



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN SISTEMAS AUTOSIMILARES EN GRAFENO

TESIS PRESENTADA POR MOHAMMED MINIYA
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN Y COMPUTO
APLICADO

Director de tesis

Dr. Luis Manuel Gaggero Sager

Co-director de tesis

Dr. Outmane Oubram

Comité Revisor

Dra. Lorena Díaz González

Dr. Federico Alonso Pecina

Dr. Nouredine Lakouari

Cuernavaca Morelos, Agosto 2019

Agradecimientos

Deseo sobre todo, expresar mi gratitud al **Dr. Outmane Oubram** y **Dr. Luis Manuel Gaggero Sager** por haber aceptado asesorarme en este tiempo de estudio, también me gustaría agradecerlos por confiar en mí, fue un gran honor trabajar con ellos, ya que tuvimos la oportunidad de compartir muchos momentos de aprendizaje, no solo en el ámbito de la ciencia, sino también en cosas de la vida cotidiana.

De igual modo, gracias al **Dr. Federico Alonso Pecina** por coordinar la maestría, por sus invaluable consejos durante todo este tiempo de estudio y aprendizaje, y por aceptar formar parte del jurado y evaluar mi tesis.

Gracias también a **Dra. Lorena Díaz González** por su confianza, por su calidad humana, sus invaluable consejos, y por aceptar ser parte del jurado, así como del mismo modo evaluar mi tesis.

También me gustaría agradecer a todo el equipo académico de la maestría que me ha aceptado como estudiante de la ésta, y sin el cual este trabajo nunca hubiera sido posible, ya que estuvieron ahí para guiarme y asesorarme en todo este trayecto de enriquecimiento y aprendizaje profesional. Un agradecimiento también a la secretaria de posgrado en la facultad de contaduría, administración e informática por su ayuda en la parte administrativa.

Por último, quisiera agradecer a mi familia por su apoyo, a pesar de la distancia. Gracias mamá, papá y hermanos, por estar conmigo siempre y por formar parte de este logro personal y profesional.

Finalmente un agradecimiento profundo y sincero a **México**, por recibirme y hacerme sentir cómodo, de igual modo, gracias por permitirme crecer y desarrollarme profesional y personalmente.

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	8
1 Introducción	9
1.1 Grafeno	9
1.2 Auto-similaridad	11
1.3 Número áureo	13
1.4 Antecedentes y motivación	15
1.5 Objetivo general	17
2 Marco teorico y Metodología	18
2.1 Efecto tunelaje	18
2.2 Paradoja de Klein	19
2.3 Matriz de transferencia	20
2.4 Construcción de potenciales o barreras	24
2.4.1 Estructura básica de una barrera	24
2.4.2 Sistemas multi-barreras periódicas	25
2.4.3 Sistema multi-barreras auto-similares	27
3 Resultados	34
3.0.1 Estructura básica de una barrera	34

3.0.2 Sistema multi-barreras auto-similares 36

3.0.3 Conclusiones y Discusión 45

Bibliografía **47**

Lista de figuras

1.1	Una capa de Grafeno.	10
1.2	El helecho común.	12
1.3	El helecho abstracto.	12
1.4	El brocoli romanesco.	13
1.5	Partenón de la Acrópolis en Atenas.	13
1.6	la pirámide de Keops.	14
1.7	Estructura de bandas del grafeno	15
2.1	El efecto tunelaje en una barrera rectangular.	19
2.2	Ejemplo de la barrera con funciones onda y el caso de electrones con incidencia normal.	21
2.3	Ejemplo de una barrera aislada de longitud 1000 \AA y energía $1eV$. . .	25
2.4	Ejemplo de una superred de 15 barreras iguales y equidistantes. . . .	27
2.5	Sistema multi-barrera con potencial Áureo Auto-similar. Segunda generación.	28
2.6	Generación 1 de sistema multi-barrera, con altura de barrera $V_0 =$ $1 eV$, ancho $\lambda = \frac{1}{3}$ y longitud total $L_t = 3500 \text{ \AA}$	29
2.7	Generación 2, altura de barrera en medio es V_0 y lo demas tienen altura $\frac{V_0}{\Phi}$ pero todas tienen ancho $\lambda = \frac{1}{3^2}$	30
2.8	Generación 3, las barreras verdes tienen altura $V = \frac{V_0}{\Phi^2}$, sin embargo todas las barreras tienen ancho $\lambda = \frac{1}{3^3}$	31

2.9	Generación 4, las barreras rojas tienen altura $\frac{V_0}{\Phi^3}$ pero todas las barreras tienen ancho $\lambda = \frac{1}{3^4}$	32
2.10	Representación gráfica de estructuras de grafeno de sistema basadas en sustrato (SCGSs). (a) Representación de la sección transversal de SCGSs. Esta estructura es generada por la interacción entre el sustrato y la capa de grafeno. La lámina de grafeno se deposita sobre sustratos alternos, como SiO_2 (losas grises) y SiC (losas azules), obteniendo regiones con relaciones de dispersión parabólica, respectivamente. (b) Distribución de los conos de Dirac y paraboloides de Dirac a lo largo de la estructura. El intervalo de banda prohibida en los paraboloides de Dirac es $E_g = 2V_0$, el área rellena de color azul indica estados ocupados y la esfera azul describe una impactando el masivo electrón de Dirac en la energía de Fermi. (c) Perfil de las bandas prohibidas de SCGSs, las barreras tienen una altura V_0 , y los anchos de las barreras y los pozos son $dB_2 = w/9$, $dW_2 = w/9$ y $dW_1 = w/3$. Las líneas cian y azul corresponden a los electrones. y huecos, respectivamente. Todas las ilustraciones se presentan para la generación $N = 3$	33
3.1	Transmisión de una barrera aislada con energía de 1eV y ancho de 10Åa 40Å. A partir de los 40 Å disminuye el tunelaje y el primer máximo se acerca al valor de energía de la barrera.	35
3.2	Efecto del ancho en la curva de transmisión para una barrera aislada de energía 1eV.	36
3.3	Curvas de transmisión para el potencial autosimilar para generaciones 2, 3 y 4 con longitud total de 3500 Å y energía de 1 eV.	37
3.4	Curvas de transmisión para el potencial autosimilar para generaciones 2, 3 y 4 con energía de la barrera principal $V_0 = 1eV$ y longitud total $l_t = 3500Å$	38

3.5	Curvas de transmisión para el potencial autosimilar para generaciones 8 y 9 con energía de la barrera principal $V_0 = 1$ eV, longitud total $l_t = 3500\text{\AA}$	39
3.6	Curvas de transmisión para generaciones 7 y 8 con energía y de la barrera principal $V_0 = 1\text{eV}$, longitud total $l_t = 3500\text{\AA}$	40
3.7	En este caso, la generación G_8 se escala según la ecuación $T_7(E) = [T_8(E)]^6$	40
3.8	Curvas de transmisión para generacione 6 con diferentes energía de la barrera principal $V_0 = 0.5$ eV y $V_0 = 1$ eV.	42
3.9	En este caso, la curva $V_0 = 0.5$ eV se escala según la ecuación $T_{1,0}(E) = [T_{0.5}(E)]^4$	42
3.10	Curvas de transmisión para generacione 6 con diferentes longitudes totales de la barrera principal $L_t = 500$ Å y $L_t = 1000$ Å.	44
3.11	En este caso, la curva $L_t = 500$ Å se escala según la ecuación $T_{1000}(E) = [T_{500}(E)]^4$	44

Resumen

Estudiamos las propiedades de transmisión, transporte y estructura electrónica de superredes en diferentes sistemas autosimilares basados en una capa de grafeno. En particular en este trabajo hemos estudiado una nueva superred autosimilar escalando altura de la barrera utilizando el número áureo. Más precisamente, investigamos cómo este tipo del sistema afecta las propiedades físicas del grafeno. Estos sistemas autosimilares presentan propiedades únicas, muy favorables y posibilidades de aplicaciones en el campo de la nanotecnología.

Para estudiar las propiedades de transmisión hicimos uso de la ecuación de Dirac y del método de matriz de transferencia, luego hemos usado diferentes geométricas autosimilares de los potenciales, para encontrar finalmente uno que presenta propiedades de escalamiento en sus curvas de transmisión.

Hemos encontrado un nuevo comportamiento auto-similar en los espectros de transmisión entre diferentes generaciones de potenciales y nuevas reglas de escalamiento para cada uno de estos parámetros: número de generación, la altura de la barrera principal y la longitud total del sistema. Además, elaboramos ecuaciones que describen dichos parámetros y los combinamos todos en una expresión analítica general. Finalmente, encontramos que tres ingredientes son necesarios para obtener escalamiento de la transmitancia, un sistema multibarrera auto-similar y la relatividad.

Capítulo 1

Introducción

Dentro de las diversas áreas de estudio de la Física, la materia del estado sólido es una de las áreas de investigación de mayor importancia a nivel mundial. Su objetivo es estudiar las propiedades estructurales y electrónicas de los materiales entendiendo el comportamiento de las distintas fases de la materia y las configuraciones atómicas, usando las leyes de física, principalmente las de la mecánica cuántica, el electromagnetismo y la Física estadística. Debido a la naturaleza interdisciplinaria de su campo de estudio, el desarrollo de la física del estado sólido requiere del trabajo y la colaboración de investigadores tanto teóricos como experimentales, conformados por físicos, matemáticos, químicos, ingenieros y programadores. Las técnicas de fabricación y caracterización de materiales han permitido la creación de nuevas tecnologías que son de gran impacto en la sociedad, encontrando aplicaciones y enormes adelantos en las áreas de la Medicina, la Biología, la Química, las telecomunicaciones y la tecnología doméstica.

1.1 Grafeno

De la punta de un lápiz se puede obtener algo nunca antes visto para la Física teórica, un nuevo material de sólo dos dimensiones: el grafeno [1-3]. Desde su descubrimiento este material ha despertado un gran interés en la comunidad científica tanto teórica como experimental debido a sus propiedades inusuales [4], ya que sirve como conexión entre la Física del estado sólido y la Mecánica Cuántica. Otro de los

aspectos interesantes es la gran gama de sus posibles futuras aplicaciones en diversos sectores, particularmente, en el ámbito tecnológico [5]. A tal grado que en los últimos tiempos se ha convertido en uno de los materiales ampliamente estudiados por numerosos grupos de investigadores en diferentes disciplinas de la ciencia. De igual manera, se ha considerado como el material anfitrión de la siguiente generación de dispositivos electrónicos.

Teóricamente, el grafeno como estructura fue estudiado por primera vez hace más de 60 años por el físico teórico **P. R. Wallace** [1], su objetivo central fue estudiar propiedades eléctricas y magnéticas del grafito empleando como objeto de estudio una estructura de bandas basada en un modelo conformado por una sola capa bidimensional (el grafeno). Sin embargo, estas aportaciones no fueron tomadas en cuenta, debido a que **Landau y Peierls** demostraron teóricamente que los materiales bidimensionales eran termodinámicamente inestables y no podrían existir sobre todo a temperatura ambiente. Fue hasta el año 2004 cuando los físicos **A. K. Geim** y **K. S. Novoselov** de la Universidad de Manchester lograron caracterizar por primera vez experimentalmente una sola capa de carbono cristalino de tan sólo un átomo de espesor, conocido hoy en día como grafeno. La estructura del grafeno puede ser observada en la figura 1.1.

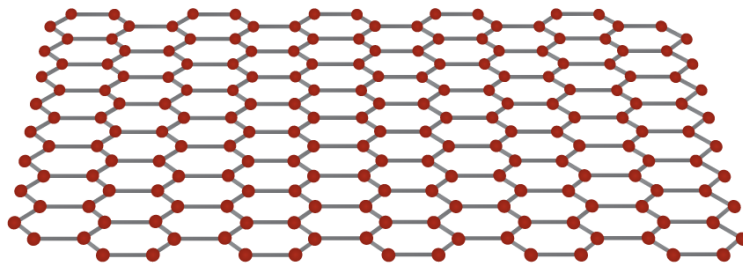


Fig. 1.1: Una capa de Grafeno.

Este descubrimiento condujo a estos dos científicos a ser galardonados con el Premio Nobel de Física en el año 2010.

1.2 Auto-similaridad

Desde la primera vez que la razón humana vislumbra el mundo subatómico, la idea de que un átomo parece el sistema solar muy natural, aunque equivocado. Esta idea tiene intrínsecamente la noción de auto-similitud, la materia se organiza de manera muy similar, pero no de la misma manera a diferentes escalas de longitud. La auto-similitud en la naturaleza ha sido considerada y buscada, por muchos científicos de diferentes campos del conocimiento, pero los matemáticos fueron los primeros que estudiaron los fractales y la autosimilaridad. De hecho, **Benoit B. Mandelbrot** fue el primero matemático que acuñó el término fractal, el modelo ha tenido un gran número de aplicaciones en Física y Biología y en algunas ciencias sociales[23]. En realidad, no existe una definición de un fractal. De hecho, el mismo **Benoit Mandelbrot** nunca supo y quiso definir con precisión los fractales. Sin embargo, podemos decir de manera aproximada, pero correcta, que un fractal es un patrón irregular y auto-similar, la irregularidad es la misma en todas las escalas, por lo que siempre obtenemos el mismo patrón. Ahora la noción de auto-similitud es el único concepto que abarca todo lo llamado fractal, en varias formas.

- Auto-similitud exacta: el fractal es idéntico a sí mismo en varias escalas;
- Cuasi auto-similitud: el fractal parece casi idéntico a diferentes escalas;
- Auto-similitud estadística: el fractal tiene medida numérica o estadísticas que se mantienen a diferentes escalas.

Finalmente, parece oportuno mencionar que el estudio de objetos auto-similares tiene un papel muy importante por la razón que en el mundo que nos rodea no está hecho de líneas, planos y esferas, al menos no en la escala del ojo humano. Por esta razón, es crucial considerar otro tipo de “geometrías”. En este espíritu, la geometría fractal, era muy prometedora y visualmente espectacular, echemos un vistazo a algunos ejemplos ilustrativos:



Fig. 1.2: El helecho común.

El helecho común, que se muestra en figura es el ejemplo mas representativo de la autosimilaridad en la naturaleza. En este ejemplo la autosimilaridad puede describirse en representaciones planas (graficas en el plano cartesiano), debido a que el patron del helecho no se extiende a la tercera dimensión. No obstante, esto nos permite precisar un poco más el concepto de autosimilaridad. En pocas palabras, éste se refiere a lo "similar" de una de las partes un objeto con el objeto completo. En el helecho abstracto (figura 1.3) las ramas rojas y azul marino son partes similares al helecho completo.

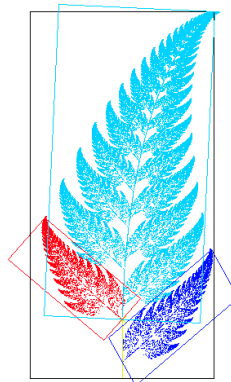


Fig. 1.3: El helecho abstracto.

En el caso del brocoli romanesco (figura 1.4), se puede apreciar un ejemplo más elaborado, las partes similares al todo aparecen por doquier y en varios niveles. En este caso una representación plana no puede contener toda la información geometrica

del brocoli romanesco, por lo que es necesario recurrir a representaciones en el espacio tridimensional, así, se puede decir que el brocoli romanesco está formado por otros brocolis romanescos mas pequeños y estos a su vez por otros mas pequeños, lo que implica auto-similaridad.



Fig. 1.4: El brocoli romanesco.

1.3 Número áureo

Un número asombroso, misterioso que ha hecho hablar de él desde la antigüedad en muchos campos como la geometría, la arquitectura, la pintura y la naturaleza. El llamado número áureo, representado por la letra griega Φ en homenaje al escultor griego **Fidias** (**siglo V a.C**), utilizado para la decoración del Partenón de la Acrópolis en Atenas (Figura 1.5).



Fig. 1.5: Partenón de la Acrópolis en Atenas.

En cuanto a su nombre, ha evolucionado con el tiempo. El matemático y monje franciscano **Luca Pacioli (1445, 1517)** habla de "proporción divina", más tarde el físico **Johannes Kepler (1571, 1630)** lo designa como la "joya de la geometría". Mientras que para **Leonardo da Vinci**, será la "sección dorada". No fue hasta **1932**, con el príncipe **Matila Ghyka**, diplomático e ingeniero, se escucha el término "número áureo".

Encontramos rastros de la cantidad de áureo mucho antes de los griegos. En Egipto, por ejemplo, coincidencia o voluntad para lograrlo, la proporción de la altura de la **pirámide de Keops** (Figura 1.6)(medida por **Thales of Miletus (-624; -548)**) por su media base es igual al número áureo.

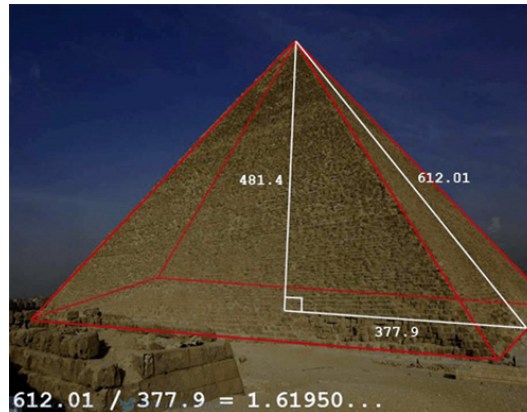


Fig. 1.6: la pirámide de Keops.

Pero es el griego **Euclides de Alejandría (-320; -260)** quien por primera vez da una definición en su obra "Los elementos". El número de áureo es una proporción [23], inicialmente definida en geometría como la relación única entre dos longitudes a y b , como la relación de la suma $(a + b)$ de las dos longitudes sobre la más grande (a) es igual a la más grande (a) dividida por la más pequeña (b) , es decir:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} \quad (1.1)$$

Cuando la división de un segmento en dos longitudes satisface esta propiedad, es llamada por Euclide: "razón extrema y media" Φ . Este número irracional es la única solución positiva de la ecuación $x^2 = x + 1$. El valor exacto se escribe en decimal:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988749894848..... \quad (1.2)$$

Finalmente hemos dado una idea de tres elementos principales han construido este trabajo.

1.4 Antecedentes y motivación

Desde su descubrimiento en 2004, el grafeno continúa sorprendiendo a los investigadores, que están descubriendo lentamente sus propiedades extraordinarias. EL grafeno ha sido aclamado como un material alentador para el futuro como un dispositivo nanoelectrónico. Este material tiene una estructura enrejado hexagonal de átomos de carbono en dos dimensiones de material 2D [3]. En relación a sus propiedades de transmisión, el comportamiento del electrón en un ángulo de incidencia normal, bajo una barrera potencial se transmite perfectamente gracias a la paradoja de Klein y el efecto de tunelaje. La estructura de bandas del grafeno como se muestra en la figura 1.7 presenta una particularidad respecto a otros materiales, ya que la energía es proporcional al vector de onda[4-10].

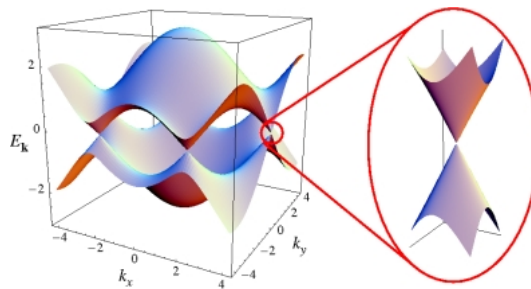


Fig. 1.7: Estructura de bandas del grafeno

La auto-similaridad tiene un interés excepcional, ya que la invariancia de escala es una propiedad fundamental de muchos fenómenos naturales, como puede confirmarse en varios estudios que existe auto-similaridad en redes complejas [17]. La auto-similaridad también existe en la estructura de clasificación del dominio espacio-tiempo-magnitud en varios comportamientos sísmicos [18]. Muchos investigadores

han utilizado la aplicabilidad del enfoque de auto-similaridad, por ejemplo, en las colisiones nucleares relativistas para describir cuantitativamente y en forma angular las dependencias energéticas de la producción de hadrones [19]. Desde el punto de vista tecnológico, la auto-similitud también puede ser explotada para producir dispositivos útiles [20]. En particular, las antenas fractales fotoconductoras muestran una emisión multibanda eficiente de radiación en Terahertz debido a la auto-similitud de la estructura fractal [21-22].

El número áureo, es un número irracional que se encuentra a menudo cuando se toma la proporción de distancias en figuras geométricas simples. El número áureo ha atraído una gran atención desde hace mucho tiempo, con la idea de que es estéticamente considerable y omnipresente en la naturaleza [23].

Dentro de la variedad de fractales, el llamado "tercer tercio medio" es considerado como el más simple. A partir de este fractal es posible construir un sistema tipo Cantor de multibarreras. Este tipo de sistema ha despertado gran interés en los últimos años, algunos grupos investigaron las propiedades de transmisión en este tipo de sistema, encontraron un comportamiento auto-similar en las curvas de transmisión, además, implementaron reglas de escalamiento entre generaciones de potenciales. De hecho, se mostró el comportamiento auto-similar válido solo en el ángulo de incidencia normal [25]. Otros grupos han demostrado que cuando utilizamos el operador Schrödinger en el mismo sistema no se presentan reglas de escalado. El comportamiento auto-similar existe solo en el caso el operador Dirac [26]. El uso de barreras magnéticas y electrostáticas en el mismo sistema también presenta reglas de escalado [20]. Finalmente, también se demostró que la conductancia de régimen lineal puede presentar patrones auto-similares con reglas de escala bien definidas [27].

1.5 Objetivo general

El objetivo general es determinar las características que debe poseer un sistema multi-barrera para encontrar fenómenos de escalamiento en el coeficiente de transmisión. En este trabajo se considera un sistema auto-similar multibarrera el cual se puede describir mediante tres parámetros :

- Altura de las barreras.
- Ancho de cada barrera.
- Distancia inter-barreras.

Especialmente se usa como altura de la barrera el número áureo Φ . Forma parte importante de este trabajo estudiar como la auto-similaridad afecta las propiedades física de grafeno. Para hacer esto, se calcula el coeficiente de transmisión en este sistema usando operador de Dirac, después determinamos si existen reglas de escala entre las curvas de transmisión en función de energía para describirlas de manera aproximada.

Capítulo 2

Marco teorico y Metodología

2.1 Efecto tunelaje

El efecto tunelaje es sin duda uno de los procesos de transmisión "Cuántico" más estudiado. El término "efecto túnel" se refiere al transporte clásicamente prohibido de una partícula cuántica a través de una región en la que la energía de la partícula es menor que el valor potencial. Este proceso se ilustra en la Figura 2.1 para una partícula de energía E cruzando una barrera potencial de forma rectangular mayor que E . En la mecánica clásica, esta partícula se refleja completamente y no se puede cruzar la barrera. En la mecánica cuántica la probabilidad de transmisión no es cero. De hecho, la ecuación que rige el movimiento de la partícula es la ecuación de Schrödinger. En electrodinámica, la solución de la ecuación de onda debe satisfacer las condiciones de límite en interfaces entre dos dieléctricos de diferentes permitividades. Estas condiciones de límite harán la conexión entre la onda incidente, la onda transmitida y la onda reflejada. Del mismo modo, en mecánica cuántica la función de onda debe satisfacer condiciones de continuidad entre dos regiones de diferentes energías potenciales, y estas condiciones harán la conexión entre las funciones de onda incidentes, transmitidas y reflejadas (ver la metodología). En la figura 2.1 se representa la onda asociada a una partícula que se propaga de izquierda a derecha. Ya que el cuadrado del módulo de la función de onda representa la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en una dada porción de espacio, una partícula incidente en una barrera potencial tiene una probabilidad finita de

cruzar esta barrera continúa su propagación a través de la barrera. Se puede calcular analíticamente la transmisión por efecto túnelaje a través de la barrera utilizando el modelo de electrones libres donde los electrones se consideran libres, es decir, están descritos por una onda plana en fuera de la región de potencial pero con una masa efectiva diferente para metales y aislantes.

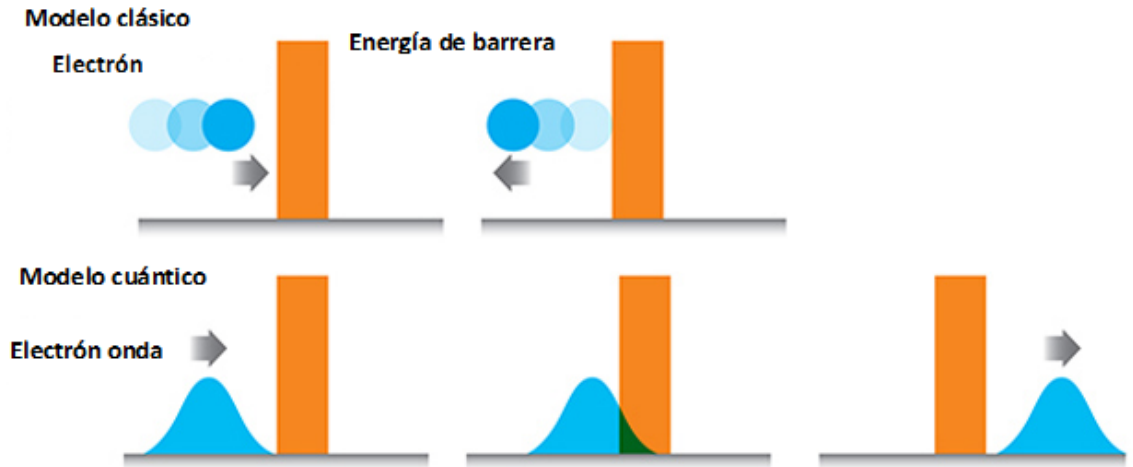


Fig. 2.1: El efecto túnelaje en una barrera rectangular.

2.2 Paradoja de Klein

La paradoja de Klein [6] es un efecto cuántico según el cual un electrón relativista puede penetrar una barrera de potencial V_0 superior a su energía de reposo (es decir, $V_0 > mc^2$). La probabilidad de túnelaje a través de la barrera debe ser 1 independientemente de la altura o anchura de la barrera. El efecto es totalmente contrario a la mecánica cuántica no relativista que predice un decaimiento exponencial de la probabilidad de cruzar la barrera según su altura. Katsnelson et al. calcularon la transmisión a través de una barrera cuadrada para el grafeno, siendo la solución:

$$T = \frac{\cos^2(\phi)}{1 - \cos^2(qD)\sin^2(\phi)}, \quad (2.1)$$

T es la probabilidad de transmisión, ϕ ángulo de incidencia de electrones con respecto a la barrera, D el ancho de la barrera y q una función de la altura de la barrera y la energía del electrón. Trágicamente para esta función, encontramos que la probabilidad de la transmisión es 1 cuando ϕ es cero. En realidad más la berrera alta, más probable que existe este fenómeno. Finalmente, la probabilidad de transmisión es más grande al aumentar la altura de la barrera.

2.3 Matriz de transferencia

En este trabajo de investigación hemos usado el metodo de matriz de transferencia para obtener el coeficiente de transmisión con al operador de Dirac para grafeno. El método de matriz de transferencia permite calcular el coeficiente de transmisión para una sola barrera a la vez. Esta matriz se construye mediante las autofunciones del operador diferencial considerando, como se establece en [30-31]. Dicho método se basa en las condiciones de continuidad particulares. Definimos el hamiltoniano del grafeno como:

$$H = v_F \sigma p + \sigma_z V(x), \quad (2.2)$$

donde $V(x) = m(x) v_F^2$, si $x \in [x_0, x_1]$, v_F es la velocidad de Fermi, σ son las matrices de Pauli y p es momento.

Es necesario notar que en este trabajo solo consideraremos el caso de electrones con incidencia normal a las barreras ver figura 2.2.

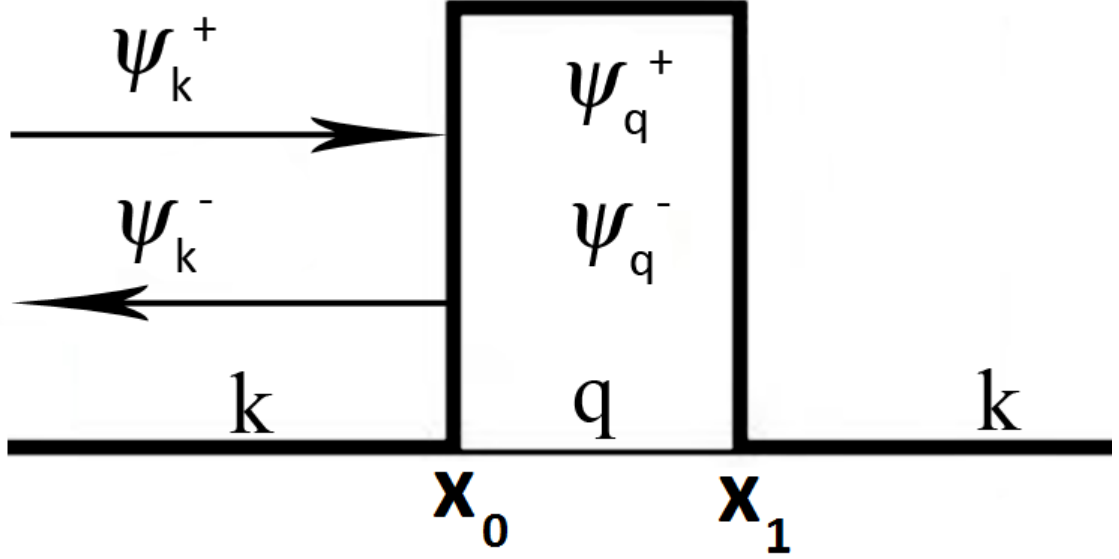


Fig. 2.2: Ejemplo de la barrera con funciones onda y el caso de electrones con incidencia normal.

Así se obtienen las auto-funciones [31]:

$$\Psi_q^\pm(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ v_\pm \end{pmatrix} e^{\pm iq_x x + ik_y y}, \quad (2.3)$$

$$\Psi_k^\pm(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ u_\pm \end{pmatrix} e^{\pm ik_x x + ik_y y}, \quad (2.4)$$

con los elementos u_\pm y v_\pm de las auto-funciones :

$$u_\pm = \pm \text{sign}(E) e^{\pm i\theta}, \quad (2.5)$$

$$v_\pm = \frac{E - V(x)}{\hbar v_F(\pm q_x - ik_y)}. \quad (2.6)$$

Dado que la función $V(x)$ tiene discontinuidades, para garantizar la solución para toda x , las auto-funciones deben cumplir con las siguientes condiciones de continuidad :

$$\Psi_k^\pm(x_0) = \Psi_q^\pm(x_0), \quad (2.7)$$

$$\Psi_q^\pm(x_1) = \Psi_k^\pm(x_1), \quad (2.8)$$

Al aplicar las condiciones anteriores se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones que relaciona las constantes arbitrarias A, B, C, D, F y G de la siguiente manera :

$$A\Psi_k^+(x_0) + B\Psi_k^-(x_0) = C\Psi_q^+(x_0) + D\Psi_q^-(x_0), \quad (2.9)$$

$$C\Psi_q^+(x_1) + D\Psi_q^-(x_1) = F\Psi_k^+(x_1) + G\Psi_k^-(x_1), \quad (2.10)$$

En forma matricial se escribe:

$$\begin{pmatrix} e^{ik_x x_0} & e^{-ik_x x_0} \\ u_+ e^{ik_x x_0} & u_- e^{-ik_x x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iq_x x_0} & e^{-iq_x x_0} \\ v_+ e^{iq_x x_0} & v_- e^{-iq_x x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} e^{iq_x x_1} & e^{-iq_x x_1} \\ v_+ e^{iq_x x_1} & v_- e^{-iq_x x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_x x_1} & e^{-ik_x x_1} \\ u_+ e^{ik_x x_1} & u_- e^{-ik_x x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

lo cual permite obtener las amplitudes de entrada en términos de las amplitudes de salida. La constante G es igual a cero, ya que en la región de la derecha sólo puede haber una onda transmitida y no existe nada en esta región que produzca una reflexión. Finalmenete la matriz de transferencia M se escribe como:

$$M(E; \Delta x, V) = \begin{pmatrix} m_{11}(E; \Delta x, V) & m_{12}(E; \Delta x, V) \\ m_{21}(E; \Delta x, V) & m_{22}(E; \Delta x, V) \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde

$$m_{11}(E; \Delta x, V) = (u_- - v_+)(v_- - u_+)e^{-i(q_x - k_x)\Delta x} + (u_- - v_-)(u_+ - v_+)e^{i(q_x + k_x)\Delta x}$$

$$m_{12}(E; \Delta x, V) = -(u_- - v_-)(u_- - v_+)(e^{-iq_x \Delta x - ik_x(x_1 + x_0)} + e^{-iq_x \Delta x - ik_x(x_1 + x_0)})$$

$$m_{21}(E; \Delta x, V) = -(v_- - u_+)(u_+ - v_+)(e^{iq_x \Delta x + ik_x(x_1 + x_0)} + e^{-iq_x \Delta x + ik_x(x_1 + x_0)}),$$

$$m_{22}(E; \Delta x, V) = (v_+ - u_+)(v_- - u_-)e^{-i(q_x + k_x)\Delta x} + (v_- - u_+)(u_- - v_+)e^{-i(q_x - k_x)\Delta x},$$

de manera general :

$$M_T(E; \Delta x, V) = \prod_{j=1}^n M_T(E; \Delta x, V_j). \quad (2.14)$$

El método de matriz de transferencia permite calcular el coeficiente de transmisión para una sola barrera, sin embargo usando la ecuación 2.14 se puede calcular la matriz de transferencia para un sistema multibarrera completo y extraer el coeficiente de transmisión. Definimos el coeficiente de transmisión como se hizo en [30, 31, 32], mediante :

$$T(E) = \frac{1}{|m_{11}|^2}. \quad (2.15)$$

Por la forma de las matrices de transferencia aquí consideradas, fue necesario usar simulaciones numéricas, ya que las componentes de las matrices para estructuras de dos o más barreras son muy complejas para poderse manejar y analizar algebraicamente. Para cada sistema multibarrera se implementa el método de matriz de transferencia mediante un programa de computadora en lenguaje Fortran. Fue necesario hacer la implementación de cada sistema multibarrera por separado ya que las reglas de construcción, que definen a cada sistema, son muy diferentes para que una implementación global fuera eficiente.

2.4 Construcción de potenciales o barreras

2.4.1 Estructura básica de una barrera

La función potencial tiene dos características importantes:

- Discontinua.
- Constante por segmentos.

Aunque estas condiciones sobre la función potencial parecen muy restrictivas permiten considerar dos aspectos importantes. El primero tiene que ver con la aplicabilidad física de los potenciales propuestos, ya que en el estudio de los semiconductores usualmente la función potencial tiene las características aquí consideradas. El segundo aspecto es la posibilidad de manipular los parámetros de manera individual e independiente. Los parámetros mencionados son los siguientes:

1. V_0 , que por la representación geométrica suele llamarse altura de la barrera.
2. W_0 , ancho de la barrera.
3. L_0 , espacio entre barreras.

Otra forma de definir las barreras de potencial es a través de una función característica. Comenzando con el caso de una barrera $V(x)$ se define como :

$$V(x) = V_0 \xi_{[a,b]}(x), \quad (2.16)$$

donde

$$\xi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Esto permite enmarcar las características de la función potencial a la función característica.

Construcción de generación 1 de potencial

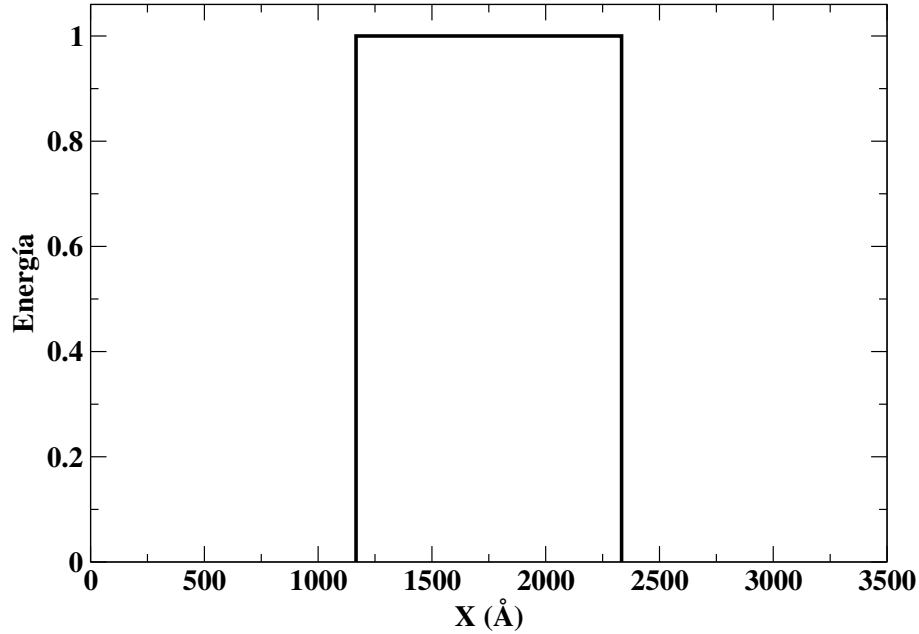


Fig. 2.3: Ejemplo de una barrera aislada de longitud 1000 Å y energía 1eV.

Los potenciales multi-barrera, como el nombre lo indica, son potenciales computados de múltiples barreras, sin embargo la barrera básica (Figura 2.2) es el caso más simple y en el que se puede obtener una expresión algebraica para su función de transmisión. En este caso podemos escribir la función de potencial como :

$$V(x) = V_0 \xi_{[x_0, x_1]}(x), \quad (2.17)$$

donde $x_0 = 1164.95 \text{ \AA}$ y $x_1 = 2327.33 \text{ \AA}$. Así la distancia entre x_0 y x_1 corresponde al ancho de la barrera, esto es, $W_0 = d(x_0, x_1) = |x_1 - x_0|$ que en este caso corresponde a $W_0 = 1162.38 \text{ \AA}$.

2.4.2 Sistemas multi-barreras periódicas

Para construir un sistema multibarrera o superred lo definiremos mediante funciones, para esto definimos los segmentos : $[x_0, x_1], [x_2, x_3], [x_4, x_5]$ es decir:
sea

$$P = \bigcup_{i=0}^{\infty} [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.18)$$

Entonces la función potencial para una superred es :

$$V(x) = V_0 \xi_P(x). \quad (2.19)$$

En este sistema se ha determinado que la simetría periódica del mismo, genera una característica particular en la curva de transmisión, con regiones prohibidas y regiones permitidas de transmisión. Adicionalmente permite establecer algunas cuestiones muy importantes: infinitud, simetría y su relación con las características de sus auto-funciones.

En la práctica es imposible implementar la simulación de la transmisión de un número infinito de barreras por lo cual se usa un número finito. El hecho de tomar un número finito de barreras ver (Figura 2.3) influye en la transmisión y otras propiedades del sistema, sin embargo se ha determinado, y publicado en [33], que a partir de un cierto número de barreras el comportamiento se aproxima lo “suficiente” al caso infinito.

Potencial periódico o superred

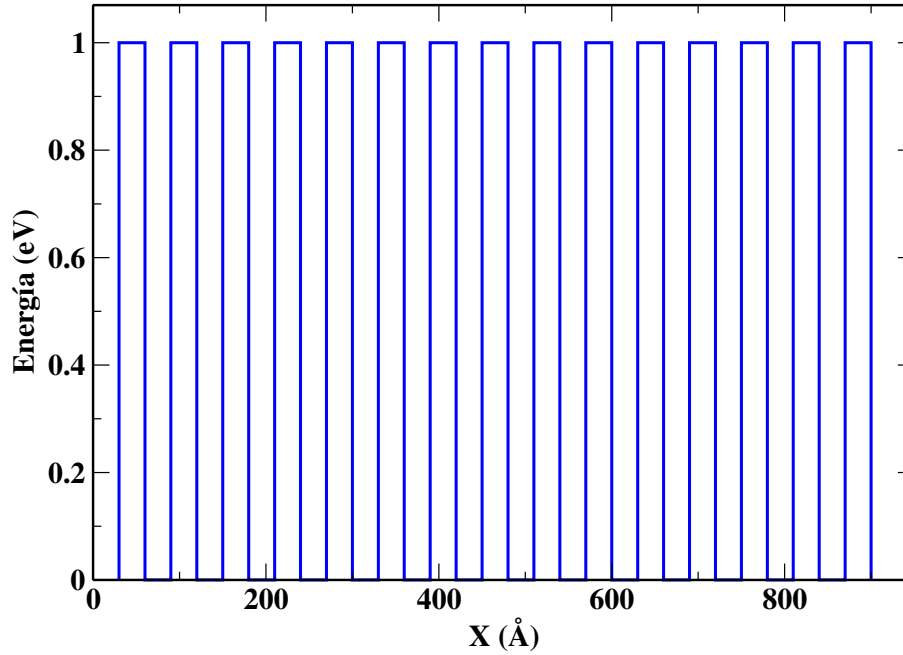


Fig. 2.4: Ejemplo de una superred de 15 barreras iguales y equidistantes.

Este ejemplo de sistema se denotará como :

$$V(x) = V_0 \xi_{P_{15}}(x), \quad (2.20)$$

donde

$$P = \bigcup_{i=0}^{15} [x_i, x_{i+1}]. \quad (2.21)$$

Así, el subíndice de P y V denotan el número de barreras para una superred.

2.4.3 Sistema multi-barreras auto-similares

En este trabajo estudiamos un sistema multi-barreras no periódicas, al que llamaremos Áureo Auto-similar multi-barreras, porque en este tipo de potencial, la energía de las barreras que se agregan en cada etapa o generación también se escalan. Así por ejemplo tenemos que el potencial siguiente :

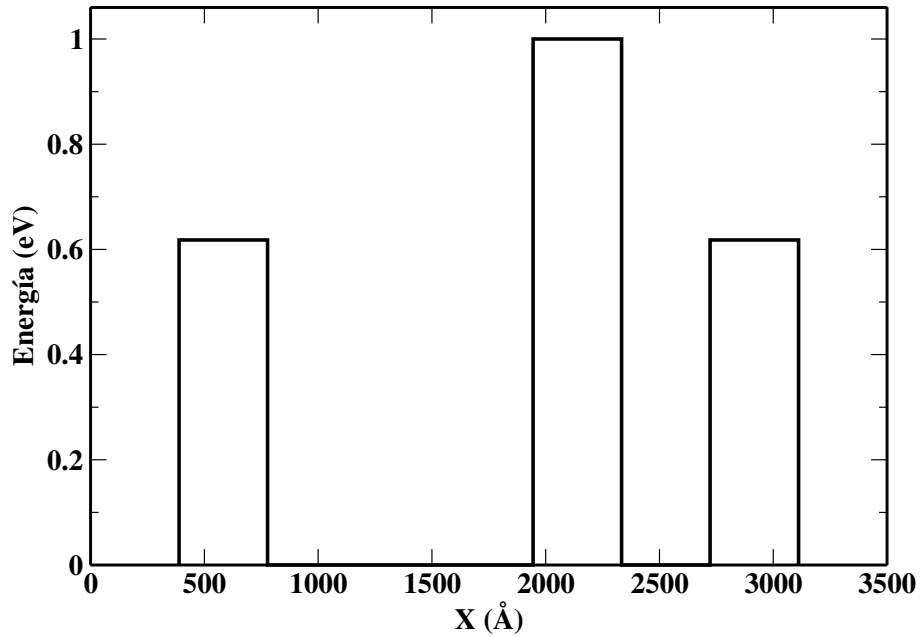


Fig. 2.5: Sistema multi-barrera con potencial Áureo Auto-similar. Segunda generación.

Se define de manera general como sigue:

$$V_n(x) = V_0 \sum_{i=1}^n \frac{\xi_{P_i}(x)}{\Phi^{i-1}}. \quad (2.22)$$

Podemos describir las generaciones de la siguiente manera, comenzamos con un segmento de línea de longitud L_t , lo dividimos en tercios y colocamos una barrera rectangular de energía V_0 y ancho $\frac{L_t}{3}$ en el tercio medio, llamamos esta generación 1 (G_1) como se muestra en la figura 2.5:

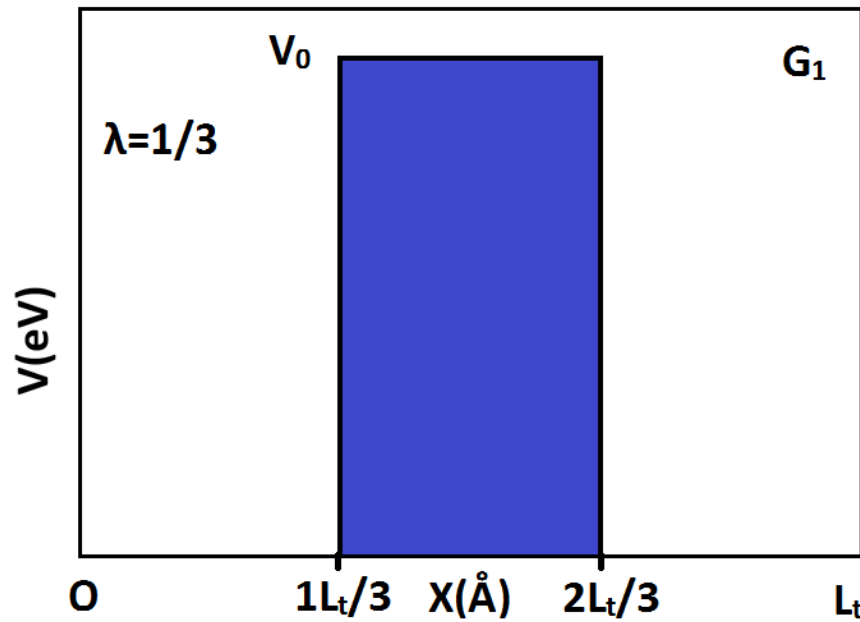


Fig. 2.6: Generación 1 de sistema multi-barrera, con altura de barrera $V_0 = 1 \text{ eV}$, ancho $\lambda = \frac{1}{3}$ y longitud total $L_t = 3500 \text{ \AA}$.

La segunda generación se construye tomando los segmentos restantes y dividiéndolos también en tercios y colocando barreras rectangular en el medio para cada segmento. Finalmente, llamamos a esta generación 2 (G_2) como se muestra en la

figura 2.6:

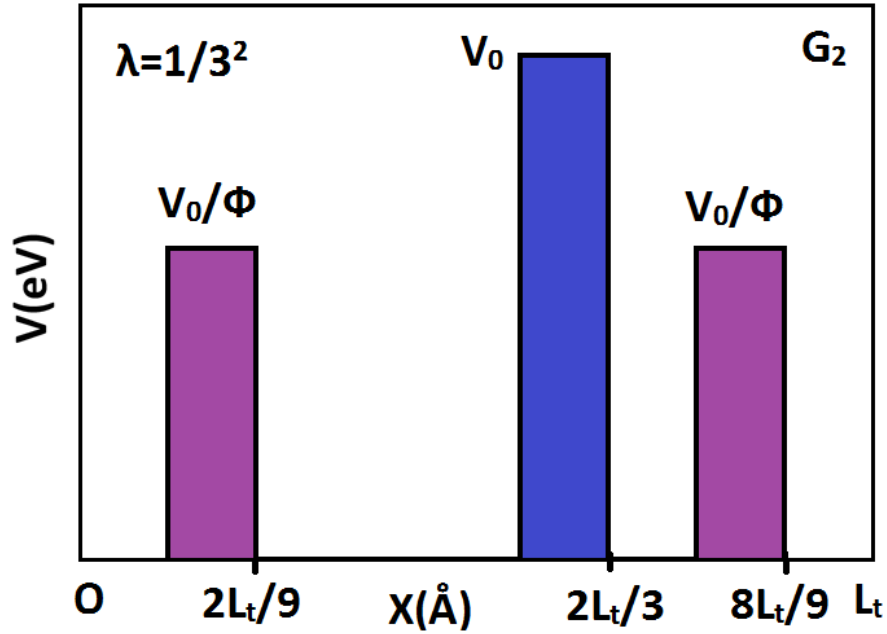


Fig. 2.7: Generación 2, altura de barrera en medio es V_0 y lo demas tienen altura $\frac{V_0}{\Phi}$ pero todas tienen ancho $\lambda = \frac{1}{3^2}$.

De hecho, la barrera existente también está dimensionada en su anchura. Repetimos esta operación para la tercera generación dividiendo cada segmento $\frac{1}{3^N}$ como observamos en la figura 2.7, donde N número de generaciones, también escalamos la altura de la barrera por factor $\frac{1}{\Phi^{N-1}}$.

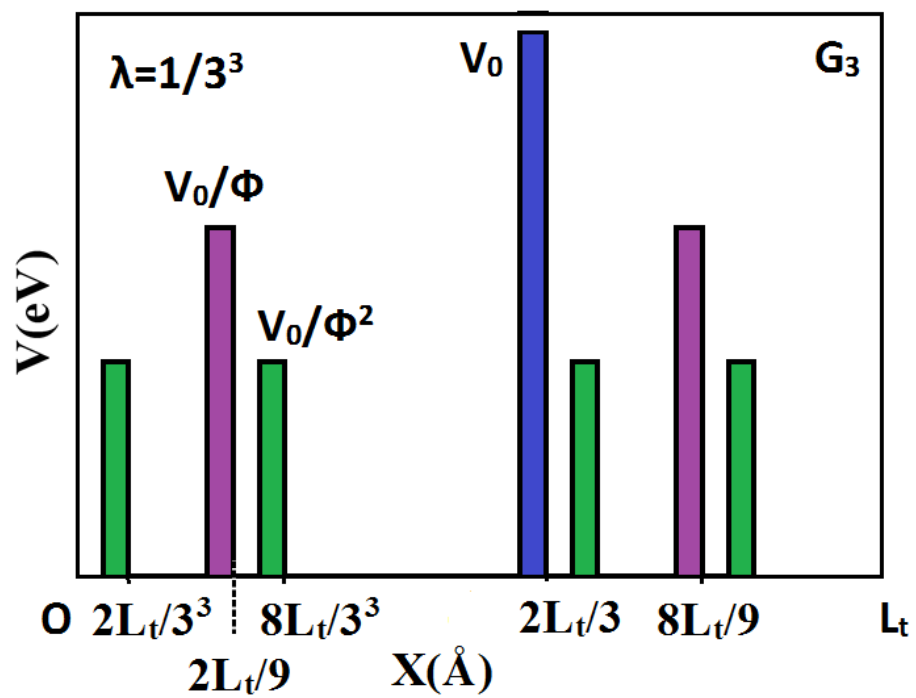


Fig. 2.8: Generación 3, las barreras verdes tienen altura $V = \frac{V_0}{\Phi^2}$, sin embargo todas las barreras tienen ancho $\lambda = \frac{1}{3^3}$.

para el ancho de la barrera.

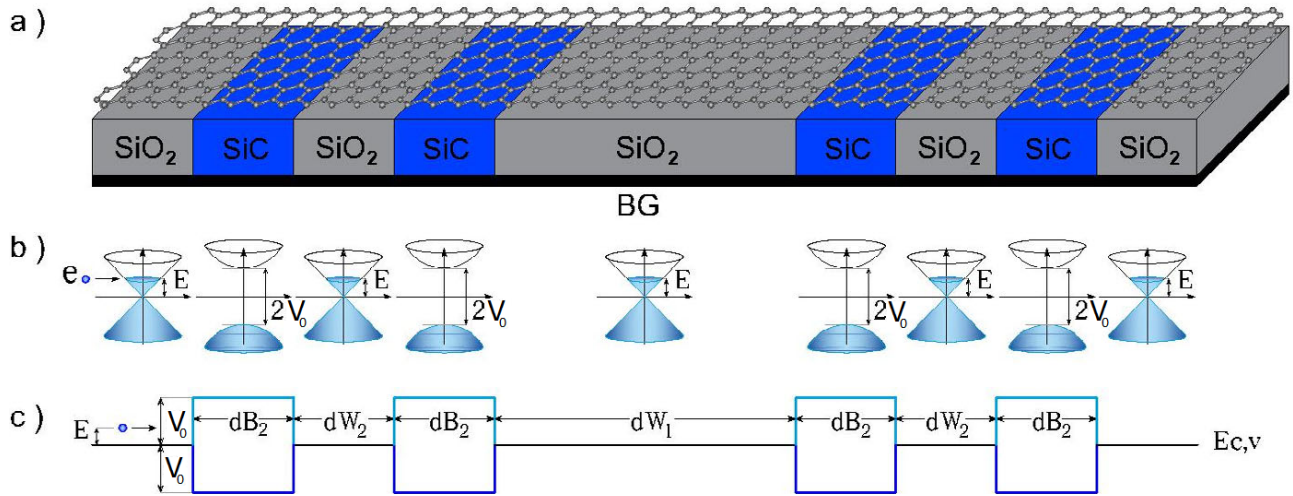


Fig. 2.10: Representación gráfica de estructuras de grafeno de sistema basadas en sustrato (SCGSs). (a) Representación de la sección transversal de SCGSs. Esta estructura es generada por la interacción entre el sustrato y la capa de grafeno. La lámina de grafeno se deposita sobre sustratos alternos, como SiO_2 (losas grises) y SiC (losas azules), obteniendo regiones con relaciones de dispersión parabólica, respectivamente. (b) Distribución de los conos de Dirac y paraboloides de Dirac a lo largo de la estructura. El intervalo de banda prohibida en los paraboloides de Dirac es $E_g = 2V_0$, el área rellena de color azul indica estados ocupados y la esfera azul describe una impactando el masivo electrón de Dirac en la energía de Fermi. (c) Perfil de las bandas prohibidas de SCGSs, las barreras tienen una altura V_0 , y los anchos de las barreras y los pozos son $dB_2 = w/9$, $dW_2 = w/9$ y $dW_1 = w/3$. Las líneas cian y azul corresponden a los electrones. y huecos, respectivamente. Todas las ilustraciones se presentan para la generación $N = 3$.

Hay que notar que en este trabajo fijamos la longitud total del sistema con $Lt = 3500 \text{ \AA}$ y la altura de la barrera principal con $V_0 = 1.0 eV$.

Capítulo 3

Resultados

A continuación presentamos los resultados de transmitancia obtenidos. Primero presentaremos la estructura básica de una barrera y su transmitancia. Después la estructura de un sistema de multi-barreras que llamamos áureo autosimilar multi-barreras y su transmitancia. Posteriormente mostramos que las curvas de transmisión están relacionadas mediante transformaciones de escala. Finalmente elaboramos formulas de las reglas de escalamiento y los combinamos en una formula general en función de las transformaciones de escalamiento.

3.0.1 Estructura básica de una barrera

La barrera aislada es el ejemplo más usual en la literatura introductoria sobre mecánica cuántica, uno de los pocos casos en los cuales es posible obtener una expresión algebraica del coeficiente de transmisión. Este sistema es de interés porque permite analizar el efecto de los parámetros que caracterizan a una barrera de potencial, estos son, su ancho o espesor al que denotaremos por W_0 y su energía o altura a la que denotaremos por V_0 , la figura 3.1 muestra la transmisión para barreras de diferentes anchos respecto a la energía de la barrera .

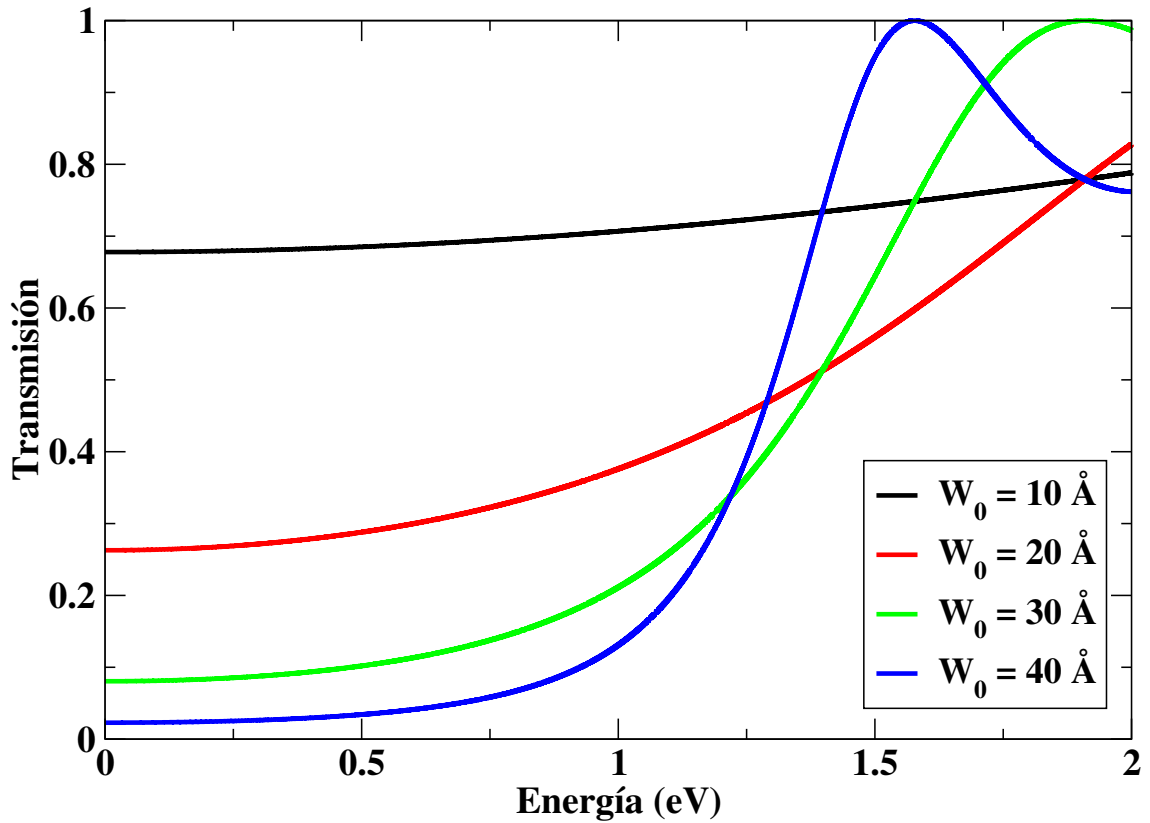


Fig. 3.1: Transmisión de una barrera aislada con energía de 1eV y ancho de 10Åa 40Å. A partir de los 40 Å disminuye el tunelaje y el primer máximo se acerca al valor de energía de la barrera.

Se inicia el análisis de las curvas de transmisión en función del ancho de la barrera. Para lo cual se toma como ancho inicial 10Å. Es de esperar que para valores pequeños de W_0 el tunelaje sea mayor y que, conforme W_0 crece, el tunelaje disminuya. En la figura 3.1 se puede apreciar que entre los 10 y 40 Å hay tunelaje significativo. Para energías menores a V_0 el coeficiente de transmisión comienza a crecer monótonamente hasta alcanzar su primer máximo, que se alcanza en una vecindad de V_0 .

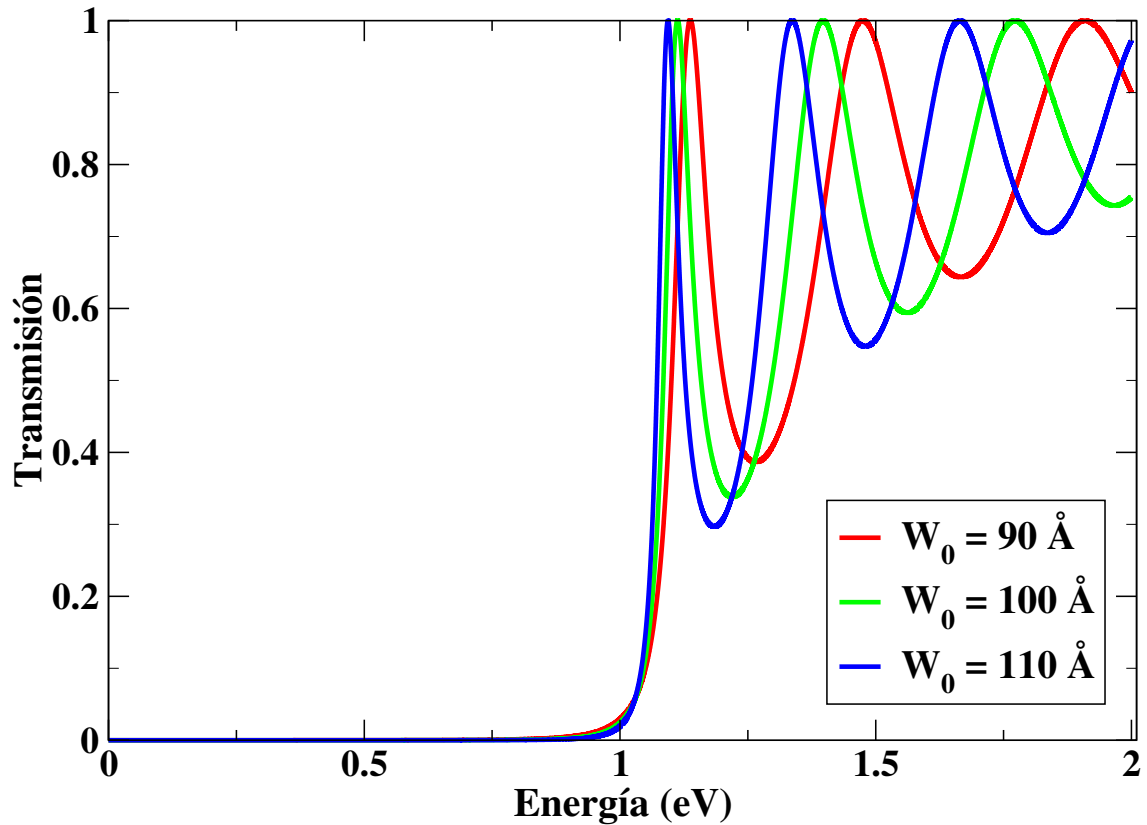


Fig. 3.2: Efecto del ancho en la curva de transmisión para una barrera aislada de energía 1 eV.

Ahora es necesario estudiar si este efecto depende de la energía de la barrera. Para lo cual presentamos en la figura 3.2 las curvas correspondientes a anchos desde 90 Å y energía 1 eV. Así, parece claro que desde un ancho de 90 Å el tunelaje es despreciable, lo que permitiría suponer que el ancho de la barrera que hace despreciable el tunelaje decrece conforme la energía de la misma crece. No obstante, el dato importante es que para anchos mayores a 100 Å el tunelaje es despreciable.

3.0.2 Sistema multi-barreras auto-similares

Presentamos un tipo de sistema multi-barrera que llamamos Áureo Auto-similar multi-barreras, el espesor de las barreras se escala y luego la energía de barrera se escala con número áureo Φ de generación en generación. Se define una longitud total inicial a partir de la cual todas las generaciones se construyen.

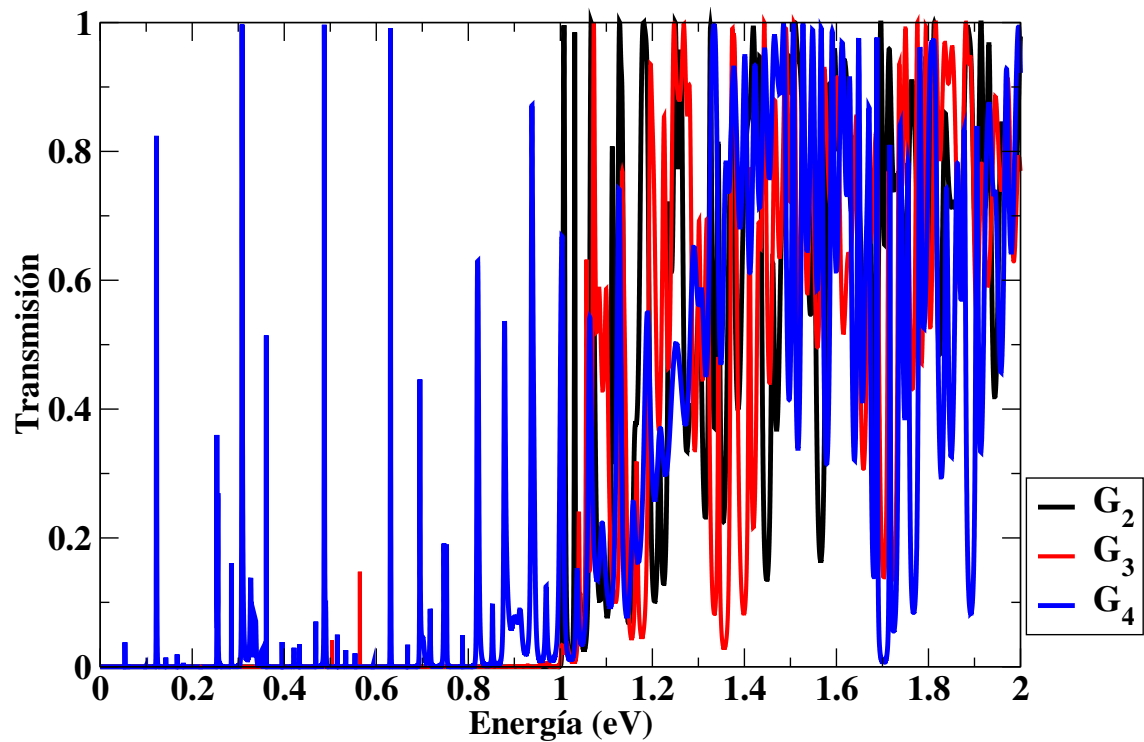


Fig. 3.3: Curvas de transmisión para el potencial autosimilar para generaciones 2, 3 y 4 con longitud total de 3500 Å y energía de 1 eV.

En la figura 3.3 se puede apreciar que el efecto tunelaje comienza a ser importante a partir de la generación cuatro. Esto se debe a que para generaciones superiores las barreras son muy delgadas. Además aparecen máximos en la región de tunelaje. Esto se debe precisamente al decremento de los anchos de todas las barreras, lo cual es posible al efecto tunel.

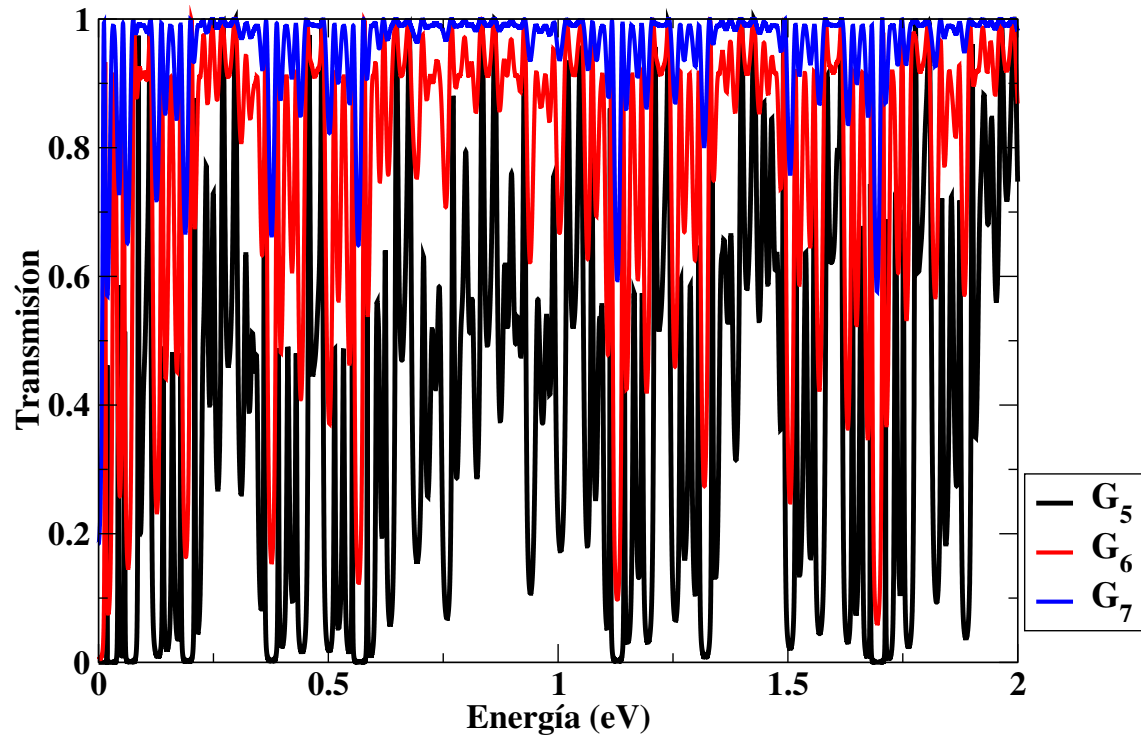


Fig. 3.4: Curvas de transmisión para el potencial autosimilar para generaciones 2, 3 y 4 con energía de la barrera principal $V_0 = 1\text{eV}$ y longitud total $l_t = 3500\text{\AA}$.

En la figura 3.4 a partir de la generación cinco el tunelaje muestra una tendencia hacia transmisión igual a uno, se puede ver como el tunelaje promedio de cada curva aumenta y además se aprecia una correlación entre las curvas, particularmente las correspondientes a la generación seis y siete.

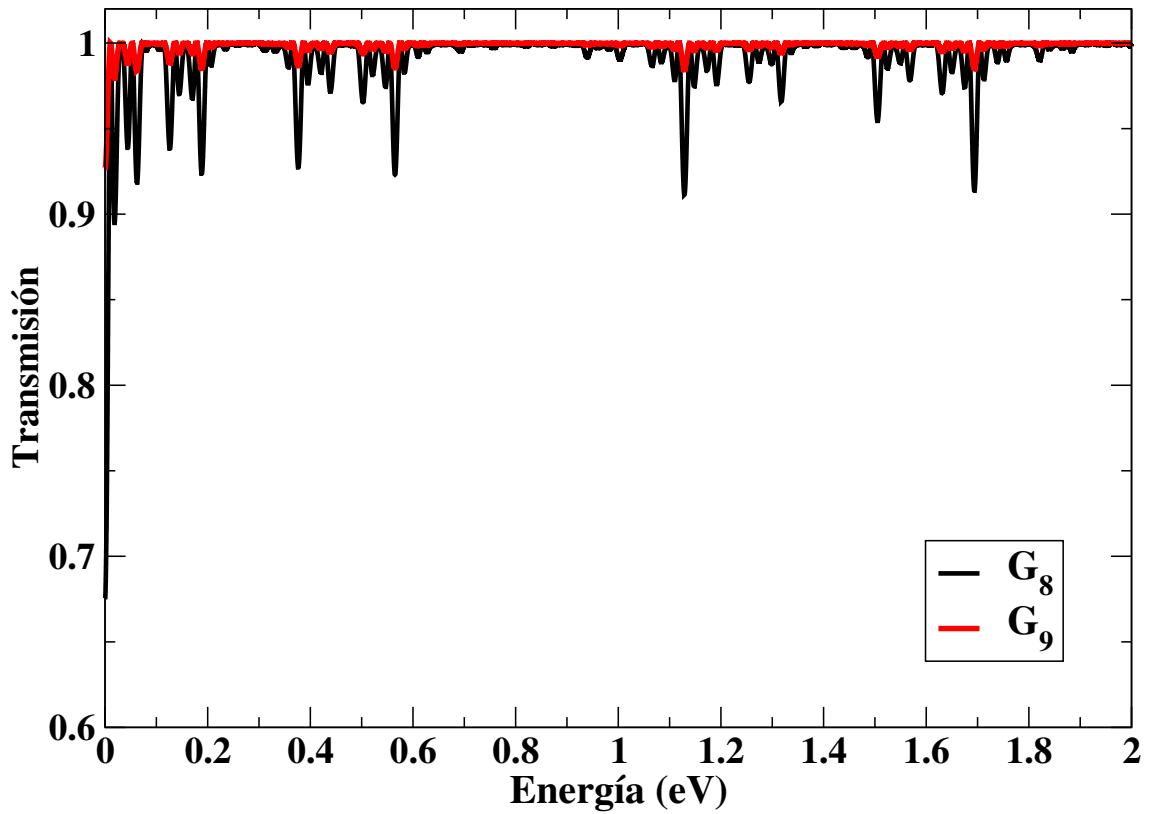


Fig. 3.5: Curvas de transmisión para el potencial autosimilar para generaciones 8 y 9 con energía de la barrera principal $V_0 = 1$ eV, longitud total $l_t = 3500\text{\AA}$.

En la figura 3.5 parece evidente que entre la curva correspondiente a la generación ocho y la correspondiente a la generación nueve hay una alta correlación, es decir, una correspondencia entre máximos y mínimo de ambas curvas. La cuestión que surge de manera inmediata es si existe una transformación que permita obtener una curva partiendo de la otra. Para responder a esta pregunta comenzamos a investigar, por ejemplo para las generaciones 7 y 8 :

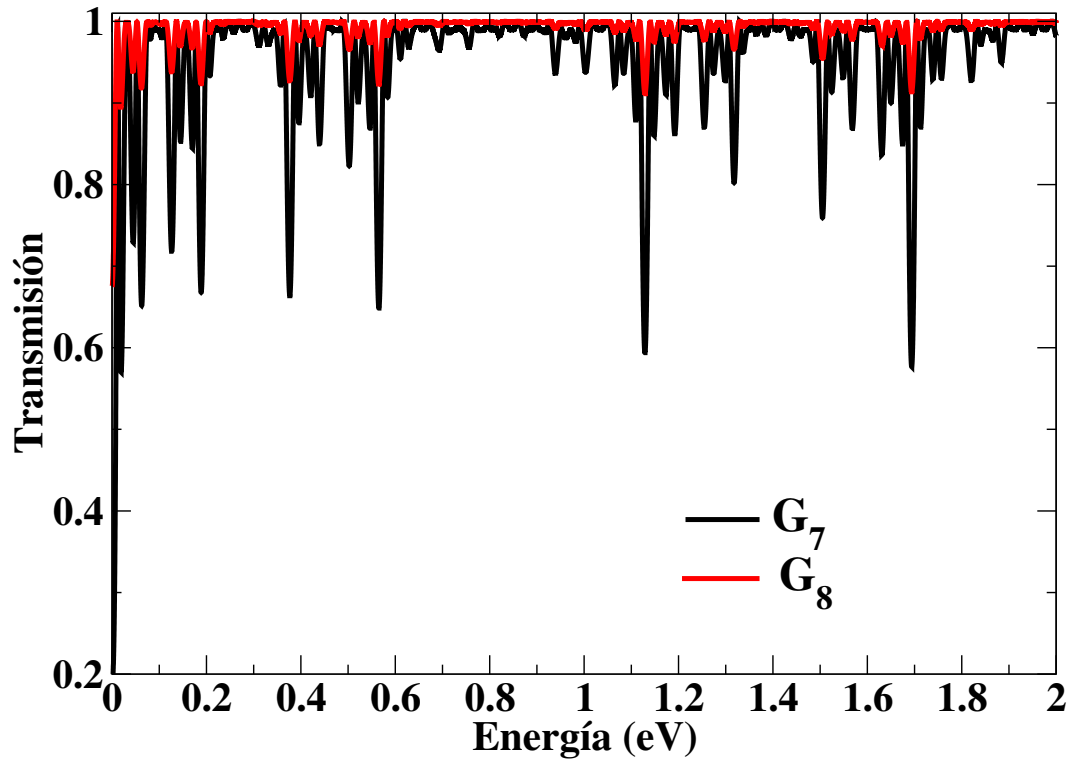


Fig. 3.6: Curvas de transmisión para generaciones 7 y 8 con energía y de la barrera principal $V_0 = 1\text{eV}$, longitud total $l_t = 3500\text{\AA}$.

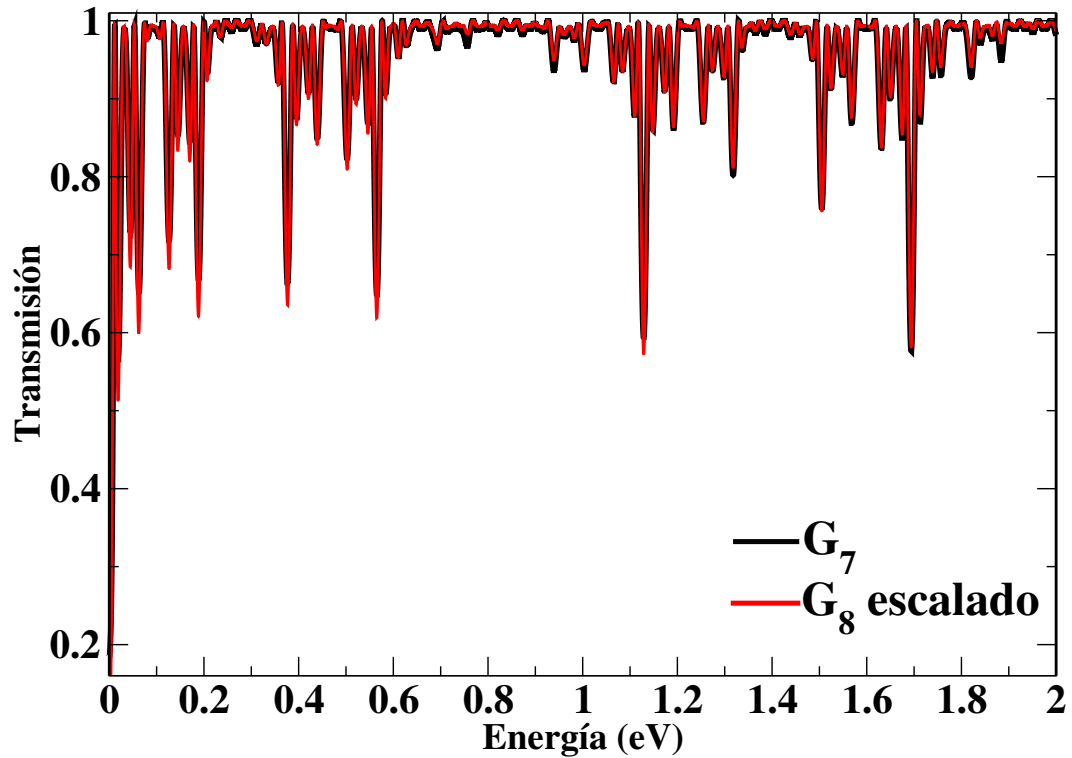


Fig. 3.7: En este caso, la generación G_8 se escala según la ecuación $T_7(E) = [T_8(E)]^6$.

En figura 3.6 mostramos la transmisión de la generación 7 y 8 respectivamente. Podemos notar que claramente las curvas están relacionados por algunas transformaciones, esto cuando simplemente aumentamos la potencia de la curva G_7 a 6, de hecho, nos encontramos con la misma curva de G_8 de acuerdo con esta $T_7(E) = [T_8(E)]^6$, donde el subíndice es el número de generación, como se muestra en figura 3.7. Por lo tanto, $T_7(E)$ y $T_8(E)$ se escalan por un exponente simple. De hecho, otras generaciones $G > 6$ también siguen la misma regla. Por esto podemos proponer una formula general como regla de escalamiento:

$$T_G(E) \approx [T_{G+1}(E)]^6. \quad (3.1)$$

Donde G es el número de generación.

Esto significa que las curvas de transmisión están relacionadas por cierta potencia, pero difieren solo en sus correspondientes potencial. Lo que muestra que las curvas de transmisión siguen una regla de escala que es una marca de auto-similitud. De hecho, tenemos nueva confirmación de la auto-similaridad en las propiedades físicas del grafeno. Además, hemos encontrado reglas de escalado entre curvas de transmisión que corresponden a diferentes generaciones de potencial, pero nos parece posible extender la búsqueda de la escala a otros parámetros, por ejemplo: Parámetros de energía de barrera y la longitud total del sistema.

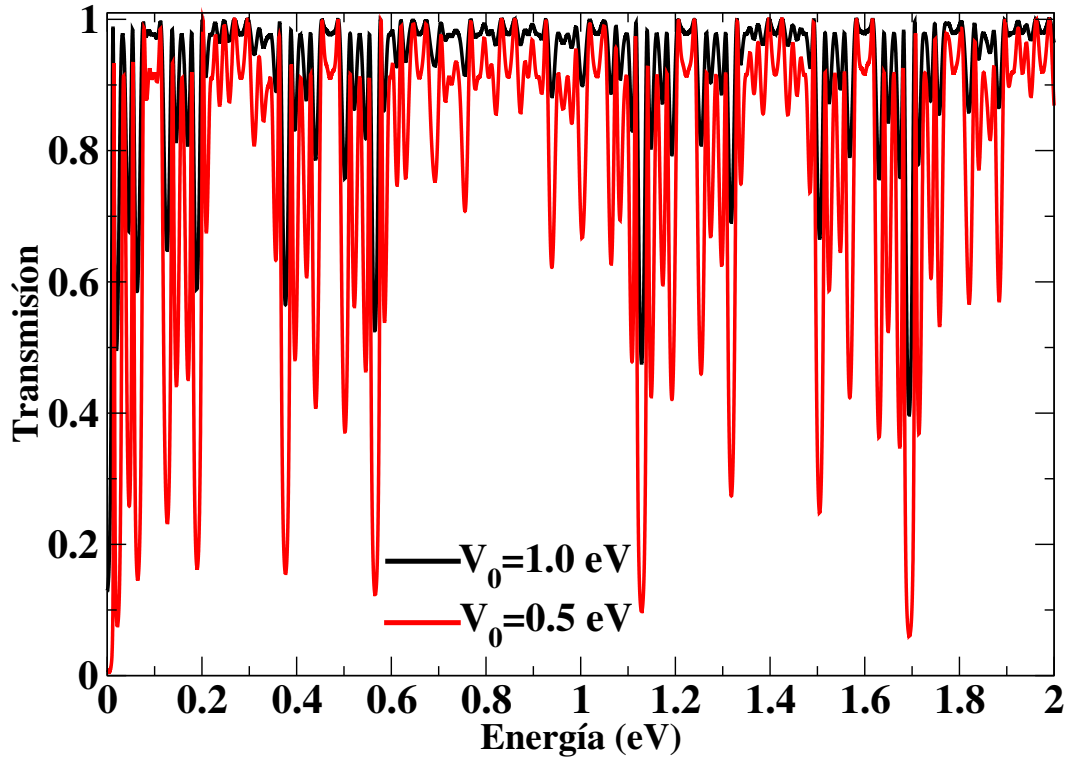


Fig. 3.8: Curvas de transmisión para generacione 6 con diferentes energía de la barrera principal $V_0 = 0.5$ eV y $V_0 = 1$ eV.

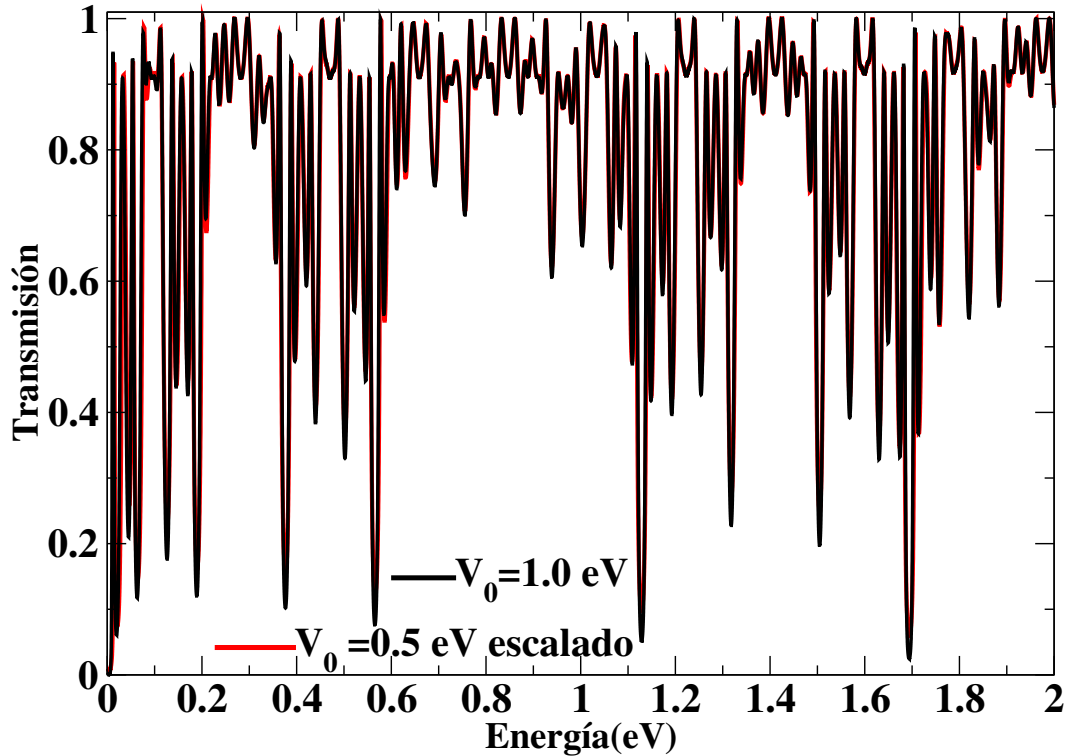


Fig. 3.9: En este caso, la curva $V_0 = 0.5$ eV se escala según la ecuación $T_{1.0}(E) = [T_{0.5}(E)]^4$.

Exploremos ahora el primer parámetro, es decir, tomamos una generación fija, por ejemplo, la generación 6 con tomamos dos energías $V_0 = 0.5$ eV y $V_0 = 1.0$ eV (Figura 3.8), probamos algunas transformaciones con diferentes potencia, por ejemplo, solo aumentamos la potencia a 4 para la curva correspondiente a $V_0 = 0.5$ eV para obtener la curva correspondiente a $V_0 = 1.0$ eV (Figura. 5.6), de acuerdo con esta ecuación $T_{1.0}(E) = [T_{0.5}(E)]^4$. De hecho, este comportamiento de escalado es más general, se aplica para cada múltiplo de dos. Ahora, también hemos mostrado para el parámetro de energía que las curvas coinciden nuevamente, lo que también muestra que las curvas de transmisión están relacionadas por un factor de escala que resulta en la expresión más generalmente:

$$T_{\frac{1}{\beta}V_0}(E) \approx [T_{V_0}(E)]^{\beta^2}. \quad (3.2)$$

Donde V_0 es la altura de la barrera y el factor β es un múltiplo de dos.

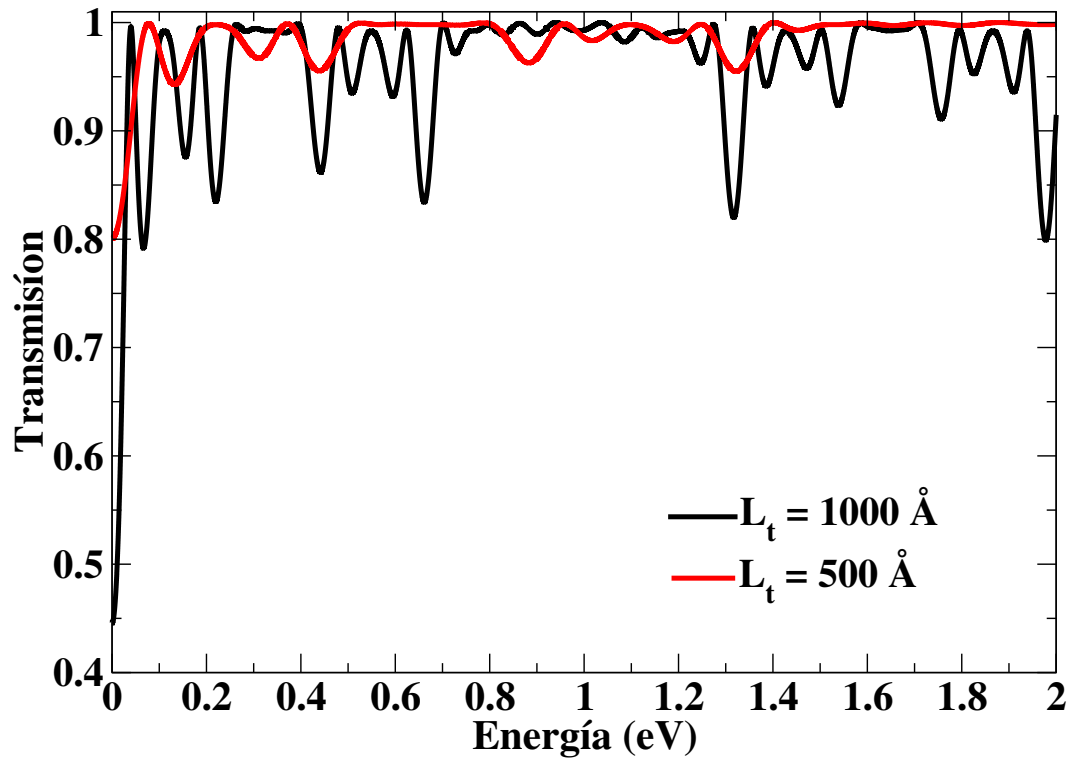


Fig. 3.10: Curvas de transmisión para generación 6 con diferentes longitudes totales de la barrera principal $L_t = 500 \text{ \AA}$ y $L_t = 1000 \text{ \AA}$.

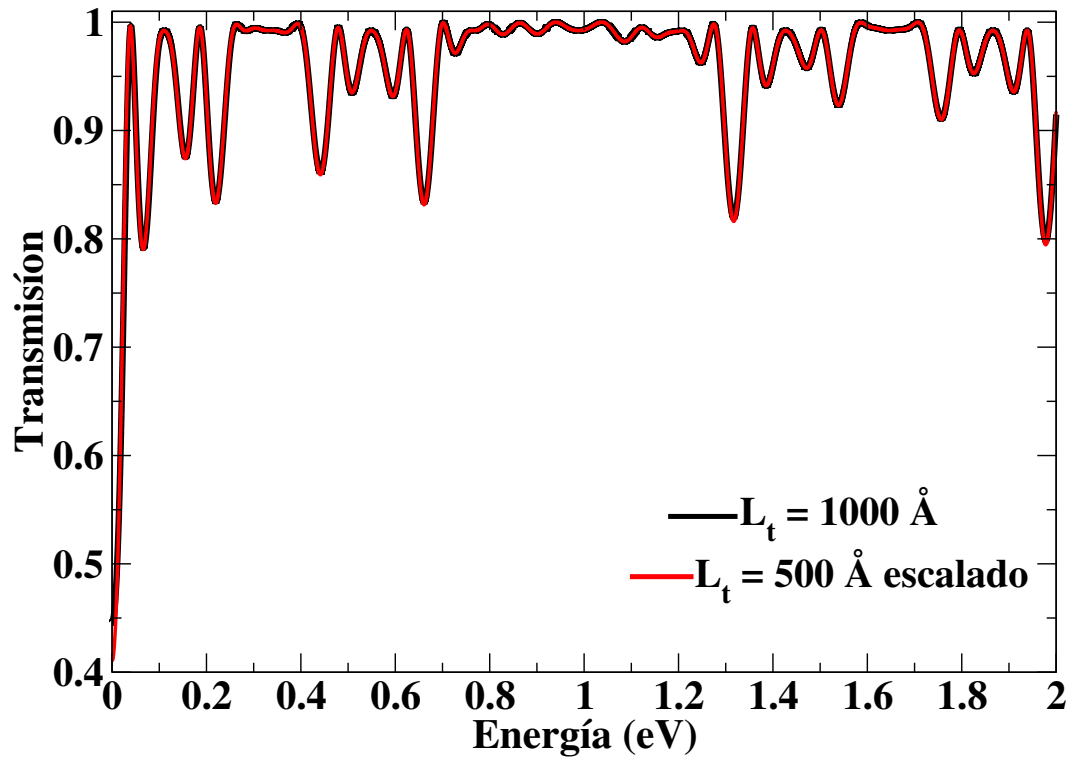


Fig. 3.11: En este caso, la curva $L_t = 500 \text{ \AA}$ se escala según la ecuación $T_{1000}(E) = [T_{500}(E)]^4$.

Ahora exploremos el segundo parámetro para determinar la longitud total y tratar de encontrar una regla de escala para diferentes L_t . En este caso, elevamos la curva a la cuarta potencia y dividimos su energía por dos de acuerdo con esta ecuación $T_{1000}(E) = [T_{500}(E)]^4$ ver figura 3.11. Por consiguiente, demostramos nuevamente que las curvas están relacionadas por el factor de escala para diferente longitud total de la barrera principal. De hecho, es cierto para cada múltiplo de dos γ . Más generalmente:

$$T_{\frac{1}{\gamma}V_0}(E) \approx [T_{V_0}(E)]^{\gamma^2}. \quad (3.3)$$

Donde L_t es la longitud total del sistema y el factor γ es un múltiplo de dos. Finalmente, podemos obtener una buena aproximación combinando las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3). De hecho, todos los parámetros y la energía serán argumentos de transmisión.

$$T(E, G, V_0, L_t) \approx [T(\frac{1}{\gamma}E, G + m, \frac{1}{\beta}V_0, \frac{1}{\gamma}L_t)]^{6m^2(\gamma\beta)^2}. \quad (3.4)$$

Donde m es diferente entre generaciones, y los factores γ y β vienen en múltiplos de dos, esta ecuación es muy útil para predecir la transmisión en función de los parámetros.

3.0.3 Conclusiones y Discusión

Finalmente determinamos que el sistema multibarrera auto-similar escalando la altura de la barrera con el número áureo confiere reglas de escalado en sus curvas de transmisión, utilizando algunas transformaciones al eje (x) y (y). Aunque estas reglas de escalamiento solo se encuentran entre las curvas de transmisión, pero no en una sola curva. Sin embargo en el caso del operador Schrödinger no muestra las reglas de escala, solo para el operador de Dirac [26-28]. Todo lo que sugiere que para obtener la escalamiento de las propiedades de la transmisión, los siguientes ingredientes son necesarios:

- Potenciales auto-similares.
- Operador de Dirac.

Estas reglas de escalado que hemos encontrado confirman una vez más que esa auto-similitud afecta realmente las propiedades del grafeno. Por otra parte, las reglas de escala son una firma del fenómeno auto-similaridad. Por lo tanto, estamos en presencia de importantes propiedades física auto-similares del grafeno. De hecho, la transmisión es producto de la matriz de transferencia, que también depende en la función de onda. Entonces la función onda también tiene propiedades auto-similares, eso implica para un pozo cuántico en un potencial auto-similar, afecta las funciones de onda en todo el espectro continuo. Esta conclusión es general para cualquier potencial auto-similar [34]. Este trabajo lo realizamos con el ángulo normal, y con un sustrato que afecta el grafeno entonces la paradoja de Klein no está presente. Sin embargo, se necesitan estudios teóricos y experimentales adicionales en estructuras complejas y explorar más otros sistemas auto-similares con grafeno. Estos resultados de auto-similaridad en las curvas de transmisión pueden ser útiles para diseñar nuevos dispositivos electrónicos basado en el grafeno.

Bibliografía

- [1] P. Wallace, The band theory of graphite, *Phys. Rev.* **71** 622 (1947).
- [2] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene, *Nature*, **438** 197 (2005).
- [3] K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, A. K. Geim, Two-dimensional atomic crystals, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **102** 10451 (2005).
- [4] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, The electronic properties of graphene, *Rev. Mod. Phys.*, **81** 109 (2009).
- [5] A. K. Geim, K. S. Novoselov, The rise of graphene, *Nat. Mater.*, **6** 183 (2007)
- [6] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim, Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene, *Nat. Phys.*, **2** 620 (2006).
- [7] N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. Castro Neto, Electronic properties of disordered two-dimensional carbon, *Phys. Rev. B*, **73** 125411 (2006).
- [8] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films, *Science*, **306** 666 (2004).
- [9] A. Calogeracos, N. Dombey, History and physics of the Klein paradox, *Contemp. Phys.*, **40** 313 (1999).

-
- [10] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover, New York, (2006).
- [11] D. A. Stone, C. A. Downing, M. E. Portnoi, Searching for Confined Modes in Graphene Channels: The Variable Phase Method, *Phys. Rev. B*, **86** 075464 (2012).
- [12] S. H. R. Sena, J. M. Pereira Jr, G. A. Farias, M. S. Vasconcelos, E. L. Albuquerque, Fractal spectrum of charge carriers in quasiperiodic graphene structures, *J. Phys.: Condens. Matter.*, **22** 465305 (2010).
- [13] S. Mukhopadhyay, R. Biswas, C. Sinha, Resonant tunneling in a Fibonacci bilayer graphene superlattice, *Phys. Status Solidi. B*, **247** 342 (2010).
- [14] W. T. Lu, S. J. Wang, Y. L. Wang, H. Jiang, W. Li, Transport properties of graphene under periodic and quasiperiodic magnetic superlattices, *Physics Letters A*, **377** 1368 (2013)
- [15] L. Sun, C. Fang, Y. Song, Y. Guo, Transport properties through graphene-based fractal and periodic magnetic barriers, *J. Phys.: Condens. Matter*, **22** 445303 (2010).
- [16] B. Huard, J. A. Sulpizio, N. Stander, K. Todd, B. Yang, D. Goldhaber-Gordon, Transport Measurements Across a Tunable Potential Barrier in Graphene, *PRL* **98** 236803 (2007).
- [17] C. Song, S. Havlin, H. A. Makse, Origins of fractality in the growth of complex networks, *Nat. Phys.*, **2** 275 (2006).
- [18] A. Corral, Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, **92** 108501 (2004).
- [19] A. A. Baldin, E. G. Baldina, E. N. Kladnitskaya, O. V. Rogachevskiy, Analysis relativistic Nuclear Collisions Based on the self analysis relativistic nuclear collisions based on the self-similarity approach, *Multiparticle Dynamics*, pp 366 (2003).

-
- [20] H. X. Ding, Z. H. Shen, X. W. Ni, X. F. Zhu, Multi-splitting and self-similarity of band gap structures in quasi-periodic plates of Cantor series, *Appl. Phys. Lett.*, **100** 083501 (2012).
- [21] M. Sun, R. J. Liu, Z. Y. Li, S. Feng, B. Y. Cheng, D. Z. Zhang, H. Yang, A. Jin, Transmission properties of dual-band cross-dipole fractal slit arrays for near-and mid-infrared wave lengths, *Phys. Rev. B*, **74** 193404 (2006).
- [22] F. Miyamaru, Y. Saito, M. W. Takeda, L. Liu, B. Hou, W. Wen, P. Sheng, Emission of terahertz radiations from fractal antennas, *Appl. Phys. Lett.*, **95** 221111 (2009).
- [23] Barnsley, Michael, Fractals everywhere, *Boston, Academic Press*, (1988).
- [24] M. Livio, The golden ratio: The story of Phi, the world's most astonishing number, *New York: Broadway Books*, (2002).
- [25] D. S. Díaz Guerrero, F. Montoya, L. M. Gaggero Sager, R. Pérez Álvarez, Transmittance and fractality in a Cantor-like multibarrier system, *(PIER) Letters*, **2** 149 (2008).
- [26] R. Rodríguez González, I. Rodríguez Vargas, D. S. Díaz Guerrero, L. M. Gaggero Sager, Self-similar transmission properties of aperiodic Cantor potentials in grapped Graphene, *Eur. Phys. J. B*, **89** 17 (2016).
- [27] R. Rodríguez González, I. Rodríguez Vargas, D.S. Díaz Guerrero, L.M. Gaggero Sager, Self-similar transmission patterns induced by magnetic field effects in graphene, *Physica E Low Dimens. Syst. Nanostruct.*, **101** 22 (2018).
- [28] H. García Cervantes, L. M. Gaggero Sager, D. S. Diaz Guerrero, O. Sotolongo Costa, I. Rodríguez Vargas, Self-similar Conductance patterns in Graphene Cantor-like structures, *Scientific Reports*, **7** 617 (2017).
- [29] D. S. Diaz Guerrero, I. Rodríguez Vargas, G. G. Naumis, L. M. Gaggero-Sager, Self-similar Charge Transport in Gapped Graphene, *Fractals*, **24** 1630002 (2016).

-
- [30] J. Viana. Gomes, N. M. R. Peres, Tunneling of Dirac electrons through spatial regions of finite mass, *J. Phys.: Condens. Matter*, **20** 325221 (2008).
- [31] P. Markos, C. M. Soukoulis, Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials, *P. U. P.*, 3 (2008).
- [32] I. Rodríguez-Vargas, J. Madrigal-Melchor, O. Oubram, Resonant tunneling through double barrier graphene systems: A comparative study of Klein and non-Klein tunneling structures, *J. Appl. Phys.*, **112** 073711 (2012).
- [33] D. J. Griffiths, C. A. Steinke, Waves in locally period media. *J. Appl. Phys.*, **69** 137 (2001).
- [34] L. M. Gaggero-Sager, E. Pujals, D. S. Diaz-Guerrero, J. Escorcia-Garcia, Self-Similarity in Semiconductors: Electronic and Optical Properties, Optoelectronics - Materials and Techniques. Prof. P. Predeep (Ed.), 435 (In-Tech) (2011). Available at:<http://www.intechopen.com/books/optoelectronics-materials-and-techniques/self-similarity-in-semiconductors-electronic-and-op>.

Cuernavaca, Mor. a 06 de Mayo de 2019.

DRA. LAURA PATRICIA CEBALLOS GILES
DIRECTORA DE LA FACULTAD DE CONTADURÍA,
ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA
P R E S E N T E

Me permito informarle que una vez revisado el trabajo de investigación titulado: PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN SISTEMAS AUTOSIMILARES EN GRAFENO presentado por el estudiante Mohammed Miniya , con número de matrícula 10010400 para obtener el grado de Maestro en Optimización y Cómputo Aplicado y realizadas las observaciones correspondientes, mi **VOTO** es **APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que la estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

ATENTAMENTE



DR. NOUREDDINE LAKOUARI
CATEDRÁTICO INVESTIGADOR DE LA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI

Cuernavaca, Mor. a 06 de Mayo de 2019.

DRA. LAURA PATRICIA CEBALLOS GILES
DIRECTORA DE LA FACULTAD DE CONTADURÍA,
ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA
P R E S E N T E

Me permito informarle que una vez revisado el trabajo de investigación titulado: PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN SISTEMAS AUTOSIMILARES EN GRAFENO presentado por el estudiante Mohammed Miniya , con número de matrícula 10010400 para obtener el grado de Maestro en Optimización y Cómputo Aplicado y realizadas las observaciones correspondientes, mi **VOTO** es **APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que la estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

ATENTAMENTE



DR. FEDERICO ALONSO PECINA
CATEDRÁTICO INVESTIGADOR DE LA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI

Cuernavaca, Mor. a 06 de Mayo de 2019.

DRA. LAURA PATRICIA CEBALLOS GILES
DIRECTORA DE LA FACULTAD DE CONTADURÍA,
ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA
P R E S E N T E

Me permito informarle que una vez revisado el trabajo de investigación titulado: PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN SISTEMAS AUTOSIMILARES EN GRAFENO presentado por el estudiante Mohammed Miniya , con número de matrícula 10010400 para obtener el grado de Maestro en Optimización y Cómputo Aplicado y realizadas las observaciones correspondientes, mi **VOTO** es **APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que la estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

ATENTAMENTE



DRA. LORENA DÍAZ GONZÁLEZ
CATEDRÁTICO INVESTIGADOR DE LA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI

Cuernavaca, Mor. a 19 de Marzo de 2019.

DRA. LAURA PATRICIA CEBALLOS GILES
DIRECTORA DE LA FACULTAD DE CONTADURÍA,
ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA
P R E S E N T E

Me permito informarle que una vez revisado el trabajo de investigación titulado: PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN SISTEMAS AUTOSIMILARES EN GRAFENO presentado por el estudiante Mohammed Miniya , con número de matrícula 10010400 para obtener el grado de Maestro en Optimización y Cómputo Aplicado y realizadas las observaciones correspondientes, mi **VOTO** es **APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que la estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

ATENTAMENTE



DR. OUTMANE OUBRAM
CATEDRÁTICO INVESTIGADOR DE LA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI

Cuernavaca, Mor. a 10 de Abril de 2019.

DRA. LAURA PATRICIA CEBALLOS GILES
DIRECTORA DE LA FACULTAD DE CONTADURÍA,
ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA
P R E S E N T E

Me permito informarle que una vez revisado el trabajo de investigación titulado: PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN SISTEMAS AUTOSIMILARES EN GRAFENO presentado por el estudiante Mohammed Miniya , con número de matrícula 10010400 para obtener el grado de Maestro en Optimización y Cómputo Aplicado y realizadas las observaciones correspondientes, mi **VOTO** es **APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que la estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

ATENTAMENTE



DR. LUIS MANUEL GAGGERO SAGER
CATEDRÁTICO INVESTIGADOR DE LA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI