Universidad Autónoma del Estado de Morelos
Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas
Centro de Investigación en Ciencias

Propiedades algebraicas de los operadores de ascenso y descenso, asociados a la transformada de Fourier discreta N-dimensional

Tesis

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta

miguel angel ortiz cortés

Directora de Tesis

Dra. Masuma Atakishiyeva

Co-director

Dr. Natig Atakishiyev

Cuernavaca, Morelos julio, 2019

Miembros del Jurado

	Nombre	**Adscripción**	**Línea de Investigación**
Presidente	Dra. Gabriela Hinojosa Palafox	CInC - UAEM	Matemáticas Puras
Secretario	Dr. Rogelio Valdéz Delgado	CInC - UAEM	Matemáticas Puras
Vocal	Dr. Carlos Villegas	IMATE - UNAM	Teoría Cuántica, Sistemas Dinámicos
Suplente	Dra. Masuma Atakishiyeva	CInC - UAEM	Matemáticas Aplicadas
Suplente	Dr. Natig Atakishiyev	IMATE - UNAM	Ecuaciones en Diferencias, Análisis de Fourier

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Resumen

Centro de Investigación en Ciencias
Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Maestría en Ciencias

Propiedades algebraicas de los operadores de ascenso y descenso, asociados a la transformada de Fourier discreta N-dimensional

por Miguel Angel Ortiz Cortés

En este trabajo se analiza la construcción y propiedades algebraicas de los operadores de ascenso y descenso asociados a la transformada de Fourier discreta N - dimensional. Se justifica la convergencia de estos y del operador hamiltoniano discreto a sus análogos continuos mediante esquemas asociados, se prueba la conmutatividad del operador de número asociado, así como la interpretación de los operadores discretos de ascenso y descenso como objetos formados por una componente *circulante* y una componente diagonal del álgebra de grupo $\mathbb{C}\mathcal{H}$ del grupo finito de Heisenberg sobre $\mathbb{C}$, esto último mediante los operadores complementarios de Schwinger, de acuerdo con los procedimientos de Atakishiyeva y Atakishiyev.

Palabras clave: Transformada Discreta de Fourier, esquema de discretización por diferencias finitas, autovectores, Grupo de Heisenberg, operadores complementarios, operadores discretos de ascenso y descenso, álgebra de grupo, matrices circulantes.

«*Se hace la ciencia con hechos como una casa con piedras, pero una acumulación de hechos no es una ciencia, al igual que un montón de piedras no es una casa...*»

J. H. Poincaré

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Masuma Atakishiyeva y al Dr. Natig Atakishiyev, por la guía y ayuda brindada para la elaboración de este trabajo.

A mi familia, incluyendo claro, a mi tío Erasmo Peralta Castillo, por la invaluable paciencia mostrada por todos ellos.

A Naiashell Agüero por su apoyo en momentos precisos.

También al Centro de Investigación en Ciencias del IICBA así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) sin cuyo estímulo económico esto no habría sido posible.

Dedicada a mis padres, Susana Cortés Guerrero y Fernando Ortiz Castillo...

Índice general

Lista de Abreviaturas

TFD	**T**ransformada (de) **F**ourier **D**iscreta N - dimensional
TFC	**T**ransformada (de) **F**ourier **C**lásica
OAL	**O**scilador **A**rmónico **S**imple
DDF	**D**iscretización (por) **D**iferencias **F**initas
EDDF	**E**squema (de) **D**iscretización (por) **D**iferencias **F**initas

Introducción

Las transformaciones lineales pueden verse como cambios de perspectiva sobre un objeto, que nos proveen de mayor información acerca de este. Una de tales transformaciones, es la Transformada de Fourier Discreta n-dimensional (TFD), la cual, ha resultado de gran importancia para el análisis de datos periódicos; es decir, datos que obedecen un patrón de comportamiento. La TFD tiene la virtud de transformar un conjunto finito de datos, del dominio del tiempo, al dominio de frecuencias, proporcionando de esta forma, los distintos *modos de vibración* que componen a tales datos. La gran efectividad de la TFD, radica en el hecho de que más allá de representar la *armonía* de los datos por medio de sinusoides (reales), esta lo hace por medio de exponenciales complejas (o sinusoides complejos), logrando de este modo, analizar los datos desde una concepción circular, por así decirlo, en vez de una concepción oscilatoria; esto permite un tratamiento equivalente, pero más compacto de, y una comprensión más profunda sobre, la armonía de dichos datos.

Debido a que la TFD es una transformación lineal, es natural preguntarse acerca de sus autovalores, así como de sus correspondientes autovectores. Es sabido que sus autovalores son $\{1, -1, i, -i\}$ y en 1972, J. H. McClellan y T. W. Parks [14] determinan sus correspondientes multiplicidades, así como un conjunto de autovectores linealmente independiente, aunque no ortogonal. La estructura de los autoespacios correspondientes ha resultado complicada y la construcción analítica de una base ortonormal de autovectores es un problema que actualmente genera considerable actividad de investigación. Varias técnicas se han propuesto para construir dicho conjunto ortonormal con base en alguna propiedad que le provea la calidad de *canónico*. Entre ellas se encuentra la técnica basada en el uso de la teoría de matrices conmutativas, que consiste en la construcción de una matriz con autovalores todos distintos que conmute con la representación matricial de la TFD, lo que asegura que ambas matrices comparten el mismo conjunto de autovectores, entre ellos, el conjunto ortonormal correspondiente a la primera. Esta técnica es utilizada por V. W. Dickinson y K. Steiglitz [7] y por F. A. Grunbaum [11] en 1982. Además del uso de matrices que conmutan con la DFT, en 2015, M. K. Atakishiyeva y N. M. Atakishiyev [2] realizan la construcción por medio de operadores de ascenso y descenso, imitando el caso continuo, con el objeto de obtener versiones discretas de funciones de Hermite. Otro método propuesto por A. Kuznetsov y M. Kwasnicki (2017) consiste en el uso de cierto principio de incertidumbre asociado por T. Tao (2005) a grupos cíclicos de orden primo. G. Fendler y N. Kaiblinger [9] construyen autovectores con soporte pequeño para la TDF de orden primo impar. A. N. Karkishchenko y V. B. Mnukhin (2018) construyen los autovectores sobre campos gaussianos finitos. Existen además otras técnicas desarrolladas hasta ahora que también pretenden dotar de cierta distinción (canonicidad) a las bases obtenidas, y que podrían categorizarse como bien menciona Fendler, en varios tipos: aquellas relacionadas a las versiones discretas de funciones de Hermite, la transformada de Fourier fraccional y el oscilador armónico; a simetrías en conexión con la transformada de Fourier rápida; o a caracteres y las funciones teta de Jacobi.

En este trabajo se revisa el procedimiento construído por N. Atakishiyev y M. Atakishiyeva en [2, 3]; desde la creación del operador N conmutativo con la TFD, a través de la construcción de operadores de ascenso y descenso, hasta la obtención de ciertas propiedades algebraicas que satisfacen estos últimos por medio de la teoría de matrices circulantes y la técnica de bases de operadores unitarios desarrollada por J. Schwinger [15] en 1960.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 1 se presenta brevemente el trasfondo algebraico que subyace en la TFD; en el Capítulo 2 se presenta la motivación de la creación del operador de número N y de los operadores de ascenso y descenso, como una analogía con el caso continuo; en los Capítulos 3 y 4 se analiza la construcción de operadores que conmutan con la TFD, obteniendo explícitamente en el cuarto, los operadores mencionados en la sección 2, para el caso discreto, mediante un esquema de discretización por diferencias finitas además de que se demuestra la convergencia de estos en cierto sentido, a sus análogos continuos; así mismo se muestra la conmutación del operador de número asociado con la TFD. El Capítulo 5 está dedicado al estudio de la naturaleza algebraica de los operadores de ascenso y descenso obtenidos en el Capítulo 4, presentando en la primera sección aspectos sobre el operador hamiltoniano discreto, en la segunda se indica la forma general de los autovectores a partir del autovector de estado base y en la tercera se estudia la interpretación de los operadores de ascenso y descenso, donde se demuestra que estos están compuestos por una parte *circulante* perteneciente al álgebra conmutativa $\mathrm{Circ}(N)$ de matrices circulantes y de una parte *diagonal* perteneciente al algebra $\mathbb{D}$ de las matrices diagonales, mismas que están contenidas en el álgebra de grupo $\mathbb{C}\mathcal{H}$ del grupo de Heisenberg sobre el campo $\mathbb{C}$; usándose en este proceso resultados obtenidos por J. Schwinger sobre operadores complementarios. Finalmente en el Capítulo 6 se hacen comentarios concluyentes y se indican posibles líneas de investigación a seguir, que surgen de la necesidad de establecer con precisión la *convergencia* de sucesiones de operadores discretos sobre $\mathbb{C}^N$ hacia operadores continuos sobre $L^2(\mathbb{R}, dx)$ para el *buen establecimiento* en un sistema estacionario, así como propiedades adicionales que puedan obtenerse en analogía con el caso continuo como la construcción explícita de los autovectores correspondientes.

Capítulo 1

Fundamentos algebraicos

En este primer capítulo se exponen brevemente algunos fundamentos algebraicos sobre los que yace el resto del trabajo. La terminología expuesta es estándar y puede consultarse en cualquier texto básico al respecto; por ejemplo en [16] en lo referente a variable compleja y transformada de fourier discreta y [5] y [10] en lo referente a teoría de representaciones.

1.1. Raíces n-ésimas de la unidad y análisis de Fourier

La bien conocida **fórmula de Euler**, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, con $i := \sqrt{-1}$ tal que $i^2 = -1$, permite resolver la ecuación $z^N = 1, z \in \mathbb{C}$, de modo que las soluciones de esta están dadas por $z = e^{2i\pi k/N}, 0 \leq k \leq N-1$ y son llamadas **raíces N-ésimas de la unidad**; si $z^m = 1$ y no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z^k = 1$ y $k < m$, se dice que la raíz z es una **raíz primitiva m-ésima** de la unidad. El conjunto de raíces N-ésimas de la unidad forma un grupo cíclico de orden N, siendo la raíz primitiva $z = e^{2i\pi/N}$ su generador. Si z es una raíz primitiva N-ésima de la unidad, entonces la sucesión de potencias $\{\dots z^{-1}, z^0, z^1, \dots\}$ es **N-periódica** (pues $z^{(j+N)} = z^j \ \forall j$) y las sucesiones de potencias s_k: $\{\dots, z^{k(-1)}, z^{k(0)}, z^{k(1)}, \dots\}$ para $k = 0, \dots, N-1$, son todas N-periódicas (ya que $z^{k(j+N)} = z^{kj}$). Además, el conjunto $s_0, \dots, s_{N-1}$ de estas sucesiones, es una base del espacio lineal de todas las sucesiones N-periódicas. Así que cualquier sucesión N-periódica de números complejos $\{\dots x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ puede expresarse como una combinación lineal de potencias de N-ésimas raíces primitivas de la unidad, $x_j = \sum_k X_k \cdot z^{kj}$, para algunos números complejos $X_0, \dots, X_{N-1}$ y cada entero j; esta es una forma de **análisis de Fourier**. Si j es una variable discreta de tiempo, entonces k es una frecuencia y X_k es una amplitud compleja. Eligiendo como raíz N-ésima de la unidad a la primitiva $q = \exp(2\pi i/N)$, se consigue que x_j se pueda expresar como una combinación lineal de senos y cosenos $x_j = \sum_k A_k \cos(2\pi jk/N) + \sum_k B_k \sin(2\pi jk/N)$; esto es la **Transformada de Fourier Discreta** (TFD).

De la progresión geométrica

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} = \begin{cases} (1-z^N)/(1-z), & \text{si } z \neq 1 \\ N, & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

se sigue una **relación de ortogonalidad**: para $m = 0, \dots, N-1$ y $m' = 0, \dots, N-1$,

$$\sum_n (q^*)^{mn} \cdot q^{nm'} = N\delta_{mm'}$$

donde δ es la delta de Kronecker, q es una raíz primitiva de la unidad y q^* su conjugado; así, el operador lineal $\mathbf{\Phi}^N : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ cuya representación matricial[1] está definida mediante la matriz de $N \times N$ con entradas

$$\Phi^N_{mn} := N^{-1/2} q^{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2i\pi}{N} mn\right), \tag{1.1}$$

define una TFD que es **unitaria**, o sea,

$$\sum_n \bar{\Phi}^N_{mn} \cdot \Phi^N_{nm'} = \delta_{mm'}$$

por lo que la inversa de $\mathbf{\Phi}^N$ es simplemente su transpuesta conjugada. De modo explícito, dado un vector complejo-valuado $\vec{y}$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, con componentes $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$, se puede obtener otro vector $\vec{z}$ con componentes $z_m = \sum_n \Phi^N_{mn} y_n$, denominado la transformada de Fourier discreta[2] de $\vec{y}$.

En un espacio vectorial real, una transformación unitaria se puede ver como una rotación rígida del sistema de coordenadas, de modo que todas las propiedades de las rotaciones rígidas se pueden encontrar en la TFD unitaria. La preservación del producto interno hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido en $\mathbb{C}^N$ por medio de las transformaciones unitarias permite obtener inmediatamente el **Teorema de Plancherel** expresado como

$$\sum_{n=0}^{N-1} z_n (y_n)^* = \sum_{k=0}^{N-1} Z_k (Y_k)^*,$$

donde Y_k y Z_k son las componentes de las TFD's de los vectores $\vec{y}$ y $\vec{z}$ de $\mathbb{C}^N$ con componentes y_n y z_n. Así mismo, si $\vec{y} = \vec{z}$, esto implica que la norma se preserva, que es lo que establece el **Teorema de Parseval**:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |z_n|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |Z_k|^2.$$

Los vectores $\vec{f}^{(k)}$ que son soluciones de las ecuaciones

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Phi^N_{mn} f^{(k)}_n = \lambda_k f^{(k)}_m, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.2}$$

representan a los **autovectores** con **autovalor** λ_k de $\mathbf{\Phi}^N$. Los autovalores λ_k son bien conocidos como se estableció en la introducción, mientras que los autovectores son complicados y no únicos.

[1] Si $\mathbf{T}$ es un operador lineal, se denotará a su representación matricial como T, y a sus entradas matriciales como T_{mn}.

[2] El signo en el exponente de la exponencial es meramente convencional, así como los factores 1 y $N^{-1/2}$; lo primero determina a la inversa de la TFD y lo segundo su unitaridad.

Se concluye esta sección enfatizando precisamente que la estructura de los autoespacios aun no está bien comprendida y que, como ya se ha indicado, actualmente es objeto de considerable investigación. Así que el objetivo de este trabajo es estudiar los métodos desarrollados en [2, 3] para obtener analíticamente operadores que permitan la construcción de un conjunto ortonormal de autovectores en completa analogía con el caso continuo, lo cual se expone en los siguientes capítulos.

1.2. Teoría de representaciones y caracteres

En esta sección se expone la terminología requerida para establecer las condiciones necesarias y suficientes que determinan la irreducibilidad de representaciones sobre grupos finitos.

Si G es un grupo y X un conjunto, la **acción** de G sobre X es una función $f : G \times X \longrightarrow X$ tal que $f(e, x) = x$ y $f(gh, x) = f(g, f(h, x))$. Una **representación n-dimensional** de un grupo G sobre un campo K es un homomorfismo de grupo $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ donde V es un espacio vectorial n-dimensonal sobre K y $GL(V)$ es el grupo de las transformaciones lineales u operadores lineales sobre V; si el operador lineal $\phi(g)$ es unitario, es decir, que su correspondiente **transpuesto conjugado**, denotado por $D(g)^\dagger$, satisface $D(g)^\dagger = D(g)^{-1}\ \forall\ g \in G$, se dice que ϕ es una **representación unitaria**. Es común referirse al espacio V sobre el que actúan los operadores $\phi(g)$ como la representación misma. Sea G un grupo finito y $X = \{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$ un conjunto finito sobre el que G actúa, sobre cualquier campo K considere un espacio vectorial N-dimensional V con una base indexada por los elementos de X, $\{v_{x_0}, \ldots, v_{x_{N-1}}\}$, podemos hacer que G actúe sobre V mediante $f(g, v_x) := v_{g(x)}\ \forall x \in X$ y $g \in G$; esta se llama la **representación permutación** sobre K adjunta a X y se denota por $K[X]$. Si $X = G$ y G actúa por multiplicación izquierda, la representación permutación $K[G]$ se denomina **representación regular**. Dos representaciones ϕ y ϕ' del grupo G son **representaciones equivalentes** si $\exists\ S$ invertible, tal que $\phi'(g) = S^{-1}\phi(g)S\ \forall g \in G$, o sea que las representaciones difieren por un simple cambio de base, es decir, por una **transformación de similitud**. Una **subrepresentación** de una representación $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ es un subespacio lineal U de V que es **estable** bajo la acción de G, esto es, con la propiedad de que $\phi(g)(U) \leq U\ \forall g \in G$; U se denomina **subespacio invariante** de V y en caso de existir tal espacio, se dice que ϕ es **reducible**. La representación ϕ se llama **irreducible** si no es reducible, o sea que es distinta de cero y no tiene subrepresentaciones propias distintas de cero. Una representación es **completamente reducible** si es equivalente a una representación cuyos elementos de matriz tienen la forma

$$\begin{pmatrix} \phi_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & \phi_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $\phi_j(g)$ es irreducible $\forall j$. Esta se llama **forma diagonal por bloques**. Una representación en forma diagonal por bloques se dice que es **suma directa** de las subrepresentaciones $\phi_j(g)$, y entonces se escribe

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \cdots$$

en este sentido, se puede establecer la siguiente afirmación.

Teorema 1.2.1 (Teorema 1.2, [10])**.** *Toda representación de un grupo finito es completamente reducible.*

Por otra parte, sea G un grupo finito de orden $|G|$ y ϕ_a y ϕ_b representaciones irreducibles de dimensión finita n_a y n_b, respectivamente, es posible probar que ellas satisfacen a la **relación de ortogonalidad**

$$\sum_{g\in G} \frac{n_a}{|G|} [\phi_a(g)]^*_{jk} [\phi_b(g)]_{lm} = \delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}, \tag{1.3}$$

así que con normalizaciones apropiadas, los elementos de matriz de las representaciones irreducibles unitarias no equivalentes

$$\sqrt{\frac{n_a}{N}} [D_a(g)]_{jk}$$

son funciones ortonormales de los elementos de grupo g. Debido a que los elementos de matriz son ortonormales, son entonces linealmente independientes. Se puede probar también que dichos elementos de matriz son un conjunto completo para las funciones de g, en el sentido de que una función arbitraria de g se puede expandir en términos de ellos. En efecto, si $\{|g\rangle\}_{g\in G}$ denota a una base ortonormal del espacio vectorial V, con producto interno denotado por $\langle\ |\ \rangle$, sobre el que actúa la representación regular D_R, se puede expresar a una función arbitraria F de g como

$$F(g) = \langle F|g\rangle = \langle F|D_R(g)|e\rangle$$

donde $e \in G$ es la identidad y

$$\langle F| := \sum_{g'\in G} F(g')\langle g'|,$$

de esta forma, la función F puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de matriz de la representación regular

$$\begin{aligned} F(g) &= \sum_{g'\in G} F(g')\langle g'|D_R(g)|e\rangle \\ &= \sum_{g'\in G} F(g')[D_R(g)]_{g'e}; \end{aligned}$$

pero como D_R es completamente reducible, esto puede reescribirse como combinación lineal de los elementos de matriz de las representaciones irreducibles. Notar que mientras esto prueba que los elementos de matriz de las representaciones irreducibles no equivalentes son un conjunto completo, no provee una manera de encontrarlos. Esto es útil solo cuando se sabe explícitamente la forma de la representación, como ocurrirá en el Capítulo 5. Juntando estos resultados, y en particular cuando $K = \mathbb{C}$, se ha probado la siguiente

Proposición 1.2.2 (Teorema 1.5, [10]). *Los elementos de matriz de las representaciones unitarias irreducibles de G son un conjunto ortonormal completo para el espacio vectorial de la representación regular, o alternativamente, para las funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Como corolario inmediato de lo anterior, se cumple que

$$|G| = \sum_j n_j^2;$$

es decir que el orden del grupo G es la suma de los cuadrados de las dimensiones n_j de las representaciones irreducibles, solo porque los cuadrados de estas determinan el número de elementos de matriz de dichas representaciones.

Considere ahora una representación ϕ de G sobre $\mathbb{C}$, se define el **carácter** χ_ϕ de ϕ mediante $\chi_\phi(g) := \mathrm{Tr}(\phi(g))$, donde Tr es la traza del operador $\phi(g)$, la cual es independiente de los cambios de base en V, debido a que $Tr(MAM^{-1}) = Tr(A)$ para todas las matrices cuadradas A e invertibles M. Se le llama **carácter irreducible** si la representación asociada es irreducible. La dimensión de la representación, que es también el valor del carácter en la identidad I, se le llama el **grado del carácter**. Sean χ y τ dos caracteres de un grupo finito G, el **producto interno** de χ y τ se define como

$$\langle \chi, \tau \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\tau(g)^*,$$

este producto interno provee una manera conveniente de determinar si un carácter dado es irreducible, como se enuncia a continuación.

Corolario 1.2.3 (Corolario 3.11 [5]). *Si χ es un carácter de un grupo finito G, entonces χ es irreducible si y sólo si $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$.*

Estos resultados serán de utilidad en el Capítulo 5.

1.3. Álgebras de grupo y ejemplos

En cuanto al tema de álgebras, básicamente se requerirá únicamente de la definición, por lo que brevemente se establece a continuación.

Un **álgebra** sobre un campo K, o símplemente una ***K*-álgebra**, es un anillo con identidad que es a su vez un K-espacio vectorial, tal que la multiplicación de anillo conmuta con la multiplicación escalar. Un **homomorfismo de *K*-álgebras** es un homomorfismo de anillos que es K-lineal. Una **subálgebra** es un subanillo que es también un sub-k-espacio vectorial. Sea G un grupo finito, la representación regular $K[G]$ puede convertirse en un álgebra si se especifica una operación de multiplicación; en efecto, defina $v_g \cdot v_h := v_{gh}$, $g, h \in G$ y extienda linealmente, el álgebra resultante es el **álgebra de grupo** de G sobre K denotada por KG. En general, abusando del lenguaje, se dejará de escribir a los vectores de KG como v_g y se escribirá símplemente g, de este modo, un elemento de KG se escribe como $\sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in K$. Además, en virtud del Teorema 1.2.2, el álgebra de grupo de un grupo finito G sobre $\mathbb{C}$ puede identificarse con el espacio de las funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sobre G y la multiplicación del álgebra es **convolución** de funciones.

Se ilustran las ideas de esta y las secciones anteriores en los siguientes ejemplos, los cuales resultarán de considerable interés para los resultados finales del Capítulo 5.

Ejemplo 1.3.1. Sea $Z_3 = \{e, a, b\}$ el grupo cíclico abeliano de orden tres determinado por la tabla de multiplicación

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

La siguiente es una representación unitaria irreducible de Z_3, 1-dimensional, evidentemente.

$$\varphi(e) = 1, \qquad \varphi(a) = e^{2\pi i/3}, \qquad \varphi(b) = e^{4\pi i/3}. \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.3.2 (Representación regular)**.** Para el mismo grupo Z_3, podemos calcular su representación regular de la siguiente forma. Tome precisamente a los elementos de grupo, de modo que etiqueten (indexación) a una base ortonormal $\{|e\rangle, |a\rangle, |b\rangle\}$ para algún espacio vectorial (de dimensión 3) de modo que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ denota el producto interno correspondiente. Defina ahora

$$\phi(g_1)|g_2\rangle := |g_1 g_2\rangle, \qquad g_1, g_2 \in Z_3;$$

se puede verificar que esto define una representación, denominada representación regular. Estableciendo $|e_1\rangle = |e\rangle$, $|e_2\rangle = |a\rangle$ y $|e_3\rangle = |b\rangle$, es posible construir la representación matricial para cada operador mediante

$$[\phi(g)]_{ij} = \langle e_i|\phi(g)|e_j\rangle.$$

En efecto, puede verificarse, de la ortonormalidad preestablecida, que la representación matricial subyacente está dada por

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las construcciones anteriores están relacionadas entre sí, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.3 (Sobre la Proposición 1.2.2)**.** El Teorema 1.2.1 asegura la reducibilidad completa de la representación regular, como se puede verificar en el caso del grupo cíclico Z_3. Así pues, tomando

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^2 & q \\ 1 & q & q^2 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

donde

$$q = e^{2\pi i/3},$$

se obtiene entonces, calculando $\phi' = S^{-1}\phi S$,

$$\phi'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

$$\phi'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

En concordancia con la Proposición 1.2.2, pues efectivamente, las columnas de la matriz (1.5), formadas por los "elementos de matriz" de la representación unitaria irreducible (1.4), forman una base ortonormal para el espacio vectorial sobre el que actúa la representación regular.

Ejemplo 1.3.4 (Análisis de Fourier)**.** Considere ahora el grupo cíclico Z_N con elementos a_j con $j = 0, \ldots, N-1$ y $a_0 = e$ tales que

$$a_j a_k = a(j+k)\text{mod } N.$$

Las representaciones irreducibles de Z_N son

$$\phi_n(a_j) = e^{2\pi i n j/N},$$

evidentemente todas 1-dimensionales[3]. De este modo la relación de ortogonalidad (1.3) permite concluir que

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i n' j/N} e^{2\pi i n j/N} = \delta_{n'n},$$

[3] Es posible probar que los grupos finitos abelianos, tienen sólamente representaciones irreducibles unidimensionales.

que es la relación fundamenteal del análisis de Fourier.

Ejemplo 1.3.5 (Álgebra de grupo de Z_3 sobre $\mathbb{C}$)**.** No está de más indicar que la representación regular de Z_3 puede transformarse en un álgebra de grupo sobre $\mathbb{C}$ denotada por $\mathbb{C}Z_3$. La estructura de álgebra sobre el espacio vectorial con base ortonormal $\{|e\rangle, |a\rangle, |b\rangle\}$, se define usando la multiplicación en el grupo: $|g_1\rangle \cdot |g_2\rangle := |g_1 g_2\rangle$ y extendiendo linealmente; en esta definición "$\cdot$" indica la operación de multiplicación en el álgebra de grupo y la yuxtaposición en el lado derecho, la correspondiente en el grupo.

Capítulo 2

Motivación

Como ya se ha mencionado en la introducción, una forma natural de distinguir o escoger una base ortonormal de autovectores de la TFD, es la que pueda resultar de imitar el caso continuo de la transformada clásica de Fourier (TFC), definida más abajo, caso que está intrínsecamente relacionado al oscilador armónico lineal (OAL, cuyo hamiltoniano se define enseguida) en mecánica cuántica no relativista, debido a que la primera encapsula la información sobre qué tan presente está cierta frecuencia en determinada función $f(y)$ con dominio en un intervalo de $\mathbb{R}$. Resulta que la TFC y el OAL tienen el mismo conjunto de autovectores, como argumentaremos en esta sección.

En lo siguiente, $L^2(\mathbb{R}, dx)$ denota al **espacio de Hilbert** de funciones complejo-valuadas de cuadrado integrable definidas sobre los números reales y $\psi_n, \phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \in L^2$. Se flexibiliza la rigurosidad de discurso para resaltar las ideas principales.

2.1. Sobre el hamiltoniano del oscilador armónico

La definición y problema de autovalores correspondientes al **operador hamiltoniano** del OAL están dados por

$$\mathcal{H}\psi_n(x) := \frac{\hbar\omega}{2}\left(\xi^2 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)\psi_n(x) = \hbar\omega(n + 1/2)\psi_n(x), \tag{2.1}$$

donde los autovalores $\hbar\omega(n + 1/2)$ pueden obtenerse, por ejemplo, mediante una representación de matrices y frecuencias de transición como se muestra en [13]. Las autofunciones ψ se obtienen resolviendo la **ecuación de Schrödinger** para el oscilador armónico unidimensional

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi(x) = 0 \tag{2.2}$$

mediante el cambio de variable

$$\xi := \sqrt{m\omega/\hbar}x;$$

de tal manera que para ξ grande es posible obtener una integral asintótica de la forma $\psi(\xi) = \exp(-\xi^2/2)$. Esto motiva proponer la función

$$\psi(\xi) = H(\xi)\text{exp}\left(\frac{-\xi^2}{2}\right),$$

donde H es una función polinomial; al sustituirla en la ecuación (2.2) en términos de ξ, conduce a la **ecuación diferencial de Hermite**

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH}{d\xi} + 2nH = 0.$$

La ecuación anterior puede resolverse mediante series de potencias para obtener

$$H_n(\xi) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j n!(2\xi)^{n-2j}}{j!(n-2j)!},$$

donde $N = n/2$, n par y $N = (n-1)/2$, n impar. Los polinomios $H_n(\xi)$ se denominan **Polinomios de Hermite** y las funciones $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$, **Funciones de Hermite**. Dichos polinomios se pueden normalizar usando la Fórmula de Rodrigues para obtener Funciones de Hermite normalizadas

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} H_n\text{exp}\left(-\xi^2/2\right); \tag{2.3}$$

finalmente, resulta que tales funciones forman una base ortonormal completa para $L^2(\mathbb{R}, dx)$ (ver por ejemplo [6]).

2.2. Transformada de Fourier clásica y operadores de ascenso y descenso

El problema de autovalores de la **Transformada de Fourier Clásica** (TFC), $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ satisface

$$(\mathcal{F}\varphi_n)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\varphi_n(y)dy = \lambda_n\varphi_n(x); \tag{2.4}$$

la **transformada de Fourier inversa** es análoga a la Transformada de Fourier TFC salvo por un cambio de signo en el exponente. En consecuencia, si se define el operador $\iota : L^2 \to Ł^2$ como $(\iota\varphi)(x) := \varphi(-x)$ se sigue que $(\iota\mathcal{F})\varphi(x) = (\mathcal{F}\iota)\varphi(x) = (\mathcal{F}^{-1})\varphi(x)$, por lo cual $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\iota$, de modo que el teorema de inversión de Fourier permite verificar que $(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F})\varphi(x) = \varphi(x)$; así pues $\iota = \iota\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \iota\iota\mathcal{F}\mathcal{F}$, de donde $\iota = \mathcal{F}^2$, por lo que $\mathcal{F}^4 = \iota^2 = I$. Por lo tanto, la ecuación característica de $\mathcal{F}$ satisface $\lambda^4 = 1$ para los autovalores, de manera que ellos son $1, -1, i, -i$. Esto implica que los autoespacios de la TFC están degenerados.

En cuanto a los autovectores, notemos, como en [2], que

$$\frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\varphi(y)dy = i\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}y\varphi(y)dy,$$

así mismo, integrando por partes

$$\begin{aligned} x\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\varphi(y)dy &= -i\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{de^{ixy}}{dy}\right)\varphi(y)dy \\ &= i\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\frac{d\varphi(y)}{dy}dy; \end{aligned}$$

de modo que el operador diferencial de primer orden $x \pm d/dx$ definido sobre el subconjunto de L^2 de funciones diferenciables, satisface

$$\left(x \pm \frac{d}{dx}\right)\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\varphi(y)dy = \pm i\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\left(y \pm \frac{d}{dy}\right)\varphi(y)dy, \tag{2.5}$$

lo cual puede escribirse como

$$\mathbf{a}\mathcal{F} = i\mathcal{F}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{a}^\dagger\mathcal{F} = -i\mathcal{F}\mathbf{a}^\dagger \tag{2.6}$$

donde

$$\mathbf{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \qquad \mathbf{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right) \tag{2.7}$$

se denominan operadores diferenciales de ascenso y descenso (**operadores de ascenso y descenso** en adelante), los cuales obedecen las **relaciones de conmutación de Heisenberg**

$$\left[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger\right] := \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} \equiv I.$$

Aplicando $\mathbf{a}^\dagger$ por la derecha a la primera ec. en (2.6) y $\mathbf{a}$ por la izquierda en la segunda, se sigue que $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger$, similarmente, $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$, de manera que $\mathcal{F}$ conmuta con $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger$ y $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$. Debido a que, salvo factores escalares, el operador hamiltoniano en (2.1) se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right), \tag{2.8}$$

resulta evidente la conmutatividad entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$; entonces, ya que operadores que conmutan tienen el mismo conjunto de autovectores, se concluye que, a pesar de la no simplicidad de los autovalores de la TFC, esta tiene asociado un conjunto ortonormal de autofunciones, a decir, las Funciones de Hermite. De hecho es posible demostrar explícitamente que $\varphi_n = \psi_n$ y que $\mathcal{F}\psi_n(x) = i^n\psi_n(X)$; en [6] se da una demostración bastante formal de esto.

En el procedimiento anterior puede notarse la importancia del papel que juegan los operadores de ascenso y descenso a y $a^\dagger$ en las ecs. (2.7), para probar la conmutatividad de $\mathcal{F}$ con $\mathcal{H}$ mediante el operador, en adelante definido por $\mathcal{N} := a^\dagger a$ y denominado **operador de número cuántico**, para conseguir el fin de la selección de una base de autofunciones ortonormal para la TFC; base distinguida en el sentido de la importancia del oscilador armónico lineal.

Por la situación mostrada en los párrafos anteriores, resulta apropiado indagar sobre la posibilidad de un procedimiento paralelo en el problema de autovalores correspondiente al caso discreto de la TFD planteado en la ec. (1.2); procedimiento que implicaría la construcción de análogos operadores de ascenso y descenso que, como se muestra en [2, 3], es de hecho posible y cuya fundamentación y revisión algebraicas son el objeto de análisis de este trabajo.

Capítulo 3

Sobre autovalores y operadores conmutativos con la TFD

Como ya se ha indicado en los capítulos anteriores, el objetivo de este trabajo consiste en el estudio de las propiedades algebraicas de los operadores de ascenso y descenso asociados a la TFD N-dimensional, que surgen por la necesidad de la determinación de una base ortonormal para la TFD; de esta manera, resulta apropiado exponer los procedimientos de construcción de estos operadores, mismos que, como ya se argumentó previamente, hacen una analogía con el caso continuo de la TFC. En este capítulo se expone formalmente el problema de autovalores de la TFD y algunas propiedades de operadores preliminares en la primera sección, así como la construcción de operadores que conmutan con $\mathbf{\Phi}^N$ en la segunda.

3.1. Problema de autovalores y propiedades de operadores preliminares

Ya se ha establecido en el Capítulo 1 que la transformación lineal unitaria representada por la matriz definida en la ecuación (1.1), es la TFD. Así pues, se reescribe formalmente su definición.

Definición 3.1.1. *Sea $q := e^{\frac{2\pi i}{N}}$. El operador lineal unitario $\mathbf{\Phi}^N : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ cuya representación matricial está definida mediante la matriz de $N \times N$ con entradas*

$$\Phi^N_{mn} := N^{-1/2} q^{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} exp\left(\frac{2i\pi}{N} mn\right),$$

se denomina la Transformada de Fourier Discreta N - dimensional (TFD).

Similarmente, se reproduce la ec. (1.2) que establece el problema de autovalores para la TFD:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Phi^N_{mn} f^{(k)}_n = \lambda_k f^{(k)}_m, k = 0, 1, ..., N-1, \tag{3.1}$$

donde $f^{(k)}_n$ son las componentes del autovector $\vec{f}^{(k)} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y λ_k los correspondientes autovalores de $\mathbf{\Phi}^N$.

McClellan y Parks [14] verifican que $(\Phi^N)^4 = I$, la matriz identidad, así que el polinomio característico de Φ^N es $\lambda^4 - 1 = 0$ de manera que sus autovalores son ± 1 y $\pm i$, los cuales no son distintos para $N \geq 4$ de manera que hay muchos conjuntos de autovectores; así mismo, determinaron también las multiplicidades de estos, además de un conjunto de autovectores, aunque este último es no ortogonal. La dificultad de la obtención de un método analítico para la construcción de un sistema ortogonal de autovectores, llevó a Dickinson y Steiglitz [7] a proponer una técnica basada en la teoría de matrices conmutativas. Similarmente, en [2], Atakishiyeva y Atakishiyev proceden en este sentido, pero haciendo a la vez, una analogía con la TFC, es decir, obteniendo un operador autoadjunto en diferencias con autovalores distintos que conmute con la TFD, como el operador de Número Cuántico $N = a^\dagger a$, mediante la construcción explícita de operadores en diferencias de ascenso y descenso; proceso que es el objeto de estudio de este y el siguiente capítulo.

Como se establece en [11], operadores con espectro (esencialmente) simple que conmutan con la TFD pueden ser aquellos cuya representación matricial es de forma tridiagonal; además de que, salvo un múltiplo aditivo de la identidad, estos operadores pueden ser versiones discretas del operador Hamiltoniano del oscilador armónico. Esto sugiere construir operadores parecidos a estos pero que además satisfagan a las relaciones en la expresión (2.6), por su relevancia en el caso continuo.

Para formar operadores en este sentido, se puede proceder considerando matrices con entradas diferentes de cero por encima o por debajo de la diagonal, pero permitiendo que la condición de periodicidad introduzca además, entradas distintas de cero en los extremos de la antidiagonal, produciéndose *matrices tridiagonales extendidas*; así, se tiene lo siguiente.

Definición 3.1.2. *Se definen los operadores lineales* $\mathbf{Q}^{(\pm)}, \mathbf{T}^{(\pm)}, \mathbf{C}, \mathbf{S} : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *mediante* $Q_{mn}^{(\pm)} := q^{\pm m}\delta_{mn}$, $T_{mn}^{(\pm)} := \delta_{m\pm 1,n}$, *donde* $\delta_{-1,l} := \delta_{N-1,l}$, $\delta_{N,l} := \delta_{0,l}$; $\mathbf{C} := \frac{1}{2}\left(\mathbb{Q}^{(+)} + \mathbb{Q}^{(-)}\right)$ *y* $\mathbf{S} := \frac{1}{2i}\left(\mathbb{Q}^{(+)} - \mathbb{Q}^{(-)}\right)$, *respectivamente.*

La acción de estos operadores sobre vectores de su dominio, se resume en el siguiente lema.

Lema 3.1.3. *Sea* $\vec{y} = (y_0, ..., y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ *y* $\theta_N := \frac{2\pi}{N}$, *entonces, en componentes* $k = 0, ..., N-1$,

1. $\left(\mathbf{Q}^{(\pm)}\vec{y}\right)_k = q^{\pm k} y_k$.
2. $\left(\mathbf{T}^{(\pm)}\vec{y}\right)_k = y_{k\pm 1}$.
3. $(\mathbf{C}\vec{y})_k = \cos(k\theta_N) y_k$.
4. $(\mathbf{S}\vec{y})_k = \sin(k\theta_N) y_k$.

Demostración. El inciso 1 es evidente; así mismo los incisos 3 y 4, pues $\frac{1}{2}\left(q^k + q^{-k}\right) = \cos(k\theta_N)$ y $\frac{1}{2i}\left(q^k - q^{-k}\right) = \sin(k\theta_N)$. Para el inciso 2, $\left(\mathbf{T}^{(\pm)}\vec{y}\right)_k = \sum_l T_{kl}^{(\pm)} y_l = \sum_l \delta_{k\pm 1,l} y_l = y_{k\pm 1}$, donde $l = 0, ..., N-1$. □

La idea detrás de los operadores $\mathbf{Q}^{(\pm)}$ y $\mathbf{T}^{(\pm)}$ es que están interrelacionados con la TDF, de modo similar a la acción de x y d/dx en (2.5), como se muestra enseguida.

Proposición 3.1.4. *Los operadores $\mathbf{Q}^{(\pm)}$, $\mathbf{T}^{(\pm)}$ y $\mathbf{\Phi}^{N}$ satisfacen las siguientes relaciones de intercambio,*

$$\mathbf{Q}^{(\pm)}\mathbf{\Phi}^{(N)} = \mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{T}^{(\mp)}, \qquad \mathbf{T}^{(\pm)}\mathbf{\Phi}^{(N)} = \mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{Q}^{(\pm)}. \tag{3.2}$$

Demostración. Para la primera igualdad, notar que

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{T}^{(\mp)}\right)_{mn} &= \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{\Phi}^{(N)}_{ml} T^{(\mp)}_{ln} \\
&= \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} q^{ml} \delta_{l\mp 1,n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} q^{m(n\pm 1)} \quad (\text{pues } l \mp 1 = n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} q^{mn} q^{\pm m} \\
&= \sum_{l=1}^{N-1} q^{\pm m} \delta_{ml} \frac{q^{ln}}{\sqrt{N}} \\
&= \sum_{l=1}^{N-1} Q^{(\pm)}_{ml} \mathbf{\Phi}^{(N)}_{ln} \\
&= \left(\mathbf{Q}^{(\pm)}\mathbf{\Phi}^{(N)}\right)_{mn}
\end{aligned}$$

En cuanto a la segunda, se procede análogamente. □

Como consecuencia de la anterior proposición se tiene el siguiente

Corolario 3.1.5. *Sea $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$q^{\pm mj} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{\Phi}^{(N)}_{jk} y_k = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{\Phi}^{(N)}_{jk} \left(\mathbf{T}^{(\mp)}\right)^m_{kl} y_l$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{T}^{\pm}\right)^m_{lj} \mathbf{\Phi}^{(N)}_{jk} y_k = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{\Phi}^{(N)}_{lk} q^{\pm mk} y_k \tag{3.3}$$

Demostración. Inmediata. □

3.2. Operadores que conmutan con la TFD

Las relaciones en la Proposición 3.1.4 permiten la construcción inmediata de operadores con representación matricial tridiagonal extendida[1] que conmutan con la TFD. En efecto, notemos que

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}+\mathbf{T}^{(-)}\right)\mathbf{\Phi}^{N}=\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}^{N}\left(\mathbf{Q}^{(+)}+\mathbf{Q}^{(-)}\right)=\mathbf{\Phi}^{N}\mathbf{C},$$

además, por las mismas relaciones,

$$\mathbf{C}\mathbf{\Phi}^{N}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Q}^{(+)}+\mathbf{Q}^{(-)}\right)\mathbf{\Phi}^{N}=\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}^{N}\left(\mathbf{T}^{(+)}+\mathbf{T}^{(-)}\right),$$

de donde,

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{C}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}+\mathbf{T}^{(-)}\right)\right]\mathbf{\Phi}^{N} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}^{N}\left(\mathbf{T}^{(+)}+\mathbf{T}^{(-)}\right)+\mathbf{\Phi}^{N}\mathbf{C}\\ &= \mathbf{\Phi}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}+\mathbf{T}^{(-)}\right)+\mathbf{C}\right],\end{aligned}$$

de manera que el operador

$$\mathbf{U}^{(1)}:=\mathbf{C}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}+\mathbf{T}^{(-)}\right)$$

conmuta con la TFD. Adicionalmente, como se argumenta en [2, 11], este operador satisface la propiedad de que al adicionar un múltiplo entero de la unidad,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{\pi}\left(\mathbf{I}-\frac{1}{2}\mathbf{U}^{(1)}\right)=\frac{1}{2}\left(x^{2}-\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right). \tag{3.4}$$

Así pues, el operador $\mathbf{U}^{(1)}$ conmuta con la TFD y además, en el limite cuando $N\to\infty$, se reduce al hamiltoniano del oscilador armónico lineal. No obstante, como dicen Atakishiyeva y Atakishiyev, dicho operador "*falla para nuestros propósitos, porque tiene múltiples autovalores*"[sic], en el sentido de que su espectro es no simple. Pero el operador $\mathbf{U}^{(1)}$ no es el único que puede construirse mediante $\mathbf{Q}^{(\pm)}$ y $\mathbf{T}^{(\pm)}$, pues así mismo, en [2] se verifica que de hecho existen una infinidad de operadores que conmutan con la TFD y que en el límite cuando $N\to\infty$, convergen al operador hamiltoniano del caso continuo, como los determinados por la siguiente expresión:

$$\mathbf{U}^{(k)}:=\frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{T}^{(+)}\right)^{k}+\left(\mathbf{T}^{(-)}\right)^{k}+\left(\mathbf{Q}^{(+)}\right)^{k}+\left(\mathbf{Q}^{(-)}\right)^{k}\right],k\in\mathbb{N}.$$

Debido a lo anterior, el problema se reduce a construir un operador como $\mathbf{U}^{k}$ pero que tenga un espectro simple; construcción que se expone en el siguiente capítulo.

[1] Claro que la aplicación sucesiva de estas, destruye la configuración de tridiagonalidad extendida en la composición de operadores. Se verá posteriormente que el concepto *invariante* en este sentido, es más bien el de *matriz circulante*.

Capítulo 4

Construcción de los operadores de ascenso y descenso

En el capítulo anterior se argumentó la necesidad de hallar un operador sobre $\mathbb{C}^N$ que no solo conmute con la TFD, sino que además tenga espectro simple. Esto genera la necesidad de analizar más detalladamente el proceso de límite en (3.4), para que sea posible construir operadores con las condiciones requeridas y que se *aproximen* al hamiltoniano del oscilador armónico continuo. Se mostrará que, para conseguir este fin, no solo basta con sustituir una variable discreta en los operadores de ascenso y descenso continuos, sino que además, debe elegirse correctamente un modelo de discretización con parámetro adecuado, con base en *las relaciones de intercambio* de la Proposición 3.1.4.

4.1. Discretización por diferencias finitas

En esta sección se establece una aproximación por diferencias finitas para un operador diferencial que actúa sobre las funciones de $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Puede consultarse [1] como fuente de algunas ideas que se expresan aquí. Existen distintos modos de discretización de un problema de diferencias finitas, y uno de los requerimientos que debe satisfacer, es que esté *bien establecido* cuando se asocia a una ecuación diferencial. Para esto es necesario, evidentemente, construirlo previamente y tener cierta certeza de que este cumple las condiciones que se desea que tenga; una vez conseguido esto, será posible entonces, hablar de existencia y unicidad de las soluciones de la discretización de la ecuación diferencial, así como también de consistencia, estabilidad y convergencia. En este capítulo y en general en este trabajo, se trata únicamente con la construcción de los operadores asociados a una discretización, de modo que satisfagan ciertas propiedades (como que se pueda construir a partir de estos, otro operador que conmute con la TFD), dejando los asuntos que implica el buen establecimiento, para trabajos posteriores. Esto se hace así, porque en esta parte del proceso, es suficiente lidiar con la expresión $du/dx \pm xu$ en sí misma, y no con la ecuación completa estacionaria $du/dx \pm xu = f$ de modo que los problemas del buen establecimiento, no aplican por ahora.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y ∂I su frontera. Considere el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx) = \{u : I \longrightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ es de cuadrado integrable}\}$, y $\mathbb{C}^N$ con el producto interno estándar $\langle , \rangle$.

Definición 4.1.1. *Una discretización por diferencias finitas de L^2 con parámetro de discretización $h(N)$ consiste en una partición de un subintervalo cerrado $I' = [a, b] \subset I$ determinada por el conjunto de puntos $A := \{x_j = a + jh(N) \mid j = 0, ..., N - 1, h(N) \to 0$ si $N \to \infty\}$, además del conjunto de funciones $\overline{L} = \{u|_{A \cup \partial I'} \mid u \in L^2\}$, denominado espacio solución discreto y el conjunto de funciones $L = \{u|_A \mid u \in L^2\}$ denominado espacio de datos discreto.*

Se escribirá $u_j := u(x_j)$ y se usará la abreviatura DDF para referirse a la discretización de la definición anterior. En adelante se consideran condiciones de frontera periódicas, es decir, que para $u \in \overline{L}$, se intercambia el valor que corresponde a $u(b)$ por $u_N = u_0$; esto implica lo siguiente.

Lema 4.1.2. *En una DDF con parámetro h(N) y condiciones de frontera periódicos, se cumple $\overline{L} = L \subseteq \mathbb{C}^N$.*

Demostración. Los elementos de $\overline{L}$ son de la forma $u|_{A \cup \partial I} = \{u_0, ..., u_{N-1}, u(b)\}$, por las condiciones de frontera periódicas, $u(b) = u_0$, de manera que $\{u_0, ..., u_{N-1}, u(b)\} = \{u_0, ..., u_{N-1}\} = u|_A$, que son conjuntos que evidentemente pueden ordenarse para formar vectores de $\mathbb{C}^N$. $\square$

Observación 4.1.3. Podría parecer innecesario considerar en la definición de DDF el subintervalo I', pero debe tomarse en cuenta que I podría ser todo $\mathbb{R}$, y definir una malla (en este caso unidimensional) requiere de un número finito de puntos sobre los que esté definida u, para poder tomar precisamente sumas o diferencias finitas $u_j \pm u_{j\pm1}$ incluyendo la frontera del intervalo. Por otro lado, el lema anterior (que hace surgir la cuestión sobre si L es todo $\mathbb{C}^N$) simplemente verifica, mediante la periodicidad, que $\overline{L}$ y L estén formados por vectores de $\mathbb{C}^N$ para que se puedan definir operadores lineales entre ellos; de esta forma, las matrices asociadas serán cuadradas y tendrán la posibilidad de ser invertibles, permitiendo de este modo la existencia de soluciones únicas. En posteriores trabajos se intentará simplificar estos detalles.

Definición 4.1.4. *Un operador discreto u operador en diferencias finitas, sobre una DDF con parámetro h(N) y condiciones de frontera periódicas, es un operador lineal $\mathbf{D}^{(N)} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$.*

Para la TFD, ya que las raíces N-ésimas de la unidad permiten, como se indicó en el Capítulo 1, construir una base del espacio lineal de todas las funciones N-periódicas, resulta conveniente extender módulo-N las coordenadas de los vectores en $\mathbb{C}^N$ obteniendo sucesiones infinitas N-periódicas $\{a_n \mid a_n = a_m$ si $m \cong n(\text{mod}N)\}$. Así, se puede ver a la TFD como un operador discreto $\mathbf{\Phi} : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}^N$ sobre una DDF con parámetro $h(N) = 2\pi/N$.

En el caso de una ecuación diferencial, esta puede discretizarse aproximando las derivadas que la definen y asociando entonces una DDF, así como un operador en diferencias finitas, obtenido de la aproximación de las derivadas; esto permite determinar *soluciones discretas* asociadas a las soluciones continuas. Este proceso puede aplicarse precisamente a los operadores $d/dx \pm x$ como se procede en la siguiente sección;

donde resultará que seleccionando cuidadosamente un parámetro de discretización adecuado, pueden construirse operadores discretos para $d/dx \pm x$, que permiten obtener efectivamente, un operador que conmuta con la TFD.

4.2. Esquema de discretización para los operadores de ascenso y descenso

Como ya se argumentó en el capítulo anterior, existe una infinidad de operadores que conmutan con la TFD; de estos, se pretende seleccionar aquél que pueda provenir de operadores parecidos a los de ascenso y descenso del caso continuo. Para poder hablar de una construcción que satisfaga esta restricción sin tener que lidiar con el buen establecimiento, es necesario definir el concepto de *esquema de discretización* [1, 8, 17] teniendo en cuenta que los operadores en este contexto, corresponden al caso estacionario, así que se trata de sistemas independientes del tiempo.

Definición 4.2.1. *Un esquema de discretización por diferencias finitas para* $L^2(\mathbb{R}, dx)$*, es una familia de DDF's con parámetro de discretización* $h(N)$*, junto con una familia de operadores discretos* $\mathbf{D}^{(N)} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$*.*

Normalmente, los operadores discretos asociados a los miembros de un esquema, provienen de una ecuación diferencial. Dada una ecuación diferencial $Du(x) = f(x)$, donde $D = d/dx \pm x$ o $D = ad^2/dX^2$, podemos aproximar las derivadas haciendo expansiones de Taylor en cada punto $x \in Dom(u)$ para obtener una *aproximación hacia adelante*

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h);$$

o bien una *aproximación hacia atrás*

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h);$$

o bien una *una aproximación centrada*

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2);$$

las aproximaciones se obtienen descartando los términos de orden $\mathcal{O}$ en las expresiones anteriores. Debido a que la aproximación es puntual, se pueden tener aproximaciones a las derivadas para una DDF sustituyendo x por x_j.

Ya que los operadores $Q^{(\pm)}$ y $T^{(\pm)}$ satisfacen las relaciones de la Proposición 3.1.4, las cuales representan la característica que distingue a los operadores de ascenso y descenso como se muestra en el procedimiento que precede a la ec. (2.5), se busca un esquema que los involucre.

Así pues, considerando que $\mathrm{int}(x), x \in \mathbb{R}$, es la función *parte entera*, se forma una discretización por diferencias finitas mediante una partición del intervalo $[0, 2\pi]$ en subintervalos de tamaño $h = \sqrt{2\pi/N'}$, $N' \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, obteniendo el conjunto de puntos $A = \{x_k \mid x_k = \sqrt{2\pi/N'}k,\ k = 0, ..., N-1\} \subset [0, 2\pi]$ donde

$$N = \mathrm{int}(2\pi/h) = \mathrm{int}(\sqrt{2\pi N'}). \tag{4.1}$$

Asumiendo que las condiciones de frontera son periódicas, sea $u : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y considere que $u_N = u_0$. Entonces se puede definir la restricción de u a A como $u_k := u(x_k), x_k \in A$. Por lo tanto, aproximando la derivada du/dx mediante una aproximación centrada en cada x_k, se propone para $(1/\sqrt{2})(x + d/dx)$ el esquema de discretización por diferencias finitas determinado por

$$d_k := \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{4\sqrt{2}\pi/N} + \frac{N}{2\sqrt{2}\pi} \sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 k\right] u_k,\ u_{-1} := u_{N-1}, u_N = u_0. \tag{4.2}$$

Debido a que, para N' suficientemente grande en (4.1), $N \approx \sqrt{2\pi N'}$, se sigue que $2\pi/N \approx 2\pi/\sqrt{2\pi N'} = \sqrt{2\pi/N'}$; así que el esquema representado por la expresión (4.2), se puede reescribir como

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2(2\pi/N)} + \frac{N}{2\pi}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 k\right] u_k\right] \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\sqrt{2\pi/N'}} + \sqrt{\frac{N'}{2\pi}}\sin\left(\frac{2\pi}{N'}k\right) u_k\right] \\ &= \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{4\sqrt{\pi/N'}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N'}{\pi}}\sin\left(\frac{2\pi k}{N'}\right) u_k \\ &=: b_k \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $u_{-1} := u_{N-1}, u_N = u_0$. Notar que a pesar de la presencia de N' en (4.3), los valores de k no se alteran. La expresión (4.3) conecta al esquema correspondiente a d_k con el de b_k y establece que estos son aproximadamente iguales para N' suficientemente grande. La razón de proceder de esta forma, yace en que el esquema correspondiente a b_k conduce a los operadores de Atakishiyeva, Atakishiyev; y el correspondiente a d_k permite probar que estos *convergen*, en cierto sentido, al operador $(1/\sqrt{2})(x + d/dx)$, como se muestra enseguida.

Denótese por $\vec{u}$ al vector de $\mathbb{C}^N$ con coordenadas $u_0, \ldots, u_{N-1}$ y defina la representación matricial para el operador discreto $\mathbf{b}_N : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, que actúa sobre $\vec{u}$, mediante

$$(\mathbf{b}_N) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{N'}{\pi}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2\sin\frac{2\pi}{N'} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\sin\frac{4\pi}{N'} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\sin\frac{2\pi(N-2)}{N'} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\sin\frac{2\pi(N-1)}{N'} \end{pmatrix},$$

la cual es una *matriz tridiagonal extendida* de $N \times N$; recuerde que la relación entre N y N' está dada por (4.1). Por supuesto que, de modo natural, se habría podido escoger como coeficiente de u_k en la ecuación (4.2), el coeficiente x_k; pero una elección así, no cumpliría con las relaciones de la Proposición 3.1.4, las cuales son un requisito para aspirar a construir operadores que conmutan con la TDF. Por la misma razón es que se ha tomado una aproximación centrada para la derivada. No obstante, el coeficiente x_k sería deseable si lo que se quiere tener es un *representante efectivo* de $x + d/dx$. Así pues, existen distintos modos de asociar un esquema de discretización a un operador diferencial que actúa sobre L^2; para tener la certeza de que el esquema asociado efectivamente *representa* a dicho operador, es necesario verificar que en el límite cuando $h \to 0$ (lo cual equivale a decir que $N \to \infty$), la sucesión de operadores $\mathbf{b}_N$ de algún modo *tienden* a $(1/\sqrt{2})(x + d/dx)$. Siguiendo el modo como procede Grünbaum [11], en cuanto al comportamiento para N grande, se debe reconocer que en la expresión (4.3), el parámetro sobre el que está definido el esquema correspondiente, como función de N o N' es $h = \sqrt{2\pi/N'} \approx 2\pi/N$; esta distinción permite reescribir el esquema en cuestión en términos apropiados para posteriormente probar la *tendencia* de las componentes vectoriales de dicho esquema, al operador $(1/\sqrt{2})(x + d/dx)$.

Proposición 4.2.2. *Sea $u : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica. La k-ésima componente de $\mathbf{b}_N\vec{u}, \vec{u} \in \mathbb{C}^N$ es una aproximación centrada a $(1/\sqrt{2})(d/dx + x)$ con error $\mathcal{O}$ de segundo orden en h.*

Demostración. Por la expresión (4.3), la k-ésima componente $(\mathbf{b}_N\vec{u})_k, \vec{u} \in \mathbb{C}^N$, se puede expresar como

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_N\vec{u})_k &= \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{4\sqrt{\pi/N'}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N'}{\pi}}\sin\left(\frac{2\pi k}{N'}\right)u_k \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2(2\pi/N)} + \frac{N}{2\pi}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 k\right]u_k\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2(2\pi/N)} + \frac{N}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{N}x_k\right)u_k\right], \end{aligned}$$

donde $x_k := (2\pi/N)k \approx \sqrt{2\pi/N'}k$. Notar que para x_k, $0 \leq k \leq N-1$, con $N = \mathrm{int}(\sqrt{2\pi N'})$ y $x_k \leq x_{N-1}$ $\forall\ k = 0, \ldots, N-1$. Debido a que $x_{N-1} \leq (2\pi/N)(N-1) =$

$2\pi(1-1/N) \to 2\pi$ cuando $N \to \infty$, se sigue que $x_k \leq 2\pi \; \forall \; k = 0, \ldots, N-1$ y $\forall \; N \in \mathbb{N}$, de este modo $(2\pi/N)x_k \to 0$ cuando $N \to \infty$; por lo tanto $\sin\left((2\pi/N)x_k\right) \approx (2\pi/N)x_k$, así que, para N suficientemente grande

$$(\mathbf{b}_N\vec{u})_k \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h(N)} + x_k u_k\right).$$

En cuanto a las diferencias en la expresión anterior, ya que $u : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica, se puede usar su expansión en series de Taylor, con el parámetro $h(N), N \in \mathbb{N}$ y $x_k \in [0, 2\pi]$

$$u(x_k+h) = u(x_k) + h\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\bigg|_{x=x_k} + \cdots$$

y

$$u(x_k-h) = u(x_k) - h\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\bigg|_{x=x_k} - \cdots$$

consecuentemente

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h} &= \frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_k} + \frac{h^2}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}\bigg|_{x=x_k} + \cdots \\ &= \frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_k} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que

$$(\mathbf{b}_N\vec{u})_k \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}\bigg|_{x=x_k} + x_k + \mathcal{O}\left(\frac{4\pi^2}{N^2}\right)\right)u(x_k).$$

□

En la demostración anterior, se requirió verificar que la sucesión $\{x_k(N)\}$, es acotada; pero aun hay más sobre su convergencia y lo que esta implica.

Corolario 4.2.3. *Sea $k = 0, \ldots, N-1$, fijo. Si u es analítica, en el EDDF representado por $\mathbf{b}_N$, se cumple*

$$\lim_{N\to\infty} (\mathbf{b}_N\vec{u})_k = (1/\sqrt{2})(d/dx + x)|_{x=X_k} u(X_k),$$

donde $X_k = \lim_{N\to\infty} x_k$.

Demostración. Cuando $N \to \infty$ y con k fijo, la sucesión $\{x_k(N)\}$ es una sucesión infinita numerable; ya que es monótona y acotada, pues $0 \leq x_k(N) \leq 2\pi \; \forall \; N \in \mathbb{N}$, entonces es convergente, digamos a X_k. En la proposición anterior, $\mathcal{O}(4\pi^2/N^2) \to 0$ cuando $N \to \infty$, de donde se sigue el resultado. □

La proposición y corolario anteriores sugieren la necesidad de precisar el concepto de *convergencia de sucesiones de operadores discretos* sobre $\mathbb{C}^N$ hacia un *operador* *continuo* definido sobre L^2. Tal conceptualización requiere de *encajar* de algún modo a ambos tipos de operadores en un mismo espacio de análisis. Un sentido riguroso de convergencia de sucesiones de operadores discretos ha sido desarrollado por Barker en [4], donde se prueba que *todo operador continuo y acotado con resolución inductiva sobre* L^2, *es límite de una sucesión de operadores discretos acotados sobre* $\mathbb{C}^N$. Sería deseable la aplicabilidad de dicho teorema a los operadores $\mathbf{b}_N$; sin embargo, aun cuando la prueba del teorema de Barker es constructiva, la sucesión de operadores discretos utilizados es diferente, además de que requieren del uso de una base ortonormal, misma que en la situación de los operadores $\mathbf{b}_N$, es precisamente la incógnita. Evidentemente la gran importancia del formalismo de Barker radica en la realización del concepto de convergencia en un ámbito riguroso; para aplicarlo al contexto de estudio en este trabajo, es decir, a sucesiones de operadores discretos que satisfacen cierta propiedad adicional (como que conmuten con la TFD), se requiere de un análisis más detallado que permita adaptar ambas situaciones eficientemente.

4.3. Operadores discretos de ascenso, descenso y de número

Notemos que en el esquema de discretización determinado por la expresión (4.3), la representación matricial $(\mathbf{b}_N)_{jk}$ se puede expresar como

$$(\mathbf{b}_N)_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{X} + \mathcal{D}\right)_{jk},$$

donde

$$\mathcal{X} := \frac{N}{2\pi}\mathcal{S}, \qquad \mathcal{D} := \frac{N}{4\pi}\left(\mathbf{T}^{(+)} - \mathbf{T}^{(-)}\right),$$

por lo que $\mathbf{b}_N$ se puede escribir como

$$\mathbf{b}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{N}{2\pi}\left[\mathbf{S} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)} - \mathbf{T}^{(-)}\right)\right]; \tag{4.4}$$

similarmente, en el mismo EDDF definimos el operador

$$\mathbf{b}_N^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{N}{2\pi}\left[\mathbf{S} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)} - \mathbf{T}^{(-)}\right)\right], \tag{4.5}$$

el cual, de modo análogo a $\mathbf{b}_N$, se puede afirmar que, para $u \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ y $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$, $(\mathbf{b}^\dagger \vec{u})_k$ se aproxima a $(1/\sqrt{2})(x - d/dx)$ cuando $N \to \infty$ en el sentido mostrado en la sección anterior. Así mismo, es claro que

$$(\mathbf{b}_N^\dagger)_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{X} - \mathcal{D}\right)_{jk}.$$

Los coeficientes en las definiciones anteriores pueden expresarse en términos de N' mediante $2\pi/N \approx \sqrt{2\pi/N'}$.

Definición 4.3.1. *Se denomina a los operadores* $\mathbf{b}_N^\dagger : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *y* $\mathbf{b}_N : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *como operadores discretos de ascenso y descenso, respectivamente.*

Entonces se tiene lo siguiente.

Proposición 4.3.2 (Relaciones de intercambio)**.** *Sea* $\mathbf{\Phi}^{(N)} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *la transformada discreta de Fourier. Los operadores* $\mathbf{b}_N^\dagger$ *y* $\mathbf{b}_N$ *satisfacen las siguientes relaciones*

$$\mathbf{b}_N \mathbf{\Phi}^{(N)} = i\mathbf{\Phi}^{(N)} \mathbf{b}_N, \qquad \mathbf{\Phi}^{(N)} \mathbf{b}_N^\dagger = i\mathbf{b}_N^\dagger \mathbf{\Phi}^{(N)}.$$

Demostración. Usando la definición de $\mathbf{S}$ y la Proposición 3.1.4

$$\begin{aligned}
i\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{b}_N &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{N}{2\pi}\mathbf{\Phi}^{(N)}\left[\frac{i}{2i}\left(\mathbf{Q}^{(+)}-\mathbf{Q}^{(-)}\right)+\frac{i}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}-\mathbf{T}^{(-)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{N}{2\pi}\left[\frac{i}{2i}\left(\mathbf{Q}^{(+)}-\mathbf{Q}^{(-)}\right)\mathbf{\Phi}^{(N)}+\frac{i}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}-\mathbf{T}^{(-)}\right)\mathbf{\Phi}^{(N)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{N}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^{(+)}-\mathbf{T}^{(-)}\right)+\mathbf{S}\right]\mathbf{\Phi}^{(N)} \\
&= \mathbf{b}_N\mathbf{\Phi}^{(N)}.
\end{aligned}$$

Para la segunda relación se procede similarmente. □

El análogo del operador de número del caso continuo se sigue naturalmente.

Definición 4.3.3. *Se denomina al operador* $\mathcal{N}_N := \mathbf{b}_N^\dagger \mathbf{b}_N$ *como operador discreto de número.*

Corolario 4.3.4. *El conmutador de* $\mathcal{N}_N$ *con* $\mathbf{\Phi}^{(N)}$ *satisface* $\left[\mathcal{N}_N, \mathbf{\Phi}^{(N)}\right] = 0$.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior.

$$\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathcal{N}_N = \mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{b}_N^\dagger\mathbf{b}_N = i\mathbf{b}_N^\dagger\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{b}_N = \mathbf{b}_N^\dagger\mathbf{b}_N\mathbf{\Phi}^{(N)} = \mathcal{N}_N\mathbf{\Phi}^{(N)}.$$

□

Así pues, resulta que este operador $\mathcal{N}$ efectivamente 'mimetiza' a su correspondiente operador continuo, al conmutar con la transformada discreta de Fourier.

Capítulo 5

Propiedades algebraicas

En este capítulo se exponen las consecuencias inmediatas que se siguen de los operadores de ascenso y descenso.

5.1. Operador hamiltoniano discreto

La versión discreta del operador hamiltoniano se sigue inmediatamente de las expresiones de $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ en términos de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{D}$ sobre la discretización que implica el esquema (4.3), pues

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_N^\dagger \mathbf{b}_N &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2\right) + \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}, \mathcal{D}\right] \\ \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^\dagger &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2\right) - \frac{1}{2}\left[\mathcal{X}, \mathcal{D}\right], \end{aligned} \tag{5.1}$$

por lo que, en analogía con la ecuación (2.8)

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_N^\dagger \mathbf{b}_N + \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^\dagger\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2\right) =: \mathcal{H}_N; \tag{5.2}$$

entonces se puede escribir también

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{N} + \left[\mathbf{b}_N, \mathbf{b}_N^\dagger\right].$$

Lo anterior es meramente notacional; la importancia es que el esquema implicado por (4.3) permite escribir a los operadores $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ como en la ecuación anterior. La cuestión relevante consiste en verificar si es que la sucesión de operadores $\{\mathcal{H}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, se aproxima, en el sentido establecido en el capítulo anterior, al operador *continuo* $\mathcal{H} : L^2 \longrightarrow L^2$.

Definición 5.1.1. *Se denomina al operador $\mathcal{H}_N : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ como operador hamiltoniano discreto.*

La ec. (5.2) implica que

$$\mathcal{H}_N = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \left[\mathbf{S}^2 - \frac{1}{4}\left(\mathbf{T}^{(+)} - \mathbf{T}^{(-)}\right)^2\right];$$

lo que inmediatamente conduce a un EDDF para $\mathcal{H}_N$ determinado por

$$(\mathcal{H}_N\vec{u})_k = -\frac{u_{k+2} - 2u_k + u_{k-2}}{8(2\pi/N)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \sin^2\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 k\right]u_k.$$

De modo similar al tratamiento para $\mathbf{b}_N$ en el capítulo anterior, se tiene lo siguiente.

Proposición 5.1.2. *Sea* $u : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ *analítica. La* k*-ésima componente de* $\mathcal{H}_N\vec{u}$*,* $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$*, es una aproximación centrada a* $(1/2)(x^2 - d^2/dx^2)$ *con error* $\mathcal{O}$ *de segundo orden en* $2h$*.*

Demostración. Se argumenta de la misma forma que en la Proposición 4.2.2, así que se omiten detalles. Para N suficientemente grande, la k-ésima componente se puede expresar como

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_N\vec{u})_k &= \frac{1}{2}\left[-\frac{u_{k+2} - 2u_k + u_{k-2}}{4(2\pi/N)^2} + \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}x_k\right)u_k\right] \\ &\approx \frac{1}{2}\left(-\frac{u_{k+2} - 2u_k + u_{k-2}}{4h^2} + x_k^2 u_k\right).\end{aligned}$$

Al expander $u(x_k + 2h)$ y $u(x_k - 2h)$ en series de Taylor, sumando y dividiendo entre $4h^2$ se obtiene

$$(\mathcal{H}_N\vec{u})_k \approx \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \mathcal{O}((2h)^2)\right)\Big|_{x=x_k} u_k. \tag{5.3}$$

$\square$

Una vez que se tiene probada la proposición anterior, el resultado siguiente es inmediato, en completo paralelismo al Corolario 5.2.3.

Corolario 5.1.3. *Sea* $k = 0, \ldots, N-1$*, fijo. Si* u *es analítica, en el EDDF representado por* $\mathcal{H}_N$*,* $\lim_{N\to\infty}(\mathcal{H}_N\vec{u})_k = (1/2)(x^2 - d^2/dx^2)|_{x=X_k} u(X_k)$*, donde* $X_k = \lim_{N\to\infty} x_k$*.*

Demostración. El argumento es el mismo que el del Corolario 4.2.3. $\square$

Finalmente, también se tiene lo siguiente.

Corolario 5.1.4. *La TFD y el operador hamiltoniano discreto satisfacen* $[\mathcal{H}_N, \mathbf{\Phi}^{(N)}] = 0$*.*

Demostración. Se sigue de las relaciones de intercambio 4.3.2 y del corolario 4.3.4. $\square$

Por lo que, igual que con $\mathcal{N}$, $\mathcal{H}$ y $\mathbf{\Phi}^{(N)}$ tienen los mismos autovectores.

5.2. Sobre autovectores

Las ecuaciones de autovectores de los operadores discretos de ascenso y descenso pueden establecerse ahora. Sea $\mathbf{f}^{(m)} \in \mathbb{C}^N$ autovector de la TFD correpondiente al autovalor λ_m; respecto a los operadores de ascenso y descenso se debe cumplir

$$\mathbf{b}_N \mathbf{f}^{(m)} = \mu_m^{(N)} \mathbf{f}^{(m-1)}, \qquad \mathbf{b}_N^\dagger \mathbf{f}^{(m)} = \nu_{m+1}^{(N)} \mathbf{f}^{(m+1)}. \tag{5.4}$$

El hecho de que los operadores $\mathbf{b}_N^\dagger$ y $\mathbf{b}_N$ efectivamente mimetizan a sus respectivos pares del caso continuo, permite construir a los autovectores de $\mathbf{\Phi}^{(N)}$ a partir del autovector de *estado base* $\mathbf{f}^{(0)}$ con autovalor $\lambda_0 = i^0 = 1$ mediante aplicación sucesiva del operador de ascenso. Es posible determinar dicho autovector inspeccionando la forma matricial de la TFD y el modo como actúa sobre $\mathbf{f}^{(m)}$:

$$\mathbf{\Phi}^{(N)} \mathbf{f}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 & \cdots & q^{N-2} & q^{N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \cdots & q^{2(N-2)} & q^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & q^{N-1} & q^{2(N-1)} & \cdots & q^{(N-1)(N-2)} & q^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^{(0)} \\ f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \\ \vdots \\ f_{N-1}^{(0)} \end{pmatrix},$$

donde se observa que la suma de los elementos de la k-ésima columna, $k = 1, \ldots, N-1$, de la representación matricial de la TFD es una progresión geométrica, de modo que se puede establecer el siguiente lema.

Lema 5.2.1. *Un autovector* $\mathbf{f}^{(0)} \in \mathbb{C}^N$ *de la TFD que corresponde al autovalor* $\lambda_0 = i^0 = 1$, *tiene la forma* $\mathbf{f}^{(0)} = c_0^{(N)}(\sqrt{N}+1, 1, 1, \ldots, 1)$, *donde la constante* $c_0^{(N)}$ *satisface* $c_0^{(N)} = \left[2\sqrt{N}(\sqrt{N+1})\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Demostración. Notar que $(\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{f}^{(0)})_0 = \sqrt{N} + 1 + N - 1 = c_0^{(N)}(\sqrt{N}+1)$. Además, la componente k-ésima, de $\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{f}^{(0)}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$ satisface

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{f}^{(0)}\right)_k &= \frac{c_0^{(N)}}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} q^{kj} f_j^{(0)} \\ &= \frac{c_0^{(N)}}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{N} + 1 + q^k + q^{2k} + \cdots + q^{k(N-1)}\right) \\ &= \frac{c_0^{(N)}}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{N} + \frac{1-(q^k)^N}{1-q^k}\right) \\ &= c_0^{(N)} \quad (\text{pues } q^N = (e^{2\pi i/N})^N = 1); \end{aligned}$$

por lo cual $\mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$, así que $\mathbf{f}^{(0)}$ es un autovector con autovalor 1. Normalizando este autovector, se obtiene $1 = (c_0^{(N)})^2(\sqrt{n}+1)^2 + (N-1)(c_0^{(N)})^2$, de donde

$$c_0^{(N)} = \left[2\sqrt{N}(\sqrt{N+1})\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Por lo tanto, aplicando sucesivamente el operador de ascenso $\mathbf{b}^\dagger$ se obtienen los demás vectores $\mathbf{f}^{(m)}$

$$\mathbf{f}^{(m)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m} \nu_k^{(N)}} \left(\mathbf{b}_N^\dagger\right)^m \mathbf{f}^{(0)}, \tag{5.5}$$

en analogía con la fórmula correspondiente del caso continuo

$$\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\mathbf{a}^\dagger\right)^m \psi_0(x)$$

para las funciones de Hermite Clásicas.

5.3. Naturaleza de los operadores discretos de ascenso y descenso

De toda la construcción anterior, queda, entre otras cosas, explotar el hecho de que las columnas de la TFD forman una base ortonormal para $\mathbb{C}^N$ respecto a la estructura hermitiana inducida por el producto interno estándar $\langle\ ,\ \rangle$. Considerando a la TFD como una matriz unitaria de transición entre bases, en parte por el *teorema espectral para matrices unitarias*, surge la cuestión sobre qué operador V es diagonalizado mediante $\mathbf{\Phi}^{(N)}$ de modo que se cumpla $\mathbf{V} = \mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{U}(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}$, con $\mathbf{U}$ matriz diagonal con los autovalores de $\mathbf{V}$ en su diagonal. En esta dirección se analizan los resultados sobre los operadores discretos $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ obtenidos en [3].

Se sabe que la teoría de esquemas que surgen de discretizaciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, conduce a matrices circulantes, y estas pueden escribirse en la forma $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^{(N)}\Lambda(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}$, donde Λ es la matriz diagonal de los autovalores de $\mathbf{C}$. En particular todas las matrices circulantes tienen los mismos autovectores, los cuales son, naturalmente, las columnas de $\mathbf{\Phi}^{(N)}$ y cualquier matriz de la forma $\mathbf{\Phi}^{(N)}\Lambda(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}$ es circulante (ver [12, 17]). Por lo tanto se analizará el operador de cambio desde esta perspectiva y las implicaciones que esto tiene sobre los operadores de ascenso y descenso.

Se denota a la base canónica ortonormal de $\mathbb{C}^N$ por $\{\vec{e}_k = (\delta_{k,0}, \ldots, \delta_{k,N-1}) : k = 0, \ldots, N-1\}$, donde δ_{kj} es la delta de Kronecker y se recuerda al lector que en la representación usual $\vec{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}) = \sum_k v_k \vec{e}_k$, las v_k son las componentes de $\vec{v}$ con respecto a dicha base.

Definición 5.3.1. *Sea $\vec{v} \in \mathbb{C}^N$. El operador de cambio $\mathbf{T} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ se define como $\mathbf{T}(\vec{v}) = \mathbf{T}(v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}) := (v_{N-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{N-2})$, cuya representación matricial* *en la base canónica es*

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(\vec{e}_1) & \mathbf{T}(\vec{e}_2) & \cdots & \mathbf{T}(\vec{e}_{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La operación *transposición* se denotará mediante el superíndice "t".[1]

Definición 5.3.2. *Una matriz circulante* $\mathbf{C} = circ(\vec{v})$ *asociado al vector* $\vec{v} \in \mathbb{C}^N$ *es la matriz de* $N \times N$ *con renglones dados por*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (\vec{v})^t \\ (\mathbf{T}(\vec{v}))^t \\ (\mathbf{T}^2(\vec{v}))^t \\ \vdots \\ (\mathbf{T}^{N-1}(\vec{v}))^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{N-2} & v_{N-1} \\ v_{N-1} & v_0 & \cdots & v_{N-3} & v_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{N-1} & v_0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

El conjunto de matrices circulantes forma un espacio vectorial. Aun cuando se puede aplicar la teoría de las matrices circulantes directamente a $\mathbf{V}$, resultará relevante tener en cuenta la siguiente

Proposición 5.3.3. $\mathbf{V}^t$ *es generador de una base para el conjunto de matrices circulantes asociadas a cada* $\vec{v} \in \mathbb{C}^N$*, denotado por* $Circ(N)$*.*

Demostración. Defina $\mathbf{W}_k := \mathrm{circ}(\vec{e}_k)$. El conjunto $\{\mathbf{W}_k\}$, $k = 0, \ldots, N-1$, es un conjunto linealmente independiente. Si $\mathbf{C} \in \mathrm{Circ}(N)$, entonces es de la forma $\mathbf{C} = \mathrm{circ}(\vec{v})$ con $\vec{v} \in \mathbb{C}^N$, así que satisface $\mathbf{C} = \sum_k v_k W_k$, de modo que $\{\mathbf{W}_k\}$ genera a $\mathrm{Circ}(N)$. Se denota a $\mathbf{W}_1$ por $\mathbf{W}_1 := \mathbf{W}$. Es claro que $\mathbf{W}^0 = \mathbf{W_0} = \mathbf{I}$, la indentidad; en general $\mathbf{W}^k = \mathbf{W}_k$ y $(\mathbf{W}^k)^t = \mathbf{W}^{N-k}$, de manera que $\mathbf{W}$ genera a $\{\mathbf{W}_k\}$, i.e. $\langle \mathbf{W} \rangle = \{\mathbf{W}_k\}$. Finalmente el generador $\mathbf{W}$ satisface

$$\mathbf{W} = \mathrm{circ}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}^t. \tag{5.7}$$

□

Observación 5.3.4. De hecho $\mathrm{Circ}(N)$ es un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{C}$ que es generada por el único elemento $\mathbf{W}$ (Teorema 4, [12]).

Uno de los resultados básicos de matrices circulantes establece que todos los elementos de $\mathrm{Circ}(N)$ son simultáneamente diagonalizados por la TFD; es decir que para $\vec{v} =$

[1] Se enfatiza que el símbolo "$\dagger$"se utiliza para la operación transposición y conjugación; de este modo, $\mathbf{A}^\dagger = (A^*)^t$.

$(v_0,\ldots,v_{N-1})\in\mathbb{C}^N$, $\mathbf{C}=\mathrm{circ}(\vec{v})\in\mathrm{Circ}(N)$, $(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}^{(N)}=\mathrm{diag}\{\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1}\}$, donde $\lambda_k=\sum_j v_j q^{kj}$ son los autovalores de $\mathbf{C}$, con $q=\exp(2i\pi/N)$ y la k-ésima columna $\vec{x}_k$ de la matriz de $\mathbf{\Phi}^{(N)}$ como correspondiente autovector. Por lo tanto, existe una matriz diagonal $\mathbf{U}$ tal que

$$(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{\Phi}^{(N)}=\mathbf{U}=\mathrm{diag}\{1,q,q^2,\ldots,q^{N-1}\};$$

consecuentemente

$$\begin{aligned}\mathbf{U}=\mathbf{U}^t &= \left[(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{\Phi}^{(N)}\right]^t\\ &= \left(\mathbf{\Phi}^{(N)}\right)^t\mathbf{W}^t\left[(\mathbf{\Phi}^{(N)})^{-1}\right]^t\\ &= \mathbf{\Phi}^{(N)}\mathbf{V}\left(\mathbf{\Phi}^{(N)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Por otra parte en [15] Schwinger da un tratamiento de las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ sin el uso de matrices circulantes, donde se prueba que estos operadores unitarios son además, generadores de una base ortonormal completa en el grupo cociente $\mathcal{U}(N)/\mathcal{U}_c(N)$ de $\mathcal{U}(N)$, tal que los N^2 operadores

$$\mathbf{X}(m,n):=\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{V}^m\mathbf{U}^n,\qquad 0\le m,n\le N-1 \tag{5.8}$$

proveen un *par complementario* de operadores unitarios (ver Apéndice A).

Al igual que con $\mathrm{Circ}(N)$ cuya base es generada por $\mathbf{V}^t$, se puede ver además a $\{\mathbf{U},\mathbf{V}\}$ como generador de una base indexada por l, m, $n\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ para formar una representación unitaria irreducible sobre algún grupo finito.

Definición 5.3.5. *El grupo de Heisenberg $\mathcal{H}$ es el conjunto de elementos*

$$w(m,n;k):=\begin{pmatrix}1&m&k\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad 0\le m,n,k\le N-1,$$

con multiplicación matricial (mod N):

$$w(m,n;k)w(m',n';k')=w(m+m',n+n';k+k'+mn').$$

De manera que se puede establecer lo siguiente.

Teorema 5.3.6. *El conjunto de N^3 operadores unitarios definidos como*

$$u(l;m,n):=\sqrt{N}q^l\mathbf{X}(n,m)=q^l\mathbf{V}^n\mathbf{U}^m,\qquad 0\le m,n,k\le N-1,$$

forman una representación unitaria irreducible $\phi:\mathcal{H}\longrightarrow U(N):w(m,n;l)\mapsto u(l;m,n)$ sobre el campo $\mathbb{C}$ del grupo finito $\mathcal{H}$.

Demostración. De la definición de $\mathbf{X}$ en (5.8), se verifica que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}(m,n)\mathbf{X}(m',n') &= \frac{1}{N}\mathbf{V}^m\mathbf{U}^n\mathbf{V}^{m'}\mathbf{U}^{n'} \\
&= \frac{q^{nm'}}{N}\mathbf{V}^{m+m'}\mathbf{U}^{n+n'} \\
&= \frac{q^{nm'}}{\sqrt{N}}\mathbf{X}(m+m',n+n');
\end{aligned}
$$

de donde se sigue la regla de multiplicación de grupo para cualesquiera dos matrices unitarias u:

$$u(l_1;m_1,n_1)u(l_2;m_2,n_2) = u(l_1+l_2+m_1n_2;m_1+m_2,n_1+n_2).$$

Por lo que la asignación ϕ es un homomorfismo y por eso una representación unitaria.

La irreducibilidad de la representación en cuestión se prueba usando la teoría de caracteres de grupos finitos (Corolario 1.2.3); así, para que la representación sea irreducible, el carácter $\chi(w(m,n;l)) := \mathrm{Tr}(u(l;m,n))$ debe satisfacer

$$\langle \chi,\chi\rangle_{\mathcal{H}} := \frac{1}{|\mathcal{H}|}\sum_{w\in\mathcal{H}}\chi(w)^*\chi(w) = 1,$$

donde $|\mathcal{H}|$ es el orden de $\mathcal{H}$.

En efecto, la forma explícita de u se obtiene procediendo por inducción sobre n para verificar que $V^n_{jk} = \delta_{j,k+n}$, además de que claramente $U^m_{jk} = q^{km}\delta_{jk}$, de manera que $u_{jk}(l;m,n) = q^l(\mathbf{V}^n\mathbf{U}^m)_{jk} = q^l\sum_r V^n_{jr}U^m_{rk} = q^l\sum_r \delta_{j,r+n}q^{km}\delta_{rk} = q^{l+mk}\delta_{j,k+n}$.

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\chi(w(m,n;l)) &= \mathrm{Tr}(u(l;m,n)) \\
&= \sum_j u_{jj} \\
&= q^l\delta_{0,n} + q^{l+m}\delta_{1,1+n} + q^{l+2m}\delta_{2,2+n} + \cdots \\
&= 0 \quad \text{si } n \neq 0;
\end{aligned}
$$

así se sigue que

$$
\begin{aligned}
\chi(w(m,0;l)) &= q^l[1+q^m+(q^m)^2+\cdots+(q^m)^{N-1}] \\
&= q^l\left[\frac{1-(q^m)^N}{1-q^m}\right] \\
&= 0 \quad \text{si } m\neq 0, \text{ pues } (q^m)^N = 1;
\end{aligned}
$$

de modo que los caracteres distintos de cero, son solamente los de la forma

$$\chi(w(0,0;l)) = q^l[N], \qquad l = 0, \dots, N-1;$$

por lo tanto

$$\sum_{w \in \mathcal{H}} \chi(w)^* \chi(w) = \sum_{l=0}^{N-1} N^2 = N^3,$$

de donde se sigue el resultado, pues $|\mathcal{H}| = N^3$. □

De esta manera, la representación unitaria ϕ es irreducible, por lo que sus elementos de matriz forman parte de un conjunto ortonormal completo para el espacio vectorial de la representación regular $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$ (Proposición 1.2.2), la cual se forma mediante una base indexada por los elementos de $\mathcal{H}$ (Sección 1.2). Para convertir a la representación regular en un álgebra, solo se necesita una operación de multiplicación. Definiendo naturalmente para $\mathbf{v}_g$, $\mathbf{v}_h \in \mathbb{C}[\mathcal{H}]$ el producto $\mathbf{v}_g \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{gh}$, g, $h \in \mathcal{H}$ y extendiendo linealmente, el álgebra resultante es el *álgebra de grupo* de $\mathcal{H}$ sobre el campo $\mathbb{C}$ denotada por $\mathbb{C}\mathcal{H}$. Finalmente, nótese lo siguiente en cuanto a los operadores de ascenso y descenso.

Proposición 5.3.7. *Los elementos de matriz de los operadores $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ son elementos del álgebra de grupo $\mathbb{C}\mathcal{H}$.*

Demostración. Basta expresar a $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ como combinación lineal de objetos de la forma $q^l \mathbf{V}^m \mathbf{U}^n$. En efecto,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2i}\left(\mathbf{U} - \mathbf{U}^\dagger\right), \qquad \mathbf{T}^{(-)} = \mathbf{V}, \qquad \mathbf{T}^{(+)} = \mathbf{V}^\dagger;$$

de manera que los operadores de ascenso y descenso se pueden escribir como

$$\mathbf{b}_N = \frac{1}{4}\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\left[\mathbf{V}^\dagger - \mathbf{V} + i\left(\mathbf{U}^\dagger - \mathbf{U}\right)\right]$$

y

$$\mathbf{b}_N^\dagger = \frac{1}{4}\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\left[\mathbf{V} - \mathbf{V}^\dagger - i\left(\mathbf{U} - \mathbf{U}^\dagger\right)\right].$$

Ya que $\mathbf{U} = u(0;1,0) = \phi(w(1,0;0))$ y $\mathbf{V} = u(0;0,1) = \phi(w(0,1;0))$, con ϕ unitaria e irreducible, se sigue, en virtud de la Proposición 1.2.2, que los elementos de matriz de ϕ y por esto los de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, forman parte de una base ortonormal para el espacio vectorial sobre el que actúa la representación regular $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$; así pues, se concluye que los elementos de matriz de b_N y $b_N^\dagger$ pertenecen al álgebra $\mathbb{C}\mathcal{H}$ pues esta última resulta de $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$ como ya se ha indicado antes. □

Por lo tanto, los elementos de matriz de $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ pueden expresarse como elementos del álgebra $\mathbb{C}\mathcal{H}$. Además de que ellos pueden interpretarse también como la suma de una parte *circulante* mediante $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^\dagger$, perteneciente al álgebra conmutativa

$\mathrm{Circ}(N)$; y una parte diagonal mediante $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^\dagger$, perteneciente al álgebra $\mathbb{D}_N$ de matrices diagonales. La parte circulante se debe a la presencia de coeficientes constantes[2] y la parte diagonal debida a los coeficientes variables; en este caso de los operadores $(1/\sqrt{2})(x \pm d/dx)$, dichos coeficientes son obviamente $\pm 1/\sqrt{2}$ y $(1/\sqrt{2})x$, respectivamente. Ya que toda matriz circulante es similar a una matriz diagonal con la TFD como matriz de transición, se puede identificar a aquellas con estas, vía la TFD y entonces el mapeo resultante $\mathcal{D} : \mathrm{Circ}(N) \longrightarrow \mathbb{D}_N$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-ágebras contenidas en $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$.

[2]Matrices circulantes surgen en esquems de discretización que provienen de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Conclusiones

En este trabajo se analizaron los procedimientos de Atakishiyeva y Atakishiyev para la construcción de operadores discretos de ascenso y descenso $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ en completa analogía con los correspondientes operadores $(1/\sqrt{2})(x \pm d/dx)$.

Mediante las *relaciones de intercambio* se probó que el operador de *número* $\mathcal{N}$ efectivamente conmuta con la transformada de Fourier discreta. Así mismo se demostró que dicha construcción de operadores puede establecerse mediante esquemas de discretización por diferencias finitas, con error de segundo orden en el parámetro de discretización h; además de que en el límite cuando N tiende a ∞ tales operadores discretos se aproximan a sus pares continuos. A partir de estos operadores de ascenso y descenso, se obtuvo un esquema para el operador discreto hamiltoniano con error de segundo orden en $2h$ y se probó que también se aproxima a su equivalente continuo cuando $N \to \infty$. Finalmente se estudió la naturaleza algebraica de los operadores demostrándose que los operadores $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$ se componen de una parte *circulante* perteneciente al álgebra conmutativa $\mathrm{Circ}(N)$ de las matrices circulantes, que encapsula a la teoría de esquemas que provienen de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, y una parte *diagonal* perteneciente al álgebra $\mathbb{D}$ de las matrices diagonales; álgebras que están contenidas a su vez en el álgebra $\mathbb{C}\mathcal{H}$ del grupo de Heisenberg sobre el campo $\mathbb{C}$.

Varias direcciones de investigación pueden seguirse en este tema, de las cuales se mencionan algunas a continuación.

Resta, entre otras propiedades inherentes al caso continuo, la construcción explícita de los autovectores a partir del autovector de *estado base* mediante aplicación sucesiva del operador de ascenso $\mathbf{b}_N^\dagger$.

Por otro lado, la dificultad de analizar la *convergencia* de objetos en un conjunto (los operadores $\mathbf{b}_N$ y $\mathbf{b}_N^\dagger$) hacia objetos de otro conjunto ($(1/\sqrt{2})(x \pm d/dx)$), hace surgir la necesidad de adaptar, de ser posible, el formalismo de Barker sobre *operadores continuos acotados como límites de sucesiones de operadores discretos acotados*, a el problema de la convergencia formal de operadores discretos que satisfacen cierta propiedad adicional (como la conmutación con la TFD, en este caso), de modo que, el esquema propuesto en este trabajo, quede rigurosamente establecido, para así poder analizar posteriormente, aspectos de consistencia, estabilidad y convergencia para el esquema en cuestión, mismo que corresponde al caso estacionario. Resulta de interés tambien, la cuestión sobre las implicaciones del concepto de convergencia de Barker para operadores discretos (motivado por las ideas de Grünbaum), sobre el de convergencia para esquemas de discretización por diferencias finitas.

En la mima dirección, si el formalismo de Barker es aplicable, qué implicaciones tiene esto sobre la consistencia, estabilidad y convergencia de los esquemas de discretización asociados a los operadores.

Por otra parte, pueden considerarse esquemas incluyendo la dependencia temporal que, aunque el caso de interés es el estacionario, sería importante analizar las implicaciones de la inclusión de la variable de tiempo.

También es posible considerar aplicaciones de esquemas de discretización con los operadores de ascenso y descenso, aplicados a *enrejados* de osciladores armónicos: fonones.

Así mismo, revisar sobre posibles relaciones entre las representaciones regulares de los grupos cíclico Z_N y de Heisenberg $\mathscr{H}$.

Además, realizar la construcción de polinomios en el caso discreto, según el esquema mostrado en este trabajo, que se corresponden con los polinomios de Hermite del caso continuo.

Finalmente, ya que el análisis en este trabajo puede verse como asociado a la ecuación diferencial de Hermite, explorar la posibilidad de aplicar estos métodos a la discretización de otras ecuaciones diferenciales. Si la teoría de esquemas asociados a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes conducen al álgebra de matrices circulantes, surge la cuestión sobre qué estructura algebraica debería aparecer al considerar esquemas asociados a ecuaciones diferenciales con coeficientes variables; el hecho de que los operadores $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}^\dagger$ y $\mathcal{H}$ pueden interpretarse como formados por una parte del álgebra $\mathrm{Circ}(N)$ y por otra de $\mathbb{D}_N$, echa cierta luz sobre dicha cuestión.

Apéndice A

Operadores complementarios de Schwinger

Se expone en este apéndice el procedimiento desarrollado en [15] por J. Schwinger sobre la argumentación de que los operadores U y V son generadores de una base de operadores ortonormal completa, dada por el conjunto de N^2 operadores

$$X(m,n) = N^{-1/2}U^m V^n, \qquad m,n = 0,\ldots,N-1;$$

de modo que todos estos operadores, proveen los fundamentos para una descripción completa de un sistema físico con N estados. Así, estos dos aspectos determinan la denominación de U y V como *par complementario de operadores*. Se usará nuevamente la notación de bra's y ket's en la que un sistema coordenado con cordenadas $\{v^l\}$ corresponde al espacio de vectores de estado $\langle v^l|$. De este modo, los operadores U y V satisfacen

$$\langle u^k|V = \langle u^{k+1}|, \qquad \langle v^k|U^{-1} = \langle v^{k+1}|. \tag{A.1}$$

La relación entre ambos sistemas de coordenadas, está dada por

$$\langle u^k|v^l\rangle = N^{-1/2}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}kl\right),$$
$$\langle v^l|u^k\rangle = N^{-1/2}\exp\left(-\frac{2\pi i}{N}kl\right),$$

y las propiedades periódicas

$$U^N = V^N = I.$$

Notar que

$$\langle u^k|UV = \langle u^{k+1}|u^k,$$

además de que

$$\langle u^k|VU = \langle u^{k+1}|u^{k+1} = \langle u^{k+1}|u^k\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right),$$

por lo cual

$$VU = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) UV,$$

de modo que los operadores U y V satisfacen las relaciones de conmutación de Weyl; como consecuencia de esto se sigue que

$$V^l U^k = \exp\left(\frac{2\pi i}{N} kl\right) UV. \tag{A.2}$$

Hay completa simetría entre U y V en el sentido de que las propiedades de estos operadores resultan invariantes al expresarse mediante la sustitución

$$U \longrightarrow V, \qquad V \longrightarrow U^{-1};$$

la segunda de las ecuaciones anteriores enfatiza la simetría si se seleccionan los elementos de la base de operadores como

$$N^{-1/2}\exp\left(\frac{\pi i}{N} mn\right) U^m V^n = N^{-1/2}\exp\left(-\frac{\pi i}{N} mn\right) V^n U^m,$$

los cuales son invariantes bajo esta sustitución cuando se combinan con $m \to n, n \to -m$.

Una prueba de la completes de la base de operadores generada por U y V depende del siguiente lema: *Si un operador conmuta con U y V, es necesariamente un múltiplo de la identidad I.* Ya que U es completo en sí mismo, tal operador debe ser una función de U. Entonces, de acuerdo a la hipótesis de conmutatividad con V, para cada k se tiene

$$0 = \langle u^k|[f(U)V - Vf(U)|u^{k+1}\rangle = f(u^k) - f(u^{k+1}), \tag{A.3}$$

y esta función de U, toma el mismo valor para cada estado, que lo identifica con ese múltiplo del operador identidad. Considere ahora, para Y arbitraria,

$$\begin{aligned}\sum_{m,n} X(m,n)YX(m,n)^\dagger &= \frac{1}{N}\sum_{m,n} U^m V^n Y V^{-n} U^{-m} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m,n} V^n U^m Y U^{-m} V^{-n},\end{aligned}$$

y observe que la multiplicación izquierda y derecha con U y U^{-1}, respectivamente, o con V y V^{-1}, solo produce un reacomodo de las sumatorias. Así pues, este operador conmuta con U y V. Al tomar la traza dela ecuación resultante, el múltiplo de la identidad es identificado con $\mathrm{Tr}Y$, obteniéndose

$$\sum_{m,n=0}^{N-1} X(m,n)YX(m,n)\dagger = I\mathrm{Tr}Y,$$

estableciéndose así la completes de la base de operadores N^2-dimensionales $X(m,n)$. Alternativamente, se demuestra que estos operadores son ortonormales evaluando

$$\begin{aligned}\langle X(m,n)|X(m',n')\rangle &= \frac{1}{N}\mathrm{Tr}U^{m'-m}V^{n'-n}\\ &= \delta_{mm'}\delta_{nn'},\ m,n,m',n' = 0,\dots N-1;\end{aligned}$$

el valor uno para $m = m'$, $n = n'$ es evidente. Si $m \neq m'$, la diferencia $m' - m$ puede asumir cualquier valor entre $N-1$ y $-(N-1)$, excepto cero. Cuando la traza se calcula en la representación v, el operador U^{m-n} cambia cada vector $\langle v^k|$ al vector ortogonal $\langle v^{k+m-m'}|$ y la traza se anula. Similarmente, si $n \neq n'$ y la traza se calcula en la representación u, cada vector $\langle u^k|$ se convierte mediante $V^{n'-n}$ a el vector ortogonal $\langle u^{k+n'-n}|$ y la traza se iguala a cero.

Bibliografía

[1] Douglas N. Arnold. *Stability, consistency and convergence of numerical discretizations*. School of Mathematcs. University of Minnesota. 2015.

[2] M. K. Atakishiyeva y N. M. Atakishiyev. «On the rising and lowering difference operators for eigenvectors of the finite Fourier transform». En: *Journal of Physics* (2015). Conf. Ser. 597 012012.

[3] Mesuma K. Atakishiyeva y Natig M. Atakishiyev. «On Algebraic Properties of the Discrete Rising and Lowering Operators, Associated with the N-dimensional Discrete Fourier Transform». En: *Advances in Dynamical Systems and Applications* 11 (2016), págs. 81-92. ISSN: 0973-5321. URL: http://campus.mst.edu/adsa.

[4] Laurence Barker. «Continuum quantum systems as limits of discrete quantum systems. III. Operators». En: *Journal of Mathematical Physics* 42.10 (oct. de 2001). URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.1398582.

[5] Alex Bartel. *Introduction to representation theory of finite groups*. 2017. URL: www.maths.gla.ac.uk/~abartel/docs/reptheory.pdf. Consultado en Noviembre de 2018.

[6] Jordan Bell. *Hermite Functions*. Department of Mathematics, University of Toronto. 2015.

[7] Bradley W. Dickinson y Kenneth Steiglitz. «Eigenvectors and Functions of the Discrete Fourier Transform». En: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* ASSP-30.1 (1982).

[8] David Everly. *Derivative Aproximation by Finite Differences*. 2016. URL: http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

[9] Gero Fendler y Norbert Kaiblinger. «Discrete Fourier transform of prime order: Eigenvectors with small support». En: *Linear Algebra and its Applications* 438 (2013), págs. 288-302. URL: http://creativecommons.org/licences/by-nc-nd/3.0/.

[10] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. 1999. Cap. 1. ISBN: 0-7382-0233-9.

[11] F. Alberto Grünbaum. «The Eigenvectors of the Discrete Fourier Transform: A Version of the Hermite Functions». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 88 (1982), págs. 355-363.

[12] Irwin Kra y Santiago R. Simanca. «On Circulant Matrices». En: *Notices of the AMS* 59.3 (mar. de 2012), págs. 368-377. URL: https://www.ams.org/notices/201203/rtx120300368p.pdf.

[13] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory.* English. 2.ª ed. 9 vols. 1965.

[14] James H. McClellan y Thomas W. Parks. «Eigenvalue and Eigenvector Decomposition of the Discrete Fourier Transform». En: *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* AU-20.1 (mar. de 1972).

[15] Julian Schwinger. «Unitary Operator Bases». En: *Physics, Proc. N. A. S.* 46 (1960).

[16] J. O. Smith. *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications*. 2007. URL: `http://ccrma.stanford.edu/~jos/mdft/`.

[17] Eric Sonnendrücker. *Finite Element methods for hyperbolic systems.* Lecture Notes. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik. 2015.

DR. VICTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada ***"Propiedades algebraicas de los operadores de ascenso y descenso, asociados a la transformada de Fourier discreta N-dimensional"*** que presenta el alumno **Miguel Angel Ortiz Cortés (5620170701)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias.**

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dra. Gabriela Hinojosa Palafox CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Rogelio Valdéz Delgado CInC-UAEM	aprobado	
Dr. Carlos Villegas IMATE-UNAM	Aprobado	
Dra. Masuma Atakishiyeva CInC-UAEM	aprobado	
Dr. Natig Atakishiyev IMATE-UNAM	aprobado	