del grupo Γ en un árbol real \mathcal{T} tal que la distancia de traslación de elementos parabólicos es 0. Entonces existe una laminación medible $F \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ y una función $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ transversal a lo largo de \tilde{F} , preimagen de F en \mathbb{H}^2 .

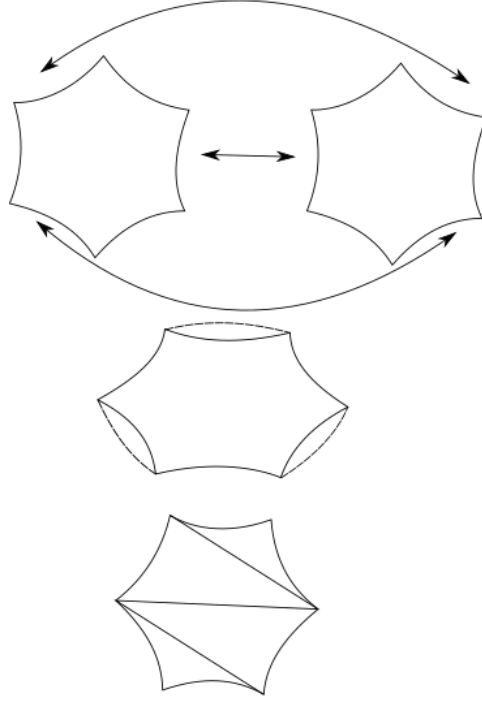
Demostración: Vamos a construir la laminación F utilizando una triangulación de S .

Consideremos \mathbb{H}^2/Γ y sea S una superficie compacta encajada en \mathbb{H}^2/Γ que es un retracto por deformación de \mathbb{H}^2/Γ .

Fijamos una descomposición en pantalones, para S . Consideramos una colección $\{g_1, \dots, g_r\}$ de geodésicas disjuntas y encajadas en \mathbb{H}^2/Γ que dividen a S en una unión de pantalones. Hemos supuesto que la superficie S es compacta, así que las curvas que forman estos pantalones son geodésicas. Como S tiene frontera, algunas de las geodésicas que conforman los pantalones están en la frontera de S .

Podemos triangular cada pantalón de la siguiente manera: puesto que cada pantalón se obtiene identificando dos hexágonos, entonces triangulamos cada hexágono. Esto se muestra en la figura 4.3.

Tomamos como triangulación de S a la unión de todas las triangulaciones de los pantalones. Denotamos por T a la triangulación obtenida de la superficie S y sea \tilde{T} su

Fig. 4.3: Triangulación de la superficie S .

preimagen en el cubriente universal $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^2$. Vamos a definir la función f y la laminación F en el 0-esqueletos, después en el 1-esqueleto y por último en el 2-esqueleto.

El 0-esqueleto de las triangulaciones de los pantalones están contenidos en la preimagen de las geodésicas g_i y en la frontera de \tilde{S} . Para cada componente de ∂S , escogemos un levantamiento \tilde{c} , el cual es invariante bajo un elemento parabólico $\gamma \in \Gamma$, cuya acción sobre \mathcal{T} tiene un punto fijo x_γ contenido en \mathcal{S} .

Definimos $f|_{\tilde{c}} = x_\gamma$. Extendemos esta función por medio de la equivariancia. Sea $\gamma_i \in \Gamma$ un elemento que representa a la geodésica g_i , entonces γ_i deja invariante una curva \tilde{g}_i preimagen de g_i . Si $\delta(\gamma_i) = 0$, entonces el elemento γ_i tiene un punto fijo x_{γ_i} en \mathcal{S} , definamos $f|_{\tilde{g}_i} = x_{\gamma_i}$ y extendemos a f de manera equivariante en la preimagen de g_i .

Supongamos que la distancia de traslación es distinta de cero, es decir, $\delta(\gamma_i) \neq 0$ por que lo que el elemento γ_i deja un eje invariante $A(\gamma_i)$ en \mathcal{T} . Sea $p \in \mathcal{S}$ y sea $[p, \gamma_i(p)) \subset A(\gamma_i)$ un dominio fundamental para la acción del elemento γ_i , y consideremos $F_i = [a, \gamma_i(a)) \subset \tilde{g}_i$ un dominio fundamental de γ_i sobre su eje \tilde{g}_i en \mathbb{H}^2 .

Tomemos una medida positiva μ sobre F_i sin átomos, cuyo soporte es un conjunto de Cantor K_i con masa total $\delta(\gamma_i) = d(p, \gamma_i(p))$, y que cumple con

- I. Los vértices de \tilde{T} contenidos en F_i se encuentran en componentes del complemento de K_i .
- II. La función $f : F_i \rightarrow [p\gamma_i(p)]$ definida como $f(x) = p + \int_p^x d\mu$ induce una biyección entre las componentes del complemento de K_i y los puntos de $[p\gamma_i(p)] \cap \mathcal{S}$.

Extendemos esta función por equivariancia a la preimagen de g_i .

Hemos construido una función f continua con dominio las curvas g_i y la preimagen de la frontera de S , además por el lema 4.0.1 también es Γ -equivariante. Debido a las condiciones puestas a la medida μ , ésta es invariante bajo Γ y su soporte es localmente un conjunto de Cantor contenido en las componentes de la preimagen de las curvas g_i con distancia de traslación distinta de cero.

La función f está definida en un subcomplejo del 1-esqueleto de la triangulación que contiene a todo el 0-esqueleto. Sea $k = [ab] \subset \mathcal{T}$ un arco y sean $f(a), f(b) \in \mathcal{S}$. El segmento $f(a)f(b)$, por definición de árbol real, se identifica con el segmento $[0, d(f(a)f(b))]$. Escogemos una medida μ_k sobre k sin átomos, con soporte un conjunto de Cantor K en el interior del arco k con masa total $d(f(a), f(b))$, y es tal que $f : k \rightarrow [f(a)f(b)]$ definida como $f(x) = f(a) + \int_a^x d\mu$ induce una biyección entre las componentes del complemento de K y los puntos de $[f(a)f(b)] \cap \mathcal{S}$. Extendemos esta función a una función equivariante definida sobre toda la órbita de k .

Para extender f al 2-esqueleto de \tilde{T} , consideramos un triángulo $\Delta \subset \tilde{T}$ y denotamos por k_1, k_2, k_3 a sus lados. Las imágenes de k_1, k_2, k_3 bajo f tienen un punto en común, digamos $c \in \mathcal{S}$, esto por el lema 4.0.1, inciso III y porque elegimos a la función f en un subcomplejo del 1-esqueleto.

Por lo tanto, la preimagen $f^{-1}(c)$ es un intervalo I_i contenido en cada lado k_i . Sean $J_1 \subset k_1$ y $J_2 \subset k_2$ dos intervalos con un extremo en común q y con el otro extremo en el interior de I_1 o en I_2 , respectivamente. Entonces $f(J_1) = f(J_2)$. Si $i = 1, 2$, la medida $\mu|_{J_i}$ no tiene átomos con soporte un conjunto de Cantor K_i (en el interior de J_i). Por construcción, la función $f|_{J_i}$ induce una biyección entre los componentes conexos del complemento de K_i y $f(J_i) \cap \mathcal{S}$. Existe un homeomorfismo $h : J_1 \rightarrow J_2$ que transporta la medida μ_{k_1} a la μ_{k_2} .

Utilizando a h , construimos una laminación medible $\tilde{F} \cap \Delta \subset \Delta$ cuya intersección con cada lado k es igual al soporte de μ_k . (figura 4.4).

La función f está definida en la frontera de Δ . Extendemos esta función f a todo el triángulo T mediante una función continua la cual es constante en las hojas de $\tilde{F} \cap \Delta$

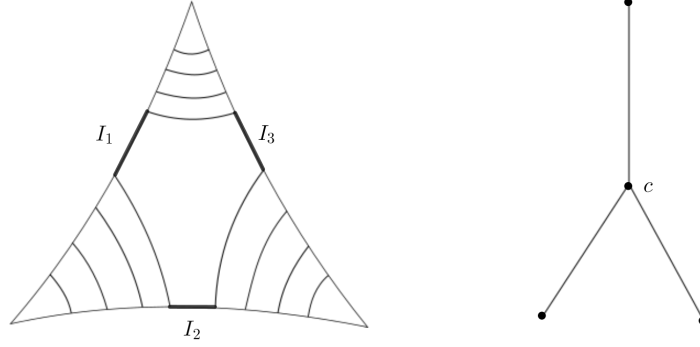


Fig. 4.4: Triángulos con la laminación medible.

y en las componentes del complemento de $\tilde{F} \cap \Delta$ en Δ . Luego, por equivariancia, la extendemos a la órbita del triángulo Δ . Por lo tanto, la unión de laminaciones $\tilde{F} \cap \Delta$ es una laminación medible $\tilde{F} \subset \tilde{S}$ invariante bajo la acción de Γ y disjunta de la frontera de \tilde{S} .

La función f definida en \tilde{S} es constante en las componentes de la frontera de S y eso permite extenderla de manera única a \mathbb{H}^2 y de tal forma que sea constante en las componentes conexas de $\mathbb{H}^2 - \tilde{S}$. Así, hemos construido una función $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ transversal a lo largo de la laminación \tilde{F} .

□

En este capítulo introducimos la noción de laminación geodésica realizada en un árbol. Esto es de nuestro interés pues será utilizada como una propiedad de continuidad en la topología de Gromov.

Definición 4.0.5. Sean μ una laminación geodésica en \mathbb{H}^2/Γ , $\tilde{\mu}$ su preimagen en \mathbb{H}^2 y \mathcal{T} un árbol real. Decimos que μ es realizada en \mathcal{T} si existe una función continua, Γ -equivariante $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ cuya restricción a cada hoja de $\tilde{\mu}$ es inyectiva.

Llamamos a f una *realización de la laminación μ en el árbol real \mathcal{T}* .

Ejemplo 4.0.2. Sea $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica que contiene una geodésica cerrada simple y sea $\bar{\mu} \in \Gamma$ representado por μ . Escogemos una triangulación de \mathbb{H}^2/Γ tal que μ esté contenida en un 1-esqueleto.

Sea $f : \mu \rightarrow A(\bar{\mu})/\bar{\mu}$ un homeomorfismo. Aplicando la proposición 4.0.1, podemos extender f a una función equivariante en \mathbb{H}^2 . Hemos definido una función Γ -equivariante en la preimagen del 1-esqueleto. La distancia de traslación en \mathcal{T} de $\bar{\mu}$ es distinta de cero.

Entonces μ es realizada.

Definición 4.0.6. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$ es monótona, si la preimagen de cada punto de \mathcal{T} es un intervalo acotado.

Definición 4.0.7. Sea μ una laminación medible en \mathbb{H}^2/Γ y sea $\tilde{\mu}$ su preimagen en \mathbb{H}^2 y sea \mathcal{T} un árbol real. Decimos que μ es débilmente realizada en \mathcal{T} si existe una función continua, equivariante $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ cuya restricción a cada hoja de $\tilde{\mu}$ es monótona.

Llamamos a f una *realización débil de la laminación μ en el árbol real \mathcal{T}* .

Definición 4.0.8. Sean λ y μ laminaciones medibles. Decimos que μ intersecta a λ si cada hoja del soporte de μ intersecta de manera transversal a una hoja del soporte de λ .

Lema 4.0.2. Sean μ y λ laminaciones geodésicas medibles. Si μ intersecta a λ , entonces existe un engrosamiento λ' de λ tal que para hoja $\ell \in \tilde{\mu}$ cumple lo siguiente

- I. ℓ intersecta a cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ de manera transversal en a lo más un punto.
- II. La intersección de ℓ con la cerradura de cada componente conexa de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ es vacía o un segmento acotado.

Demostración: Sea $r \in \mathbb{R}$. Repetimos el procedimiento que hicimos para construir el árbol dual, es decir, reemplazar cada geodésica cerrada g de la laminación λ por una familia de curvas a una distancia t de g tal que $t \leq r$. Denotamos por λ_r a la modificación de la laminación geodésica después del engrosamiento.

La geodésica ℓ de $\tilde{\mu}$ intersecta a cada hoja de $\tilde{\lambda}$ en a lo más un punto y entonces la intersección de ℓ con una hoja de $\tilde{\lambda}_r - \tilde{\lambda}$ debe ser vacía, un punto de intersección tangencial, un punto de intersección transversal o dos puntos. Si el punto de intersección es tangencial o son dos puntos, entonces la distancia entre la hoja ℓ y la geodésica $\tilde{\gamma}$ es menor a r . Sea $\gamma \in \Gamma$ un elemento hiperbólico tal que éste estabiliza a $\tilde{\gamma}$; es decir, que actúa de manera trivial sobre $\tilde{\gamma}$, y sea $r(\gamma) > 0$ una constante tal que, si una geodésica $\ell \in \mathbb{H}^2$ es disjunta de $\tilde{\gamma}$ y tampoco es asintótica a ésta, y está a una distancia menor a r de $\tilde{\gamma}$, entonces $\ell \cap \gamma(\ell)$ es distinta del vacío. La laminación λ solamente contiene un conjunto de hojas paralelas y el engrosamiento λ_r satisface al inciso I siempre que r sea suficientemente pequeña.

Falta probar el inciso II. Cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ divide a \mathbb{H}^2 , la intersección de ℓ con la cerradura de alguna componente conexa de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ es vacía o es un segmento. Una

semi-geodésica contenida en ℓ no puede estar totalmente contenida en una componente de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$, pues si ésto no ocurriera tendríamos una contradicción con la hipótesis de que μ interseca a λ . Por lo tanto, la intersección de la hoja ℓ con alguna componente de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ es un segmento acotado. Esto prueba el inciso II.

□

Proposición 4.0.2. Sea $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \longrightarrow \mathcal{T}_\lambda$ una acción del grupo Γ en la laminación geodésica medible λ y sea μ una laminación geodésica medible en \mathbb{H}^2/Γ que interseca a λ . Si estas condiciones se cumplen, entonces μ es débilmente realizada en \mathcal{T}_λ .

Demostración: Utilizamos el lema 4.0.2. Si $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ es la función canónica a partir construida del engrosamiento λ' dada por 4.0.2, entonces f realiza débilmente a μ en el árbol dual \mathcal{T}_λ .

□

Corolario 4.0.1. Sea \mathcal{T}_λ un árbol dual de una laminación geodésica medible λ . Consideremos una laminación geodésica $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ la cual es la unión del soporte de una laminación geodésica $\bar{\mu}$ y un número finito de geodésicas no compactas. Si $\bar{\mu}$ interseca a λ , entonces μ es débilmente realizada en \mathcal{T}_λ .

Demostración: Este corolario se desprende de la proposición 4.0.2. Escogemos un engrosamiento λ' tal que cada hoja de $\tilde{\mu}$ interseca cada hoja de $\tilde{\lambda}'$ de manera transversal en un sólo punto. Sabemos que cada semi-hoja de $\mu - \bar{\mu}$ se torna una espiral hacia las componentes $\bar{\mu}$ y como ésta interseca a λ , las medias hojas de $\tilde{\mu}$ no están contenidas totalmente en alguna componente de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$. Entonces la laminación μ es débilmente realizada en el árbol dual \mathcal{T}_λ .

□

Ahora vamos a mostrar que las definiciones 4.0.5 y 4.0.7 son equivalentes, primero encontraremos una función $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ tal que ésta realiza débilmente a una laminación geodésica μ . Para mostrar esto, vamos a utilizar el concepto de *vía de tren*, el cual es un conjunto de curvas encajadas en una superficie. Este concepto nos será útil para clasificar homeomorfismos.

La idea detrás de las vías de tren es tomar a la laminación geodésica y “apretarla” hasta que todas las geodésicas que la componen se torna en una.

Definición 4.0.9. Una vía de tren en una superficie \mathbb{H}^2/Γ es una familia \mathcal{R} de rectángulos R_i tales que

- I. Cada rectángulo R_i es la imagen de un rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ bajo una inmersión que identifica a $\{0\} \times [0, 1]$ con $\{1\} \times [0, 1]$ a lo largo de un intervalo el cual no se puede reducir a un punto.
- II. Dos rectángulos se intersectan en a lo más un intervalo contenido en un lado vertical el cual no se reduce a un punto.
- III. Las componentes conexas de la unión de la imagen de los lados verticales es un arco encajado en \mathbb{H}^2/Γ .

Llamamos *interruptor* a la componente conexa de la unión de las imágenes de los lados verticales de los rectángulos y llamamos *empalme* a los intervalos $\{p\} \times [0, 1]$. Llamamos a esto las foliaciones de los empalmes.

Definición 4.0.10. Decimos que una laminación geodésica μ es transportada por una vía de tren \mathcal{R} si cumple con lo siguiente

- I. La laminación geodésica μ está contenida en la unión de los rectángulos en R .
- II. La intersección $\mu \cap R_i \neq \emptyset$ está contenida en la imagen de $[0, 1] \times (0, 1)$ para todo rectángulo R_i . Además cada hoja de la laminación geodésica μ es transversal a los empalmes.

Definición 4.0.11. Consideremos una acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ una acción de Γ en \mathcal{T} . Decimos que una vía de tren \mathcal{R} se realiza en un árbol \mathcal{T} si existe una función $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ continua y Γ -equivariante que cumple con lo siguiente:

- I. Sea \widetilde{R}_i un rectángulo de la preimagen R bajo f . La función $f|_{\widetilde{R}_i}$ es constante en los empalmes para todo \widetilde{R}_i .
- II. La función $f|_{\widetilde{R}_i}$ es inyectiva en cualquier segmento del rectángulo \widetilde{R}_i que sea transversal a los empalmes.
- III. Los segmentos de \mathcal{T} , los cuales son imágenes de f evaluada en dos rectángulos adyacentes de la preimagen de \mathcal{R} situados en lados diferentes del mismo levantamiento de un interruptor, tienen interiores disjuntos.

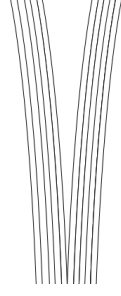


Fig. 4.5: vía de tren



Fig. 4.6: Realización de la vía de tren

Es claro que si \mathcal{R} es una vía de tren que se realiza en un árbol \mathcal{T} , entonces toda laminación geodésica transportada por \mathcal{R} se realiza en \mathcal{T} .

Definición 4.0.12. Sea $\Gamma \times \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ una acción de Γ en un árbol real \mathcal{T} y denotamos por \mathcal{R} una vía de tren. Decimos que \mathcal{R} se realiza débilmente en \mathcal{T} si existe una función continua Γ -equivariante $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ si cumple con todas las siguientes condiciones

- I. Para cada rectángulo \tilde{R}_i , la restricción de la función f a \tilde{R}_i es constante en los empalmes.
- II. Para cada rectángulo \tilde{R}_i , la restricción de la función f a $[0, 1] \times \{p\}$ en \tilde{R}_i es monótona y no constante.
- III. Los segmentos de \mathcal{T} , los cuales son imágenes de f evaluada en dos rectángulos de la preimagen de \mathcal{R} situadas en lados diferentes del mismo levantamiento de un interruptor, tienen interiores disjuntos.

Llamamos a f una realización débil de \mathcal{R} en \mathcal{T} .

Esta definición es equivalente a decir que la restricción de f es monótona en toda curva encajada propiamente en la unión de rectángulos \tilde{R}_i y que sea transversal a la foliación por los empalmes.

Lema 4.0.3. Sea $\Gamma \times \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ una acción de Γ en el \mathcal{T} . Si \mathcal{R} es una vía de tren débilmente realizada en \mathcal{T} , entonces \mathcal{R} es débilmente realizada en el árbol \mathcal{T} .

Demostración: Denotamos por f a la realización de \mathcal{R} en \mathcal{T} y sea \tilde{R}_i sea el levantamiento a \mathbb{H}^2 de un rectángulo R en \mathcal{R} . La restricción de f a R es una función constante en los empalmes $\{p\} \times [0, 1]$ y es una función monótona en $[0, 1] \times \{0\}$.

Podemos encontrar una homotopía entre la restricción $f|_{\tilde{R}_i}$ y una función constante en los empalmes relativa a los lados verticales, ya que \mathbb{H}^2 es conexo. La restricción de esta homotopía a $[0, 1] \times \{0\}$ es una parametrización del segmento $f(0, 0)f(1, 0)$.

Para unir estas homotopías necesitamos que cada rectángulo de la vía de tren \mathcal{R} sea levantada a \mathbb{H}^2 a un rectángulo encajado. Supongamos lo contrario. Sus dos lados verticales se intersectan en \mathbb{H}^2 . Sea α un arco contenido en \tilde{R}_i tal que es transversal a las foliaciones por el empalme y sus puntos finales están en $\tilde{R}_i \cap \alpha$. Por hipótesis, f es constante en los empalmes, entonces la imagen de f en los puntos finales de α es igual. La imagen $f(\alpha)$ es un punto pues $f|_{\alpha}$ es monótona, lo cual es una contradicción ya que $f|_{\alpha}$ es no constante. Como dos rectángulos se intersectan a lo largo de un intervalo contenido en un lado vertical, la unión de las funciones que hemos definido en cada rectángulo \tilde{R}_i da lugar a una función f' continua y Γ -equivariante, definida en la unión de los \tilde{R}_i . El complemento de la unión de estos rectángulos son componentes que forman una superficie cuya frontera está contenida en la unión de los lados horizontales de cada \tilde{R}_i (por la proposición 1.3.3). En cada levantamiento de las curvas que están en la frontera, las funciones f y f' tienen la misma imagen, pero no necesariamente $f = f'$.

Entonces, después de una homotopía con soporte en un collar alrededor de estas curvas podemos asumir que las funciones f y f' son iguales en la frontera de una vecindad regular de la preimagen de \mathcal{R} en \mathbb{H}^2 . Luego, definimos la función f' igual a f en el complemento de la vecindad. Por último, debemos verificar que f es una realización de \mathcal{R} . En efecto, la función f' es constante en los empalmes e inyectiva en cualquier intervalo contenido en un rectángulo y es transversal a los empalmes. Más aún, las imágenes de dos rectángulos en lados opuestos del mismo levantamiento son segmentos de \mathcal{T} con interiores disjuntos pues las imágenes de estos rectángulos bajo f y f' son iguales.

□

El teorema 4.0.2 es el resultado principal de este capítulo y nos será útil para demostrar ciertas convergencias en el sentido de Gromov. Dichos resultados serán estudiados en capítulos posteriores.

Teorema 4.0.2. Sea \mathcal{T} un árbol dual de una laminación geodésica medible λ y sea $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ una laminación geodésica la cual es unión del soporte de una laminación medible $\bar{\mu}$ y un número finito de geodésicas no compactas. Entonces μ se realiza en \mathcal{T} .

Demostración: Debemos mostrar que una laminación geodésica μ realizada en un árbol \mathcal{T} es transportada por vía de tren débilmente realizada en \mathcal{T} . Para esto utilizaremos el lema 4.0.3 y que toda laminación geodésica transportada por \mathcal{R} se realiza en \mathcal{T} .

Sabemos que el soporte de $\bar{\mu}$ se descompone en una unión disjunta de un número finito de componentes las cuales son geodésicas cerradas compactas o conjuntos minimales excepcionales y cada final de geodésica de $\mu - \bar{\mu}$ es de forma espiral en una componente de $\bar{\mu}$. Vamos a usar a f construida en el corolario 4.0.1

Notemos que existen arcos encajados $\kappa_i \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ transversales a μ ; tal que su número es igual al número de componentes de $\bar{\mu}$ y satisfacen

- I. Cada κ_i intersecta de manera transversal a una única componente de $\bar{\mu}$.
- II. La función f es constante en cada levantamiento a \mathbb{H}^2 de un arco κ_i .

Los arcos κ_i están contenidos en las hojas de λ , que intersectan a μ y son suficientemente pequeños tales que cumplen el inciso I. Denotamos por v a un punto de una hoja de $\bar{\mu}$ y denotamos por $v - T$ y $v + T$ a los puntos que están a distancia T de v (y están en la hoja de que intersecta a v).

Como la función f es monótona y no constante en cada hoja de $\tilde{\mu}$, ya que la laminación μ es débilmente realizada en \mathcal{T} , entonces para cada $v \in \tilde{\mu}$ existe una constante $T(v) > 0$, tal que los puntos $v - T(v)$ y $v + T(v)$ tienen diferentes imágenes en \mathcal{T} y $f(v - t) \neq f(v + t)$ para $t \geq T(v)$, pues f es una función monótona.

Puesto que f es continua y equivariante y el soporte de la laminación μ es compacto, podemos escoger un número real T que tal que para todo punto $v \in \tilde{\mu}$, éste siga cumpliendo la relación anterior

Usando la continuidad de f existe un número $\alpha > 0$ tal que para toda $t > T$ y para toda $v \in \tilde{\mu}$, la distancia entre $f(v - t)$ y $f(v + t)$ es mayor a α . Las medias geodésicas contenidas en una hoja $\mu - \bar{\mu}$ tienen un punto de acumulación en una componente minimal de $\bar{\mu}$ (ésto por la demostración de la proposición 1.3.6). Tomamos un segmento k_ℓ de longitud al menos $2T$ el cual está contenido en una hoja de $\mu\bar{\mu}$. Supongamos que los arcos κ_i no se intersectan con los segmentos k_ℓ , si esto pasara, podemos encoger a cada k_ℓ .

Consideremos un arco κ_i que intersecta a un conjunto minimal excepcional de $\bar{\mu}$ y sea ℓ una hoja de $\bar{\mu}$ la cual intersecta a κ_i y sea $p \in \ell \cap \kappa_i$. Dado que ℓ no es compacta (quizás después de reemplazar el arco κ por un arco más pequeño que contiene a p), podemos suponer que los segmentos $[p - 2T, p] \subset \ell$ y $[p, p + 2T] \subset \ell$ no intersectan a κ_i . Sea p'

el punto en el cual cada hoja ℓ' intersecta a κ_i y denotamos por $\nu(p)$ a su vecindad; el punto p' satisface que los segmentos $[p' - 2T, p']$ y $[p', p' + 2T]$ contenidos en una hoja de μ a través de p' no intersectan a κ_i . Reemplazamos el arco κ_i por $\nu(p)$, lo seguimos denotando por κ_i .

Sea $\gamma \in \Gamma$ un elemento representado por una hoja compacta que es una componente de $\bar{\mu}$. La distancia de traslación de γ en el árbol \mathcal{T} es distinta de cero pues μ se realiza débilmente en \mathcal{T} y en consecuencia $\delta(\gamma)$ es la distancia en el árbol \mathcal{T} entre la imagen del levantamiento de κ_i , situado en el eje de γ , y la imagen de su traslación bajo γ . Sea S una superficie. Para cada arco κ_i , sean κ_i^+ y κ_i^- los lados de κ_i en S y consideremos un punto $\kappa_i^\pm \cap \mu$ como un vector unitario tangente a μ . Para cada $x \in \kappa_i^\pm \cap \bar{\mu}$, la semi-geodésica de $\bar{\mu}$ que se mueve en la dirección de x intersecta a κ_i en un punto x' . Entonces una semi-geodésica de μ que viene en una dirección cercana se intersectará con κ_i^\pm por primera vez en una dirección cercana. Haciendo lo anterior obtenemos los intervalos cerrados I_x y $I_{x'}$, los cuales están contenidos en κ_i^+ y κ_i^- . Notemos que si los intervalos I_x y $I_{x'}$ son suficientemente pequeños y si sus puntos finales no se intersectan con la laminación μ , entonces I_x y $I_{x'}$ son lados verticales de un rectángulo R_x , el cual resulta de una inmersión evaluada en $[0, 1] \times [0, 1]$ que identifica a lo más dos intervalos en los lados verticales de la intersección de la laminación μ con el rectángulo R_x , que es transversal a los empalmes y está contenida en $[0, 1] \times (0, 1)$.

Consideramos $I_x \subset \kappa_j^\pm$ donde la intersección $I_x \cap \mu$ se reduce a x . Análogamente para el intervalo $I_{x'}$. Los puntos en la intersección de μ con la unión de los arcos κ_j^\pm están en el interior de $I_x \subset \kappa_i^\pm$ y los puntos finales de estos intervalos no se intersectan con μ . La intersección de los intervalos I_x con el conjunto compacto $\mu \cap (\cup \kappa_i^\pm)$ forma una cubierta para $\mu \cap (\cup \kappa_i^\pm)$. Podemos extraer una subcubierta finita ya que $\mu \cap (\cup \kappa_i^\pm)$ es compacto. Tomando intersecciones, solo nos enfocamos en el caso donde los intervalos de la subcubierta finita tienen interiores disjuntos. Haciendo lo anterior, obtenemos rectángulos R_i que tienen lados verticales contenidos en los arcos κ_i .

Usando la propiedad de espacio métrico, tomamos una pequeña isotopía tal que la distancia entre los puntos de los rectángulos es menor a una constante positiva y la intersección de dos rectángulos está contenida en un lado vertical. Por definición, los rectángulos forman una vía de tren \mathcal{R} . Por lo tanto la laminación μ es transportada por \mathcal{R} , ya que la intersección de μ con los rectángulos R_i intersecta de manera transversal a la foliación de los empalmes.

Sea \tilde{R}_i un rectángulo levantado al disco \mathbb{D}^2 el cual está en la preimagen de \mathcal{R} en \mathbb{D}^2 .

Sean a_i y b_i dos puntos. Los lados verticales del rectángulo \tilde{R}_i están contenidos en los arcos $\tilde{\kappa}_j$. Como la función f es constante en cada arco $\tilde{\kappa}_j$, su imagen es un segmento $a_i b_i \subset \mathcal{T}$ cuando es evaluada en las componentes de $\tilde{\mu} \cap \tilde{R}_i$.

Ahora debemos ver que los puntos a_i y b_i son distintos. Para esto notemos que si uno de los lados del rectángulo R_i no está contenido en un arco κ_i transversal a una hoja compacta de $\bar{\mu}$, entonces $a_i \neq b_i$ pues todas las componentes de la intersección $\mu \cap R_i$ tienen longitud mayor o igual a $2T$.

Ahora supongamos que los dos lados verticales de R_i están contenidos en un arco transversal a $\tilde{\mu}$, en particular a una curva cerrada γ . Si lo anterior ocurre, entonces un lado del R_i puede ser expresado como una traslación del otro lado bajo γ . Puesto que la distancia de traslación del elemento γ es distinta de cero, entonces los dos lados verticales de R_i son distintos. De nuevo $a_i \neq b_i$.

Definimos una función f' en el rectángulo \tilde{R}_i imponiéndole que sea constante en cada empalme, y que la restricción de f' a una componente de $\tilde{\mu} \cap \tilde{R}_i$, sea un homeomorfismo sobre el segmento del árbol \mathcal{T} que une las imágenes de los dos lados verticales de \tilde{R}_i bajo f . Le podemos pedir a la función f' ser equivariante en la preimagen de R_i , ya que si los rectángulos R_i no están encajados, estos pueden intersectar en a lo más un intervalo contenido en un lado vertical y f' coincide con f en los lados verticales de cada R_i en la preimagen de \mathcal{R} .

Debemos extender esta función al complemento de la unión de los rectángulos \tilde{R}_i . Consideremos a la unión de los rectángulos R_i como unión de 2-celdas. Usando la construcción de la demostración de la proposición 4.0.1 podemos asegurar la extensión de f' a una función continua y Γ -equivariante con dominio en el árbol \mathcal{T} . La función resultante realiza a la vía de tren \mathcal{R} y la laminación geodésica μ es transportada por \mathcal{R} . Dado que, si una vía de tren es realizada en un árbol \mathcal{T} , entonces toda laminación transportada por dicha vía es realizada por el árbol, hemos terminado.

□

Finalmente, el siguiente corolario se desprende del teorema 4.0.2.

Corolario 4.0.2. Sea \mathcal{T}_λ un árbol dual de una laminación geodésica medible λ , y sea μ una laminación geodésica la cual contiene el soporte de una laminación geodésica medible aracional $\bar{\mu}$, e intersecta a λ . Entonces la laminación geodésica λ se realiza en \mathcal{T}_λ .

Demostración: Dado que la laminación geodésica $\bar{\lambda}$ es aracional, su complemento en μ son geodésicas no todas compactas (ver lema 1.3.9). Este resultado se sigue del teorema 4.0.2.

□

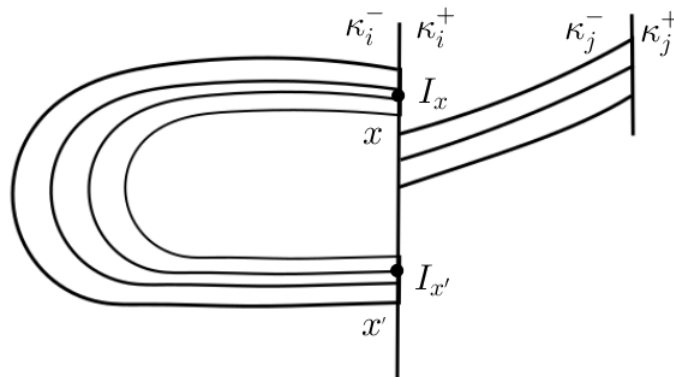


Fig. 4.7: Interruptor y empalmes de la vía de tren \mathcal{R} .

5. LAMINACIONES GEODÉSICAS Y TOPOLOGÍA DE GROMOV

Consideramos a una superficie compacta S la cual se identifica con el cociente \mathbb{H}^2/Γ . Veremos la noción de realización de la vía de tren \mathcal{R} conforme la topología de Gromov.

Denotamos a $\epsilon_i\mathbb{H}^n$ como el espacio X_i el cual es una variedad simplemente conexa con curvatura $-1/\epsilon_i^2$. Denotamos por d_i a la distancia en X_i y a la familia de rectángulos $\{R_j\}$ como \mathcal{R} la vía de tren en \mathbb{H}^2/Γ .

Definición 5.0.1. Sea (ρ_i) una sucesión de representaciones discretas y fieles de Γ en $Isom(\mathbb{H}^2)$. Consideremos un número real positivo δ tal que $\delta < \pi$. Decimos que una función continua, Γ -equivariante $F : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$ es una δ -realización de la vía de tren \mathcal{R} para la acción (X_i, ρ_i) si

- I. La función F en los empalmes de los rectángulos levantados \tilde{R}_j es constante.
- II. La restricción de la función F a $[0, 1] \times \{0\}$ en cada rectángulo \tilde{R}_j es inyectiva, además su imagen es una geodésica en X_i .
- III. Si dos rectángulos \tilde{R}_1 y \tilde{R}_2 contenidos en \mathbb{H}^2 están en lados opuestos del mismo interruptor κ , entonces el ángulo entre los vectores tangentes a las geodésicas $F(\tilde{R}_1)$ y $F(\tilde{R}_2)$ en su punto de intersección $F(\kappa)$ está en el intervalo $[\pi - \delta, \pi]$.

Si trabajamos con acciones (X_i, ρ_i) donde i es suficientemente grande, quisiéramos asegurar la existencia de la δ -realización de \mathcal{R} para éstas siempre que una laminación geodésica μ es transportada por \mathcal{R} en un árbol \mathcal{T} . Si bien esto es posible, primero necesitamos modificar a \mathcal{R} para asegurar que la vía de tren \mathcal{R} aún transporte a μ y ésto se lleva a cabo mediante *la operación de subdivisión*, que a continuación la describimos.

Definición 5.0.2 (Definición de la operación de subdivisión). Sea $\mathcal{R} = \{R_j\}$ una vía de tren que transporta una laminación geodésica μ . Vamos a definir a los interruptores de una nueva vía \mathcal{R}' en los arcos $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$, para todos los rectángulos R_j en \mathcal{R} . Cada lado vertical A del rectángulo R_j intersecta a otro lado vertical de un rectángulo R_k , es

posible que A también intersekte a un lado vertical de otro rectángulo R_i ; esta intersección es por medio de intervalos cerrados $I_1, I_2, \dots, I_r, \dots, I_\ell$ los cuales tienen interiores disjuntos. Para cada punto p en la frontera de I_r tal que $p \in \text{Int}(A)$, consideramos el arco k_p disjunto de la laminación μ que interseca de manera transversal a la foliación de R_j , tal que uno de los puntos finales de k_p es p y el otro está en $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$. Mediante un corte a R_j a lo largo de k_p obtenemos una unión de rectángulos encajados, donde uno de sus lados verticales es el intervalo $A \cap I_r$ y el otro está contenido en $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$.

Nos concentramos en los rectángulos que intersecan a μ . Cada componente de la intersección del lado vertical A con el intervalo cerrado I_r , es la frontera de dos rectángulos R_r^1 y R_r^2 tales que su unión es un rectángulo R_r' , el cual está encajado por medio de una inmersión que identifica dos intervalos contenidos en un lado vertical. Si R_r' está encajado, entonces sus dos lados verticales están en el mismo empalme y en este caso ellos se intersecan en, a lo más, a lo largo de un intervalo.

Tanto en R_r^1 como en R_r^2 , la foliación de la vía \mathcal{R} induce una foliación por intervalos, uniéndolas obtenemos una foliación equivalente a las foliaciones verticales en los rectángulos R_r' . Notemos que μ interseca a R_r' de manera transversal, así la nueva foliación es vertical y es disjunta de los lados horizontales.

Llamamos \mathcal{R}' a la colección de rectángulos R_r' ; notemos que cada lado vertical de sus rectángulos están en la mitad del empalme de algún rectángulo en \mathcal{R} . Después de una isotopía, dos rectángulos de \mathcal{R}' se intersecarán solamente en sus lados verticales.

El proceso anterior nos da como resultado lo que definimos como *la primera subdivisión de \mathcal{R} a lo largo de μ* . Este proceso se puede repetir hasta obtener la n -ésima subdivisión de \mathcal{R} .

Queremos mostrar que la laminación μ aún es transportada por la subdivisión de \mathcal{R}' de \mathcal{R} . Primero mostramos los siguientes resultados pues serán de utilidad al demostrar la proposición 5.0.2.

Sea $\mathcal{G} \subset \Gamma - \{id\}$ el conjunto de elementos g tal que algún rectángulo en $\tilde{\mathcal{R}}$ interseca tanto a $\tilde{\kappa}$ y a $g(\tilde{\kappa})$; un elemento de \mathcal{G} será llamado positivo o negativo si ese rectángulo es positivo o negativo.

Lema 5.0.1. Sea $g^j \in \mathcal{G}$. Denotamos por z_i^j el punto medio de una geodésica $p_i g^j(p_i)$. Si g^j es un elemento positivo y $g^{j'}$ es un elemento negativo, entonces el ángulo en los vértices z_i^j y $z_i^{j'}$ del triángulo $p_i z_i^j z_i^{j'}$ tiende a 0 cuando i tienda a ∞ . Más aún, la distancia $d(p_i z_i^j, z_i^{j'}) \geq \frac{m}{3}$ para i suficientemente grande.

Demostración: Si $i \geq i_0$, tenemos

$$\left| d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d(g^j(p_i), p_i) - d(p_i, g^{j'}(p_i)) \right| \leq 3 \frac{\epsilon}{\epsilon_i}. \quad (5.1)$$

Para $g^j \in \mathcal{G}$ tenemos

$$d(g^j(p_i), p_i) \geq 9 \frac{\epsilon}{\epsilon_i} \quad (5.2)$$

Por el lema 3.0.5 sabemos que el valor absoluto de las distancias de los lados del triángulo $g^j(p_i)p_i g^{j'}(p_i)$ están acotado por una constante.

Sea \tilde{p}_i la proyección ortogonal de p_i en la geodésica que contiene a los puntos $g^j(p_i)$ y $g^{j'}(p_i)$. Tenemos

$$d(p_i, g^j(p_i)) = d(p_i, \tilde{p}_i) + d(\tilde{p}_i, g^j(p_i)) + O(1) \quad (5.3)$$

y

$$d(p_i, g^{j'}(p_i)) = d(p_i, \tilde{p}_i) + d(\tilde{p}_i, g^{j'}(p_i)) + O(1). \quad (5.4)$$

Con ± 1 pues en la proposición 3.0.3 estamos trabajando en el disco unitario hiperbólico. Vamos a acotar a $d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d(g^j(p_i), p_i) - d(p_i, g^{j'}(p_i))$ la cual es la diferencia de las ecuaciones anteriores, para lo que consideraremos dos casos.

En el primer caso consideramos que \tilde{p}_i no está contenido en $g^j(p_i)g^{j'}(p_i)$. Si esto sucede, entonces la distancia $d(p_i, g^{j'}(p_i))$ es mayor a $d(g^j(p_i), p_i) + d(g^j(p_i)) \pm 1$, dado que podemos acotar inferiormente a $d(g^j(p_i), p_i)$ por $\frac{9\epsilon}{\epsilon_i}$, para i es suficientemente grande. Pero esto contradice que el supremo de $d_i(g^j(p_i), p_i)$ y $d_i(p_i, g^{j'}(p_i))$ es menor o igual a $d_i(p_i, g^{j'}(p_i))$.

En el segundo caso consideramos que \tilde{p}_i sí está contenido en $g^j(p_i)g^{j'}(p_i)$. Entonces

$$2d(\tilde{p}_i, p_i) \pm 1 = \left| d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d(g^j(p_i), p_i) - d(p_i, g^{j'}(p_i)) \right| \leq 3 \frac{\epsilon}{\epsilon_i}. \quad (5.5)$$

Si i es suficientemente grande, entonces

$$2d(\tilde{p}_i, p_i) \leq \frac{4\epsilon}{\epsilon_i} \leq \frac{1}{2} \inf\{d(p_i, g^j(p_i)), d(p_i, g^{j'}(p_i))\} = \inf\{d(p_i, z_i^j), d(p_i, z_i^{j'})\} \quad (5.6)$$

Consideremos el triángulo $z_i^j p_i z_i^{j'}$ y la proyección ortogonal p'_i del vértice p_i en la geodésica que pasa por los puntos z_i^j y $z_i^{j'}$. Como la distancia entre p_i y el segmento $z_i^j z_i^{j'}$ debe ser menor o igual a la distancia entre p_i a \tilde{p}_i , entonces la proyección

ortogonal de p_i en la geodésica que pasa por los puntos z_i^j y $z_i^{j'}$ se encuentra en el interior del segmento $z_i^j z_i^{j'}$ y se cumple que

$$d(p_i, p'_i) \leq \frac{1}{2} \inf \{d(p_i, z_i^j), d(p_i, z_i^{j'})\}. \quad (5.7)$$

Aplicando la ley de senos hiperbólicos al triángulo $z_i^j p_i p'_i$, obtenemos

$$\sinh d(p_i, z_i^j) = \frac{\sinh d(p_i, p'_i)}{\sin p_i z_i^j p'_i}. \quad (5.8)$$

Luego,

$$\frac{\sinh d(p_i, z_i^j)}{\sinh d(p_i, p'_i)} = \frac{e^{d(p_i, z_i^j)} - e^{-(d(p_i, z_i^j))}}{e^{d(p_i, p'_i)} - e^{-(d(p_i, p'_i))}} \geq e^{(d(p_i, z_i^j) - d(p_i, p'_i))} \geq e^{\frac{d(p_i, z_i^j)}{2}}. \quad (5.9)$$

La última parte de la ecuación anterior nos dice que el ángulo $p_i z_i^j p'_i$ tiende a 0 si i tiende a infinito.

Análogamente, si aplicamos la ley de los senos hiperbólicos al triángulo $z_i^{j'} p_i p'_i$, obtenemos que el ángulo $p_i z_i^{j'} p'_i$ también tiende a 0 cuando i tiende a infinito.

Ahora, si $10\epsilon \leq m$, consideremos los triángulos $p_i z_i^j p'_i$ y $p_i z_i^{j'} p'_i$. Aplicando la desigualdad del triángulo,

$$d_i(z_i^j, p'_i) \geq d_i(p_i, z_i^j) - d_i(p_i, p'_i) \geq \frac{1}{2} d_i(p_i, z_i^j) \geq \frac{m-3}{4}. \quad (5.10)$$

Luego para el triángulo $p_i z_i^{j'} p'_i$ tenemos

$$d_i(z_i^j, z_i^{j'}) \geq \frac{m-3}{2} \geq \frac{m}{2} \geq \frac{m}{3}. \quad (5.11)$$

□

Proposición 5.0.1. Sea \mathcal{R}' la primera subdivisión de la vía de tren \mathcal{R} . Para cada $\delta \in (0, \pi)$, existe $i_0(\delta)$ tal que $i \geq i_0(\delta)$, entonces la función F_i es una δ -realización de \mathcal{R} en el espacio X_i , y existe una constante $m' > 0$ tal que para cada rectángulo \tilde{R}' en $\tilde{\mathcal{R}}'$, las longitudes de $F_i(\tilde{R}')$ son mayores o igual a m' .

Demostración: Sea $\epsilon \leq \frac{m}{10}$, con m una cota inferior para los segmentos $f_i(\tilde{R})$. Para cada δ , existe una constante $i_0(\delta)$ tal que para $i \geq i_0$, los ángulos en los vértices z_i^j y $z_i^{j'}$ de los triángulos $z_i^j p_i z_i^{j'}$ que aparece en la construcción de la función F_i son a lo más $\frac{\delta}{2}$.

Si el interruptor $\tilde{\kappa}'$ está en el rectángulo \tilde{R}_j , entonces $F_i(\tilde{\kappa}') = z_i^j$ siempre que $g_j \in \mathcal{G}$ sea un elemento negativo, y la imagen de \tilde{R}'_1 o \tilde{R}'_2 es la geodésica $z_i^j z_i^{j'}$. Denotamos por v al vector unitario tangente a la geodésica $g_j(p_i)p_i$ en el punto z_i^j y por ν al vector tangente a la geodésica $z_i^j z_i^{j'}$ en el punto $F_i(\tilde{\kappa}')$. Entonces el ángulo entre v y ν es a lo más $\delta/2$. Pero el ángulo entre $-v$ y la imagen del rectángulo \tilde{R}'_2 en el punto $F_i(\tilde{\kappa}')$ es a lo más $\delta/2$. Por lo tanto F_i es una δ -realización de \mathcal{R}' .

Por último, la imagen de los rectángulos de \mathcal{R}' bajo F_i son isométricos a $z_i^j z_i^{j'}$ donde $z_i^j \in \mathcal{G}$ es un elemento positivo y $z_i^{j'} \in \mathcal{G}$ es un elemento negativo. Aplicando el lema 5.0.1 obtenemos el resultado. □

Proposición 5.0.2. Sea \mathcal{T}_λ el árbol dual de una laminación geodésica medible $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ y sea (ρ_i) una sucesión de representaciones de Γ en el grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$ la cual converge al árbol \mathcal{T}_λ en el sentido de Gromov, sea μ una laminación geodésica que contiene el soporte de una laminación aracional $\bar{\mu}$ que intersecta a λ . Entonces para cada constante $\delta > 0$, existe $i_0 = i_0(\delta)$ tal que para toda $i \geq i_0(\delta)$, la laminación μ es transportada por una vía de tren \mathcal{R}' la cual es δ -realizada para la acción (X_i, ρ_i) .

Demostración: Debemos construir una δ -realización de \mathcal{R}' para (X_i, ρ_i) . Utilizando el lema 1.3.8, el soporte de $\bar{\mu}$ es un conjunto minimal excepcional. Por el teorema 4.0.2, podemos suponer que la laminación μ es llevada por una vía de tren \mathcal{R} que tiene un único interruptor k y se realiza en \mathcal{T}_λ . Más aún, k es un arco transversal al soporte de $\bar{\mu}$ y está en una hoja de algún engrosamiento λ' de λ .

Sea $p \in \mathcal{T}_\lambda$ el punto imagen de una hoja de $\tilde{\lambda}'$ bajo una función $\varrho: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ (proposición 3.0.3). Escogemos el interruptor κ contenido en la imagen de \mathbb{H}^2/Γ de esta hoja.

Sea \mathcal{R}' la vía de tren obtenida de la operación de subdivisión a lo largo de μ . Consideremos a la función f de \mathcal{R} y escogemos un levantamiento \tilde{k} del arco k tal que $p = f(\tilde{k})$. Llamaremos positivo a un rectángulo de $\tilde{\mathcal{R}}$ si su dirección viene del lado positivo al lado negativo y lo llamamos negativo si su dirección es del lado negativo al lado positivo.

Por la proposición 3.0.3, existe una constante fija $i_0 = i_0(\epsilon)$ con $\epsilon > 0$ y tenemos un punto $p_i \in X_i$ tal que

$$\left| d_i(g(p_i), g'(p_i)) - d(g(p), g'(p)) \right| \leq \epsilon, \quad (5.12)$$

para toda $i \geq i_0(\delta)$ y $g, g' \in \mathcal{G} \cup \{id\}$. Si $g^j \in \mathcal{G}$ es un elemento positivo y $g^{j'} \in \mathcal{G}$ es un elemento negativo, entonces

$$d(g^j(p), g^{j'}(p)) = d(g^j(p), p) + d(p, g^{j'}(p)) \quad (5.13)$$

donde d es una distancia definida en \mathcal{T}_λ . Combinando las ecuaciones 5.12 y 5.13,

$$\left| d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d_i(g^j(p_i), p_i) - d_i(p_i, g^{j'}(p_i)) \right| \leq 3\epsilon \quad \text{con } i \geq i_0. \quad (5.14)$$

En particular,

$$\begin{aligned} & \left| d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d_i(g^j(p_i), p_i) - d_i(p_i, g^{j'}(p_i)) \right| \leq 3\epsilon \\ & -3\epsilon \leq d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d_i(g^j(p_i), p_i) - d_i(p_i, g^{j'}(p_i)) \leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Entonces

$$d_i(g^j(p_i), p_i) + d_i(p_i, g^{j'}(p_i)) - 3\epsilon \leq d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)). \quad (5.15)$$

Suponiendo que ϵ cumple con $10\epsilon \leq m = \inf\{d(p, g(p)) : g \in \mathcal{G}\}$, entonces $d_i(g(p_i), p_i) \geq m - \epsilon$ siempre que $g \in \mathcal{G}$, para $i \leq i_0$.

Si g^j es un elemento positivo y $g^{j'}$ es un elemento negativo, entonces el supremo de las distancias $d_i(g^j(p_i), p_i)$ y $d_i(p_i, g^{j'}(p_i))$ es menor a $d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i))$.

Debemos construir una δ -realización de R' para las acciones (X_i, ρ_i) y para esto utilizamos el lema 5.0.1 y de la primera subdivisión \mathcal{R}' de \mathcal{R} . Sea \tilde{R}_j un rectángulo de la preimagen de \mathcal{R} que intersecta a $\tilde{\kappa}$ con uno de sus lados verticales en $\tilde{\kappa}$ y el otro está en $g^j(\tilde{\kappa})$ con $g^j \in \mathcal{G}$. Aplicando el lema 5.0.1, tenemos que el levantamiento de la parametrización de cada rectángulo de la vía \mathcal{R} es un difeomorfismo de $[0, 1] \times [0, 1]$ a un rectángulo de la preimagen de \mathcal{R} .

Si $g^j \in \mathcal{G}$, evaluamos a \tilde{R}' el cual tiene lados verticales $\tilde{\kappa}$ y $g^j(\tilde{\kappa})$ bajo una función constante en los empalmes, y obtenemos una geodésica con puntos finales p_i y $g^j(p_i)$ en el espacio X_i . Haciendo ésto, inducimos una parametrización de velocidad constante de $p_i g^j(p_i)$ en $[0, 1] \times \{0\}$. Extendemos la función (constante en los empalmes) a una función continua, Γ -equivariante definida en los rectángulos de \tilde{R}' y con valores en X_i .

Puesto que X_i es contraíble, podemos extender, de nuevo, la función a una función $f_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$. Por construcción, f_i es una realización de \mathcal{R} .

Cada rectángulo en la preimagen de \mathcal{R}' es equivalente módulo la acción de Γ en \mathbb{H}^2 a

un rectángulo \tilde{R}' cuyo interior intersecta a $\tilde{\kappa}$ y sus lados verticales están contenidos en la mitad de los empalmes de dos rectángulos \tilde{R}_j y $\tilde{R}_{j'}$, con $g^j \in \mathcal{G}$ un elemento positivo y $g^{j'} \in \mathcal{G}$ un elemento negativo. Por construcción, la foliación por los empalmes de $\tilde{\mathcal{R}}'$ es la intersección con $\tilde{\mathcal{R}}'$ de la foliación por los empalmes de \tilde{R}_j y $\tilde{R}_{j'}$. Sea z_i^j el punto medio de la geodésica $p_i g^j(p_i)$ y $z_i^{j'}$ de la geodésica $p_i g^{j'}(p_i)$ y consideremos $f_i|_{\tilde{R}'}$ el cual es constante en los empalmes, pero la imagen de $f_i(\tilde{R}')$ es la unión de $z_i^{j'} p_i$ con $p_i z_i^j$. Por lo tanto, la imagen no minimiza las longitudes ya que tiene un punto donde no es suave, $p_i = f_i(\tilde{\kappa})$.

Como X_i es contraíble, podemos considerar una homotopía que es constante en los lados verticales de \tilde{R}' , y deforma a f_i , en cada rectángulo de la preimagen de \mathcal{R}' , a una función constante en los empalmes que parametriza al segmento geodésico $z_i^j z_i^{j'}$, con derivada constante. Como los rectángulos en \mathcal{R}' se intersectan solamente en sus lados verticales, entonces podemos unir las modificaciones hechas a los rectángulos de la preimagen de \mathcal{R}' para obtener una función continua, constante en los empalmes y Γ -equivariante. Luego, esta función se extiende a una función $F_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$ la cual es una δ' -realización de \mathcal{R}' en X_i .

□

Lema 5.0.2. Sea μ una laminación geodésica transportada por la vía del tren \mathcal{R}' . En el espacio de laminaciones geodésicas dotado con la topología de Hausdorff existe una vecindad $\mathcal{V}(\mu)$, tal que toda laminación geodésica en $\mathcal{V}(\mu)$ es transportada por una vía de tren \mathcal{R}' .

Demostración: Como la laminación μ es transportada por \mathcal{R}' , entonces μ está en la unión de los rectángulos en \mathcal{R}' . Además la intersección de la laminación μ con cada rectángulo $\simeq [0, 1] \times [0, 1]$ de \mathcal{R}' está contenida en $[0, 1] \times (0, 1)$.

Por la definición de convergencia de Hausdorff, las laminaciones geodésicas en una vecindad de μ están en la unión de los rectángulos de \mathcal{R}' y su intersección con cada rectángulo de \mathcal{R}' está en $[0, 1] \times (0, 1)$.

El ángulo que se forma entre un empalme de \mathcal{R}' y una hoja de μ está acotado inferiormente por una constante distinta de cero, que puede extenderse a las laminaciones geodésicas que están en una vecindad de μ . Notemos que las geodésicas que conforman las laminaciones geodésicas, intersectan de manera transversal a la foliación de los empalmes de \mathcal{R}' .

Por lo tanto, todas las laminaciones geodésicas en una vecindad de μ son transportadas por \mathcal{R}' .

□

Ahora estamos listos para demostrar el teorema principal de este capítulo. Sea Γ un grupo fuchsiano, denotamos por $\ell(\mu')$ a la longitud de la geodésica μ' en \mathbb{H}^2/Γ , y $\ell_i(\mu')$ a la longitud de la geodésica μ' en $\mathbb{H}^n/\rho_i(\Gamma)$ en la misma clase de homotopía de μ' .

Teorema 5.0.1. Sea \mathcal{T}_λ un árbol dual de una laminación geodésica medible $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$, sea (ρ_i) una sucesión de representaciones fieles y discretas de Γ en $Isom(\mathbb{H}^n)$ que converge en el sentido de Gromov a la acción de Γ en el árbol \mathcal{T}_λ . Sea $\bar{\mu}$ una laminación geodésica medible aracional que intersecta a λ . Entonces para cada constante $N > 0$, existe una vecindad $\mathcal{V}(\bar{\mu})$ de $(\bar{\mu})$ en el espacio proyectivo $\mathcal{PML}(S)$ tal que

$$\frac{\ell_i(\mu')}{\ell(\mu')} > N, \quad (5.16)$$

para toda geodésica μ' en $\mathcal{V}(\bar{\mu})$ y para toda i suficientemente grande.

Demostración: Vamos a proceder por contradicción. Supongamos que existe una sucesión (μ_i) que converge a $\bar{\mu}$ en $\mathcal{PML}(S)$, y existe una constante N que cumple con

$$\frac{\ell_i(\mu_i)}{\ell(\mu_i)} \leq N. \quad (5.17)$$

Por la compacidad del espacio de laminaciones geodésicas, podemos suponer, tomado subsucesiones si es necesario, que las geodésicas μ_i convergen a la laminación geodésica μ en la topología de Hausdorff. Por hipótesis, $\bar{\mu}$ intersecta a λ y es aracional y, utilizando la proposición 4.0.2, tenemos μ se realiza en \mathcal{T}_λ .

Sea γ una curva cerrada transportada por la vía de tren \mathcal{R}' y denotamos por $\ell(\gamma)$ a la longitud de γ con la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^2/Γ . Sea R'_j un rectángulo de R' . Las longitudes de los segmentos en la intersección de la curva γ con cada rectángulo R'_j de R' , están acotadas por una constante ℓ_j , la cual es independiente de γ , ésto es

$$\ell(\gamma) \leq \sum c_j(\gamma)\ell_j, \quad (5.18)$$

donde $c_j(\gamma)$ es el número de componentes conexas que resulta de la intersección de γ con el rectángulo R'_j .

Sea $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$ una constante fija. Siguiendo la notación de la proposición 5.0.2, sea $F_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$ una δ -realización de \mathcal{R}' la cual cumple con el inciso b) de la proposición 5.0.1. Si γ es una curva cerrada transportada por \mathcal{R}' , entonces la proyección de la curva $F_i(\tilde{\gamma})$ en la variedad $X_i / \rho_i(\Gamma)$ es una curva cerrada $F_i^*(\gamma)$ que pertenece a la misma clase de homotopía de γ .

Denotamos por ℓ_j^i a la longitud de la imagen de un rectángulo R_j' bajo F_i en la variedad X_i . La proyección $F_i^*(\gamma)$ es una geodésica por pedazos, como hemos visto en la sección anterior, y entonces la unión de segmentos geodésicos de longitud ℓ_j^i .

Cada ángulo de las esquinas de $F_i^*(\gamma)$ está en el intervalo $[\pi - \delta, \pi]$. Por lo tanto, la longitud de la curva $F_i^*(\gamma)$ es

$$\ell(F_i^*(\gamma)) = \sum c_j(\gamma) \ell_j^i. \quad (5.19)$$

Sea $\bar{F}_i(\gamma)$ una geodésica cerrada en $X_i / \rho_i(\Gamma)$ que es libremente homotópica a $F_i^*(\gamma)$. Haremos uso del siguiente lema que será demostrado más adelante.

Lema 5.0.3. Para cada constante $0 < \eta < 1$, existe $i_0(\eta)$ tal que si $i \geq i_0(\eta)$ y F_i es una δ -realización de \mathcal{R} en el espacio X_i , entonces

$$\ell(\bar{F}_i(\gamma)) \geq \eta \ell(F_i^*(\gamma)) \quad (5.20)$$

para cada curva cerrada γ transportada por \mathcal{R}' .

Para terminar la demostración de la proposición 5.0.2. Tomamos $\eta = \frac{1}{2}$. Por el lema 5.0.3 tenemos la igualdad

$$\ell(\bar{F}_i(\gamma)) \geq \frac{1}{2} \ell(F_i^*(\gamma)), \quad (5.21)$$

para $i \geq i_0$ y para γ geodésica cerrada que es transportada por \mathcal{R}' .

Empleando el hecho de que $\bar{F}_i(\gamma)$ es libremente homotópica a la curva $F_i^*(\gamma)$ que está formada por segmentos de longitud ℓ_j^i que están acotados por una constante $m' \neq 0$, podemos intercambiar $\ell(\bar{F}_i(\gamma))$ por $\ell_i(\gamma)$. Además, por la métrica del espacio $X_i / \rho_i(\Gamma)$, las longitudes de estos segmentos están acotados inferiormente con $\frac{m'}{\epsilon_i}$, cuando i tiende a infinito

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{1}{2\epsilon_i} \ell(F_i^*(\gamma)). \quad (5.22)$$

Luego, por la igualdad 5.19 tenemos

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{1}{2\epsilon_i} \sum c_j(\gamma) \ell_j^i. \quad (5.23)$$

Aplicando la proposición 5.0.1, podemos acotar inferiormente a las longitudes ℓ_j^i . Entonces

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{1}{2\epsilon_i} \sum c_j(\gamma)m'. \quad (5.24)$$

Sea $\ell = \sup\{\ell_j\}$, obtenemos

$$\sum c_j(\gamma)m' \geq \frac{m'}{\ell} \sum c_j(\gamma)\ell_j \geq \frac{m'}{\ell}\ell(\gamma). \quad (5.25)$$

Combinando 5.24 y 5.25, para $i \geq i_0$ cada geodésica cerrada γ transportada por la vía de tren \mathcal{R}' satisface

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{m'}{2\epsilon_i\ell}\ell(\gamma). \quad (5.26)$$

Sabemos que, por el lema 5.0.2, existe una vecindad de una laminación tal que cada geodésica μ_i es transportada por \mathcal{R}' para i suficientemente grande.

Sin embargo, la fórmula 5.26 nos lleva a una contradicción ya que habíamos supuesto que la sucesión (ϵ_i) tiende a 0.

Esto termina la demostración del teorema 5.0.1.

□

El lema 5.0.3 es un caso particular de la proposición 5.0.3 donde la constancia $\delta < \frac{\pi}{4}$ es constante.

Proposición 5.0.3. Sea M una variedad hiperbólica completa y sea $c \subset M$ una curva cerrada que es una unión de segmentos geodésicos, donde cada segmento tiene longitud mayor a una constante L , y cuyo ángulo en cada unión de estos segmentos está en el intervalos $[\pi - \delta, \pi]$. Entonces, para cada $\eta \in (0, 1)$, existe una constante $L(\eta)$ tal que $L \geq L(\eta)$, y la curva c es homotópica a una geodésica cerrada \bar{c} con longitud mayor a $\eta\ell(c)$ (donde $\ell(c)$ denota la longitud de c).

Demostración: Como en el caso del lema 5.0.3 la curva c es no trivial, nos vamos a restringir al caso donde c no es homotópica a 0.

Sea \tilde{c} un levantamiento de la curva c a \mathbb{H}^n . Si c es un elemento parabólico, entonces \tilde{c} es invariante bajo la acción de un elemento parabólico h con un punto fijo $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Las esquinas z_i de la curva \tilde{c} están unidas mediante una geodésica con punto final en p . Consideremos el triángulo $z_{i+1}z_i p$ donde el vértice z_{i+1} viene después del vértice z_i , ya que c es una curva orientada y por tanto \tilde{c} .

Proposición 5.0.4. Sea $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Existe una constante $C_1(\delta)$ tal que si el ángulo en el vértice z_i del triángulo $z_{i-1}z_i p$ es al menos $\frac{\pi}{2}$, y el lado $z_i z_{i-1}$ tiene longitud mayor o igual a $C_1(\delta)$, entonces el ángulo en z_{i-1} tiene magnitud a lo más $\frac{\pi}{2} - \delta$ y la horoesfera que pasa por z_{i-1} con centro en p , es exterior a la horoesfera que pasa por z_i y que tiene centro en p .

Se sigue de este resultado que los segmentos $z_i z_{i+1}$ que componen al triángulo tienen longitud al menos $C_1(\gamma)$, y sus ángulos están en el intervalo $[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}]$. En efecto, supongamos lo contrario, entonces los ángulos de las esquinas de la curva \tilde{c} están en el intervalo $[\pi - \delta, \pi]$ y el ángulo en el punto z_i sería mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$. La segunda parte implicaría que $d(z_i, p)_{i \rightarrow -\infty} \rightarrow \infty$; es decir, el punto z_i se aleja de p . Sin embargo, esto significa que \tilde{c} no es invariante bajo el elemento que fija a p .

Proposición 5.0.5. Para cada $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, existe una constante $C_2(\delta)$ tal que si $z_i z_{i+1} p$ es un triángulo donde sus ángulos en z_i y z_{i+1} están en el intervalo $[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}]$. Entonces la longitud de los segmentos $z_i z_{i+1}$ es menor que $C_2(\delta)$.

Notemos que si la longitud de cada lado de la curva c es mayor a $\sup\{C_1(\delta), C_2(\delta)\}$, entonces no hay un único punto fijo en $\partial\mathbb{H}^n$ y c no se puede representar como un elemento parabólico de $Isom(\mathbb{H}^n)$.

Sea c^* una geodésica en \mathbb{H}^n que tiene los mismos puntos finales de \tilde{c} . Denotamos por z'_i , a los puntos que son la proyección ortogonal en c^* de los puntos z_i . Sea $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ un cuadrilátero cuyos ángulos en z'_{i-1} y z'_i son rectos.

Proposición 5.0.6. Sea $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ y sea $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ un cuadrilátero. Existe una constante $C_3(\delta)$ tal que si el lado $z_i z_{i-1}$ de dicho cuadrilátero tiene longitud mayor o igual a $C_3(\delta)$ y el ángulo en el punto z_i es mayor o igual a $\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$, entonces el ángulo en z_{i-1} es menor o igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$ y la distancia $d(z_{i-1}, z'_{i-1})$ es mayor $d(z_i, z'_i)$.

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, si $d(z_{i-1}, z'_{i-1}) \leq d(z_i, z'_i)$, entonces la distancia $d(z_i, z_{i-1})$ tiende a infinito.

Conjugamos al cuadrilátero por una isometría g de \mathbb{H}^n tal que $g(z_i) = O$ donde O es el origen de \mathbb{H}^n . Supongamos lo contrario, es decir, consideremos que la sucesión $(d(z_i, z'_{i-1}))$ tiende a infinito o que está acotada.

Primero supongamos que

$$(d(z_i, z'_i)) \rightarrow \infty. \quad (5.27)$$

Posiblemente pasando a una subsucesión, tenemos que la sucesión de cuadriláteros $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ converge a un triángulo, OPQ donde $P \in \partial\mathbb{H}^n$ es el límite de la sucesión (z_{i-1}) y $Q \in \mathbb{H}^n$ es el límite de la sucesión (z'_i) y de la sucesión (z'_{i-1}) .

Por continuidad, la sucesión de ángulos en el punto z_{i-1} en el cuadrilátero $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ tiende a 0. Entonces $d(z_i, z'_i) < d(z_i, z'_{i-1})$ ya que el ángulo en z'_i es recto. Por lo tanto, el ángulo en O es mayor o igual a $\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$, por continuidad de la sucesión. De aquí que si i es suficientemente grande, el ángulo en z_i del triángulo $z_{i-1} z_i z'_{i-1}$ es mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$. Por todo lo anterior, para i suficientemente grande se cumple

$$d(z_{i-1}, z'_{i-1}) > d(z_i, z'_i). \quad (5.28)$$

Ahora, supongamos que la sucesión $(d(z_i, z'_i))$ está acotada. Posiblemente pasando a una subsucesión, los cuadriláteros $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ convergen a un cuadrilátero $OPQR$ donde O es el origen de \mathbb{H}^n , $P \in \partial\mathbb{H}^n$ es el límite de la sucesión (z_{i-1}) y $Q \in \mathbb{H}^n$ es el límite de la sucesión (z'_i) y $R \in (\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n)$ es el límite de la sucesión (z'_{i-1}) .

El ángulo en z_{i-1} tiende a 0. Denotamos por \mathcal{P} al hiperplano totalmente geodésico que pasa por el punto z'_i y es ortogonal a la dirección $z_i z'_i$. Entonces la distancia

$$d(z_{i-1}, z'_{i-1}) \geq d(z_{i-1}, \mathcal{P}). \quad (5.29)$$

Luego

$$d(z_i, z'_i) \leq d(z_{i-1}, \mathcal{P}), \quad (5.30)$$

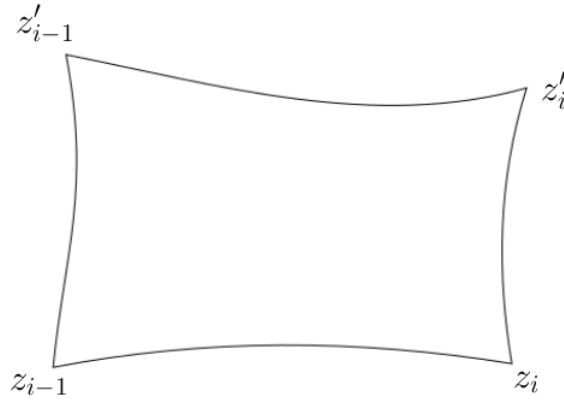
pues el ángulo $z'_i z_i z_{i-1}$ es mayor a $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto,

$$d(z_{i-1}, z'_{i-1}) \geq d(z_i, z'_i). \quad (5.31)$$

De aquí que no existe una sucesión de contraejemplos en cada caso. □

Regresamos a la demostración de la proposición 5.0.3. Si la longitud de cada lado de la curva c es más grande que o igual a $C_3(\delta)$, entonces los ángulos $z'_i z_i z_{i-1}$ están en el intervalo $[\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}]$.

Supongamos que la medida de los ángulos $z'_i z_i z_{i-1}$ no pertenecen al intervalo $[\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}]$. Si el ángulo $z'_i z_i z_{i-1}$ es mayor a $\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$, entonces por la proposición 5.0.6 el ángulo $z_i z_{i-1} z'_{i-1}$ es menor a $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$, pero el ángulo $z'_{i-1} z_{i-1} z_{i-2}$ es mayor a $\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$; de

Fig. 5.1: Cuadrilátero $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$.

nuevo, si el ángulo $z'_{i-1} z_{i-1} z_{i-2}$ es mayor que $\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$ y, aplicando la proposición 5.0.6, el ángulo $z_{i-1} z_{i-2} z'_{i-2}$ es menor que $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$, por lo que $z'_{i-2} z_{i-2} z_{i-3}$ es estrictamente mayor que $\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$.

Iterando para valores de i , encontramos una sucesión de distancias $(d(z_i, z'_i))$ estrictamente creciente cuando i decrece. Pero esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que la distancia entre \tilde{c} y c^* está acotada.

Proposición 5.0.7. Sea $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Entonces existen constantes $K > 0$ y $C_4(\delta)$ tales que los ángulos en los puntos z_i y z_{i-1} del cuadrilátero $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ están en el intervalo $[\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}]$ y la distancia $d(z_i, z_{i-1}) \geq C_4(\delta)$. Más aún, $d(z_i, z'_i)$ y $d(z_{i-1}, z'_{i-1})$ son menores o iguales a K .

Demostración: Esta demostración es similar a la de la proposición 5.0.6

□

Para probar la proposición 5.0.3, supongamos que $L \geq C_i(\delta)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Para estimar la longitud de la curva c , sumaremos las longitudes de las proyecciones $z'_i z'_{i+1}$ de los lados de c .

Para esto consideremos dos cuadriláteros $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ y $z_i z'_i z'_{i+1} z_{i+1}$. Si las longitudes de los lados de la curva c son lo suficientemente grandes, entonces el vector tangente al segmento $z_i z_{i+1}$ en z_i es cercano al vector tangente del segmento $z_i z'_{i+1}$ en z_i . (lema 3.0.5). Lo mismo ocurre para el vector tangente al segmento $z_i z_{i-1}$ en z_i es cercano al vector tangente del segmento $z_i z'_{i-1}$ en z_i .

Si los puntos z'_{i+1} y z'_{i-1} están situados en el mismo lado del punto z'_i de la geodésica c^* , entonces la medida del ángulo formado entre estos vectores tangentes $z_i z'_{i+1}$ y $z_i z'_{i-1}$ en el punto z_i está en el intervalo $[0, \pi)$. Lo cual es una contradicción pues los ángulos en las esquinas de \tilde{c} toman valores en el intervalo $[\pi - \delta, \pi]$.

Ahora sea $\eta < 1$ y sea $L(\eta) = \sup\{C_i(\delta), \frac{2K}{1-\eta}\}$. Si las longitudes de los lados de la curva c son más grandes o iguales a $L(\eta)$, entonces

$$\frac{d(z'_i, z'_{i-1})}{d(z_i, z_{i-1})} \geq \frac{d(z_i, z_{i-1}) - 2K}{d(z_i, z_{i-1})} \geq \eta \quad (5.32)$$

Pero la longitud de la geodésica \bar{c} es la suma de las proyecciones $z'_i z'_{i-1}$ y ésta geodésica es homotópica a c , por lo que se sigue la proposición 5.0.3.

□

6. TEOREMA DEL DOBLE LÍMITE

En este último capítulo, vamos a aplicar el teorema 5.0.1 para mostrar el teorema del doble límite que propuso William Thurston en un artículo no publicado llamado *Surface groups and manifolds which fiber over the circle*, (preprint 1986), esencial para la demostración del teorema de hiperbolización de 3-variedades que fibran sobre el círculo.

Definición 6.0.1. Sean λ^+ y λ^- dos laminaciones geodésicas medibles en \mathbb{H}^2/Γ cuyos soportes se intersectan. Decimos que estas laminaciones geodésicas medibles llenan la superficie \mathbb{H}^2/Γ , si cada componente conexo del complemento en \mathbb{H}^2/Γ de la unión $\lambda^+ \cup \lambda^-$ es

- I. Un disco tal que su frontera es la unión de un número finito de segmentos geodésicos.
- II. Un anillo que contiene una cúspide de \mathbb{H}^2/Γ .

Ejemplo 6.0.1. Si λ^+ y λ^- son dos laminaciones geodésicas medibles aracionales que se intersectan, entonces llenan a \mathbb{H}^2/Γ . En efecto, de la definición de laminación aracional se sigue que cada componente de su complemento es simplemente conexo o es homeomorfo a una vecindad anular de una cúspide. Por otra parte, si el complemento es simplemente conexo, tenemos que como el soporte de una laminación aracional es un conjunto minimal excepcional, se sigue que su frontera es la unión de un número finito de segmentos geodésicos.

A continuación, vamos a demostrar una generalización del lema de Ahlfors que vimos anteriormente.

Sea $(\sigma^+, \sigma^-) \in \mathcal{T}(\Gamma) \times \mathcal{T}(\bar{\Gamma})$ como están definidos en el capítulo 2. Sea ρ la representación en el espacio $\mathcal{QF}(\Gamma)$ que corresponde a (σ^+, σ^-) bajo el isomorfismo de Ahlfors-Bers, y sean ρ^+ y ρ^- dos representaciones fuchsianas asociadas con σ^+ y σ^- , respectivamente.

Si $\gamma \in \Gamma$ es un elemento hiperbólico, denotamos por $\ell_\rho(\gamma)$ a la distancia de traslación de $\rho(\gamma)$ en \mathbb{H}^3 , por $\ell^+(\gamma)$ a la distancia de traslación de $\rho^+(\gamma)$ en \mathbb{H}^2 , y por $\ell^-(\gamma)$ a la distancia de traslación de $\rho^-(\gamma)$ en $\bar{\mathbb{H}}^2$.

Recordemos el 1/4-teorema de Koebe:

Teorema 6.0.1. Sea \mathbb{D} el disco unitario y sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. La imagen de f contiene un disco de radio $\frac{1}{4}$ y con centro en 0.

Lema 6.0.1. Siguiendo la notación antes mencionada, se cumple

$$\ell_\rho(\gamma) \leq 2 \inf\{\ell^+(\gamma), \ell^-(\gamma)\} \quad (6.1)$$

Este lema es una generalización del Lema de Ahlfors (1.2.7).

Demostración: Primero veremos que $\ell_\rho(\gamma) \leq 2\ell^+(\gamma)$. En efecto, existe un homeomorfismo f entre \mathbb{H}^2 y la componente de $\Omega^+(\rho(\Gamma))$ del dominio de discontinuidad de $\rho(\Gamma)$, tal que f conjugue la acción del grupo fuchsiano $\rho^+(\Gamma)$ al correspondiente del grupo $\rho(\Gamma)$.

El teorema de Ahlfors-Bers nos da una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, tal que el grupo $\rho(\Gamma)$ deja invariante a dos abiertos conexos disjuntos: Ω^+ y Ω^- . Además, $\Omega^+ / (\rho(\Gamma))$ es conformemente equivalente a \mathbb{H}^2 / Γ , por lo que tenemos un homeomorfismo conforme $f^+ : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Omega^+(\rho(\Gamma))$ tal que f^+ conjugue las acciones del grupo fuchsiano $\rho^+(\Gamma)$ y $\rho(\Gamma)$. Veamos esta función de manera explícita.

Posiblemente después de conjuguar al grupo $\rho^+(\Gamma)$ por un elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y al grupo $\rho(\Gamma)$ por un elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, podemos asumir que $\rho^+(\gamma)$ actúa como la homotecia $z \rightarrow e^{\ell^+(\gamma)}z$ en \mathbb{H}^2 y $\rho(\gamma)$ actúa como $z \rightarrow e^{\ell_\rho(\gamma)+i\alpha}z$ en el conjunto $\Omega^+(\rho(\Gamma))$, donde α es la parte rotacional de la transformación hiperbólica $\rho(\gamma)$.

Por tanto, la representación conforme f debe satisfacer

$$f(e^{\ell^+(\gamma)}z) = e^{(\ell_\rho(\gamma)+i\alpha)}z. \quad (6.2)$$

Como la frontera de $\Omega^+(\rho(\Gamma))$ contiene a $0 \in \mathbb{C}$, la distancia del punto $f(z)$ a la frontera es menor o igual a $|f(z)|$ para toda $z \in \mathbb{H}^2$. Aplicando el teorema 6.0.1 a la función derivada de f tenemos

$$\frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{2}{\text{Im}(z)}. \quad (6.3)$$

Si integramos $\frac{|f'(z)|}{|f(z)|}$ en el segmento $[i, e^{\ell^+(\gamma)}i]$, tenemos $\ell_\rho(\gamma)$ y la integral de $\frac{2}{\text{Im}(z)}$ en $[i, e^{\ell^+(\gamma)}i]$ es $2[\log(e^{\ell^+(\gamma)}i) - \log(i)] = 2\ell^+(\gamma)$.

Entonces

$$\ell_\rho(\gamma) \leq 2\ell^+(\gamma). \quad (6.4)$$

Haciendo el proceso anterior para Ω^- obtenemos $\ell^-(\gamma)$. Por lo tanto,

$$\ell_\rho(\gamma) \leq 2 \inf\{\ell^-(\gamma), \ell^+(\gamma)\} \quad (6.5)$$

□

La proposición siguiente será de utilidad para mostrar una relación entre una estructura de un subconjunto compacto, y una constante que depende de una curva cerrada simple.

Proposición 6.0.1. Sea (ρ_i) una sucesión en el espacio $QF(\Gamma)$ tal que para cada $\gamma \in \Gamma$ existe una constante $c(\gamma, K)$ que cumple con $\ell_{\rho_i}(\gamma) \leq c(\gamma, K)$. Entonces la sucesión (ρ_i) tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Demostración: Supongamos que las representaciones pertenecientes al grupo $QF(\Gamma)$ son normalizadas. Sean $g, h \in \Gamma$ dos elementos hiperbólicos que generan un grupo libre. Supongamos que $0 \in \mathbb{C}$ es el punto atractor fijo de $\rho(g)$, el elemento ∞ es el punto atractor fijo de $\rho(h)$ y $1 \in \mathbb{C}$ es el punto repulsor fijo de $\rho(gh)$. Empezaremos probando que las representaciones ρ_i restringidas al subgrupo $\langle g, h \rangle$ generado por g y h , convergen bajo las hipótesis de este lema.

Podemos escribir a $\rho(g)$ como la transformación de Möbius

$$z \rightarrow \frac{z}{\alpha z + \beta}, \quad (6.6)$$

y $\rho(h)$ como la transformación de Möbius

$$z \rightarrow az + b, \quad (6.7)$$

donde $|a| > 1$ y $|\beta| > 1$.

Sabemos que la distancia de traslación de $\rho(g)$ es $\log|\beta|$ y de $\rho(h)$ es $\log|a|$. Si la distancia de traslación $\rho(gh)$ está acotada, la cantidad $|\alpha b|$ está acotada. Entonces las constantes a, b, α, β están acotadas y cumplen con la hipótesis.

La sucesión de restricciones de las representaciones ρ_i a $\langle g, h \rangle$ converge a una representación ρ_∞ discreta y fiel (1.2.4). En particular, el grupo $\rho_\infty(\langle g, h \rangle)$ contiene dos elementos hiperbólicos, digamos $\rho_\infty(m)$ y $\rho_\infty(n)$, los cuales no conmutan por lo que tienen puntos fijos distintos. Entonces los espacio de múltiplos de escalares de los eigenvectores de las matrices $M_\infty \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ y de $N_\infty \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ son distintos, donde M_∞

es el levantamiento de $\rho_\infty(m)$ y N_∞ es el levantamiento de $\rho_\infty(n)$.

Por lo tanto, las matrices $M_\infty, M_\infty^2, N_\infty, N_\infty^2$ son independientes y generan a $M_2(\mathbb{C})$.

Por lo anterior, las cuatro formas lineales

$$M \rightarrow \text{tr}(MM_\infty)$$

$$M \rightarrow \text{tr}(MN_\infty)$$

$$M \rightarrow \text{tr}(MM_\infty^2)$$

$$M \rightarrow \text{tr}(MN_\infty^2)$$

son independientes y generan el espacio dual de $M_2(\mathbb{C})$. Si M_i y N_i son levantamientos compatibles de $\rho_i(m)$ y $\rho_i(n)$, entonces todas las cuatro formas definidas de la misma forma para las matrices M_i y N_i que resultan ser levantamientos de las representaciones $\rho_i(r)$ convergen a M_∞ y N_∞ .

Sea $\{b^1, \dots, b^k\}$ un conjunto generador para Γ . Sea B_i^j un levantamiento a $SL(2, \mathbb{C})$ de $\rho_i(b^j)$ con $b_i^j \in \{b^1, \dots, b^k\}$. Entonces la traza $\text{tr}(M_i B_i^j)$ está acotada independientemente de i . En efecto, notemos que el elemento $M_i b_i^j$ levanta a $\rho_i(m b_i^j)$, tiene una distancia de traslación acotada (ver capítulo 1, 2.2.1). Por la fórmula que expresa la traza de una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$, la traza de una matriz perteneciente a $SL(2, \mathbb{C})$ como función de la distancia de traslación de su proyección a $PSL(2, \mathbb{C})$, vemos que $\text{tr}(M_i B_i^j)$ está acotada.

Por argumentos similares, las trazas $\text{tr}(M_i^2 B_i^j)$, $\text{tr}(N_i B_i^j)$, $\text{tr}(N_i^2 B_i^j)$ también están acotadas.

Entonces los levantamientos B_i^j están en un subconjunto compacto de $SL(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto la sucesión de representaciones (ρ_i) tiene una subsucesión convergente.

□

Aplicamos la proposición 6.0.1 a la proposición 6.0.2.

Proposición 6.0.2. Sea K un subespacio compacto de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Entonces $K \times \mathcal{T}(\Gamma)$ está acotado en el espacio de representaciones $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Demostración: Sea K un subconjunto compacto de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Mostraremos que para cada estructura σ^+ en K y cada curva cerrada γ , existe una constante $c(\gamma, K)$ tal que $\ell_{\sigma^+}(\gamma) \leq c(\gamma, K)$, donde $\ell_{\sigma^+}(\gamma)$ denota la longitud con respecto a la métrica hiperbólica σ^+ de la geodésica en la clase de homotopía de γ .

Por definición de la distancia en $\mathcal{T}(\Gamma)$, existe una constante a la que llamamos $C(K)$ tal que para $\sigma^+ \in K$, existe un homeomorfismo $C(K)$ -cuasiconforme ψ_{σ^+} de \mathbb{H}^2 que conjuga la acción del grupo $\rho_{\sigma^+}(\Gamma)$ a la del grupo Γ .

Utilizando la proposición 2.2.1, para cada elemento hiperbólico $\gamma \in \Gamma$, tenemos

$$\ell_{\sigma^+}(\gamma) \leq e^{2C(K)} \ell(\gamma) = c(\gamma, K). \quad (6.8)$$

El lema 6.0.1 implica que $\rho = (\sigma^+, \sigma^-) \in K \times \mathcal{T}(\Gamma)$, por lo que para toda curva γ , se obtiene

$$\ell_{\rho}(\gamma) \leq c(\gamma, K). \quad (6.9)$$

El resultado se sigue aplicando la proposición 6.0.1.

□

Enseguida probamos el teorema del doble límite.

Teorema 6.0.2. Sean λ^+ y λ^- laminaciones geodésicas medibles aracionales. Sea $\rho_i = (\sigma_i^+, \sigma_i^-)$ una sucesión de representaciones de $\mathcal{QF}(\Gamma)$ tal que σ_i^+ tiende a λ^+ y σ_i^- tiende a λ^- en la compactificación de Thurston del espacio de Teichmüller y supongamos que $\lambda^+ \cap \lambda^- \neq \emptyset$. Entonces la sucesión (ρ_i) tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Demostración: Procederemos por contradicción. Por el lema 2.4.3, sabemos que existen sucesiones de geodésicas cerradas simples (γ_i^+) y (γ_i^-) que convergen a λ^+ y λ^- , respectivamente, en el espacio proyectivo $\mathcal{PML}(S)$.

También se satisface

$$\frac{\ell_i^+(\gamma_i^+)}{\ell(\gamma_i^+)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{\ell_i^-(\gamma_i^-)}{\ell(\gamma_i^-)} \rightarrow 0. \quad (6.10)$$

Donde $\ell_i^+(\gamma)$ y $\ell_i^-(\gamma)$ es la longitud de la geodésica en la métrica σ_i^+ y en la métrica σ_i^- , respectivamente. Denotamos por $\ell(\gamma)$ a la longitud de γ en la métrica de \mathbb{H}^2/Γ en el interior de S .

Sea $l_i(\gamma)$ la distancia de traslación del elemento $\rho_i(\gamma)$ en \mathbb{H}^3 . De acuerdo al Lema de Ahlfors (6.0.1), tenemos

$$\frac{l_i(\gamma_i^+)}{\ell(\gamma_i^+)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{l_i(\gamma_i^-)}{\ell(\gamma_i^-)} \rightarrow 0. \quad (6.11)$$

Por el lema 6.0.1, si la sucesión (ρ_i) no tiene una subsucesión convergente, entonces existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $\ell_i(\gamma)$ tiende a infinito.

Por la proposición 3.0.3, existe una sucesión (ϵ_i) que tiende a 0 tal que las acciones $(\epsilon_i \mathbb{H}^3, \rho_i)$ convergen en el sentido de Gromov a una acción de Γ en el árbol real \mathcal{T} . Además, la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ tiene pequeños estabilizadores de arco (ver teorema 3.0.4).

Hemos visto que, para todo elemento parabólico $\gamma \in \Gamma$, la representación $\rho_i(\gamma)$ también lo es, por ende la distancia de traslación de γ en el árbol \mathcal{T} es cero debido a la proposición 3.0.5.

Como la acción $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es geométrica (teorema 3.0.7), consideremos una laminación geodésica medible $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ tal que el árbol \mathcal{T} es isomorfo al árbol dual \mathcal{T}_λ de λ .

Por la proposición 1.3.7, sabemos que si λ^+ no interseca a λ , entonces λ^+ tiene el mismo soporte que λ . Como las laminaciones λ^+ y λ^- se intersecan, una de ellas interseca a λ , sin pérdida de generalidad digamos que λ^- .

Por lo tanto, por el teorema 5.0.1 se cumple que

$$\frac{\ell_i(\gamma_i^-)}{\ell(\gamma_i^-)} \tag{6.12}$$

para toda N , siempre que i sea suficientemente grande. Pero esto es una contradicción al teorema 5.0.1. En consecuencia, la sucesión (ρ_i) tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{R}(\Gamma)$.

□

Bibliografía

- [Ahl64] L. Ahlfors. Finitely Generated Kleinian Groups. *American Journal of Mathematics*, 86(2):413–429, 1964.
- [Ahl87] L. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings. Second Edition*. Springer, (1987).
- [Bea95] A. F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 91*. Springer-Verlag, (1995).
- [BH99] M. R. Bridson and A. Hafliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer-Verlag, (1999).
- [BP92] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, (1992).
- [CEM06] R. Canary, D. Epstein, and A. Marden. *Fundamentals of Hyperbolic Geometry: Selected Expositions*. Cambridge University Press, (2006).
- [CG15] Patrick Clarke and Josh Guffin. On the existence of affine Landau-Ginzburg phases in gauged linear sigma models. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 19(4):725–745, 2015.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011.
- [Die70] J. Dieudonne. *Treatise on Analysis II*. Academic Press, (1970).
- [FLP02] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru. *Thurston's Work on Surfaces*. Princeton University Press, (2002).
- [IT91] Y. Imayoshi and M. Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag, (1991).

-
- [Kap10] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Springer, (2010).
- [Kap18] I. Kaplansky. *Infinite Abelian Groups*. The University of Michigan Press. Dover Publications, INC., 2018.
- [Kat92] S. Katok. *Fuchsian Groups*. The University Chicago Press. Chicago Lectures in Mathematics Series, 1992.
- [Loh15] C. Loh. *Geometric Group Theory, An Introduction*. Lectures Notes, (2015).
- [Mor84] J. Morgan. On Thurston's Uniformization Theorem for Three-Dimensional Manifolds. pages 37–125, 1984.
- [MS85] J. Morgan and P. Shalen. *Valuations, Trees and Degeneration of Hyperbolic Structures*. Ann. of Math. 122, 1985.
- [MT98] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Oxford University Press, (1998).
- [Ota96] J.P. Otal. *Le Théorème d'Hyperbolisation pour les Variétés Fibrées de Dimension 3*. Société Mathématique de France, (1996).
- [Rat94] J. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer, 1994.
- [Sko90] Richard Skora. Geometric Actions of Surface Groups on λ -tree. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 65(1), 1990.
- [Szc12] A. Szczepanski. *Geometry of Crystallographic Groups*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2012).
- [Thu02] W.P. Thurston. *Geometry and Topology of 3-manifolds*. Princeton University Press, (2002).

**DR. JEAN MICHEL GRÉVY MACQUART
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada **3-variedades hiperbólicas que fibran sobre el círculo**, que presenta la alumna **Dulce María Guerrero Tánori (10024367)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Larissa Sbitneva CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Santiago Alberto Verjovsky Sola IMATE-UNAM	APROBADO	
Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas IMATE-UNAM	APROBADO	
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC-UAEM	APROBADO	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLA | Fecha:2021-05-25 17:44:36 | Firmante

nrOJ6Equotetehcpw642fUZARdiJ5IzYHHnLAJfnzD7y0raRqsrkSVZc5Yj2MPt2UixPF8ZzVohVmcyanKdFzqZgylgCF0Df3gCaU+YQTRdYJm9byxqKLUtj5dg44SSTT17pyGFH0/4kUztPoHp1g8gAm6NqyOIVzdp3V1WwbSdH4OVzAbSteZ4RoOagqpeSrZWyrcxkuqldhJKaQqVuN20g6nwOwRXS9iWT3nagQXhziG19HaAqxqVJfP59GKj2EcXOeDsDKgoWsgYP6uztSx7SL5qw21XjSPOzj8y7FHecS9uGlr0Dt2s1P77Mo1JAgWbdvShHvqQui/bd9qdnA==

LARISSA VIACHESLAVOVNA SBITNEVA | Fecha:2021-05-25 23:45:23 | Firmante

N6f5NPcmMojpBkj5dq6ADyytZIMyxBQPPao0JZ4BoLZRb7VVFYDaLDYDNeVSHldkZPld8yAIR3Cf4fMibPPGmWZXCHaCPr0TWJs14L2v3wFB7hzvRVX/E+6ID4/w3sdvNSzqxX277vhNk5cD4IZIh0RxnftN5KCq59fgT9wkYxNRFCIBGVgvhkB/mBVbdcfSyHPDC1xE6SBYEWUaMnUi03lgx7qKVDK1ob9IXBrXlyLd7vzfYdE/ljhAB9jAfHfiA9oS6nqabkB0YWC29fopxxwFzKtqZNYsjm/KrdyhTar/waqLMXnBz+96pnUPTaiKZcOkRAPpouspbl6yv7tg==

CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS | Fecha:2021-05-26 12:12:52 | Firmante

KsL/H2464U6F4uXbchp1CzDqoNEUfQXGhYYdfHdtqbqZW2Vs1scOs98ip38PurFy7PpMRNBjHATzkwmVjrKfN4In+hBNyflkFYA0IFbYTabVonqN9Zk/COOlks+T3BFmrcC2Ez9OqfgFrdSuaHJHsZxwirGpeApIMErfgYgNdoTBbCH81As43UnziNtEx6qzm+w+dNiZQrbPI0zRYhB4yRRcrUjXEoETb1U/AjPAAM99Sls29I7WGqbQ7InIvFQUU6fD+Ede5r+ewetYrUzlm7pgyP54wbNbgT3t9flVpbDlyqom4ulZSsgzsDXKW7M7df2oPGWUuuzRc66g==

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2021-05-26 16:05:12 | Firmante

pqzJHcEN5kbAWu07s6uqqFBXP75Ja4iRFPj9iFLqxvy8TJtDIHwY+D6xlscYcTL6e9LKXDSP6vC4DH9+bthoKbKiHcklkEgr2tZM/rHCKS/naUBnjpZrv/kudP+Z2pv84B2JS6fvzJoWVlwJT3wzAO74gVzoNZRde5XoUUH1lyhRTAcGqGV3xuE6v4tKbY8JKA7yQdU36CEcl++anbdTvV8I0JFp8YySpeurF3dejqaMfaL77ZcurzR6CdxLqyASAt8JhAHTh3yQ4/kveGbcLu2iWgeDK1GwARVr+xn44QqCgwaW3RIqakwphRQCXsKJewl29tNouyosxc6nAQ==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2021-05-27 17:51:19 | Firmante

op9DR/R6Wms2JEmlH82+Z9v6Hn5gf5G8w1rsgc3ESwpaat9GKamaZqwmeQOVuTzgzZjAdQEs/pf8GuRmt8wrt01NPOcb/a1wiQO5fptHDHMQX1quJmElqFnRgxJdIY+/0MZdt7rP+gtNoR4776T6iYUsNFBosRtfj5SGv0TWjMT7ip/JPFXlswlYDS9oGw6d892eqmSg/W8tOu2iktAQMN5ifJM1U9WYl0YnMk0ynJw8SuKIDKcxGJl3SGsnq3Ypseooct+U0+laC3p/z2g2LUFUjPj/ti0UO7fxqH4tQp/MJ/8/usMuA/VsirigsoHWK+GGBjztoLg1s9r+Q==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



03q9gl

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/j0lYaYjvGJq3jVXcsFrpi13txTeHLbP>

