

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

“Conexidad local de algunos conjuntos de Julia”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

ERIK DOMÍNGUEZ DÍAZ

**DIRECTOR DE TESIS
DR. ROGELIO VALDEZ DELGADO**

CUERNAVACA, MORELOS

MAYO, 2019

Dedicado a mi familia...

Agradecimientos

Estoy demasiado contaminado como para dejar de estudiar.
Agradecido con la vida... Dios, por las intersecciones correctas con los conjuntos de personas.

“A veces sentimos que lo que hacemos es sólo una gota en el mar, pero el mar sería menos si le faltara una gota.”
Madre Teresa de Calcuta

Introducción

“Defiende tu derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.”

Hipatia de Alejandría

Un fractal es una figura geométrica autosimilar cuya dimensión topológica es menor a su dimensión de Hausdorff. El concepto de fractal nace en 1995 del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado, propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot. Desde entonces entender la topología de los fractales ha sido de gran interés para los matemáticos de todo el mundo. Se puede conocer más sobre la historia de los fractales y los conceptos básicos de los sistemas dinámicos en el artículo *Fractales y dinámica: imágenes en la matemática del autor* Guillermo Sierra.

Los polinomios cuadráticos complejos están parametrizados por el plano complejo \mathbb{C} , es decir, podemos escribir a todos los polinomios cuadráticos complejos como $P_c(z) = z^2 + c$, donde $c \in \mathbb{C}$. Cuando fijamos un parámetro c y hacemos iterar al polinomio cuadrático, la idea fundamental es analizar cuáles puntos divergen y cuáles convergen y a dónde. Por ejemplo, si $c = 0$, el polinomio cuadrático a analizar sería $P_0(z) = z^2$, note que al iterar este polinomio los puntos que convergen son los que pertenecen al disco unitario \mathbb{D} y los que divergen son los puntos que están en el complemento del disco unitario cerrado $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

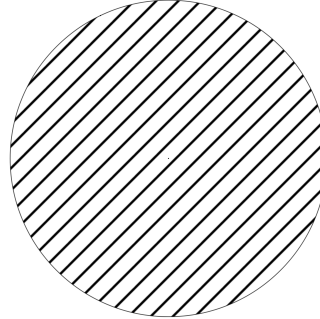


Figura 0.1: Ilustración del conjunto del Julia lleno $K_0 = \mathbb{D}$, del conjunto de Julia $J_0 = S^1$ y del conjunto de Fatou $F_0 = \mathbb{C} \setminus S^1$ del polinomio cuadrático $P_0(z) = z^2$.

La cuenca de atracción del infinito de un polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 + c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se define como,

$$D_{P_c}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : P_c^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Su complemento es llamado el conjunto de **Julia lleno**

$$K_P = \mathbb{C} \setminus D_{P_c}(\infty).$$

El conjunto de **Julia** es la frontera común entre K_P y $D_P(\infty)$

$$J_P = \partial K_P = \partial D_P(\infty).$$

El conjunto de **Fatou** es $\mathbb{C} \setminus J_P$.

En el presente trabajo se pretende analizar algunas propiedades topológicas de los conjuntos de Julia J_c asociados a los polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$. Demostrar, por ejemplo, la compacidad de los conjuntos de Julia J_c es relativamente fácil, ver Teorema 3.2.2. Por otra parte existen propiedades topológicas más complicadas de argumentar. El problema a entender en la tesis es demostrar el teorema de Yoccoz, es decir, entender la conexidad local de algunos conjuntos de Julia J_c .

En el primer y segundo capítulo, se dan los conceptos básicos. La geometría hiperbólica es necesaria para demostrar el Teorema 5.4.2. El concepto de módulo de anillo y sus propiedades, como los son la desigualdad de Grotzsch, son vitales para la demostración del Teorema 5.0.1.

En el capítulo 3, se analiza la dinámica de los polinomios cuadráticos. Se construyen los rayos externos y equipotenciales, y se bosqueja la construcción del rompecabezas de Yoccoz. Para demostrar la conexidad local de los

conjuntos de Julia J_c , se demuestra que cada punto en J_c tienen un sistema de vecindades anidadas y que la intersección de ellas es un solo punto. Dichas vecindades anidadas son piezas del rompecabezas de Yoccoz.

En el capítulo 4, se describen las definiciones de renormalización simple para polinomios cuadráticos y aplicaciones de tipo cuadrático siguiendo el artículo *Infinitely renormalizable quadratic polynomials* de Yunping Jiang.

Por último, en el capítulo 5 se da como tal la demostración del teorema 5.0.1.

Teorema 5.0.1 (Yoccoz) *Sea $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático tal que,*

1. *su conjunto de Julia asociado J_c es conexo,*
2. *ambos puntos fijos (α y β) son repulsores, y*
3. *P_c es no simplemente renormalizable,*

entonces J_c es localmente conexo.

Para este capítulo se siguieron las notas de John Milnor dadas en Stony Brook en 1992 [8]. El trabajo de Milnor da una introducción a los trabajos de Branner, Hubbard, Douady y Yoccoz en la geometría de conjuntos de Julia asociados a polinomios complejos.

Índice general

| | |
|--|------------|
| Agradecimientos | III |
| Introducción | V |
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Definiciones importantes y el teorema de uniformización | 1 |
| 1.2. Un poco de Geometría Hiperbólica | 3 |
| 1.3. Módulo de Anillos | 4 |
| 2. Aplicaciones cuasiconformes | 7 |
| 2.1. Definición diferencial de aplicaciones cuasiconformes | 7 |
| 2.2. Geometría de aplicaciones cuasiconformes | 8 |
| 2.3. Definición analítica de aplicaciones cuasiconformes | 9 |
| 2.4. Definición geométrica de aplicaciones cuasiconformes | 11 |
| 2.5. Teorema de Ahlfors-Bers | 12 |
| 3. Dinámica de los polinomios cuadráticos | 13 |
| 3.1. Clasificación de puntos fijos | 14 |
| 3.2. Conjuntos de Julia | 17 |
| 3.3. Conjunto de Mandelbrot | 20 |
| 3.4. Aplicaciones de tipo cuadrático | 22 |
| 3.5. Clases híbridas de aplicaciones de tipo cuadrático | 24 |
| 3.6. Equipotenciales y rayos externos | 24 |
| 3.6.1. Otra construcción de los rayos externos y equipotenciales | 25 |
| 3.7. El rompecabezas de Yoccoz | 28 |
| 4. Renormalización de polinomios cuadráticos | 31 |
| 4.1. Renormalización de aplicaciones de tipo cuadrático | 33 |
| 5. Demostración del teorema de Yoccoz | 37 |
| 5.1. ¿Qué nos dicen las premisas del Teorema de Yoccoz? | 37 |
| 5.2. Problema principal | 38 |

| | |
|---|-----------|
| 5.3. El Tableau | 40 |
| 5.3.1. Clasificación de anillos | 42 |
| 5.3.2. Reglas del Tableau | 44 |
| 5.4. Piezas de rompecabezas engrosadas | 49 |
| 5.5. Demostración del teorema de Yoccoz | 52 |
| A. Desigualdades de Longitud-Área-Módulo | 55 |

Capítulo 1

Preliminares

Las definiciones de la sección 1 son para entender el teorema de uniformización, el cual en particular establece que cualquier dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado, simplemente conexo de \mathbb{C} es una superficie de Riemann hiperbólica, es decir, tiene cubriente universal biholomorfamente equivalente al disco de Poincaré \mathbb{D} . Este resultado nos ayudará en la demostración de algunos teoremas del capítulo 5, al establecer que el interior de una pieza del rompecabezas de Yoccoz es una superficie de Riemann hiperbólica. Por otra parte los anillos (dominios doblemente conexos) son superficies Euclidianas. En la sección 3 daremos algunos resultados importantes sobre el módulo de anillos. Estos resultados son pieza fundamental para la demostración del teorema de Yoccoz (teorema 5.0.1).

1.1. Definiciones importantes y el teorema de uniformización

Llamamos a R una superficie de Riemann, si es un espacio topológico, Hausdorff, conexo, con una familia $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- i) Todo U_j es un subconjunto abierto de R , y $R = \bigcup_{j \in J} U_j$.
- ii) Todo φ_j es un homeomorfismo de U_j sobre un subconjunto abierto de D_j en el plano complejo.
- iii) Si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, la aplicación de transición

$$\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k),$$

es una aplicación biholomorfa, *i.e.*, un homeomorfismo holomorfo.

Al conjunto $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ se le conoce como atlas.

Lo interesante de las superficies de Riemann es que localmente se comportan como el plano complejo \mathbb{C} , a pesar de que globalmente pueden ser muy raras.

Las siguientes definiciones establecen cuando dos superficies de Riemann son biholomorfamente equivalentes, lo cual nos interesa para poder enunciar el teorema de uniformización.

Definición 1.1.1. Sean R y S superficies de Riemann. Diremos que $f : R \rightarrow S$ es una función holomorfa si, $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$ es holomorfa para cada carta (U, ψ) de R y (V, ϕ) de S con $f(U) \subset V$. Decimos que f es biholomorfa si es holomorfa con inversa holomorfa.

De la definición anterior tiene sentido decir que dos superficies de Riemann R y S son biholomorfamente equivalentes ($R \cong S$) si existe una función biholomorfa entre R y S . En particular R y S tienen la misma estructura compleja.

Otra definición importante es la de cubriente universal, la cual nos ayuda a clasificar las superficies de Riemann en Euclídeas, hiperbólicas y esféricas. La noción de cubriente (no sólo universal) se puede estudiar en un contexto más general, como lo son los espacios topológicos.

En esta parte seguiremos el libro *Una introducción a la Geometría Hiperbólica y Grupos Fuchsianos* [5]. Las demostraciones no dadas aquí se pueden consultar en la misma referencia.

Definición 1.1.2. Sea $\pi : Y \rightarrow X$ una función continua entre espacios topológicos. Al conjunto $\pi^{-1}(x) \subseteq Y$, $x \in X$, se le llama la fibra de π sobre x .

Definición 1.1.3. Una función continua $\pi : Y \rightarrow X$ entre espacios topológicos se llama función cubriente si es suprayectiva y cada punto $x \in X$ posee una vecindad abierta $U \subseteq X$, tal que su preimagen $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} V_i$ es la unión disjunta de abiertos $V_i \subseteq Y$, tales que la restricción $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo de V_i en U , para cada i . En particular, π es un homeomorfismo local llamado la proyección de Y sobre X . También decimos que Y es un espacio cubriente de X . A la vecindad U se le llama vecindad elemental de X .

Un homeomorfismo $\gamma : Y \rightarrow Y$ tal que $\pi \circ \gamma = \pi$ es llamado una transformación cubriente del cubriente (Y, π, X) . Denotamos por Γ al conjunto de todas las transformaciones cubrientes. De esta forma Γ es un grupo con la

operación composición de funciones, llamado el grupo de transformaciones cubrientes de (Y, π, X) .

Toda cubriente que es simplemente conexa se dice que es una cubriente universal. En [5] se demuestra que toda superficie de Riemman tiene cubriente universal. Además esta cubriente universal es también una superficie de Riemman.

Teorema 1.1.1. (Teorema de uniformización) *Toda superficie de Riemman simplemente conexa es biholomorfamente equivalente a la esfera de Riemman $\widehat{\mathbb{C}}$, o al plano complejo \mathbb{C} , o al disco de Poincaré \mathbb{D} .*

Las superficies de Riemman que tienen como cubriente universal a $\widehat{\mathbb{C}}$ se les llama esféricas, a las que tienen a \mathbb{C} se les llama Euclidianas y a las que tienen a \mathbb{D} se les llama hiperbólicas.

1.2. Un poco de Geometría Hiperbólica

Como es bien sabido, el disco unitario \mathbb{D} tiene implícita una métrica natural, la métrica Euclideana, dada por $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$. Pero Jules Henri Poincaré usó la métrica

$$ds^2 = \frac{4(dz)^2}{(1 - |z|^2)^2},$$

para construir un modelo de geometría no Euclideana, llamado geometría hiperbólica.

A \mathbb{D} con dicha métrica (métrica de Poincaré), se le conoce como el disco de Poincaré.

Definición 1.2.1. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Definimos la distancia de Poincaré como

$$d_H(z_1, z_2) = \inf_C \int_C \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

donde C es una curva rectificable en \mathbb{D} la cual conecta a z_1 y z_2 .

Teorema 1.2.1. Toda transformación holomorfa $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ satisface que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Del teorema anterior podemos concluir que

$$d_H(f(z_1), f(z_2)) \leq d_H(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

y que la igualdad se da cuando $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, donde $\text{Aut}(\mathbb{D})$ es el conjunto de biyecciones holomorfas de \mathbb{D} sobre \mathbb{D} , mejor conocidas como automorfismos del disco unitario.

En la literatura se puede encontrar que los $\text{Aut}(\mathbb{D})$ son el grupo de isometrías de \mathbb{D} y que se pueden identificar con $PSL(2, \mathbb{R})$. Más aún, si $T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ entonces puede ser escrito como,

$$T(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}},$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$, con $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Se puede profundizar y verificar los resultados dados en esta sección en [GR].

1.3. Módulo de Anillos

Todo dominio acotado, simplemente conexo Ω en \mathbb{C} es una superficie de Riemann hiperbólica, pues su cubierta universal es biholomorfamente equivalente a \mathbb{D} . Esto, es claro, por el teorema de la transformación de Riemann. Recordemos que un dominio Ω es simplemente conexo si su complemento en \mathbb{C} es una región conexa. Si un dominio conexo no es simplemente conexo, se dice que es múltiplemente conexo. En particular es doblemente conexo si su complemento es unión de dos conexos disjuntos, cada uno de los cuales es llamada una componente conexa.

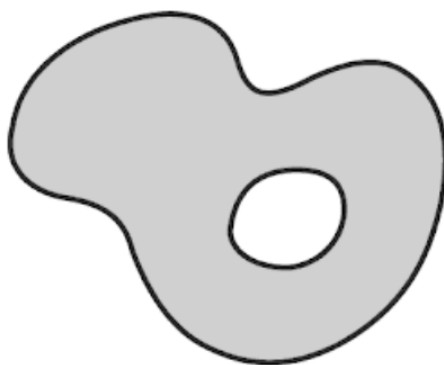


Figura 1.2: Región doblemente conexa.

Todo dominio doblemente conexo es biholomorfamente equivalente a

$$A_R = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}, \text{ con } r, R \geq 0,$$

y se le conoce en la literatura como anillo.

El módulo de un anillo A_R es el número real positivo definido por

$$\text{mod}(A_R) = \frac{\log(R/r)}{2\pi}.$$

Cabe mencionar que el módulo de un anillo es una invariante conforme, es decir, sea f una transformación holomorfa de A_R sobre $f(A_R)$ entonces,

$$\text{mod}(f(A_R)) = \text{mod}(A_R).$$

Teorema 1.3.1. Sean A_{R_1} y A_{R_2} anillos tales que $A_{R_1} \subset A_{R_2}$, entonces

$$\text{mod}(A_{R_1}) \leq \text{mod}(A_{R_2}).$$

Teorema 1.3.2. (Desigualdad de Grötzsch) Sean A_R , A_{R_1} y A_{R_2} anillos disjuntos cumpliendo que $A_{R_1} \subset A_R$ y $A_{R_2} \subset A_R$. Entonces,

$$\text{mod}(A_{R_1}) + \text{mod}(A_{R_2}) \leq \text{mod}(A_R).$$

Nota 1.3.1. En este estudio estamos considerando sólo anillos que tienen módulo finito. Note que $\mathbb{C} \setminus A_R$ esta compuesto por dos componentes conexas, una acotada y la otra no. La componente acotada es solo un punto si y sólo si el módulo de A_R es ∞ .

Sea E un subconjunto compacto simplemente conexo de \mathbb{D}_R . Sea

$$\text{mod}(\mathbb{D}_R, E) = \sup_{A_r} \{\text{mod}(A_r) : \mathbb{D}_r \setminus E \text{ es un subanillo de } A_r\}.$$

Note que $\text{mod}(\mathbb{D}_r, E) = \infty$ si E es un solo punto.

Definimos el diámetro hiperbólico de E en \mathbb{D}_R como

$$\text{diam}_H(E) = \sup_{z_1, z_2 \in E} d_H(z_1, z_2).$$

Teorema 1.3.3. Con las condiciones anteriores, se tiene que

$$\text{diam}_H(E) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{mod}(\mathbb{D}_R, E) \rightarrow \infty$$

y

$$\text{diam}_H(E) \rightarrow \infty \Leftrightarrow \text{mod}(\mathbb{D}_R, E) \rightarrow 0.$$

Capítulo 2

Aplicaciones cuasiconformes

La teoría de aplicaciones cuasiconformes es una herramienta de gran importancia para la dinámica holomorfa. Por ello nos damos a la tarea de dar tres definiciones equivalentes y estudiar la geometría de este tipo de aplicaciones.

Se puede profundizar en el estudio de aplicaciones cuasiconformes revisando el capítulo 5 de [6].

2.1. Definición diferencial de aplicaciones cuasiconformes

Sea $f : U \rightarrow V$ un difeomorfismo que preserva orientación entre abiertos U, V del plano complejo \mathbb{C} . Denotemos por $J(z)$ al Jacobiano de f en $z \in U$ y como f preserva orientación, entonces $J(z) > 0$ para todo $z \in U$. Sabemos que

$$J(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

luego,

$$0 < |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \leq |f_z|^2.$$

Por lo tanto, tenemos que $f_z \neq 0$.

Ahora, definamos la dilatación $\mu = \mu_f$ de f por

$$\mu = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}.$$

La dilatación compleja μ también es llamada el coeficiente de Beltrami de f , y a la ecuación $f_{\bar{z}} = \mu f_z$, se le conoce como la ecuación de Beltrami. Notemos que $|\mu| < 1$, además como f preserva orientación, entonces $\mu = 0$ si y sólo si f es conforme.

Definición 2.1.1. Si $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo preservando orientación, diremos que f es k -cuasiconforme en U si su coeficiente de Beltrami μ satisface que

$$|\mu| \leq k < 1.$$

Observemos que $|\mu_f|$ es una función continua y $|\mu_f| < 1$ en U .

2.2. Geometría de aplicaciones cuasiconformes

Sean $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de clase $C^1(U)$. Luego, sabemos que f puede ser escrita como dos funciones de variables reales, es decir, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Por lo cual se tienen las siguientes fórmulas

$$f_x = u_x + iv_x, \quad f_y = u_y + iv_y,$$

$$\partial f = f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad \bar{\partial} f = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Además, f es diferenciable en cada $z_0 \in U$ en el sentido real, por lo cual las derivadas parciales existen en z_0 . De aquí, que podemos escribir a $f(z)$ como su serie de Taylor de primer orden, es decir,

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + B(\bar{z} - \bar{z}_0) + E(z),$$

donde $A = \partial f(z_0)$, $B = \bar{\partial} f(z_0)$ y $E(z) = o(z - z_0)$ es el residuo de z cerca de z_0 . Note que el residuo $o(z - z_0) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$, ya que $f(z)$ es diferenciable en z_0 .

Ahora, consideremos la transformación lineal $L(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + B(\bar{z} - \bar{z}_0)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(z_0) = 0$, aplicando una traslación si es necesario. Por lo cual, reducimos nuestro análisis a estudiar la siguiente función

$$L(z) = Az + B\bar{z}.$$

Escribamos a $A = A_1 + iA_2$ y $B = B_1 + iB_2$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} L(z) &= (A_1 + iA_2)(x + iy) + (B_1 + iB_2)(x + iy) \\ &= (A_1 + B_1)x + (B_2 - A_2)y + i[(A_2 + B_2)x + (A_1 - B_1)y]. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que L tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ B_2 - A_2 & A_1 - B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De lo cual se deduce que

$$0 < J_f(z_0) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z_0)|^2.$$

Por lo tanto

$$|f_{\bar{z}}(z_0)| < |f_z(z_0)|.$$

Del análisis anterior tenemos que $0 < \mu < 1$ y $L_\mu(z) = z + \mu\bar{z} = x + iy + \mu x - i\mu y = (1 + \mu)x + i(1 - \mu)y$ es una expansión en la dirección de x y una contracción en la dirección de y .

Ahora, tomemos el círculo con centro en cero y radio r

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

el cual es transformado de la siguiente forma por L_μ

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = ((1 + \mu)r \cos(\theta), (1 - \mu)r \sin(\theta)).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$(\tilde{x}/(1 + \mu)r)^2 + (\tilde{y}/(1 - \mu)r)^2 = 1$$

es una elipse con eje mayor $r(1 + \mu)$ y eje menor $r(1 - \mu)$. Por último, observemos que $L(z)$ puede ser escrito como $L(z) = A(z + (B/A)\bar{z}) = |A|e^{i\alpha}(re^{i\theta} + |\mu|e^{i\beta}re^{-i\theta}) = |A|e^{i(\alpha+\frac{\beta}{2})}(re^{i(\theta-\frac{\beta}{2})} + |\mu|re^{-i(\theta-\frac{\beta}{2})})$, donde $|B| < |A|$, $\mu = \frac{B}{A}$, $A = |A|e^{i\alpha}$, $\mu = |\mu|e^{i\beta}$ y $z = re^{i\theta}$. Por ende,

$$L(z) = g \circ L_{|\mu|} \circ h(z),$$

donde $g(z) = |A|e^{i(\alpha+\frac{\beta}{2})}z$ y $h(z) = e^{-i\frac{\beta}{2}}z$, las cuales son rotaciones. Lo cual demuestra que $L(z)$ manda círculos en elipses con razón entre sus ejes

$$\frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|}.$$

2.3. Definición analítica de aplicaciones cuasiconformes

Consideremos homeomorfismos que preservan orientación, los cuales no necesariamente son diferenciables.

Definición 2.3.1. Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, donde D es un dominio planar. Diremos que $f(z) = f(x, y)$ es ACL (absolutamente continua en líneas), si satisface las siguientes condiciones para cualquier rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ en D cuyos lados son paralelos al eje real y al eje imaginario:

- i) Como función de x , $f(x, y)$ es absolutamente continua en $[a, b]$ para casi toda $y \in [c, d]$.
- ii) Como función de y , $f(x, y)$ es absolutamente continua en $[c, d]$ para casi toda $x \in [a, b]$.

Una función absolutamente continua $F(t)$ sobre un intervalo I es diferenciable para casi toda $t \in I$. Por lo tanto, cuando una función $f(z)$ es ACL sobre un dominio D , las derivadas parciales f_z y $f_{\bar{z}}$ de f están bien definidas y son finitas para casi toda $z \in D$. Más aún, éstas son medibles.

Definición 2.3.2. (Definición analítica de aplicaciones cuasiconformes) Sea $f(z)$ un homeomorfismo preservando orientación de un dominio planar D sobre el plano complejo. Diremos que $f(z)$ es cuasiconforme en D si satisface las siguientes condiciones:

- i) f es ACL en D .
- ii) Existe una constante k , con $0 \leq k < 1$ tal que

$$|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|, \text{ c.d. en } D.$$

Definiendo $K = (1+k)/(1-k)$, diremos que f es K -cuasiconforme en D . Llamaremos al ínfimo de $K (\geq 1)$ tal que f es K -cuasiconforme la máxima dilatación de f , y lo denotamos por K_f o $K(f)$.

Es claro que una aplicación conforme f de un dominio D' es 1-cuasiconforme tomando a $k = 0$ y $K_f = 1$. Más aún, si g es una aplicación K -cuasiconforme de un dominio D sobre el dominio D' , entonces la composición $g \circ f$ es K -cuasiconforme. De hecho de la definición, $g \circ f$ satisface (i) y (ii), y $K_{g \circ f} = K_f$.

Otra definición analítica de aplicación cuasiconforme es la siguiente.

Definición 2.3.3. (Definición analítica de aplicaciones cuasiconformes) Sea f un homeomorfismo de un dominio D sobre \mathbb{C} el cual preserva orientación. Diremos que f es cuasiconforme en D si f satisface las siguientes dos condiciones:

- (i)' Las derivadas parciales de distribución de f con respecto a z y \bar{z} pueden ser representadas por funciones localmente integrables f_z y $f_{\bar{z}}$, respectivamente, en D .

(ii) Existe una constante k con $0 \leq k < 1$ tal que

$$|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|, \text{ c.d. en } D.$$

Las definiciones anteriores de aplicaciones cuasiconformes son mutuamente equivalentes (Ver [6]).

2.4. Definición geométrica de aplicaciones cuasiconformes

Un cuadrilátero es un par ordenado $(Q; q_1, q_2, q_3, q_4)$ de un dominio cerrado de Jordan Q y cuatro puntos q_1, q_2, q_3, q_4 en la frontera ∂Q de Q , los cuales son mutuamente distintos y están localizados en orden con respecto a la orientación positiva de ∂Q . Además, cada q_j con $j = 1, 2, 3, 4$ es llamado un vértice del cuadrilátero y recuerdese que un dominio cerrado de Jordan es la cerradura de un dominio acotado por una curva de Jordan. De aquí en adelante denotaremos a un cuadrilátero $(Q; q_1, q_2, q_3, q_4)$ simplemente por Q . La proposición 4.7 en [6] muestra que para cada cuadrilátero Q , existe un homeomorfismo h de Q sobre algún rectángulo $R = [0, a] \times [0, b]$ con $a, b > 0$, el cual es conforme en el interior de Q y satisface

$$h(q_1) = 0, \quad h(q_2) = a, \quad h(q_3) = a + ib \quad \text{y} \quad h(q_4) = ib.$$

Más aún, muestra que a/b es independiente de h . Al número a/b se le conoce como el módulo del cuadrilátero Q y se le denota por $M(Q)$. También, la imagen de un cuadrilátero Q bajo un homeomorfismo $f : Q \rightarrow \mathbb{C}$, es decir, $f(Q)$ con vértices $f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4)$, es un cuadrilátero.

Definición 2.4.1. (Definición geométrica de aplicaciones cuasiconformes) *Sea f un homeomorfismo de un dominio D sobre \mathbb{C} el cual preserva orientación. Diremos que f es cuasiconforme en D si f satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(iii) Existe una constante $K \geq 1$ tal que

$$M(f(Q)) \leq KM(Q),$$

para cualquier cuadrilátero Q en D .

(iii)' Existe una constante $K \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{K}M(Q) \leq M(f(Q)) \leq KM(Q),$$

para cualquier cuadrilátero Q en D .

Las condiciones (iii) y (iii)' son mutuamente equivalentes, al igual que todas las definiciones de aplicaciones cuasiconformes aquí dadas (ver capítulo 5 de [IT]).

Propiedades de aplicaciones cuasiconformes

- (i) La inversa de una aplicación K -cuasiconforme sigue siendo una aplicación K -cuasiconforme.
- (ii) Para cualesquiera aplicaciones cuasiconformes h y \tilde{h} de dominios D y D' , respectivamente y para cada aplicación K -cuasiconforme f de D sobre \tilde{D} , la composición $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ es también K -cuasiconforme. En pocas palabras, la K -cuasiconformidad es invariante bajo composiciones conformes.
- (iii) Para cada aplicación K_1 -cuasiconforme f de un dominio D y cada aplicación K_2 -cuasiconforme g de $f(D)$, la composición $g \circ f$ es $K_1 K_2$ -cuasiconforme.

2.5. Teorema de Ahlfors-Bers

El teorema de Ahlfors-Bers, también conocido como el teorema medible de Riemann, nos da la solución a la ecuación diferencial de Beltrami

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z.$$

En particular, este hecho es bastante útil si consideramos una aplicación cuasiconforme f que deja invariante una diferencial de Beltrami μ . Luego, conjugando f con la solución dada por el teorema de Ahlfors-Bers, obtenemos una función holomorfa. Esta es una propiedad importante de las aplicaciones cuasiconformes utilizada en dinámica holomorfa.

Teorema 2.5.1. (Ahlfors-Bers) *Para cualquier diferencial de Beltrami μ en $L^\infty(\mathbb{C})$ con $\|\mu\|_\infty < 1$, existe una única aplicación cuasiconforme $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, tal que f fija $0, 1$ e ∞ y la dilatación compleja de f es μ .*

Una demostración del teorema anterior se puede revisar en [CG].

Capítulo 3

Dinámica de los polinomios cuadráticos

La dinámica de los polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$ estudia la iteración de dichos polinomios. Los puntos que no divergen a infinito cuando los iteramos por medio de $P_c(z) = z^2 + c$, constituyen el conjunto de Julia lleno K_c (ver sección 2).

Un problema en el estudio de sistemas dinámicos holomorfos de polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$, es entender la topología de su conjunto de Julia asociado J_c . Como se muestra aquí algunas propiedades topológicas son relativamente fáciles de justificar. Por ejemplo se muestra en esta sección que J_c es conexo, cerrado y acotado. Por otra parte demostrar la conexidad local de los conjuntos de Julia J_c no es un asunto trivial. Uno de los teoremas que motiva el estudio de la conexidad local de los conjuntos de Julia J_c es el teorema de Carathéodory.

Teorema 3.0.1. (Teorema de Carathéodory) *Sea $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicación de Riemann, con Ω un dominio simplemente conexo y subconjunto propio de \mathbb{C} . Entonces h puede ser extendida continuamente a S^1 si y sólo si la frontera $\partial\Omega$ es localmente conexa.*

Es decir, si consideramos la aplicación de Riemann H , dada por,

$$H : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{Int}(K_c),$$

con K_c conexo (simplemente conexo), **¿para cuáles parámetros c , H puede ser extendida continuamente a S^1 ?**, si hablamos en particular sobre la topología de un conjunto de Julia, podemos cambiar la pregunta por: **¿para cuáles c 's J_c ($= K_c$) es localmente conexo?**

Yoccoz logró un gran avance para entender la conexidad local de los conjuntos de Julia haciendo uso de la construcción de dominios anidados, mejor

conocido como el rompecabezas de Yoccoz. Para la construcción del rompecabezas de Yoccoz (ver sección 7) se necesitan los conceptos de rayos externos y equipotenciales (ver sección 6). En la sección 4 analizamos una generalización de los polinomios cuadráticos.

En las secciones 1, 2 y 3 damos las definiciones y resultados básicos de la dinámica de polinomios cuadráticos.

3.1. Clasificación de puntos fijos

Consideremos un polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. De ellos nos interesa el estudio de sus puntos fijos, y para facilitar dicho proceso daremos la definición de conjugación analítica, la cual muestra que este análisis se puede reducir a solo estudiar polinomios de la forma $P_c(z) = z^2 + c$.

Definición 3.1.1. *Dadas f y g funciones, se dice que son analíticamente conjugadas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, si existe un biholomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, tal que $\phi \circ f(z) = g \circ \phi(z)$, para $z \in U$.*

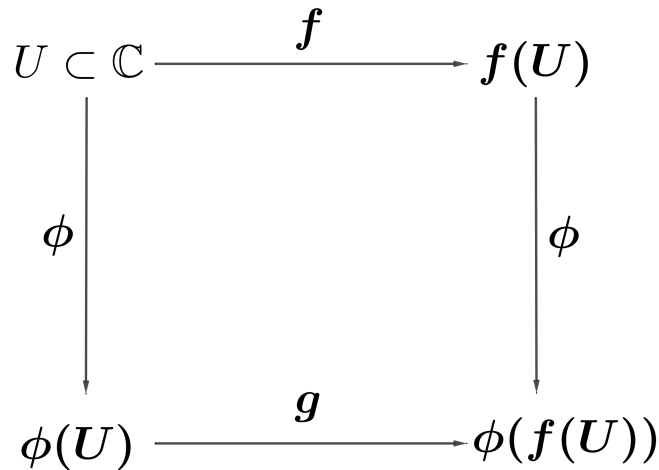


Figura 3.1: Diagrama conmutativo que ilustra la conjugación analítica de f con g .

En la literatura es conocido que la transformación que conjuga a P con P_c es un automorfismo del plano complejo $Aut(\mathbb{C}) = \{\phi(z) = az + b, \text{ donde } a, b \in \mathbb{C} \text{ con } a \neq 0\}$, es decir, una transformación afín.

Teorema 3.1.1. *Para cada polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, existe $c \in \mathbb{C}$, tal que P y $P_c(z) = z^2 + c$ son analíticamente conjugados. De*

hecho, la conjugación ϕ es un automorfismo del plano complejo, es decir, una función afín de la forma $az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$.

Demostración. Resolviendo la ecuación $\phi \circ P(z) = P_c \circ \phi(z)$ se obtiene que $a = a_2$, $b = \frac{a_1}{2}$ y $c = a_0 a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{2}$. De este hecho, el resultado es inmediato. \square

Por el teorema 3.1.1, nuestro problema se ha reducido a estudiar las raíces del polinomio $z^2 - z + c$.

Por otra parte un punto $z \in \mathbb{C}$, es un punto periódico de P_c de periodo k si $P_c^k(z) = z$ y $P_c^j(z) \neq z$ para $j < k$, donde P_c^k denota la composición de P_c consigo mismo k -veces.

Dado $z \in \mathbb{C}$, al conjunto

$$\mathcal{O}_{P_c}(z) = \{w \in \mathbb{C} : w = P_c^k(z), \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

se le llama órbita de z bajo P_c . En el caso que z es periódico este conjunto es finito y se le llama órbita periódica. Además, es claro que el estudio de puntos periódicos se puede reducir al estudio de puntos fijos. Es decir, si consideramos que z_0 es un punto periódico de P_c de periodo k , es tan fácil como definir a $P_1 := P_c^k$ y hacer el estudio sobre dicho polinomio P_1 .

También es muy conocida la clasificación de puntos fijos utilizando el multiplicador λ del polinomio P_c .

Para aclarar la notación demos la definición de multiplicador y la clasificación de dichos puntos.

Definición 3.1.2. Sea $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto fijo de P_c . Definimos a λ como la derivada del polinomio P_c evaluada en el punto fijo z_0 , es decir, $\lambda = P_c'(z_0)$. A λ se le conoce como el multiplicador de P_c en z_0 .

Clasificación de puntos fijos utilizando el multiplicador λ

Sea P_c con z_0 un punto fijo, entonces se tiene la siguiente clasificación.

- 1) z_0 es un punto atractor si $|\lambda| < 1$; en particular si $|\lambda| = 0$ diremos que z_0 es un punto superatractor,
- 2) z_0 es un punto repulsor si $|\lambda| > 1$, y
- 3) z_0 es un punto indiferente si $|\lambda| = 1$.

Observación 3.1.1. *Los polinomios cuadráticos P_c están parametrizados por el campo \mathbb{C} y sus puntos fijos son*

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

los cuales son dos, salvo el caso $c = \frac{1}{4}$, donde P_c tiene a $\frac{1}{2}$ como único punto fijo.

Observación 3.1.2. *La clasificación de puntos fijos utilizando el multiplicador λ es válido para un caso más general, por ejemplo, para funciones racionales de la esfera de Riemann.*

Consideremos ahora una función racional de la esfera de Riemann $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Note que en particular los polinomios cuadráticos P_c descritos antes son funciones racionales, por lo cual todos los teoremas siguientes se valen para ellos.

Teniendo una clasificación de los puntos fijos hablemos un poco de ellos. En una vecindad alrededor de los puntos fijos repulsores y atractores la función f la podemos ver como una homotecia dada por su multiplicador (teorema de Koenigs). Al igual, para un vecindad de un punto fijo superatractor la función f se puede ver como z^n (teorema de Böttcher). Los teoremas son los siguientes, cuyas demostraciones se pueden revisar en [9].

Teorema 3.1.2. (Koenigs) *Sea f una función holomorfa. Si su multiplicador λ satisface que $|\lambda| \neq 1, 0$, entonces existe un cambio de coordenadas local holomorfo $w = \phi(z)$, con $\phi(0) = 0$, de tal manera que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ es una función lineal $w \rightarrow \lambda w$, para toda w en alguna vecindad del origen. Más aún, ϕ es única módulo multiplicación por una constante diferente de cero.*

Teorema 3.1.3. (Böttcher, 1904) *Sea f una función holomorfa y z_0 un punto fijo superatractor. Si $f(z) = z_0 + a_n(z - z_0)^n + \dots$, con $a_n \neq 0$, entonces existen vecindades U y V de z_0 y 0 , respectivamente y un biholomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ que conjuga analíticamente $f(z)$ con $g(z) = z^n$. Más aún, esta conjugación es única módulo multiplicación por una raíz $(n - 1)$ -ésima de la unidad.*

Falta hablar de los puntos fijos indiferentes. Sea $f(z_0) = z_0$, con $|\lambda| = 1$. Si existe una vecindad U de z_0 donde f sea conjugada a la rotación λz , entonces decimos que f es linealizable en z_0 , en otro caso f no es linealizable en z_0 . Esto nos permite dar una clasificación de los puntos indiferentes. Como $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, entonces decimos que el punto fijo indiferente z_0 es:

- 1) Parabólico, si θ es racional.

- 2) Siegel, si θ es irracional y f es linealizable en una vecindad de z_0 .
- 3) Cremer, si θ es irracional y f es no linealizable en z_0 .

Más aún, al dominio máximo de linealización Δ de f se le llama disco de Siegel.

Enunciemos ahora, dos teoremas que nos indican cuando un punto fijo es linealizable.

Teorema 3.1.4. (Siegel, 1992) *Sea f una función analítica en z_0 tal que $f(z_0) = z_0$ y $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$. Si θ es diofantino, entonces f es linealizable en z_0 .*

Teorema 3.1.5. (Brjuno, 1965) *Sea f una función analítica en z_0 tal que $f(z_0) = z_0$ con multiplicador $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$. Si $\frac{p_n}{q_n}$ denota la n -ésima aproximación a θ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

entonces f es linealizable en z_0 .

3.2. Conjuntos de Julia

El matemático francés Gaston Maurice Julia (1893 - 1978) fue el pionero en el estudio de los fractales al publicar a los 25 años, su artículo Memoria sobre la iteración de las funciones racionales. Como dato curioso a Julia le tocó vivir la primera guerra mundial y a causa de ello perdió la nariz. Regresando al aspecto matemático daremos una primera definición de unos conjuntos muy especiales en la teoría de sistemas dinámicos, llamados conjuntos de Julia.

Sea $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $d \geq 2$. La cuenca de atracción del infinito, $D_P(\infty)$, es el conjunto de puntos que se escapan al infinito

$$D_P(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : P^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Su complemento es llamado el conjunto de **Julia lleno**

$$K_P = \mathbb{C} \setminus D_P(\infty).$$

El conjunto de **Julia** es la frontera común entre K_P y $D_P(\infty)$

$$J_P = \partial K_P = \partial D_P(\infty).$$

El conjunto de **Fatou** es $\mathbb{C} \setminus J_P$.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos al polinomio cuadrático $P_0(z) = z^2$ y note que $P_0^n(z) = z^{2^n}$; de lo cual se puede deducir lo siguiente.

1. Si $|z| < 1$, entonces $z^{2^n} \rightarrow 0$.
2. Si $|z| > 1$, entonces $z^{2^n} \rightarrow \infty$.
3. El conjunto $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es invariante bajo P_0 , es decir, $P_0(S^1) = S^1$.

En conclusión tenemos que $\bar{\mathbb{D}}$ es el conjunto de Julia lleno, S^1 es el conjunto de Julia y $\mathbb{C} \setminus S^1$ es el conjunto de Fatou para $P_0(z)$.

Las siguientes imágenes muestran algunos conjuntos de Julia llenos para el polinomio $P_c(z) = z^2 + c$, con diferentes valores de c .

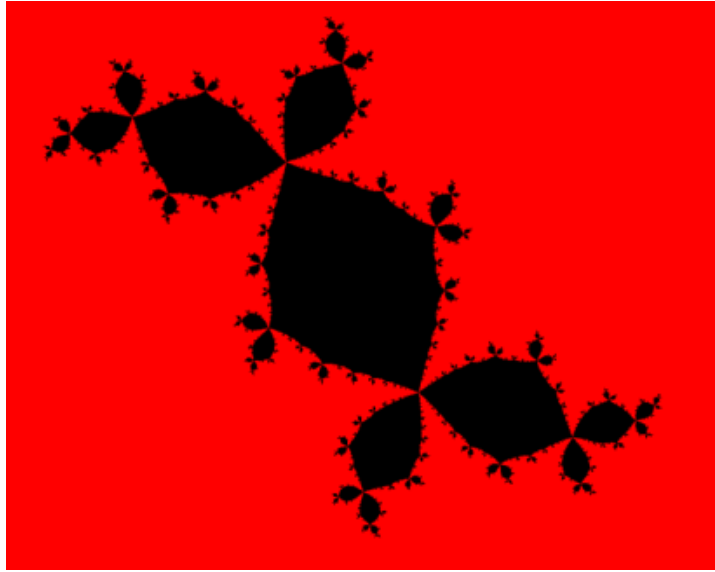


Figura 3.2: Conejo de Douady para $c = -1,122561 + 0,744862i$.

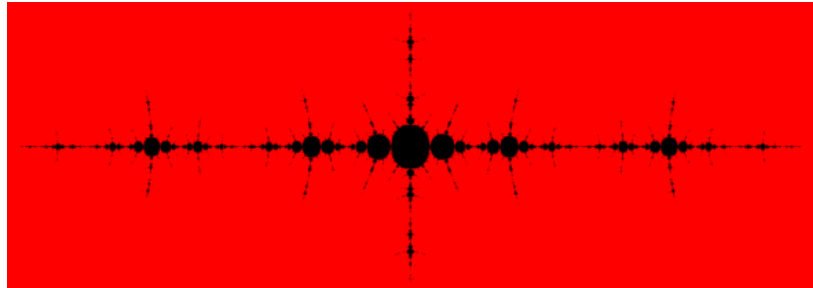


Figura 3.4: Conjunto de Julia lleno para $c = -1,375$.

Teorema 3.2.1. (Fatou, 1919) *Sea P un polinomio. El conjunto K_P es conexo si y sólo si la órbita de cada punto crítico es acotada.*

Un polinomio cuadrático P_c solo tiene como punto crítico al cero, por lo cual, el teorema 3.2.1 establece que el conjunto de Julia de P_c ($= J_c$) es conexo si y sólo si la órbita de cero es acotada. Más aún, el conjunto J_c es un conjunto de Cantor si y sólo si la órbita de cero converge a infinito.

Enseguida enlistamos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y de Fatou para funciones racionales $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, ellas pueden ser verificadas en [4].

Propiedades:

1. El conjunto J_R perfecto y diferente del vacío.
2. Los conjuntos J_R y F_R son completamente invariantes.
3. Si f denota la k -ésima iterada de R para alguna $k \in \mathbb{N}$, es decir, $f = R^k$, entonces $J_R = J_f = J_{R^k}$ y $F_R = F_f = F_{R^k}$.
4. Si $z \in J_R$, entonces el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z)$ es denso en J_R .
5. Sea z un punto periódico de periodo k de R .
 - 5.1. Si z es atractor, entonces $z \in F_R$.
 - 5.2. Si z es repulsor, entonces $z \in J_R$.
6. Los puntos periódicos repulsores de R forman un conjunto denso en J_R , es decir, $J_R = \overline{\{\text{puntos periódicos repulsores de } R\}}$

Teorema 3.2.2. *El conjunto de Julia lleno de un polinomio cuadrático P_c está contenido en el disco de radio*

$$r = \max\{|c|, 2\}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $|z| \geq r$. Luego observese que $|z^2| = |P_c(z) - c| \leq |P_c(z)| + |c|$. Más aún, con unos cálculos tenemos que $|P_c(z)| \geq |z^2| - |c| \geq 2|z|$. Luego por inducción se tiene que,

$$|P_c^n(z)| \geq 2^n |z|$$

lo cual implica que $P_c^n(z) \rightarrow \infty$. Por lo tanto $z \notin K_P$ y se tiene la aserción. \square

Como consecuencia inmediata del teorema 3.2.2 se tiene que J_{P_c} es acotado. Además, como el conjunto de Fatou F_c es abierto se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2.1. *El conjunto de Julia de un polinomio cuadrático es compacto.*

3.3. Conjunto de Mandelbrot

Después de Julia y Fatou (alrededor de 60 años más tarde) con la llegada de los ordenadores, el matemático Benoît Mandelbrot (1924 – 2010) que trabajaba en los años 70's para IBM, en el Centro de Investigaciones Thomas B. Watson, en Nueva York, retomó los trabajos de dichos matemáticos y de esta manera se habló por primera vez del concepto *fractal*. También dio las primeras imágenes del conjunto que llevaría su nombre, conjunto de Mandelbrot. Años más tarde Shishikura demuestra que la frontera de dicho conjunto tiene dimensión de Hausdorff igual a 2, lo cual hace replantearse la definición de fractal, ella establece que un conjunto es fractal si es autosimilar y tiene dimensión de Hausdorff menor a su dimensión topológica.

Consideremos los polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$ y por simplicidad denotemos a su conjunto de Julia asociado por J_c .

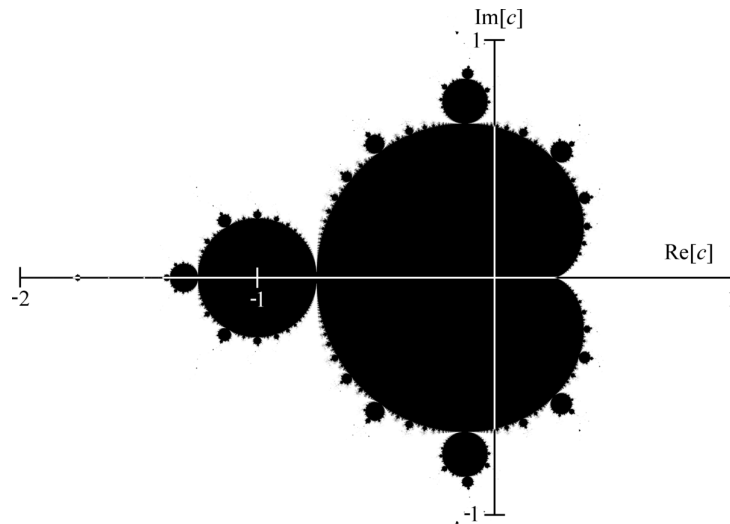


Figura 3.6: Conjunto de Mandelbrot.

Definición 3.3.1. *Definimos al conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} como,*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \text{la órbita } \mathcal{O}_c(0) \text{ es acotada}\}.$$

Notemos que las propiedades de los conjuntos \mathcal{M} y J_c están estrechamente relacionadas gracias al siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. *Si $c \notin \mathcal{M}$, entonces J_c es un conjunto de Cantor. Si $c \in \mathcal{M}$, entonces J_c es un conjunto conexo.*

El resultado anterior establece de forma intuitiva que si la órbita del cero se escapa a infinito el conjunto de Julia J_c no puede partirse en un conjunto contable de componentes, es más, sus componentes forman un conjunto de Cantor, cuando c no pertenece a \mathcal{M} .

Un polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 + c$, con c en \mathcal{M} es llamado **hiperbólico** si éste tiene una órbita periódica atractora o superatractora en el plano complejo \mathbb{C} . Sea \mathcal{HP} el conjunto de todos los parámetros c para los cuales P_c es hiperbólico.

La importancia de demostrar la conexidad local del conjunto \mathcal{M} yace en querer probar que el conjunto \mathcal{HP} es un conjunto abierto y denso en \mathcal{M} , puesto que Douady y Hubbard probaron que la conjetura MLC (Mandelbrot Localmente Conexa) implica la conjetura del conjunto \mathcal{HP} , es decir que \mathcal{HP} es abierto y denso en \mathcal{M} .

El siguiente ejemplo muestra que el interior de la cardioide principal es una componente hiperbólica. Es decir, que los parámetros c en dicha componente corresponden a polinomios cuadráticos hiperbólicos.

Ejemplo 3.3.1. (La cardioide principal) *Sea $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático, el cual sabemos que tiene dos puntos fijos, digamos α y β en \mathbb{C} , los cuales son soluciones de la ecuación*

$$z^2 - z + c = 0.$$

Por las fórmulas de Vieta se cumple que

$$\alpha + \beta = 1 \text{ y } \alpha\beta = c.$$

La relación $P'_c(\alpha) + P'_c(\beta) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2$, nos dice que α y β no pueden ser ambos atractores.

Sin pérdida de generalidad supongamos que α es un punto fijo atractor, es decir, $|2\alpha| = |P'_c(\alpha)| < 1$.

Por otra parte, tenemos que $c = \alpha - \alpha^2$. Así que el conjunto de parámetros c son la imagen del conjunto $\{\alpha : |\alpha| < \frac{1}{2}\}$ bajo la transformación $F(z) = z - z^2$. Esta transformación es la composición de tres transformaciones

$$F(z) = f(g(h(z))),$$

donde $h(z) = z - \frac{1}{2}$, $g(z) = z^2$ y $f(z) = \frac{1}{4} - z$.

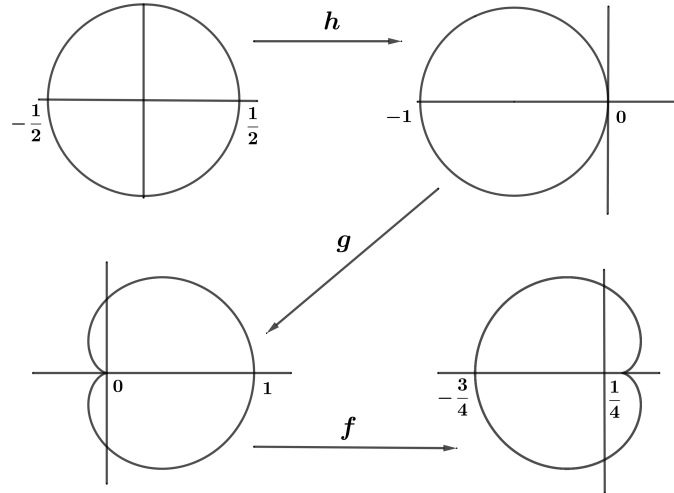


Figura 3.7: Construcción de la cardioide principal.

Note que el ejemplo 3.3.1 muestra que si un polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 + c$ tiene dos puntos fijos repulsivos, entonces el parámetro c no pertenece a la cerradura de la cardioide principal.

Por último enunciamos algunas propiedades topológicas importantes sobre el conjunto de Mandelbrot.

Teorema 3.3.2. *El conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} está contenido en el disco*

$$\overline{D_2(0)} = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}.$$

Teorema 3.3.3. (Douady-Hubbard, 1982) *El conjunto \mathcal{M} es conexo y compacto. Además, $\mathbb{C} - \mathcal{M}$ es conexo.*

Teorema 3.3.4. (Shishikura, 1992) *La frontera del conjunto de Mandelbrot $\partial\mathcal{M}$ tiene dimensión de Hausdorff dos.*

3.4. Aplicaciones de tipo cuadrático

En esta sección describimos la generalización de polinomios cuadráticos, que son conocidos como aplicaciones de tipo cuadrático (quadratic-like map). Douady y Hubbard generalizaron el concepto de función polinomial de la siguiente forma.

Definición 3.4.1. *Una aplicación de tipo polinomial es una tripleta (U, V, f) donde U y V son discos topológicos con $\overline{U} \subset V$ y $f : U \rightarrow V$ es una cubriente*

ramificada, propia de grado d y holomorfa. Cabe aclarar que por una función propia se entiende que $f^{-1}(K)$ es compacto para todo subconjunto $K \subset U$ compacto.

Como lo hemos dicho Douady y Hubbard estudiaron por primera vez las aplicaciones de tipo cuadrático y su definición fue inspirada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4.1. Sea $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ un disco en el plano complejo \mathbb{C} y sea $P_c(z) = z^2 + c$. Para r suficientemente grande, si $U = P_c^{-1}(V)$, note que U es un dominio simplemente conexo, y $P_c : U \rightarrow V$ es una cubriente ramificada de grado 2 holomorfa.

En el caso cuando $d = 2$, serán llamadas aplicaciones de tipo cuadrático. Si (U, V, f) es una aplicación de tipo cuadrático definimos al conjunto de Julia lleno como el conjunto,

$$K_f = \{z : f^n(z) \in U, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

y su frontera es el conjunto de Julia J_f .

El siguiente resultado es muy conocido en la literatura de dinámica holomorfa.

Teorema 3.4.1. Si f es una aplicación de tipo cuadrático, entonces $K_f = J_f$ es un conjunto de Cantor si el punto crítico de f no está en K_f . Por otra parte J_f es conexo si y sólo si el punto crítico de f pertenece a K_f .

Si sustituimos en los teoremas de Koenigs y de Böttcher al polinomio cuadrático por una aplicación de tipo cuadrático, los teoremas siguen siendo válidos, para ello se puede revisar la página 181 de [7].

Ejemplo 3.4.2. Sea $\widehat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann y sea $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ con $r < 1$. Si P_c es un polinomio cuadrático, entonces $U = P_c^{-1}(\mathbb{D}_r)$ es un dominio simplemente conexo y además $\overline{U} \subset \mathbb{D}_r$. Por lo tanto (U, \mathbb{D}_r, P_c) es una aplicación de tipo cuadrático.

Note que en el ejemplo anterior si $c = 0$, $(\mathbb{D}_r, \mathbb{D}_{r^2}, P_0)$ es una aplicación de tipo cuadrático para $r > 1$. Además, $K_0 = \overline{\mathbb{D}}$ e ∞ es un punto fijo súperatractor de P_c . Por lo tanto, por el teorema de Böttcher existe ϕ_1 (biholomorfismo que conjuga analíticamente P_c con P_0) definido en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ tal que,

$$\phi_1^{-1} \circ P_c \circ \phi_1(z) = z^2,$$

en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ con $\phi_1(\infty) = \infty$ y $\phi_1'(\infty) = 1$.

3.5. Clases híbridas de aplicaciones de tipo cuadrático

Se dice que dos aplicaciones de tipo cuadrático, digamos $f = (U, V, f)$ y $g = (U', V', g)$, son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo ϕ de una vecindad $K_f \subset X \subset U$ a una vecindad $K_g \subset Y \subset U'$ cumpliendo que,

$$\phi \circ f = g \circ \phi,$$

en X , donde K_f y K_g son los conjuntos de Julia llenos de f y g , respectivamente. Más aún, si ϕ es una aplicación cuasiconforme diremos que ellos son cuasiconformemente conjugados.

Otra clase importante es la clase híbrida, la cual se define de la siguiente manera. Si en la definición anterior podemos elegir a ϕ de tal forma que $\phi_{\bar{z}} = 0$ casi donde quiera en K_f , entonces las aplicaciones de tipo cuadrático f y g son híbridamente equivalentes. Observemos que esto establece que ϕ es cuasiconforme en el complemento de K_f y holomorfa en K_f . Al conjunto,

$$\mathcal{H}(f) = \{g : g \text{ es híbridamente equivalente para } f\},$$

es llamada la clase híbrida de f .

Teorema 3.5.1. *Si (U, V, f) es una aplicación de tipo cuadrático de tal forma que K_f es conexo, entonces existe un único polinomio cuadrático $P_{c_f}(z) = z^2 + c_f$ en $\mathcal{H}(f)$.*

La importancia del teorema 3.5.1 yace en que las propiedades de las aplicaciones de tipo cuadrático son invariantes bajo conjugación cuasiconforme. Por lo cual podemos usar polinomios cuadráticos para nuestro estudio en lugar de aplicaciones de tipo cuadrático y viceversa. Una demostración del teorema anterior se encuentra en la página 192 de [7].

3.6. Equipotenciales y rayos externos

Sea $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático con conjunto de Julia lleno K_c conexo. Sea ϕ (como en la sección 3.4) el biholomorfismo que conjuga analíticamente a P_c con P_0 . Luego, sea $B_1(\infty) = \phi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ y $B_n(\infty) = P_c^{-(n-1)}(B_1(\infty))$.

Como K_c es conexo, entonces,

$$P_c : B_n(\infty) \cap \mathbb{C} \rightarrow B_{n-1}(\infty) \cap \mathbb{C},$$

es una cubriente ramificada de grado 2.

De manera inductiva podemos definir el difeomorfismo holomorfo ϕ_n en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}_{r^{\frac{1}{2^n}}}$ tal que,

$$\phi_n^{-1} \circ P_c \circ \phi_n(z) = z^2$$

para toda z en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, tal que

$$\phi_\infty^{-1} \circ P_c \circ \phi_\infty(z) = z^2$$

para toda z en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Observación 3.6.1. *Note que $B_c(\infty) = \phi_\infty(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ es la cuenca de atracción del ∞ para P_c y $K_c = \widehat{\mathbb{C}} \setminus B_c(\infty)$. Más aún, para cada $r > 1$ y para $U_r = \phi_\infty(\mathbb{D}_r)$, (U_r, U_{r^2}, P_c) es una aplicación de tipo cuadrático y su conjunto de Julia lleno siempre es K_c .*

Ahora tomemos un círculo de radio $R > 1$, es decir, sea $S_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ y definamos a los equipotenciales como el círculo topológico

$$E_R = \phi_\infty(S_R).$$

Además, note que se cumple la siguiente igualdad

$$P_c(E_c) = S_{R^2}.$$

Por otra parte, la curva,

$$r_\theta = \phi_\infty(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \arg(z) = \theta\}),$$

para $0 \leq \theta < 2\pi$, es llamada un rayo externo de P_c . Más aún, se tiene que,

$$P_c(r_\theta) = r_{2\theta}.$$

3.6.1. Otra construcción de los rayos externos y equipotenciales

Consideremos a K_c conexo, el cual es el conjunto de Julia lleno asociado al polinomio cuadrático P_c . Entonces existe un isomorfismo (el isomorfismo de Böttcher),

$$\phi : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

el cual conjuga P_c con P_0 , donde $\frac{\phi(z)}{z} \rightarrow 1$, cuando $z \rightarrow \infty$.

Cabe aclarar que en el caso de polinomios cuadráticos (los polinomios que estamos considerando) la aplicación de Riemann coincide con el isomorfismo de Böttcher.

Ahora consideremos la función de Green $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es continua y está definida de la siguiente forma,

$$G(z) = \begin{cases} \log |\phi(z)| = \lim \frac{1}{2^n} \log |P_c^n(z)| > 0 & \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus K_c \\ 0 & \text{para } z \in K_c. \end{cases}$$

Al igual que en la construcción anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} G(P_c(z)) &= \lim \frac{1}{2^n} \log |P_c^n(P_c(z))| = \lim \frac{1}{2^n} \log |P_c^{n+1}(z)| \\ &= 2 \lim \frac{1}{2^{n+1}} \log |P_c^{n+1}(z)| = 2G(z). \end{aligned}$$

Usando la función de Green definamos a las curvas equipotenciales (o simplemente equipotenciales) como,

$$G^{-1}(k) = \{z : G(z) = k > 0\}.$$

Dos observaciones importantes:

1. Los equipotenciales son curvas alrededor de K_c , puesto que estamos trabajando en el plano dinámico.
2. P_c manda $G^{-1}(k)$ a $G^{-1}(2k)$ de manera uno a uno.

Las trayectorias,

$$\{z : \arg(\phi(z)) = \text{constante}\},$$

ortogonales a los equipotenciales son llamados rayos externos (dinámicos) r_θ , donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Siguiendo con nuestro trabajo, un rayo externo r_θ aterriza en K_c si r_θ tiene un solo punto límite en K_c . También, r_θ es periódico con periodo q si $r_\theta \cap P_c^i(r_\theta)$ es igual al vacío para toda $1 \leq i < m$ pero $P_c^m(r_\theta) = r_\theta$.

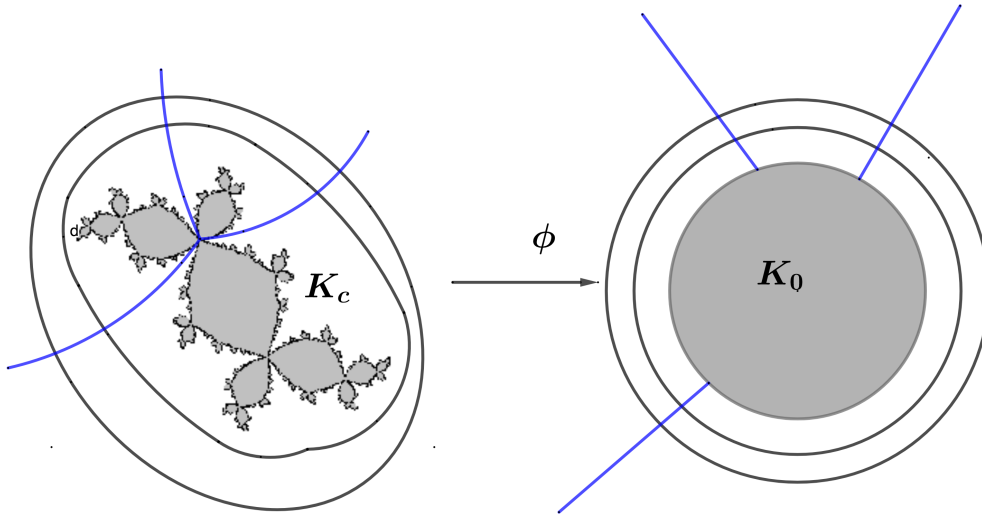


Figura 3.7: Bosquejo de la construcción de los rayos externos y equipotenciales..

Teorema 3.6.1. (Douady-Yoccoz) *Considera a $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático con K_c conexo. Entonces cada punto periódico repulsor de P_c es un punto de aterrizaje de un número finito de rayos externos con algún periodo en común.*

El objetivo principal de esta tesis es mostrar la conexidad local de algunos conjuntos de Julia. El teorema de Carathéodory ejemplifica la importancia de este resultado.

Teorema 3.6.2. (Carathéodory) *Sea h la aplicación de Riemann de \mathbb{D} sobre un dominio simplemente conexo Ω . Entonces h puede ser extendida de manera continua a S^1 si y solo si la frontera $\partial\Omega$ es localmente conexa.*

Si como lo establece Carathéodory, ϕ_∞ puede ser extendido continuamente a S^1 , entonces tenemos una única función continua $H : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{Int}(K_c)$ tal que $H|_{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}} = \phi_\infty$.

Usando H , podemos definir una relación de equivalencia en S^1 como sigue: $z_1 \sim z_2$ si y solo si $H(z_1) = H(z_2)$. Sea $[z]$ la clase de equivalencia de z . Entonces $\tilde{P}_0([z]) = [P_0(z)]$ define una función en el espacio cociente $\chi = S^1 / \sim$,

ya que $z_1^2 \sim z_2^2$ si $z_1 \sim z_2$. El sistema dinámico (\tilde{P}, χ) es topológicamente conjugado a (P_c, J_c) por $\tilde{H}([z]) = H(z)$.

3.7. El rompecabezas de Yoccoz

El rompecabezas de Yoccoz es una herramienta muy importante para demostrar la conexidad local de algunos conjuntos de Julia. Dicho rompecabezas nos ayuda a dar explícitamente un sistema de vecindades anidadas, las cuales en el capítulo 5 demostraremos que se intersectan en un único punto.

Sea $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático con conjunto de Julia lleno K_c conexo.

Note que P_c fija al rayo externo r_0 . Además, este rayo r_0 aterriza en un punto fijo repulsor o parabólico β de P_c . Por el teorema 3.6.1 los rayos externos que aterrizan en β deben ser un número finito y más aún con el mismo periodo. Por tanto r_0 es el único rayo que aterriza en β . Al igual note que β no separa a K_c , es decir, $K_c \setminus \{\beta\}$ sigue siendo conexo.

Sea $\alpha \neq \beta$ el otro punto fijo de P_c . Si α es un punto fijo atractor o superatractor, entonces $J_c = K_c \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n^{-n}(D(\alpha))$ para un disco pequeño centrado en α . El conjunto de Julia es una curva de Jordan y por el teorema de Carathéodory tendríamos la conexidad local de J_c . Por lo tanto supongamos que α es un punto fijo repulsor. Entonces por el teorema 3.6.1 existen al menos dos rayos externos periódicos aterrizando en α .

Ahora, estamos listos para hacer la construcción del rompecabezas de Yoccoz, para ello consideremos que α y β son repulsores. Sea $R_0(\alpha)$ la unión de los rayos externos aterrizando en α . Supongamos que son q rayos los rayos aterrizando en α . El conjunto $R_0(\alpha)$ corta al plano complejo \mathbb{C} al igual que a K_c en q dominios conexos, es decir, $K_c \setminus \{\alpha\}$ es desconexo con exactamente q componentes.

Luego, sea E_r un equipotencial de P_c . Note que la cerradura de la región acotada por E_r es cortada en q componentes por $R_0(\alpha)$. Estos componentes son las piezas de profundidad cero del rompecabezas de Yoccoz y las denotaremos como

$$\mathcal{P}_0(c_i),$$

las cuales contienen a los puntos postcríticos $c_i = P^i(0)$.

Observación 3.7.1. *Sea U_r el dominio acotado por E_r . Entonces $(U_{\sqrt{r}}, U_r, P_c)$ es una aplicación de tipo cuadrático.*

Note que las piezas de profundidad 0 son exactamente q ,

$$\mathcal{P}_0^1, \mathcal{P}_0^2, \dots, \mathcal{P}_0^q.$$

Además tenemos que $P_c^{-1}(\mathcal{P}_0^i) = \mathcal{P}_1^j$ con $1 \leq i \leq q$, donde \mathcal{P}_1^j es una pieza del rompecabezas de profundidad 1. Estas piezas son exactamente $2q-1$. De manera inductiva podemos definir las piezas del rompecabezas de profundidad $d+1$ como,

$$P_c^{-1}(\mathcal{P}_d^i) = \mathcal{P}_{d+1}^j.$$

El **rompecabezas de Yoccoz** consiste de la intersección de las piezas del rompecabezas de profundidad 0 hasta ∞ .

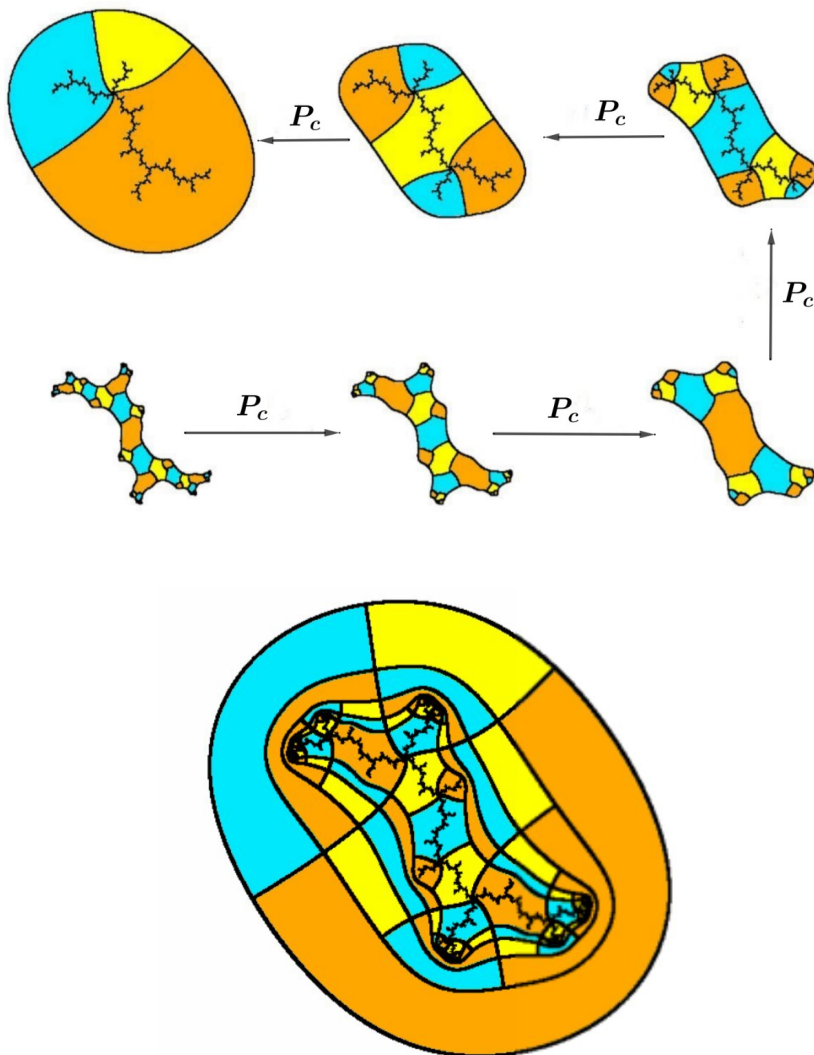


Figura 3.8: Ilustración de la construcción del rompecabezas de Yoccoz. Aquí tomamos el ejemplo con 3 rayos externos aterrizando en el punto fijo α .

Capítulo 4

Renormalización de polinomios cuadráticos

La noción de renormalización compleja fue introducida por Douady y Hubbard para explicar la aparición de las pequeñas copias del conjunto de Mandelbrot observadas por computadora.

Diremos que un polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 + c$ es **renormalizable** si existe un disco topológico cerrado Δ_0 alrededor del punto crítico 0, y un entero $p \geq 2$ (llamado periodo de renormalización), cumpliendo las siguientes cuatro propiedades.

- 1.- P_c manda a Δ_0 a $\Delta_1 = P_c(\Delta_0)$, y P_c restringido a Δ_0 es una cubriente ramificada de grado dos (ver la definición 4.0.1).
- 2.- Las siguientes funciones son isomorfismos

$$\Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \Delta_p,$$

donde $\Delta_i = P_c^i(\Delta_0)$. En particular, el punto crítico debe ser disjunto de $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_{p-1}$.

- 3.- $\Delta_0 \subset \text{Int}(\Delta_p)$.
- 4.- La órbita completa del punto crítico bajo el polinomio P_c^p debe estar contenida en el disco original Δ_0 .

Definición 4.0.1. *La aplicación $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies de Riemann, es un cubriente ramificado de grado d , si cada $y \in S_2$ tiene una vecindad V tal que*

i) $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \leq d} (U_i)$, donde U_i son vecindades disjuntas del correspondiente punto $x_i \in S_1$ tal que $f(x_i) = y$, además

ii) existen homeomorfismos

$$\varphi : (U_{i,x_i}) \rightarrow \mathbb{D}, \text{ y } \psi_i : (V, y) \rightarrow \mathbb{D},$$

$$\text{tal que } \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}(z) = z^{k_i}.$$

Nota 4.0.1. Los Δ_i , con $i = 0, \dots, p$, son discos topológicos. Cada Δ_i es homeomorfo a \mathbb{D} por el teorema de la aplicación de Riemann. Por lo tanto, los Δ_i son superficies de Riemann hiperbólicas.

Definición 4.0.2. El pequeño conjunto de Julia $K_c = K(P_c^p|_{\Delta_0})$ se define como el conjunto compacto y conexo de puntos cuya órbita permanece en Δ_0 bajo todas las iteraciones de P_c^p . Este es un subconjunto propio del conjunto de Julia lleno del polinomio cuadrático original P_c .

Si anexamos la siguiente condición a la definición de renormalización, diremos que P_c es **simplemente renormalizable** de periodo p .

- 5.- Cada intersección $P_c^i(K_p) \cap P_c^j(K_p)$ con $0 \leq i < j < p$ es vacía, o consiste de un solo punto que no desconecta a ninguno de estos dos conjuntos.

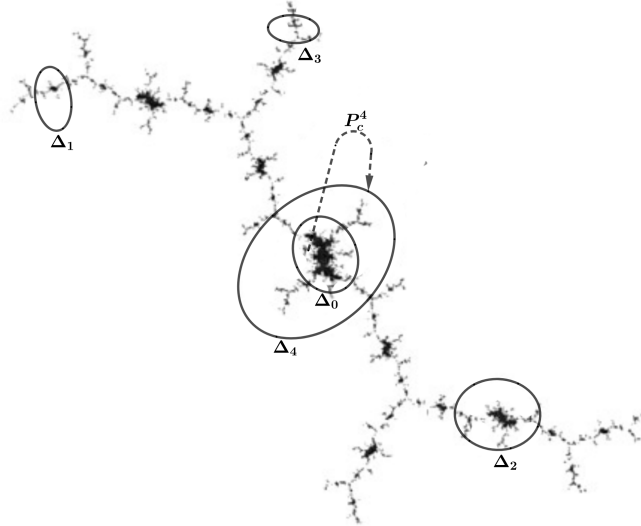


Figura 4.1: Ejemplo de renormalización, con periodo de renormalización $p = 4$.

4.1. Renormalización de aplicaciones de tipo cuadrático

Considerando un polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 + c$ con conjunto de Julia J_c , sea U un dominio acotado por un equipotencial de P_c y sea $V = P_c(U)$. Entonces $P_c : U \rightarrow V$ es una aplicación de tipo cuadrático cuyo conjunto de Julia es J_c .

Cualquier aplicación de tipo cuadrático con conjunto de Julia conexo es híbridamente equivalente a un único polinomio cuadrático. Se puede consultar [DH2]. Esto por ejemplo nos permite considerar a 0 como el único punto de ramificación de cualquier aplicación de tipo cuadrático con conjunto de Julia conexo.

En esta sección seguimos la introducción del artículo *Ininitely renormalizable quadratic polynomials* del autor Yuping Jiang. La idea es dar la definición de renormalización simple en aplicaciones de tipo cuadrático para subrayar su relación con la simple renormalización de polinomios cuadráticos complejos.

Definición 4.1.1. *Una aplicación de tipo cuadrático $f : U \rightarrow V$ se dice que es 1-renormalizable si cumple las siguientes propiedades.*

- 1.- *Si existe una vecindad $U_1 \subset U$, la cual contiene al 0.*
- 2.- *Si existe un entero $n_1 > 1$ cumpliendo que $f_1 = f^{n_1} : U_1 \rightarrow V_1 \subset V$ es una aplicación de tipo cuadrático con conjunto de Julia J_{f_1} conexo.*

La elección de (U_1, V_1) es llamada la n_1 -renormalización de (U, V) .

Definición 4.1.2. *Una aplicación de tipo cuadrático $f : U \rightarrow V$ se dice que es 2-renormalizable si cumple las siguientes propiedades.*

- 1.- *Si f es 1-renormalizable.*
- 2.- *Si existe una m_1 -renormalización (U_1, V_1) de (U, V) tal que*

$$f_1 = f^{m_1} : U_1 \rightarrow V_1$$

es 1-renormalizable.

Seguindo la idea de la definición 4.1.2 podemos definir de manera inductiva cuando una aplicación de tipo cuadrático es k -veces renormalizable.

Definición 4.1.3. Una aplicación de tipo cuadrático $f : U \rightarrow V$ se dice que es k -renormalizable si cumple las siguientes propiedades.

1.- Si f es 1-renormalizable.

2.- Si cada uno de los elementos del conjunto

$$\{f_i = f^{m_i} : U_i \rightarrow V_i\}_{i=1}^k$$

es m_i -renormalizable, donde los m_i son enteros cumpliendo que

$$m_1 < m_2 \cdots < m_k.$$

Para cualquier n_1 -renormalización (U_1, V_1) de una aplicación de tipo cuadrático $f : U \rightarrow V$, supongamos que $f_1 = f^{n_1} : U_1 \rightarrow V_1$ tiene dos puntos fijos repulsores (digamos α y β) en su conjunto de Julia lleno K_{f_1} . Se sabe que $K_{f_1} \setminus \{\beta\}$ es conexo, pero $K_{f_1} \setminus \{\alpha\}$ es desconexo. Utilizando esto MacMullen considero diferentes tipos de renormalización para la teoría de renormalización de aplicaciones de tipo cuadrático.

Nota 4.1.1. La desconexidad del conjunto $K_{f_1} \setminus \{\alpha\}$ es análoga a la de los polinomios cuadráticos complejos que estamos analizando. La imagen 5.2 ilustra esta situación.

Definición 4.1.4. Supongamos que f_1 tiene dos puntos fijos repulsores (digamos α y β) en su conjunto de Julia lleno K_{f_1} .

Sea $K(i) = f_c^i(K_{f_1})$, con $1 \leq i < n'$. Una n' -renormalización es

- α -tipo si $K(i) \cap K(j) = \{\alpha\}$ para algún $i \neq j$, $0 \leq i, j < n'$;
- β -tipo si $K(i) \cap K(j) = \{\beta\}$ para algún $i \neq j$, $0 \leq i, j < n'$;
- tipo disjunto si $K(i) \cap K(j) = \{\emptyset\}$ para todo $i \neq j$, $0 \leq i, j < n'$.

Los α -tipo y los de tipo disjunto también son conocidos como simplemente renormalizables.

El artículo de Yuping Jiang [7] demuestra la conexidad local para un conjunto de Julia de un polinomio cuadrático (aplicación de tipo cuadrático) infinitamente renormalizable con límite complejo (ver definición 4.1.5). Este se puede consultar como material extra para entender más sobre la conexidad local de algunos conjuntos de Julia.

Otro resultado importante que da Yuping Jiang en su artículo [7] está relacionado con el módulo de anillos.

Teorema 4.1.1. *Sea $f : U \rightarrow V$ una aplicación de tipo cuadrático. Considera cualquier n_1 -renormalización (U_1, V_1) . Entonces*

$$\text{mod}(U \setminus \overline{U_1}) \geq \frac{1}{2} \text{mod}(V \setminus \overline{U}).$$

Definición 4.1.5. *Se dice que un polinomio cuadrático infinitamente renormalizable $P_c(z) = z^2 + c$ tiene límite complejo (complex bounds) si existe una constante $\lambda > 0$ y una infinita sucesión de renormalizaciones simples $\{f_{i_s} = f^{m_{i_s}} : U_{i_s} \rightarrow V_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$ tal que el módulo $\text{mod}(V_{i_s} \setminus \overline{U_{i_s}})$ es más grande que λ para toda $s \geq 1$.*

Capítulo 5

Demostración del teorema de Yoccoz

Aquí demostraremos el teorema de Yoccoz (Teorema 5.0.1) siguiendo las notas de John Milnor. En esta demostración John Milnor agregó la condición extra de que el cero no pertenece a la preórbita del punto fijo repulsor α . Esto en realidad no es una restricción, porque ya ha sido demostrada la conexidad local por otros métodos para este caso. Se puede revisar [3].

Supongamos que los puntos fijos, digamos α y β , del polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 + c$ son repulsores. Sin pérdida de generalidad, β será el punto donde aterriza el rayo externo con ángulo cero. Por ende, α será el punto fijo donde aterrizan q rayos externos, los cuales deben tener ángulo racional y con periodo común (Teorema 3.6.1).

Teorema 5.0.1. (Yoccoz) *Sea $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático tal que,*

1. *su conjunto de Julia asociado J_c es conexo,*
2. *ambos puntos fijos (α y β) son repulsores, y*
3. *P_c es no simplemente renormalizable,*

entonces, J_c es localmente conexo.

5.1. ¿Qué nos dicen las premisas del Teorema de Yoccoz?

Las condiciones del teorema de Yoccoz nos indican donde debe estar c en el espacio de parámetros. En primera instancia c no tiene porque pertenecer

al conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . La condición 1 establece que $c \in \mathcal{M}$, de lo contrario J_c sería un cantor (ver teorema 3.3.1). La condición 2 establece que c no pertenece a la cerradura de la región acotada por la cardioide principal (ver ejemplo 3.3.1). La condición 3 establece que c no pertenece a las pequeñas copias del conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} (ver figura 5.1).

Como ya lo enunciamos antes tendremos una hipótesis extra. Supondremos que 0 no es preimagen de α .

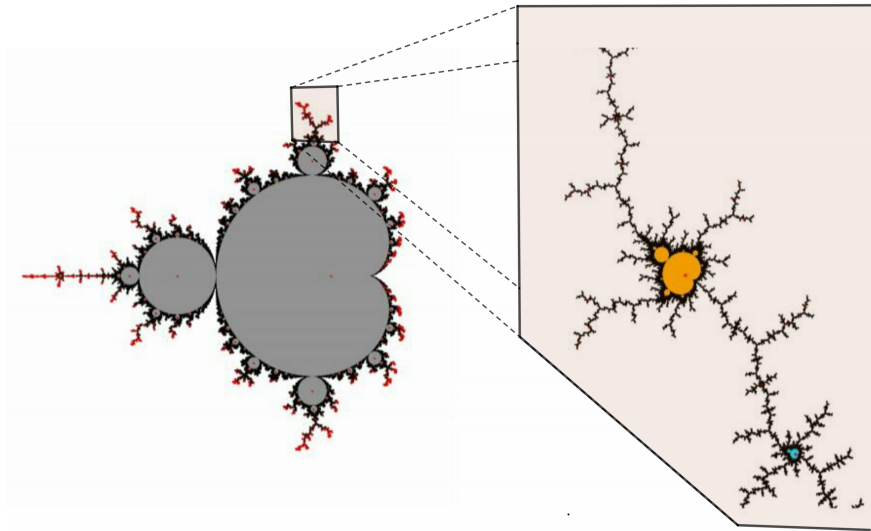


Figura 5.1: Pequeñas copias del conjunto de Mandelbrot.

5.2. Problema principal

El objetivo principal, ya enunciado, es demostrar la conexidad de los conjuntos de Julia J_c . En general un conjunto en el plano complejo \mathbb{C} es localmente conexo si para toda vecindad abierta de un punto, $z \in U$, existe una vecindad abierta conexa V de z contenida en U , es decir, $z \in V \subset U$. Para demostrar la conexidad local de J_c construiremos una sucesión de vecindades anidadas y demostraremos que dichas vecindades se intersectan en un solo punto.

Consideremos la órbita crítica, es decir, el conjunto $\{c_0, c_1 = P_c(c_0), c_2 = P_c(c_1), \dots\}$. Recuerde que denotamos a las piezas de profundidad cero del rompecabezas de Yoccoz como $\mathcal{P}_0(c_i)$, para $i = 0, \dots, q - 1$, y cada una de dichas piezas contiene al punto poscrítico $c_i = P_c^i(0)$. Sabiendo esto podemos construir de manera inductiva las demás piezas. Si $\mathcal{P}_d^1, \mathcal{P}_d^2, \dots, \mathcal{P}_d^m$ son las piezas del rompecabezas de Yoccoz de profundidad d , entonces las componentes conexas del conjunto $P^{-1}(\mathcal{P}_d^i)$ son las piezas del rompecabezas de Yoccoz de profundidad $d + 1$, ver figura 5.2.

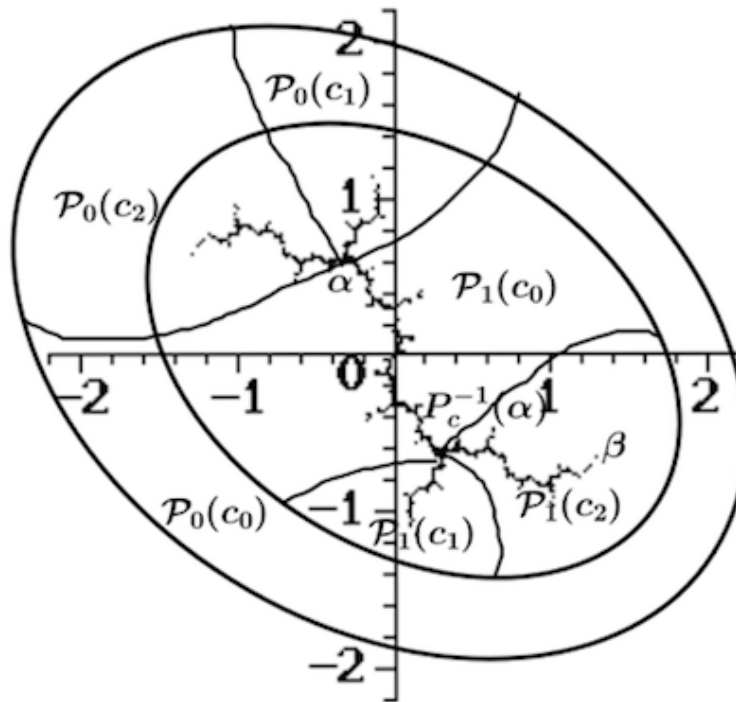


Figura 5.2: Rompecabezas de Yoccoz de profundidad 0 y 1, para el conjunto de Julia asociado al polinomio $P_i(z) = z^2 + i$.

Cabe destacar que los puntos de la preórbita de α ,

$$PO(\alpha) = \bigcup_{n \geq 0} P^{-n}(\alpha),$$

tendrán trato especial, pues pertenecen a más de una pieza del rompecabezas de la misma profundidad. Por ejemplo, α pertenece a las q piezas del rompecabezas de Yoccoz de profundidad cero. Por otra parte los puntos $z \in J_c \setminus PO(\alpha)$ pertenecen a una única sucesión de piezas del rompecabezas

de Yoccoz

$$\mathcal{P}_0(z) \supset \mathcal{P}_1(z) \supset \mathcal{P}_2(z) \supset \dots,$$

por tal motivo iniciamos nuestro análisis con este tipo de puntos.

La pregunta que tenemos que responder para demostrar la conexidad local del conjunto de Julia, nuestro problema principal, es: dada $z \in J_c \setminus PO(\alpha)$, ¿la intersección $\bigcap_d \mathcal{P}_d(z)$ consiste de exactamente solo el punto z ?

Branner y Hubbard modificaron dicho problema principal, transformandolo en un problema de suma de módulos. Note que si consideramos dos piezas de rompecabezas de profundidades consecutivas, digamos $\mathcal{P}_d(z) \supset \mathcal{P}_{d+1}(z)$, podemos definir un anillo como la diferencia de piezas en el sentido de conjuntos,

$$A_d(z) = \text{Int}(\mathcal{P}_d(z)) \setminus \mathcal{P}_{d+1}(z).$$

Teorema 5.2.1. Problema principal modificado (Branner-Hubbard)

Considerando cualquier punto $z \in J_c \setminus PO(\alpha)$, si se cumple que la suma de los módulos de los anillos es infinita, es decir, si

$$\sum_d \text{mod} A_d(z) = \infty,$$

entonces $\bigcap_d \mathcal{P}_d(z) = \{z\}$

Antes de continuar cabe aclarar que los módulos de anillos estan bien definidos cuando ellos no son degenerados. Todo anillo aquí definido en términos de las piezas de rompecabezas de Yoccoz es biholomorfamente equivalente a un anillo *normal*, el cual tiene como frontera a dos círculos. Los anillos biholomorfamente equivalentes tienen módulos iguales. En el caso de anillos degenerados definimos su módulo como cero. Un anillo degenerado es cuando las fronteras de dos piezas de rompecabezas de Yoccoz de profundidades continuas se intersectan, como ejemplo, el anillo

$$A_0(c_0) = \text{Int}(\mathcal{P}_0(c_0)) \setminus \mathcal{P}_1(c_0)$$

es degenerado como se puede observar en la figura 5.2.

5.3. El Tableau

Sea $\{\mathcal{P}_d(z_0)\}$, como en las secciones anteriores, el conjunto de piezas del rompecabezas de Yoccoz de profundidad d las cuales contienen a z_0 . Para poder comparar la sucesión $\{\mathcal{P}_d(z_0)\}$ (donde z_0 es un punto arbitrario en $J_c \setminus$

$PO(\alpha)$ con la sucesión de piezas críticas $\{\mathcal{P}_d(0)\}$, definimos la profundidad semicrítica de z_0 como,

$$S(z_0) = \begin{cases} d & \text{donde } d \text{ es el número más grande tal que } \mathcal{P}_d(z_0) = \mathcal{P}_d(0), \\ \infty & \text{si } \mathcal{P}_d(z_0) = \mathcal{P}_d(0) \text{ para toda profundidad } d, \\ -1 & \text{si } \mathcal{P}_d(z_0) \neq \mathcal{P}_d(0) \text{ para toda profundidad } d. \end{cases}$$

Note que a cada punto $z_0 \in J_c \setminus PO(\alpha)$ le podemos asociar la órbita $z_0 \mapsto P_c(z_0) = z_1 \mapsto P_{z_1} = z_2 \mapsto \dots$ y la sucesión de números $S(z_0), S(z_1), S(z_2), \dots$.

Definición 5.3.1. *El tableau asociado a la órbita z_0, z_1, z_2, \dots es un arreglo de columnas y filas. La primer fila está formada por la órbita de z_0 y la primer columna está formada por cada profundidad del rompecabezas de Yoccoz (iniciando desde la profundidad cero). Además vamos a dibujar una línea vertical solida hasta la profundidad d en la j -ésima columna cuando $d < S(j - 1)$, y una doble línea vertical cuando $d = S(j - 1)$.*

También se dibujan líneas diagonales punteadas apuntando al noreste. Si la longitud de una línea diagonal es m , significa que la pieza de rompecabezas $\mathcal{P}_d(z_{j-1})$ es enviada a $\mathcal{P}_{d-m}(z_{j-1+m})$ mediante el polinomio P_c^m , el cual es una función cubriente ramificada.

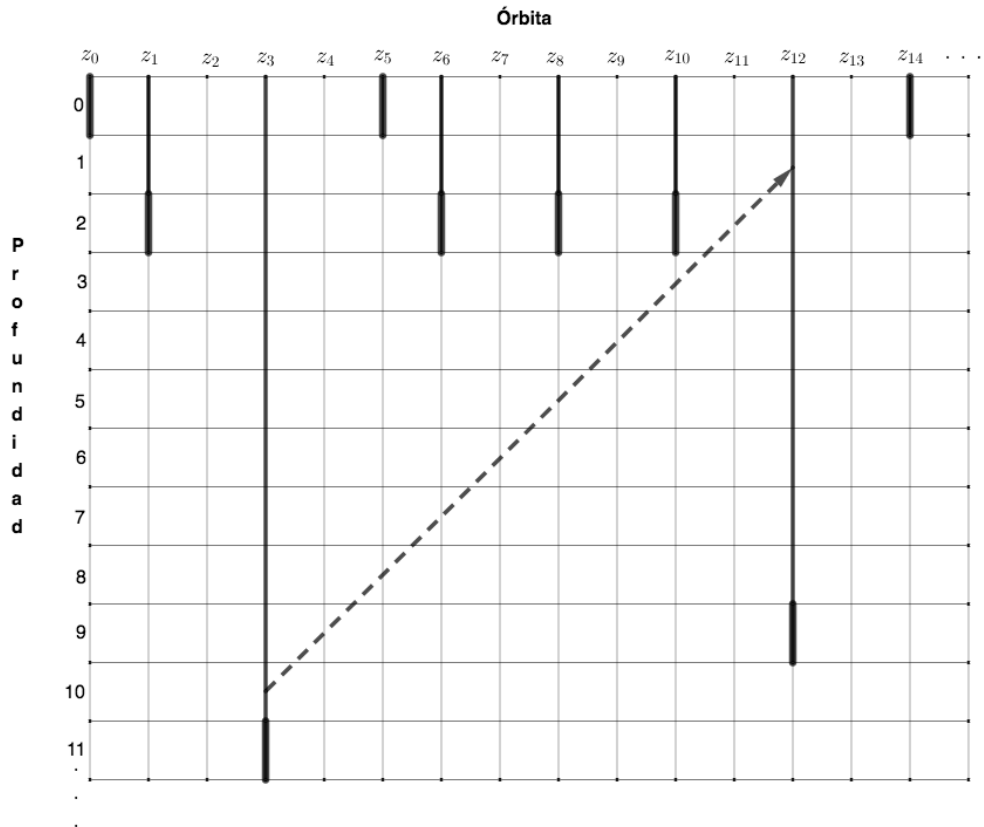


Figura 5.3: Tableau asociado a la órbita del punto $z_0 = 1$ para el polinomio cuadrático $P_c(z) = z^2 - 1.6$.

5.3.1. Clasificación de anillos

Consideremos una órbita $z_0, P_c(z_0) = z_1, P_c(z_1) = z_2, \dots$ en $PO(\alpha)$. Note que $P_c : \mathcal{P}_d(z_i) \rightarrow \mathcal{P}_{d-1}(z_{i+1})$ es un isomorfismo conforme cuando el punto crítico no está en $\mathcal{P}_d(z_i)$ y una cubierta ramificada de grado dos cuando el punto crítico está en $\mathcal{P}_d(z_i)$.

Podemos clasificar a los anillos que generamos mediante las piezas del rompecabezas de Yoccoz en tres casos de la siguiente manera.

Caso Crítico

Si $d < S(z_i)$, es decir, $0 \in \mathcal{P}_{d+1}(z_i)$ (lo cual esta representado con una línea en el tableau) entonces es claro que $A_d(z_i)$ coincide con $A_d(0)$. Este $A_d(z_i)$ va ser llamado anillo crítico.

Lema 5.3.1. *Sea $A_d(z_i)$ un anillo no degenerado,. Entonces $P_c : A_d(z_i) \rightarrow$*

$A_{d-1}(z_{i+1})$ es una cubriente ramificada de grado dos. Más aún,

$$\text{mod}(A_d(z_i)) = \frac{1}{2}A_{d-1}(z_{i+1}).$$

Caso No Crítico

Si $d > S(z_i)$, es decir, $0 \notin \mathcal{P}_d(z_i)$ (lo cual está representado con un espacio en blanco en el tableau). Entonces $P_c : A_d(z_i) \rightarrow A_{d-1}(z_{i+1})$ es un biholomorfismo, y

$$\text{mod}(A_d(z_i)) = A_{d-1}(z_{i+1}).$$

En este caso diremos que $A_d(z_i)$ es un anillo no crítico.

Caso Semicrítico

Si $d = S(z_i)$, es decir, $0 \in \mathcal{P}_d(z_i)$ (lo cual está representado con una doble línea en el tableau) diremos que $A_d(z_i)$ es anillo semicrítico.

Nota 5.3.1. De la definición del anillo semicrítico tenemos las siguientes propiedades.

- P_c transforma a $A_d(z_i)$ en toda la pieza de rompecabeza $P_{d-1}(z_{i+1})$.
- $A_d(z_i)$ es degenerado si y sólo si $A_{d-1}(z_{i+1})$ es degenerado.
- Si $A_d(z_i)$ es un anillo no degenerado, entonces es la unión de
 - 1.- una cubriente ramificada de grado dos de $A_{d-1}(z_{i+1})$, y
 - 2.- una copia conforme de $\mathcal{P}_d(z_{i+1})$.

Además,

$$\text{mod}(A_d(z_i)) > \frac{1}{2}A_{d-1}(z_{i+1}).$$

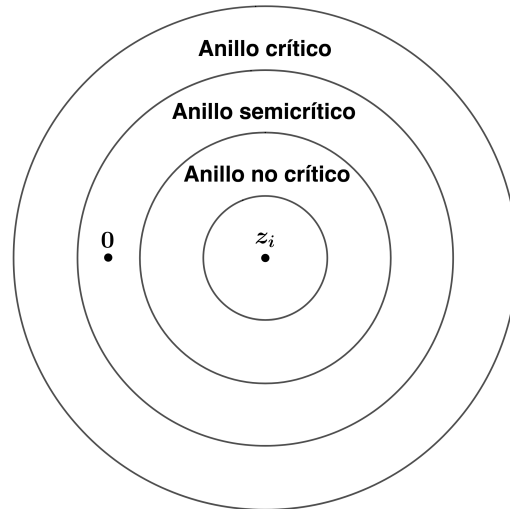


Figura 5.4: Bosquejo de los tres tipos de anillos. Caso crítico, semicrítico y no crítico.

Definición 5.3.2. *El anillo crítico $A_{d+k}(0)$ en el rompecabezas de Yoccoz va a ser llamado hijo del anillo crítico $A_d(0)$ si y sólo si $A_{d+k}(0)$ es una cubierta no ramificada de $A_d(0)$ bajo el polinomio P_c^k .*

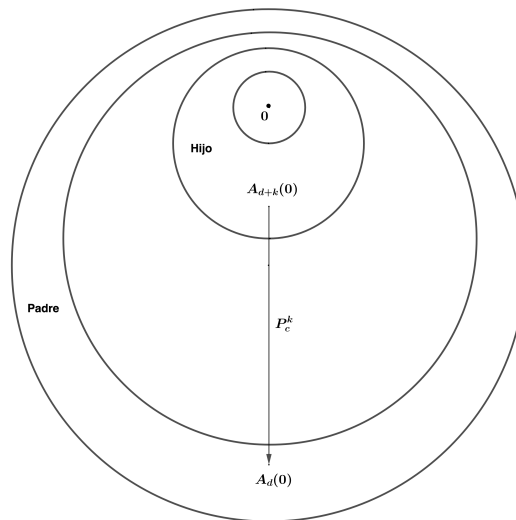


Figura 5.5: Representación de la definición de padre e hijo.

Observemos que el módulo de un hijo siempre es la mitad del módulo del padre, esto porque estamos en el caso crítico.

Nota 5.3.2. *Si localizamos en el tableau un anillo crítico (una sola línea vertical). Tracemos una línea punteada al noreste desde ahí. Entonces, en algún momento nos encontraremos otro anillo crítico, ver figura 5.3.*

Dada la teoría anterior el problema principal se reduce a encontrar un anillo crítico de módulo positivo, y probar que tiene un número infinito de descendientes con módulo positivo.

5.3.2. Reglas del Tableau

El objetivo de esta subsección es demostrar el teorema 5.3.1. Para entender dicho teorema primero demos las siguientes dos definiciones.

Definición 5.3.3. *Un anillo crítico $A_d(0)$ será llamado excelente si este no contiene puntos postcríticos. En términos del tableau crítico, significa que en la d -ésima fila no existen anillos semicríticos, es decir, dobles líneas.*

Definición 5.3.4. Diremos que la tabla crítica es recurrente si los números $S(c_k)$ con $k > 0$ son no acotados. En el caso de que $S(c_k) = \infty$ para alguna $k > 0$, diremos que el tableau es periódico.

Teorema 5.3.1. Si el tableau crítico es recurrente pero no periódico, entonces:

- i) Cada anillo crítico tiene al menos un hijo.
- ii) Cada anillo crítico excelente tiene al menos dos hijos.
- iii) Cada hijo de un padre excelente es excelente.
- iv) Cada hijo único es excelente.

Pero antes de ello analicemos las propiedades del tableau. Gracias a los trabajos de Branner y Hubbard las propiedades se reducen a tres reglas.

Primer regla del tableau. Cada columna del tableau tiene tres posibilidades, 1) es toda crítica, 2) es toda no crítica, o 3) tiene exactamente una profundidad semicrítica. La profundidad semicrítica, que es la última profundidad donde la pieza tratada coincide con la pieza crítica, se representa en el tableau con una doble línea. Hacia a arriba de las dobles líneas solo prevalecen líneas individuales, las cuales corresponden a los casos críticos, es decir, donde la pieza tratada coincide con la pieza crítica. Debajo de la profundidad semicrítica son espacios vacíos, lo cual indica que la pieza tratada ya no coincide con la piezas críticas. En la figura 5.3 se pueden observar los tres casos.

Segunda regla del tableau. Considere dos tableaux. Primero, el tableau correspondiente a la órbita crítica $\{0 = c_0, P(c_0) = c_1, P(c_1) = c_2, \dots\}$. Segundo, el tableau correspondiente a alguna órbita dada $\{z_0, z_2, \dots\} = \{z_j\}$ en $PO(\alpha)$.

Ahora considera alguna profundidad, digamos d , en el segundo tableau, ya sea crítica o semicrítica, y dibuja una línea punteada con una inclinación de 45 grados. Luego ve a el primer tableau (crítico) y del mismo modo dibuja una línea que inicie en la profundidad d . Se afirma entonces, que los dos tableaux coinciden en esa región. La región limitada por la línea punteada y las columnas m y $m + k$ (en el segundo tableau), y las columnas 0 y k (en el primer tableau). Es decir, conociendo el primer tableau podemos visualizar el segundo y viceversa.

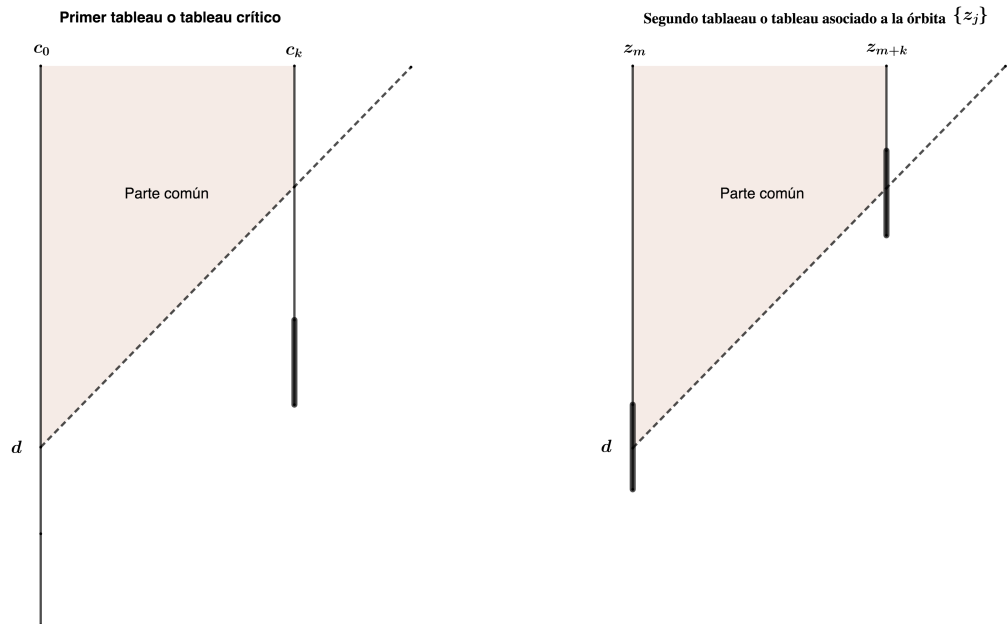


Figura 5.6: Bosquejo de la segunda regla del tableau.

Tercer regla del tableau. Consideremos las dos tablas de la regla anterior. En el tableau crítico, supongamos que en la profundidad d el anillo es crítico e hijo del anillo crítico de profundidad $d - k$. También supongamos que el anillo en la columna m en la profundidad d es semicrítico, esto, en el tableau de la órbita $\{z_j\}$.

Ahora, situémonos en el anillo semicrítico de profundidad d en el tableau de la órbita $\{z_j\}$. Si seguimos la flecha punteada, esta debe llegar a un anillo semicrítico de profundidad $d - k$ (ver figura 5.6).

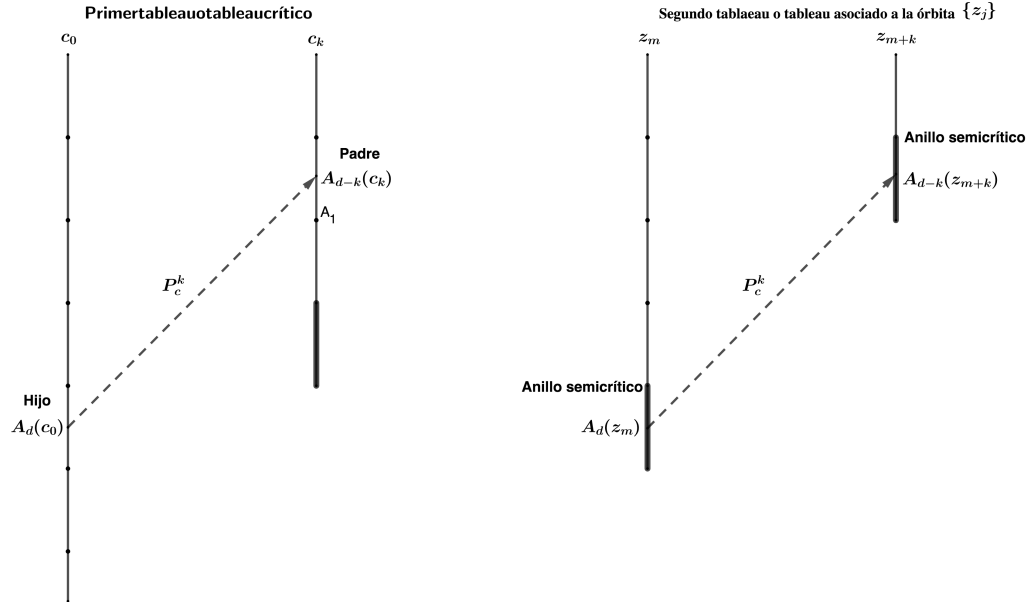


Figura 5.7: Bosquejo de la tercer regla del tableau.

Demostración. (Teorema 5.3.1)

Para entender las demostraciones siguientes, por favor ver la figura 5.8.

- i) Ubiquemos en el tableau crítico la profundidad d en la columna 0. Luego nos movemos a la derecha hasta encontrar por primera vez otro anillo crítico, digamos hasta la columna k . Podemos encontrar tal anillo crítico gracias a que el tableau es recurrente. Por último nos movemos en línea recta en dirección 225 grados hasta topar con la columna cero en la profundidad $d+k$. Por tanto $A_{d+k}(0)$ es un hijo de $A_d(0) = A_d(c_k)$.
- ii) Empecemos suponiendo que el anillo crítico $A_d(0)$ es excelente. La demostración del inciso *i*) nos establece que A_{d+k} es un hijo de $A_d(0)$. Enfoquemonos entonces en encontrar otro hijo de $A_d(0)$. El tableau crítico es no periódico. Por lo tanto la k -ésima columna debe tener una profundidad semicrítica, digamos $D > d$. Tracemos una línea diagonal punteada desde la profundidad D de la k -ésima columna con dirección noreste (45 grados), hasta la profundidad d . Por la tercer regla del tableau, la profundidad $D - k$ de la columna $2k$ -ésima debe ser semicrítica, al igual la profundidad $D - 2k$ en la columna $3k$ debe ser semicrítica y así sucesivamente hasta llegar a la profundidad d . Más aún, note que en la profundidad d dicha línea punteada no se interseca con un anillo crítico o semicrítico, esto gracias a que la profundidad

d no tiene dobles líneas por ser excelente. Desde el punto donde nos quedamos tracemos una línea punteada hacia la derecha, hasta encontrar un anillo crítico, digamos en la columna m . Dicho anillo crítico lo encontramos porque el tableau es recurrente. Por último, desde el punto donde nos quedamos tracemos una línea punteada en dirección 225 grados hasta intersectar en la columna cero en la profundidad $d + m$.

iii) Observe que $P_c^k(A_{d+k}(0)) = A_d(0)$. Además, como $A_{d+k}(0)$ tiene un punto postcrítico, también lo tiene $A_d(0)$.

iv) Procedamos por contradicción. Consideremos la profundidad D , la cual no es excelente, y sea $d_1 = n_1 - k$ el padre. Entonces para alguna $k_1 \geq k$ la k_1 -ésima columna tiene anillo semicrítico en la profundidad D . En la figura 5.6 está ilustrado el caso $k_1 = k$. Siguiendo la diagonal desde la columna k_1 y profundidad D , encontramos un anillo semicrítico en la profundidad d_1 (por la tercera regla del tableau), es decir, el padre es no excelente. Desde el punto donde nos quedamos procedamos hacia la derecha hasta encontrar un anillo crítico, digamos que es la columna m . Por lo tanto, tenemos que A_{d_1+m} es un segundo hijo. En conclusión $A_D(0)$ no puede ser hijo único.

□

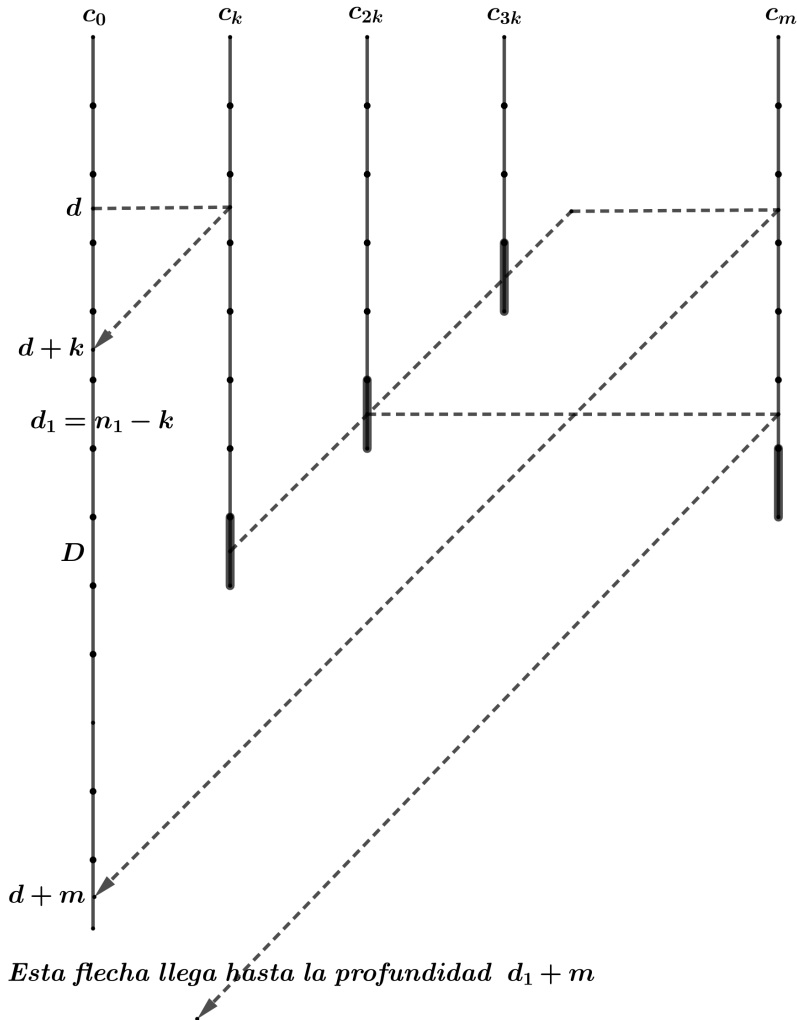


Figura 5.8: Ilustración del teorema 5.3.1.

5.4. Piezas de rompecabezas engrosadas

Como podemos ver en la figura 5.2, $A_0 = \text{Int}(\mathcal{P}_0(0)) \setminus \mathcal{P}_1(0)$ es un anillo degenerado. Para convertir este anillo degenerado en un anillo con módulo positivo procedemos a modificar las piezas del rompecabezas de Yoccoz, las cuales llamaremos piezas de rompecabezas engrosadas.

Fijémonos en las piezas del rompecabezas de Yoccoz de profundidad cero, $\mathcal{P}_0(c_i)$. Ellas como se puede ver en la sección 3.7, son dominios acotados por tramos de rayos externos y equipotenciales.

Procedamos a dar un bosquejo de la construcción de las piezas de rompeca-

bezas engrosadas.

Consideremos un disco abierto, D_ϵ , alrededor del punto fijo α lo suficientemente pequeño. Ahora, a los ángulos, digamos t_i y t_j de los rayos externos que conforman la pieza $\mathcal{P}_0(c_i)$ sumémosle un ángulo δ racional suficientemente pequeño para que sus rayos externos correspondientes intersecten al disco D_ϵ . Entonces la pieza engrosada, digamos $\widehat{\mathcal{P}}_0(c_i)$, consiste de la cerradura de la región acotada por los siguientes trazos.

- 1.- Por los rayos externos de ángulo $t_i + \delta$ y $t_i - \delta$.
- 2.- Por el arco, exterior a la pieza considerada originalmente, del disco D_ϵ .
- 3.- Por el equipotencial que correspondía a $\mathcal{P}_0(c_i)$.

Ver figura 5.9.

Una de las observaciones inmediatas es que $\mathcal{P}_0(c_i) \subset \widehat{\mathcal{P}}_0(c_i)$.

Con la siguiente instrucción es claro que podemos construir todas las piezas de rompecabezas engrosadas. Es decir, si $\widehat{\mathcal{P}}_d^k$ es una pieza engrosada de profundidad d , entonces cada componente de $P_c^{-1}(\widehat{\mathcal{P}}_d^k)$ es una pieza engrosada de profundidad $d + 1$.

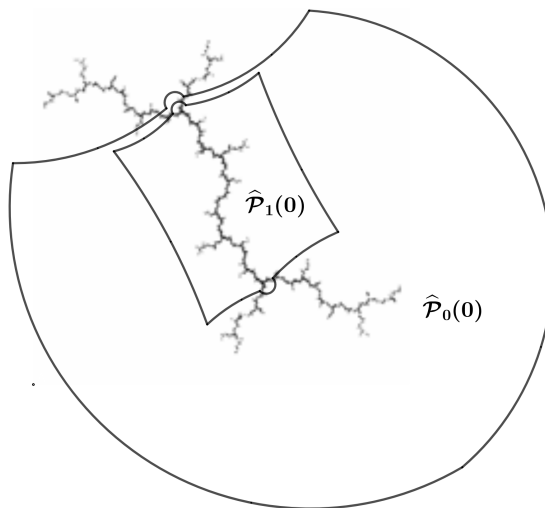


Figura 5.9: Ilustración del engrosamiento del anillo A_0 del polinomio cuadrático complejo $P_i(z) = z^2 + i$.

Nota 5.4.1. *La pieza del rompecabezas contendrá al punto crítico si y sólo si el interior de la pieza del rompecabezas original ya lo contenía.*

Teorema 5.4.1. *Si el tableau crítico asociado a P_c es periódico de periodo p , entonces P_c es simplemente renormalizable.*

Demostración. Elijamos una profundidad $d \geq p$ lo suficientemente grande de tal forma que el anillo $A_d(0)$ sea un hijo de $A_{d-p}(0)$, y sea $\widehat{P}_d(0)$ la pieza del rompecabezas engrosada de profundidad d . Entonces

$$P^p(\widehat{P}_d(0)) = \widehat{P}_{d-p}(c_p) = \widehat{P}_{d-p}(0),$$

la cual contiene en su interior a $\widehat{P}_d(0)$. Note que los puntos $c_p, c_{2p}, c_{3p}, \dots$ pertenecen a $\widehat{P}_d(0)$. Como p es minimal, todas las piezas del rompecabezas $P_{d-i}(c_i)$, con $0 \leq i < p$, no sufren traslapes, por lo que cualquier punto de intersección debe pertenecer a la frontera de las piezas del rompecabezas. Por lo tanto el pequeño conjunto de Julia es conexo. En conclusión esto demuestra que P_c es simplemente renormalizable. \square

Teorema 5.4.2. *Si la órbita crítica se encuentra completamente dentro de la unión*

$$\mathcal{P}_1(c_0) \cup \mathcal{P}_1(c_1) \cup \dots \cup \mathcal{P}_1(c_{q-1}),$$

entonces P_c es simplemente renormalizable. Note que son las piezas del rompecabezas de profundidad uno que tienen como punto común al punto fijo α (ver figura 5.2).

De los teoremas anteriores tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4.1. *Si P_c no es simplemente renormalizable, entonces existe un anillo crítico de módulo positivo.*

Demostración. Como P_c no es simplemente renormalizable, entonces por el teorema 5.4.2 algún elemento de la órbita crítica, digamos $c_d = P_c^{-1}(c_i)$, debe estar contenido en alguna de las piezas de profundidad uno que tienen como punto común al punto $P_c^{-1}(\alpha)$. Luego es claro que $A_0(c_d)$ tiene módulo positivo. Si observamos la figura 5.2, ese anillo puede ser $\text{Int}(\mathcal{P}_0(c_0) \setminus \mathcal{P}_1(c_1))$ o $\text{Int}(\mathcal{P}_0(c_0) \setminus \mathcal{P}_1(c_2))$, los cuales claramente no son degenerados. Aplicando P_c las veces necesarias encontramos un anillo $A_d(0)$, el cual tendrá módulo positivo. \square

Ahora, damos la solución al problema principal. Cabe aclarar que esta respuesta aún no engloba todos los casos.

Teorema 5.4.3. *Sea $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ una órbita en $J_c \setminus PO(\alpha)$, la cual es disjunta de alguna pieza crítica del rompecabezas de Yoccoz $\mathcal{P}_N(0)$. Entonces,*

$$\bigcap \mathcal{P}_d(z_0) = \{z_0\}.$$

Demostración. Sea $U_i = \text{Int}(\widehat{\mathcal{P}}_{N-1}^i)$, donde las diferentes piezas del rompecabezas de profundidad $N - 1$ han sido enumeradas de tal forma que el valor crítico c_1 pertenece a \mathcal{P}_{N-1}^0 . Cada una de las piezas del rompecabezas de mayor o igual profundidad que N están contenidas en alguna pieza \mathcal{P}_{N-1}^i . Cada U_i es una superficie de Riemann hiperbólica. Por lo cual tiene cubriente universal igual al disco de Poincaré. Sea la distancia de Poincaré $\text{dist}_i(x, y)$ asociada a cada U_i . Recuerde que P_c^{-1} es una cubriente ramificada de grado 2 en U_i , para cada $i \geq 1$, llamemos a cada una ellas g_1 y g_2 , y cada g_k es una función univalente y manda a U_i a un subconjunto propio de algún U_j . Por lo tanto cada g_k , con $k = 1, 2$, es una distancia de Poincaré decreciente. Como cada pieza del rompecabezas de profundidad N es un subconjunto compacto de su conjunto asociado U_i , se sigue que

$$\text{dist}_j(g_k(x), g_k(y)) \leq \lambda \text{dist}_i(x, y)$$

a lo largo de cualquier pieza del rompecabezas, con $i \geq 1$ y donde $\lambda < 1$ es una constante uniforme. Ahora, sea δ el máximo de los diámetros (Poincaré) de las piezas del rompecabezas de profundidad N . Entonces para cada $h > 0$, tenemos que

$$\mathcal{P}_{N+h}(z_0) \rightarrow \mathcal{P}_{N+h-1}(z_1) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{P}_{N+1}(z_{h-1}) \rightarrow \mathcal{P}_N(z_h),$$

ya que ninguna de las piezas del rompecabezas puede estar contenida en la pieza del rompecabezas de valor crítico \mathcal{P}_{N-1}^0 (excepto posiblemente la primera). Por lo cual el diámetro de $\mathcal{P}_{N+h}(z_0)$ es a lo más $\lambda^h \delta$, lo cual converge a 0 cuando $h \rightarrow \infty$. \square

5.5. Demostración del teorema de Yoccoz

En esta sección demostraremos el teorema 5.0.1.

Definición 5.5.1. Para cada z en el conjunto de Julia sea $\mathcal{P}_d^*(z)$ la unión de las piezas del rompecabezas de profundidad d que contienen a z . En la mayoría de los casos, $\mathcal{P}_d^*(z)$ es igual a la única pieza del rompecabezas de profundidad d que contiene a z , $\mathcal{P}_d(z)$. Sin embargo, si $P_c^d(z) = \alpha$, entonces $\mathcal{P}_d^*(z)$ es la unión de q piezas distintas del rompecabezas.

La definición 5.5.1 nos ayuda a tratar el caso cuando $P_c^d(z_0) = \alpha$.

Teorema 5.5.1. Sea $P_c(z) = z^2 + c$ un polinomio cuadrático complejo, con conjunto de Julia conexo, con ambos puntos fijos repulsivos (digamos α y β),

no simplemente renormalizable y con órbita crítica disjunta del punto fijo α . Entonces para cada $z \in J_c$ tenemos que

$$\bigcap_d \mathcal{P}^*(z) = \{z\}.$$

Demostración. La demostración la dividimos en tres casos. En cada caso primero demostraremos que $\bigcap \mathcal{P}_d(0) = \{0\}$, luego mostramos que $\bigcap \mathcal{P}_d(z) = \{z\}$ para todo punto $z \in J_c \setminus PO(\alpha)$ y por último se establece que $\bigcap \mathcal{P}_d(z) = \{z\}$ para el caso cuando $P_c^n(z) = \alpha$.

Caso crítico recurrente.

Como la órbita crítica es recurrente es válido el teorema 5.3.1.

Ahora, consideremos la pieza del rompecabezas $\mathcal{P}_d(0)$ que contiene al punto crítico 0. Por el corolario 5.4.1. sabemos que existe un anillo no degenerado, digamos A_m , por el hecho de que P_c es no simplemente renormalizable. Dicho anillo A_m tiene al menos 2^k descendientes en la k -ésima generación para cada k . Cada uno de esos descendientes contribuye exactamente $\text{mod} A_m/2^k$ a la suma $\sum_d \text{mod} A_d(0)$. Lo cual implica que dicha suma es infinita, como es requerido. Por otra parte, si en alguna generación hay menos descendientes, entonces uno de ellos debe ser hijo único. Este hijo único es excelente por el teorema 5.4.1. Luego usando las partes *ii*) y *iii*) del mismo teorema 5.4.1 podemos concluir que la $\sum_d \text{mod} A_d(0)$ es infinita. Por lo tanto en cada caso $\bigcap \mathcal{P}_d(0) = \{0\}$.

Consideremos ahora un punto $z_0 \neq 0$ de J_c . Asumamos que la órbita de z_0 es disjunta de α , de este modo las piezas del rompecabezas $\mathcal{P}_d(z_0)$ están bien definidas. Cuando z_0 no se acumula en cero tenemos inmediatamente que $\bigcap \mathcal{P}_d(z_0) = \{z_0\}$, por el teorema 5.4.3. Supongamos, por otra parte, que el 0 es punto de acumulación de $\{z_n\}$. Esto es equivalente a suponer que el tableau del punto z_0 tiene un anillo crítico que llega a todas las profundidades. Para cada profundidad d , comencemos en la columna 0 y avanzamos a la derecha hasta encontrar un anillo crítico, digamos en la columna n , entonces procedemos diagonalmente hasta encontrar la columna 0 en la profundidad $n + d$. Se sigue de esta construcción que el anillo $A_{n+d}(z_0)$ es conformemente equivalente a $A_d(0)$. Por lo tanto, distintos valores de d deben corresponder a distintos valores de $n + d$. En conclusión la suma $\sum_d \text{mod} A_d(z_0)$ es también infinita, lo cual concluye en que $\bigcap \mathcal{P}_d(z_0) = \{z_0\}$.

Caso crítico no recurrente.

En este caso suponemos que la órbita crítica es no recurrente. Entonces el valor crítico $P_c(0)$ satisface la hipótesis del teorema 5.4.3. Del cual se deduce que $\bigcap \mathcal{P}_d(P_c(0)) = P_c(0)$ y se sigue que $\bigcap \mathcal{P}_d(0) = \{0\}$. Ahora, consideremos

un punto $z_0 \neq 0$. Otra vez podemos asumir que la órbita crítica se acumula en z_0 , ya que de lo contrario la conclusión se seguiría del teorema 5.4.3. Por el corolario 5.4.1 sabemos que existe una profundidad m tal que $A_m(0)$ tiene módulo positivo. La correspondiente profundidad m para el tableau de z_0 debe tener infinitas columnas k las cuales son críticas. Para cada una de ellas procedemos diagonalmente hacia abajo en el tableau de z_0 , ignorando cualquier anillo crítico o semicrítico que podamos encontrar, hasta llegar a la columna cero en la profundidad $m + k$. Cada vez que nos encontremos con un anillo crítico o semicrítico, perdemos hasta la mitad del módulo. Sin embargo, la hipótesis de que la órbita crítica no es recurrente garantiza que tales pérdidas solo ocurrirán un número limitado de veces. Por lo tanto, la $\sum \text{mod} A_d(z_0)$ es infinita y tenemos la prueba de que $\bigcap \mathcal{P}_d(z_0) = \{z_0\}$ en el caso no recurrente.

Caso iteradas de pre-imágenes de α

Ahora, consideremos el caso cuando z_0 cumple que $z_n = P_c^n(z_0) = \alpha$. En este caso, existen q distintas piezas del rompecabezas \mathcal{P}_n^i de profundidad n , las cuales tienen a z_0 como punto común en sus fronteras. Cada una de estas piezas del rompecabezas, \mathcal{P}_n^i , contiene una sucesión de piezas del rompecabezas anidadas $\mathcal{P}_n^i \supset \mathcal{P}_{n+1}^i \supset \mathcal{P}_{n+2}^i \cdots$ las cuales tienen a z_0 como punto común en sus fronteras. Cada una de esas q sucesiones de piezas del rompecabezas anidadas se tiene que $\bigcap_d \mathcal{P}_d^i(z_0) = \{z_0\}$ (la demostración de este resultado es análoga a la prueba del teorema 5.4.3). De lo anterior se sigue que $\bigcap_d \mathcal{P}_d^* = \{z_0\}$. \square

Apéndice A

Desigualdades de Longitud-Área-Módulo

La idea básica de este apéndice es entender la desigualdad de Grötzsch. Para iniciar el apéndice demos primero las definiciones de longitud de una curva diferenciable γ ($\gamma : (a, b) \rightarrow I^2$, con $t \in (a, b)$) y área de una región U . Para ello consideremos el cuadrado unitario abierto $(0, 1) \times (0, 1) := I^2 \subset \mathbb{C}$ y definamos una métrica por

$$ds = \rho(z)|dz|,$$

donde $\rho(z)$ es una función continua estrictamente positiva.

Definición A.0.1. Sea γ una curva diferenciable, entonces definimos a la longitud de γ como

$$L_\rho(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))|d\gamma(t)|.$$

Definición A.0.2. Definamos el área de la región $U \subset I^2$ como

$$A(U) = \int \int_U \rho(x + iy)^2 dx dy.$$

Ahora, enunciemos un teorema que relaciona las definiciones A.0.1 y A.0.2.

Teorema A.0.1. Si $A(I^2)$ es finita, entonces (por Lebesgue) para casi toda $y \in (0, 1)$ la longitud $L(\gamma_y)$ de la línea horizontal $\gamma_y : t \rightarrow (t, y)$, en la altura y es finita. Más aún, existe una y tal que

$$L_\rho(\gamma_y)^2 \leq A_\rho(I^2).$$

De hecho, el conjunto que consiste de todas las $y \in (0, 1)$ para las cuales la desigualdad es cierta tiene medida de Lebesgue positiva.

Observemos que para el caso de la métrica Euclideana $ds = |dz|$ tenemos que

$$L(\gamma_y)^2 = A(I^2) = 1.$$

En general, si consideramos un rectángulo R de base Δx y altura Δy , entonces la correspondiente desigualdad sería

$$L_\rho(\gamma_y)^2 \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} A_\rho(R),$$

para un conjunto de y con medida positiva.

Demostración. (Teorema A.0.1)

La desigualdad de Schwarz establece que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

Utilizando dicha desigualdad para el rectángulo $R = (0, \Delta x) \times (0, \Delta y)$, $f(x) = 1$ y $g(x) = \rho(x, y)$, obtenemos que

$$\left(\int_0^{\Delta x} \rho(x, y) dx \right)^2 \leq \Delta x \int_0^{\Delta x} \rho(x, y)^2 dx,$$

donde y es fija. Lo anterior quiere decir que

$$L_\rho(\gamma_y)^2 \leq \Delta x \int_0^{\Delta x} \rho(x, y)^2 dx,$$

para cada altura constante y .

Por último integrando sobre el intervalo $(0, \Delta y)$ y dividiendo entre Δy la desigualdad anterior, tenemos que,

$$\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} L_\rho(\gamma_y)^2 dy \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} A_\rho(R).$$

La conclusión del teorema se obtiene de manera inmediata de esta última desigualdad. \square

Ahora, sea \mathcal{C} el espacio cociente obtenido de la banda infinita que está acotada entre 0 y Δy en el z -plano, al identificar cada punto $z = x + iy$ con su traslación $z + \Delta x$. Note que podemos pensar a este espacio cociente como un cilindro de circunferencia Δx y altura Δy . También definamos el módulo de un cilindro por

$$\text{mod}(\mathcal{C}) = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

y más aún, definamos al índice (*winding number*) de una curva cerrada γ en \mathcal{C} por el número entero

$$w = \frac{1}{\Delta x} \oint_{\gamma} dx.$$

Teorema A.0.2. *Para alguna métrica conforme $\rho(z)|dz|$ sobre el cilindro \mathcal{C} , existe alguna curva cerrada γ con índice $+1$ cuya longitud $L_{\rho}(\gamma) = \oint_{\gamma} \rho(z)|dz|$ satisface que*

$$L_{\rho}(\gamma)^2 \leq A(\mathcal{C})/\text{mod}(\mathcal{C}).$$

Más aún, si usamos la métrica Euclidiana $|dz|$ tenemos que

$$L(\gamma)^2 \geq A(\mathcal{C})/\text{mod}(\mathcal{C})$$

para cada curva γ .

Demostración. Como en la prueba del teorema A.0.1, podemos encontrar una curva horizontal γ_y , que cumpla que

$$L_{\rho}(\gamma_y)^2 \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} A_{\rho}(\mathcal{C}) = \frac{A_{\rho}(\mathcal{C})}{\text{mod}(\mathcal{C})}.$$

Por otra parte en el caso Euclidean, para alguna curva cerrada γ con índice 1 tenemos que

$$L(\gamma) = \oint_{\gamma} |dz| \geq \oint_{\gamma} dx = \Delta x.$$

Por lo tanto, $L(\gamma)^2 \geq (\Delta x)^2 = A(\mathcal{C})/\text{mod}(\mathcal{C})$. □

Definición A.0.3. *Una superficie de Riemann se dice que es un anillo si es biholomorfamente equivalente a algún cilindro. Un anillo incrustado $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ se dice que es esencialmente incrustado si contiene una curva la cual tiene índice uno alrededor de \mathcal{C} .*

Ahora, daremos algunas consecuencias importantes del teorema A.0.2.

Corolario A.0.1. (Una desigualdad Área-Módulo) *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ un anillo esencialmente incrustado en el cilindro \mathcal{C} , y supongamos que \mathcal{A} es conformemente equivalente a un cilindro \mathcal{C}' . Entonces*

$$\text{mod}(\mathcal{C}') \leq \frac{A(\mathcal{A})}{A(\mathcal{C})} \text{mod}(\mathcal{C}).$$

En particular

$$\text{mod}(\mathcal{C}') \leq \text{mod}(\mathcal{C}).$$

Corolario A.0.2. *El módulo de un cilindro es un invariante conforme bien definido, es decir, \mathcal{C}' y \mathcal{C} son conformemente equivalente si y solo si $\text{mod}(\mathcal{C}') = \text{mod}(\mathcal{C})$.*

La demostración de los corolarios se pueden deducir facilmente o ser consultadas en [MJ].

De estos corolarios sigue que el módulo de un anillo \mathcal{A} puede ser definido como el módulo de algún cilindro conformemente equivalente a él. Además, si \mathcal{A} es esencialmente incrustado en algún otro anillo \mathcal{A}' , entonces se satisface que

$$\text{mod}(\mathcal{A}) \leq \text{mod}(\mathcal{A}').$$

Corolario A.0.3. (Desigualdad de Grötzsch) *Supongase que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ son dos anillos disjuntos, cada uno esencialmente incrustado en \mathcal{A} . Entonces*

$$\text{mod}(\mathcal{A}') + \text{mod}(\mathcal{A}'') \leq \text{mod}(\mathcal{A}).$$

Demostración. Asumamos que \mathcal{A} es un cilindro. Por el corolario A.0.1 tenemos que

$$\text{mod}(\mathcal{A}') \leq \frac{A(\mathcal{A}')}{A(\mathcal{A})} \text{mod}(\mathcal{A}),$$

$$\text{mod}(\mathcal{A}'') \leq \frac{A(\mathcal{A}'')}{A(\mathcal{A})} \text{mod}(\mathcal{A}).$$

Note que todas las áreas son Euclidianas. Por lo tanto usando

$$A(\mathcal{A}') + A(\mathcal{A}'') \leq A(\mathcal{A})$$

terminamos la demostración. □

Bibliografía

- [1] L. Carleson, W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] A. Douady, J. Hubbard, *On the Dynamics of Polynomial-Like Mappings*, Gauthier-Villars , 1985.
- [3] A. Douady, J. Hubbard, *Étude dynamique des polinômes complex I y II*, Publ. Math. Orsay (1984 - 85).
- [4] K. Falconer, *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Application*.
- [5] G. Hinojosa, R. Valdez, *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica y Grupos Fuchsianos*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 2011.
- [6] Y. Iwayoshi, M. Taniguchi, *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1989.
- [7] Y. Jiang, *Infinitely Renormalizable Quadratic Polynomials*.
- [8] J. Milnor, *Local connectivity of Julia sets: expository lectures*, Stony Brook, 1992.
- [9] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, 2006.
- [10] A. Douady y J.H. Hubbard, *Etude dynamique des polynomes complexes I y II*, Publ. Math. dOrsay (1984). MR 87f:58072a; MR 87f:58072b.



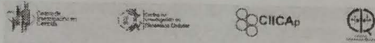
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Coordinación de Programas Educativos

Posgrado en Ciencias



DR. VÍCTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada “**Conexidad local de algunos conjuntos de Julia**” que presenta el alumno **Erik Domínguez Díaz (5620170201)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

| NOMBRE | DICTAMEN | FIRMA |
|---|-----------------|----------------------------|
| Dr. Carlos Cabrera Ocañas UCIM-UNAM | <i>Aprobado</i> | <i>Carlos Cabrera O.</i> |
| Dra. Gabriela Hinojosa Palafox CInC-UAEM | <i>Aprobado</i> | <i>G. Hinojosa Palafox</i> |
| Dra. Larissa Sbitneva CInC-UAEM | <i>aprobado</i> | <i>L. Sbitneva</i> |
| Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM | <i>Aprobado</i> | <i>R. Valdez Delgado</i> |
| Dra. Liudmila Sabinina CInC-UAEM | <i>Aprobado</i> | <i>L. Sabinina</i> |