



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Dinámica de sistemas dinámicos con retraso

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

ALBERTO ISAAC AGUILAR HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOAQUÍN ESCALONA SEGURA



**DR. VÍCTOR BARBA LÓPEZ**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS**  
**PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada "Dinámica de sistemas dinámicos con retraso" que presenta el alumno L. C. Alberto Isaac Aguilar Hernández (5620160108) para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Luis Benet Fernández ICF-UNAM	APROBADO	
Dr. Markus Mueller Bender CInC-UAEM	A probado	
Dr. Marco Antonio Rivera Islas CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. José Fermin Díaz Escudero CIDC-UAEM	APROBADO	
Dr. Joaquín Escalona Segura CInC-UAEM	APROBADO	

# Resumen

Este trabajo se centra en estudiar los cambios dinámicos producidos por un retraso temporal constante en el comportamiento de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales.

Para que un sistema pueda tener una dinámica en régimen caótico es necesario, pero no suficiente, que por lo menos sea de dimensión tres. Los trabajos pioneros de Mackey-Glass[28] mostraron que un sistema dinámico de dimensión uno puede alcanzar una dinámica caótica al introducir un retraso temporal constante en sus ecuaciones. Esto es debido a que el retraso temporal, que también puede verse como una retroalimentación en el sistema, provoca que la dimensión del sistema se vuelva infinita.

Basados en las ideas anteriores nos propusimos estudiar la dinámica de un modelo neuronal con retraso temporal. Este es un problema de relevancia pues la comunicación entre neuronas no se produce de manera inmediata y este pequeño retraso en la transmisión de información puede dar origen, y ayudar a explicar, fenómenos de la dinámica neuronal.

Para iniciar con nuestro estudio primeramente reproducimos los resultados del artículo de Mackey-Glass y de J. Farmer quien estudió la dinámica del sistema de Mackey-Glass desde la perspectiva de atractores en un espacio fase de dimensión infinita[29]. Después analizamos los cambios de comportamiento en la dinámica del sistema tipo Rossler considerando cuatro configuraciones distintas: retraso temporal en una variable, retroalimentación lineal retrasada, retroalimentación senoidal retrasada y finalmente dos sistemas tipo Rossler con acoplamiento difusivo bidireccional con retraso. Por último, como modelo neuronal escogimos un sistema tipo Fitzhug-Nagumo, el cual analizamos con las mismas configuraciones con las que estudiamos el modelo de Rossler.

En nuestro trabajo reportamos que el retraso temporal puede funcionar no sólo como generador, sino que también como supresor de caos en un sistema. También puede generar duplicación o disminución de periodo. En el sistema tipo Fitzhug-Nagumo un retraso temporal puede provocar que el sistema cambie de una dinámica periódica a una cuasiperiódica, caótica o tipo ráfaga de disparos (bursting). En el caso de dos sistemas acoplados observamos el fenómeno de muerte de amplitud, fenómeno que ha sido ya ampliamente estudiado[38][39].

El comportamiento de bursting es el resultado nuevo y más importante de este trabajo.

# Índice general

<b>Introduccion</b>	<b>3</b>
<b>1. Sistemas Dinámicos</b>	<b>7</b>
1.1. Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos . . . . .	7
1.1.1. Fase de un Oscilador . . . . .	10
1.2. Teoría del Caos y Exponentes de Lyapunov . . . . .	13
1.2.1. Dinámica Caótica . . . . .	13
1.2.2. Exponentes de Lyapunov . . . . .	14
1.2.3. Diagrama de Bifurcación y Análisis del Exponente Maximal de Lyapunov . . . . .	18
1.3. Sincronización de Sistemas Dinámicos . . . . .	19
1.3.1. Acoplamiento entre Sistemas Dinámicos . . . . .	19
1.3.2. Clasificación de la Sincronización de Sistemas Dinámicos . . . . .	21
1.3.3. Sincronización de Sistemas Caóticos . . . . .	22
1.3.4. Dinámica Sincronizada . . . . .	23

<b>2. Dinámica de Sistemas no Lineales con Retraso Temporal (EDR's)</b>	<b>25</b>
2.1. Ecuaciones Diferenciales con Retraso Constante . . . . .	27
2.2. Exponentes de Lyapunov para una EDR . . . . .	28
<b>3. Modelos</b>	<b>31</b>
3.1. Modelo de Mackey-Glass . . . . .	31
3.2. Modelo de Rossler . . . . .	34
3.2.1. Retraso Temporal en una Variable . . . . .	35
3.2.2. Retroalimentación Lineal Retrasada . . . . .	35
3.2.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada . . . . .	36
3.2.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD .	36
3.3. Modelo de FitzHugh-Nagumo . . . . .	37
3.3.1. Retraso Temporal en una Variable . . . . .	41
3.3.2. Retroalimentación Lineal Retrasada . . . . .	42
3.3.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada . . . . .	42
3.3.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD .	42
<b>4. Metodología</b>	<b>45</b>
4.1. Métodos de Análisis . . . . .	46
4.1.1. Series de Tiempo y Espacio Fase del Sistema . . . . .	46
4.1.2. Gráficos $x_2$ vs. $x_1$ . . . . .	47
4.1.3. Transformada de Fourier y Espectro de Potencias . . . . .	47
4.1.4. Identificación de Sistemas Cuasiperiódicos . . . . .	49

4.1.5. Diagrama de Bifurcación y Análisis del Exponente Maximal de Lyapunov . . . . .	50
<b>5. Resultados</b>	<b>51</b>
5.1. Sistemas Tipo Rossler . . . . .	51
5.1.1. Retraso Temporal en una Variable . . . . .	52
5.1.2. Retroalimentación Lineal Retrasada . . . . .	61
5.1.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada . . . . .	67
5.1.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso . . . . .	73
5.2. Sistemas Tipo Fitzhug-Nagumo . . . . .	75
5.2.1. Retraso Temporal en una Variable . . . . .	75
5.2.2. Forzamiento Lineal con Retraso . . . . .	76
5.2.3. Retroalimentación Senoidal con Retraso . . . . .	76
5.2.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso . . . . .	80
<b>6. Discusión de Resultados</b>	<b>87</b>
<b>7. Discusión y Conclusiones</b>	<b>89</b>
7.1. Sistemas Tipo Rossler . . . . .	90
7.1.1. Retraso Temporal en una Variable . . . . .	91
7.2. Retroalimentación Lineal Retrasada . . . . .	93
7.2.1. Retroalimentación Senoidal Retrasada . . . . .	95
7.2.2. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD . . . . .	96

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
7.3. Sistemas Tipo Fitzhug-Nagumo . . . . .	98
7.3.1. Retraso Temporal en una variable . . . . .	98
7.3.2. Retroalimentación Lineal Retrasada . . . . .	99
7.3.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada . . . . .	99
7.3.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD .	100
7.4. Conclusiones Generales . . . . .	102



# Introducción

En 1963 Edward Lorenz[1] publicó un revolucionario estudio numérico sobre un modelo para el clima atmosférico basado en la convección del flujo. En este trabajo Lorenz identificó un nuevo tipo de comportamiento dinámico para los sistemas no lineales llamado *caótico*. A partir de este descubrimiento comenzó la era moderna de la dinámica no lineal pues se dieron cuenta de la importancia que tenía en otras áreas de la ciencia.

A principios de la década de los noventa el estudio de la dinámica no lineal tuvo otro gran avance gracias a los trabajos de Pecora con Carrol[16] y de Fujisaka con Yamada[17] los cuales mostraron que en régimen caótico dos sistemas pueden experimentar sincronización al introducir un acoplamiento adecuado entre ellos. Este descubrimiento fue de gran relevancia no solamente desde el punto de vista teórico sino también por sus posibles aplicaciones a sistemas reales como, por citar un ejemplo, la interacción entre dos neuronas.

Posteriormente, el estudio de la sincronización caótica se volcó hacia ensambles con más de dos sistemas mostrando que el comportamiento emergente de un ensamble puede ser explicado por la sincronización entre los elementos de la red. De manera

natural, al estar hablando sobre ensambles de sistemas, los investigadores fijaron su atención en el estudio de redes neuronales.

En 1952 Hodgkin y Huxley [27]<sup>1</sup> propusieron un modelo de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas capaz de simular el comportamiento excitable del axón de un calamar gigante. En 1961 R. Fitzhug y J. Nagumo [26] publicaron una versión simplificada del modelo de Hodgkin-Huxley que es más sencillo de analizar y modelar.

Al tener modelos que simulan el comportamiento de una neurona se pudo estudiar la dinámica de dos neuronas acopladas de distintas formas así como el comportamiento de ensambles formados por más de dos neuronas formando sistemas complejos. La dinámica de un sistema complejo depende de las propiedades de cada una de sus unidades y de la interacción entre ellas.

La transmisión de información en las redes neuronales no se da de manera instantánea pues existe un pequeño retraso temporal en las señales. Por ejemplo, neuronas<sup>2</sup> que están a menos de 1 *mm* de distancia experimentan un retraso temporal en la información que comparten mayor al 4% de su frecuencia de oscilación característica [2].

El retraso temporal es muy importante en la dinámica de un sistema pues puede dar origen a nuevos comportamientos que únicamente aparecen por la presencia del retardo temporal. De los primeros en reportar los efectos del retraso temporal en el comportamiento dinámico de un sistema fueron Mackey-Glass [28] en 1977 y a partir

---

<sup>1</sup>En 1963 recibieron el premio Nobel en fisiología-medicina por este trabajo.

<sup>2</sup>con una frecuencia de oscilación característica de 40 Hz.

de su trabajo surgió un gran interés en la comunidad por estudiar los efectos del retraso temporal en sistemas dinámicos. El campo de los sistemas dinámicos con retraso es un área de investigación que se relaciona prácticamente con todas las disciplinas de la ciencia como la matemática, física, ingeniería, biología, fisiología, economía, neurociencia y muchas más.

En este trabajo presentamos un análisis numérico sobre los efectos del retraso temporal aplicado en distintos arreglos a dos sistemas dinámicos. En el primer capítulo resumimos la teoría correspondiente a sistemas dinámicos centrandonos en aquellos con dinámica caótica y retraso temporal. En el segundo capítulo presentamos las principales características de los modelos que analizamos así como las configuraciones empleadas. Los métodos y herramientas de análisis se discuten en el capítulo cuatro. En el capítulo cinco reportamos los resultados obtenidos en cada configuración estudiada. Finalmente, en el capítulo seis hacemos una discusión de nuestros resultados y presentamos conclusiones sobre el trabajo. También presentamos algunos puntos que se podrían investigar en un trabajo a futuro.



# Capítulo 1

## Sistemas Dinámicos

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos que utilizamos a lo largo de este trabajo.

### 1.1. Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos

Decimos que un sistema dinámico (SD) es aquel representado por ecuaciones autónomas (que no dependen explícitamente del tiempo) y estos son de dos tipos en general:

- a) **Sistemas dinámicos continuos**, los cuales pueden ser representados utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)$  con  $x_i$  e  $i = 1, 2, \dots, d$  son variables de estado del sistema de

dimensión  $d$  y  $\mathbf{F}[\cdot]$ <sup>1</sup> es una función vectorial en general no lineal. Para estos sistemas podemos realizar integración numérica para determinar la evolución temporal del sistema, estableciendo una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  y generando una trayectoria en el espacio de  $d$  dimensiones llamado espacio fase del sistema.

- b) **Sistemas dinámicos discretos**, en este caso el tiempo está discretizado y éste puede tomar valores enteros  $n$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Este tipo de sistemas también llamados mapeos se representan de la forma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n). \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{x}_n = (x^n_1, x^n_2, x^n_3, \dots, x^n_d)$  con  $x^n_i$  e  $i = 1, 2, \dots, d$  son variables de estado del sistema de dimensión  $d$  y  $\mathbf{M}[\cdot]$ <sup>2</sup> es una función en general no lineal.

Para determinar la evolución temporal de este tipo de sistemas se itera la ecuación 1.2 partiendo de un estado inicial  $\mathbf{x}_0$ , generando de esta forma la órbita correspondiente dada por la sucesión de valores  $x_0, x_1, x_2, \dots$

En este trabajo utilizaremos los conceptos y las técnicas desarrolladas para los sistemas dinámicos continuos. En este tipo de sistemas los llamados puntos fijos  $\mathbf{x}^*$  cumplen con la condición de que  $\mathbf{F}[\mathbf{x}^*] = \mathbf{0}$ <sup>3</sup>. Las trayectorias cercanas a estos puntos se ven atraídas, repelidas o no sufren influencia debida a dichos puntos dependiendo de su estabilidad. Además de estas dinámicas, los SD pueden presentar otros comportamientos, por ejemplo el llamado ciclo límite.

---

<sup>1</sup> $\mathbf{F}[\cdot] : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

<sup>2</sup> $\mathbf{M}[\cdot] : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

<sup>3</sup> $(0, 0, \dots, 0)$

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada en el espacio fase, se dice que es aislada porque las trayectorias cercanas a éste son atraídas o repelidas dependiendo de la estabilidad del ciclo límite<sup>4</sup>. Los ciclos límite son órbitas periódicas, las cuales son soluciones de la ec. 1.1 que se repiten en el tiempo (Cuando un sistema exhibe órbitas periódicas estables frecuentemente se le llama oscilador periódico). Consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.3)$$

si su solución  $x(t)$  cumple con

$$x(t) = x(t + T) \quad (1.4)$$

siendo  $T > 0$  el valor mínimo para el cual se cumple la igualdad, entonces decimos que el sistema tiene periodo  $T$ .

Otra dinámica que pueden presentar los SD es la llamada dinámica caótica, de la cual detallaremos sus características más adelante.

En general podemos definir un atractor como el conjunto acotado de puntos en el espacio fase al cual el sistema evoluciona asintóticamente (después de un tiempo suficientemente largo). Ejemplos de atractores son los puntos fijos estables, los ciclos límite estables y los llamados atractores extraños. Estos últimos generados en el espacio fase asociados en especial a dinámicas caóticas las cuales, como principal característica del sistema, muestran sensibilidad a las condiciones iniciales.

Más formalmente un atractor[7] lo definimos como un conjunto cerrado  $A$  en el

---

<sup>4</sup>Por lo que no existen trayectorias cerradas cercanas.

espacio fase que cumple con las siguientes propiedades:

1. **A es un conjunto invariante:** Cualquier trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  que comienza en  $A$  se mantiene en  $A$  para cualquier tiempo.
2. **A atrae a un conjunto abierto de condiciones iniciales:** Existe un conjunto abierto  $U$  que contiene a  $A$  tal que si  $\mathbf{x}(0) \in U$ , entonces la distancia de  $\mathbf{x}(t)$  a  $A$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto significa que  $A$  atrae todas las trayectorias que empiecen lo suficientemente cerca de él. Al conjunto  $U$  se le conoce como la cuenca de atracción del sistema.
3. **A es minimal:** No existe un subconjunto propio de  $A$  que satisfaga las condiciones 1 y 2.

### 1.1.1. Fase de un Oscilador

Matemáticamente un oscilador se puede describir como un sistema dinámico<sup>5</sup> en general no lineal al cual asociamos una trayectoria en el espacio fase que gira claramente alrededor de un centro por el cual la trayectoria nunca intersecta. Para los osciladores periódicos, el atractor correspondiente es una curva cerrada a la cual podemos asociar en forma natural un periodo, como el lapso de tiempo que el sistema toma para evolucionar a partir de un punto en el espacio fase y regresar a dicho punto y por tanto hay una frecuencia asociada.

---

<sup>5</sup>No todo sistema dinámico representa un oscilador como se podrá deducir a partir de nuestra presentación.

Por otro lado, a algunos sistemas caóticos podemos asociar una fase  $\phi$  instantánea y entonces hablar de un oscilador caótico, cuando las trayectorias cumplen con la definición dada para ser oscilador.

Para asociar una fase a un oscilador, en general existen varios posibles métodos [11]. A continuación se describen tres de ellos.

1. **Método 1.** Una definición intuitiva corresponde a asignar la fase  $\phi(t)$  [9] como el ángulo polar de la proyección de la trayectoria del atractor medido en el plano con coordenadas cartesianas  $(x(t), y(t))$ :

$$\phi(t) = \arctan \left[ \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \right], \quad (1.5)$$

donde  $(x_0, y_0)$  son las coordenadas del centro de rotación y  $\phi$  es una variable real continua en el rango  $-\infty < \phi < \infty$ .

Cuando podemos asociar una fase instantánea a un sistema caótico entonces podemos también asociar entonces una frecuencia angular instantánea del oscilador de la forma:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (1.6)$$

2. **Método 2.** La fase de un oscilador puede estimarse utilizando mapeos de Poincaré. Primero se requiere elegir adecuadamente un plano que interseque transversalmente el flujo del sistema. Determinando este plano subsecuentemente nos ocupamos en medir el tiempo entre las intersecciones consecutivas correspondientes a un solo sentido de las trayectorias respecto al plano, al cual llamamos

sección de Poincaré, y entonces definimos:

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad (1.7)$$

donde  $t_n$  es el tiempo que tarda en producirse el n-ésimo cruce con la sección de Poincaré y  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Este método presenta cierta simplicidad, pero debe usarse con cuidado, pues la elección de diferentes señales o superficies de Poincaré pueden dar diferentes resultados para la fase y por tanto para la frecuencia.

3. **Método 3.** Pikovsky *et. al* [11] propusieron otra definición para la fase de un oscilador particularmente para cuando el sistema es caótico, menos intuitiva pero más práctica, inspirada en el trabajo de Gabor [12] en el campo del procesamiento de señales. Este método se puede aplicar a cualquier variable de estado  $s(t)$ , del sistema a estudiar. Definimos la señal analítica como:

$$z(t) = s(t) + i s_H(t) = A(t) e^{i\phi(t)}, \quad (1.8)$$

donde  $s_H(t)$  es la transformada de Hilbert de  $s(t)$  definida por:

$$s_h(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{s(t')}{t-t'} dt' + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{s(t')}{t-t'} dt' \right]. \quad (1.9)$$

Notamos que la ecuación 1.9 es la convolución de  $s(t)$  con la función  $f(t) = 1/t$ .

Entonces, en este caso se define  $\phi(t)$  de la forma:

$$\phi(t) = \arctan \left[ \frac{s_H(t) - s_{H_0}}{s(t) - s_0} \right] \quad (1.10)$$

donde  $(s_0, s_{H_0})$  es el centro de giro del oscilador.

Para calcular la fase de un oscilador caótico cualquier coordenada puede tomarse como la señal  $s(t)$ . Por ejemplo, para el oscilador tipo Rossler [6] podemos tomar  $s_1(t) = x(t)$  ó  $s_2(t) = y(t)$ .

## 1.2. Teoría del Caos y Exponentes de Lyapunov

### 1.2.1. Dinámica Caótica

Se puede decir que el estudio de la dinámica caótica inicia con los trabajos del matemático francés Henri Poincaré, al estudiar el problema de los tres cuerpos. En estos trabajos Poincaré mostró que las órbitas planetarias (descritas por ecuaciones deterministas) a partir de ciertas condiciones iniciales evolucionan en órbitas con comportamientos impredecibles, ahora denominadas como caóticas.

Utilizaremos la definición de trabajo dada por Strogatz[7]: La dinámica caótica es un comportamiento fluctuante aperiódico que ocurre a tiempos largos en un sistema determinista y que exhibe una fuerte dependencia a las condiciones iniciales.

Explicamos la terminología involucrada:

1. **Tiene comportamiento asintótico de carácter aperiódico:** Las trayectorias que no tienden a puntos fijos, órbitas periódicas u órbitas cuasiperiódicas<sup>6</sup> para  $t \rightarrow \infty$ ,

---

<sup>6</sup>Definición de cuasiperiodicidad: Esta dinámica está caracterizada cuando en el sistema se pueden identificar 2 o más frecuencias  $\omega_i$  tales que  $\omega_i/\omega_j \notin \mathbb{Q}$  para  $i \neq j$ .

2. **Es determinista:** El sistema no está bajo el efecto de leyes de la probabilidad, por lo que el comportamiento irregular se debe solamente a la no-linealidad del sistema.
3. **Sensibilidad a condiciones iniciales:** Trayectorias que inicialmente son cercanas se separan una de otra exponencialmente, es decir: el sistema tiene asociado al menos un exponente positivo llamado de *Lyapunov*. El concepto y la forma de calcular los exponentes de Lyapunov serán abordados en la siguiente sección.

Por otro lado, un sistema caótico tiene asociado un atractor llamado extraño en el espacio fase, el término extraño está asociado a la fractalidad<sup>7</sup> del atractor.

### 1.2.2. Exponentes de Lyapunov

Para cuantificar y caracterizar las dinámicas caóticas es común utilizar los llamados exponentes de Lyapunov. En esta sección explicaremos los conceptos asociados [15] usando la metodología desarrollada por Wolf *et al.*[25].

Considérese un punto arbitrario  $x(0)$  que esté dentro de un atractor y sea  $S_d(0)$  una hiperesfera infinitesimal de dimensión  $d$  de radio  $R$  y centrada en  $x(0)$ . Todos los puntos  $y(0)$  que están dentro de  $S_d(0)$  son posibles condiciones iniciales que están en la vecindad de  $x(0)$ . Siguiendo la evolución temporal de  $x(t)$  a partir de  $x(0)$  y de los puntos dentro de  $S_d(0)$ , se crea una trayectoria de referencia que va de  $x(0)$  a  $x(t)$  mientras que

---

<sup>7</sup>Un fractal es un objeto geométrico en el que se repite el mismo patrón a diferentes escalas y diferente orientación. La dimensión asociada a estos objetos es fraccionaria.

la evolución de los puntos  $y(t)$  transforma  $S_d(0)$  en un hiperelipsoide  $E_d(t)$ , debido a que las trayectorias que inician en los puntos cercanos a  $y(0)$  divergen (convergen) a distinta velocidad, a lo largo de diferentes direcciones. Cada uno de los ejes de  $E_d(t)$  se asocia a una dirección principal y la variación de la longitud de cada eje,  $L_i(t)$ , comparada con su valor inicial  $R = \delta x_i(0)$ , determina el valor del exponente de Lyapunov correspondiente a la  $i$ -ésima dirección de la forma:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\delta x_i(t)}{\delta x_i(0)} \right) \right], \quad (1.11)$$

donde  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov.

Para un sistema cuya dinámica ocurre en un espacio fase de dimensión  $d$ , el espectro de Lyapunov, formado por los exponentes de Lyapunov  $\lambda_i$ , es un conjunto de  $d$  números reales,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ , ordenados del más grande al más pequeño, que cuantifican el promedio de divergencia a lo largo de las direcciones principales del hiperelipsoide ( $E_d(t)$ ). El *espectro de Lyapunov* entonces nos sirve para tener una descripción más completa y precisa sobre la estabilidad del sistema dinámico correspondiente.

De la ec. 1.11 se desprende que:

- a) Un crecimiento exponencial de  $L_i(t)$  provoca un  $\lambda_i$  positivo, asociado a una dinámica caótica en 3D o más o a dinámicas inestables en 2D y 1D.
- b) Cuando los valores de  $L_i(t)$  permanecen con valor  $R$ ,  $\lambda_i$  es nulo, asociado a un ciclo límite (2D o más).
- c) Un decremento exponencial de  $L_i(t)$  está asociado a un  $\lambda_i$  negativo, como en las dinámicas asociadas a un ciclo límite estable o puntos fijos estables.

Es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Cada sistema caótico tiene un espectro de exponentes de Lyapunov  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$ . El número de exponentes de Lyapunov es igual a la dimensión  $d$  del espacio fase.
- No existe una dirección estática definida para cada exponente de Lyapunov, ya que la dirección de los ejes del elipsoide cambian con el tiempo.
- Los exponentes de Lyapunov son cantidades basadas en mediciones locales (la hiperesfera y el hiperelipsoide son infinitesimales), para definir una dinámica global, al menos en la región donde está localizado el atractor estudiado.

Los signos de los exponentes de Lyapunov nos proporcionan una idea de cómo es la dinámica de un sistema. Por ejemplo para un sistema en 3D existen 4 posibles combinaciones de signo en los exponentes de Lyapunov:

1. (+,0,-): Cuando se tiene, al menos, un exponente positivo el sistema tiene asociado un atractor extraño.
2. (0,0,-): El atractor correspondiente es un toro de dimensión 2D.
3. (0,-,-): El sistema tiene un ciclo límite, por tanto está en régimen periódico.
4. (-,-,-): El atractor del sistema es un punto fijo.

Entonces, para sistemas con dimensión 3D o mayor, si existe al menos un exponente de Lyapunov positivo las trayectorias, que comienzan con condiciones iniciales

muy próximas, divergen exponencialmente en la dirección asociada y decimos que el sistema es caótico. De esta forma, los exponentes de Lyapunov nos proporcionan una caracterización de la dinámica del sistema.

Kantz y Schreiber [5] desarrollaron una metodología equivalente para determinar los exponentes de Lyapunov, considerando al sistema como un mapeo se llega a que la divergencia  $\delta_{n+1}$  entre dos trayectorias cercanas  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  en un espacio de dimensión  $d$  está dada por:

$$\delta_{n+1} = \sum_i \beta_i \Lambda_i \mathbf{e}_i, \quad (1.12)$$

donde  $\beta_i$  es un coeficiente de  $\mathbf{e}_i$ , correspondiente a un vector propio, y  $\Lambda_i$  es el valor propio ambos asociados a la matriz jacobiana  $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$  de dimensión  $d \times d$  evaluada en  $\mathbf{x}_n$  que resulta al linealizar el sistema.

La ecuación 1.12 únicamente proporciona una descripción local del comportamiento dinámico del sistema, pues  $\mathbf{J}_n$  depende de la posición. Para caracterizar todo el sistema es necesario introducir cantidades que no dependan de la posición, a estas cantidades se les llama globales.

El exponente de Lyapunov de un sistema de dimensión  $d$  se define como:

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_i^N|, \quad (1.13)$$

donde  $\Lambda_i$  está definida por la relación:

$$\prod_{n=1}^N \mathbf{J}_n \mathbf{u}_i^N = \Lambda_i^N \mathbf{u}_i^N. \quad (1.14)$$

En la ecuación 1.13  $\mathbf{J}_n$  es la matriz jacobiana de dimensión  $d \times d$  del sistema,  $\mathbf{u}_i$  son los vectores propios y  $\Lambda_i$  son los valores propios.

De las ecuaciones 1.13 y 1.14 se deduce que:

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{n=1}^N \mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_i \right|. \quad (1.15)$$

El conjunto de los  $d$  exponentes distintos constituyen el espectro de Lyapunov del sistema.

Para realizar el cálculo de los exponentes se integran las ecuaciones diferenciales para tiempos suficientemente largos. Pero, para evitar crecimientos demasiado rápidos, al igual que para el método de Wolf, cada determinado tiempo se renormalizan los vectores propios (direcciones propias) utilizando el procedimiento de Gram-Schmit.

En algunos casos el cálculo del espectro de Lyapunov resulta una tarea que consume mucho tiempo y recursos computacionales por lo que resulta mucho más fácil y rápido obtener el exponente maximal de Lyapunov. La forma de calcularlo que resulta más útil y menos demandante será abordado en la metodología para el caso de ecuaciones diferenciales con retraso (EDR).

### 1.2.3. Diagrama de Bifurcación y Análisis del Exponente Maximal de Lyapunov

Una bifurcación, en sistemas dinámicos, es un cambio dramático en la dinámica de un sistema provocado por la variación de uno o varios parámetros propios del sistema.

Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda), \quad (1.16)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro. Entonces, el diagrama de bifurcación es un gráfico que muestra los cambios y transiciones de la estabilidad del sistema conforme se varía  $\lambda$  en cierto intervalo. Para nuestro estudio variamos el parámetro  $\tau$ , pues nos importa conocer como evoluciona la dinámica del modelo conforme cambia el retraso temporal  $\tau$ . Es importante hacer notar que a través de un procedimiento puramente numérico sólo las órbitas estables son reflejadas. Se requieren procedimientos analíticos para poder obtener puntos fijos u órbitas inestables o semiestables. En este trabajo sólo nos enfocamos a los resultados numéricos.

## 1.3. Sincronización de Sistemas Dinámicos

### 1.3.1. Acoplamiento entre Sistemas Dinámicos

Se dice que dos o más sistemas están acoplados, si mediante algún proceso, químico, físico o de otra índole se les permite que exista una interacción entre ellos. Para modelar la interacción entre los sistemas se puede emplear una matriz de acoplamiento  $\gamma$ , en los casos más simples, con elementos de matriz constantes.

Independientemente del proceso que se use para acoplar a los osciladores, podemos clasificar en forma general al acoplamiento en dos tipos: unidireccional y bidireccional. Existen varias formas de acoplar dos sistemas [16], nosotros solo trabajaremos con el

llamado acoplamiento difusivo [17], el cual es utilizado en acoplamientos de sistemas químicos y biológicos, el cual lo detallamos más adelante.

### 1.3.1.1. Acoplamiento unidireccional

Cuando en un sistema compuesto por dos osciladores 1 y 2, el oscilador 1 controla la dinámica del oscilador 2 mientras que la dinámica del oscilador 1 no es afectada por el oscilador 2, se dice que existe un acoplamiento unidireccional entre los subsistemas. En la literatura a este tipo de acoplamiento también se le conoce como configuración maestro-esclavo. Si además el acoplamiento es de tipo difusivo podemos representar este acoplamiento de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\end{aligned}\tag{1.17}$$

donde  $\gamma$  puede ser una matriz simétrica con elementos constantes que describen la naturaleza del acoplamiento entre los osciladores. En el caso de osciladores con dimensión  $d = 3$ ,  $\gamma$  podemos construirla en la forma:

$$\gamma = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},\tag{1.18}$$

donde  $c_1, c_2$  y  $c_3$  son constantes. En el desarrollo de nuestro análisis el acoplamiento se aplica haciendo alguno de los valores  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) diferente de cero y los demás iguales a cero.

### 1.3.1.2. Acoplamiento bidireccional

En este acoplamiento el oscilador 1 tiene influencia sobre el oscilador 2, pero 2 también influye sobre 1. Podemos ahora representar el par de sistemas acoplados, en el caso difusivo, de la forma [17]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) + \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),\end{aligned}\tag{1.19}$$

donde  $\gamma$  es la matriz dada por la ecuación 1.18. Nuevamente en nuestro análisis podemos considerar por ejemplo  $c_1 > 0$  y  $c_2 = c_3 = 0$ .

### 1.3.2. Clasificación de la Sincronización de Sistemas Dinámicos

Cuando entre dos o más sistemas existe una interacción débil puede ocurrir que, mediante procesos internos, cada sistema modifique su dinámica alcanzando un estado en el que se puede establecer una relación funcional entre ambos sistemas [18]. Cuando existe dicha relación funcional decimos que los sistemas están sincronizados.

Existen varios tipos de sincronización, entre los más importantes tenemos:

- a) **Sincronización Completa.** Ocurre cuando dos, o más, sistemas dinámicos con condiciones iniciales diferentes, al interactuar uno con otro tienden en forma asintótica exactamente al mismo comportamiento tanto en amplitud como en fase, si es que esta última se puede determinar. En el caso de dos sistemas descritos por los vectores  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , para este tipo de sincronización  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ .

- b) **Sincronización de Fase.** Cuando la diferencia de fases de dos sistemas cumple con la condición de que  $|m\phi_1 - n\phi_2| \leq cte$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  se dice que los sistemas están bajo sincronización de fase [11]. A este estado también se le conoce como entrelazamiento de fases.
- c) **Sincronización Retrasada.** Ocurre cuando las fases y amplitudes de dos o más SD son idénticas pero a un tiempo de retraso  $\tau$ , más precisamente  $\mathbf{x}_1(t) \cong \mathbf{x}_2(t + \tau)$ . La sincronización lag o de retraso es un comportamiento dinámico que aparece como estado intermedio al ir aumentando la magnitud del acoplamiento en la transición de la sincronización de fase a la sincronización completa [11].

### 1.3.3. Sincronización de Sistemas Caóticos

Un sistema caótico tiene un comportamiento impredecible a largo plazo, debido a su sensibilidad a condiciones iniciales. Aunque la trayectoria de un sistema caótico evoluciona en forma acotada dentro de un atractor en el espacio fase, determinar dónde se encuentra el punto asociado a la trayectoria a un tiempo dado dentro de dicho atractor, conociendo una posición en el pasado, es un problema irresoluble debido al crecimiento exponencial de las soluciones conforme transcurre el tiempo.

Una manera de ilustrar esto es considerar la evolución en el espacio fase de dos sistemas idénticos lado a lado, ambos comenzando con condiciones iniciales muy cercanas entre ellas. Las trayectorias divergen una de la otra conforme transcurre el tiempo, aunque se encuentran en el mismo tipo de atractor. Aún bajo estas circunstancias, en

sistemas caóticos podemos inducir sincronización entre los sistemas introduciendo un acoplamiento entre ellos.

#### 1.3.4. Dinámica Sincronizada

Primero se analizará la sincronización de dos sistemas caóticos idénticos con una dinámica gobernada por un campo vectorial,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , en un espacio fase tipo  $\mathbb{R}^3$ .

Establecemos un acoplamiento difusivo bidireccional entre los dos osciladores de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) + \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),\end{aligned}\tag{1.20}$$

con  $\gamma$  constante; para el sistema descrito por la ecuación 1.20 el estado de sincronización completa se alcanza cuando:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t).\tag{1.21}$$

La evolución del sistema descrito por la ecuación 1.20 ocurre inicialmente en un espacio fase de dimensión  $6d$ . Al llegar al estado de sincronización el espacio fase asociado colapsa en un hiperplano  $\psi$  conocido como "hiperplano de sincronización".

Siguiendo el tratamiento de Pecora y Carroll [16], el espacio fase del sistema de los dos osciladores puede ser visto como la unión de dos subespacios [16]:

1. El espacio de sincronización  $\psi$  de dimensión  $D$  definido por la relación  $\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$ .

2. Un espacio ortogonal a  $\psi$  llamado espacio transverso, también de dimensión  $D$  definido por  $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ .

Para que el sistema sea estable los exponentes de Lyapunov transversos deben ser negativos [16]. Se ha encontrado que después de cruzar el cero cada exponente de Lyapunov transverso es numéricamente igual a algún exponente de Lyapunov asociado directamente al sistema en  $6d$  dimensiones [15].

Todo el procedimiento antes desarrollado se puede extender de manera directa a sistemas con un número  $n > 2$  de sistemas acoplados.

## Capítulo 2

# Dinámica de Sistemas no Lineales con Retraso Temporal (EDR's)

En este capítulo abordaremos algunos conceptos útiles asociados a los sistemas con retraso<sup>1</sup>. Las ecuaciones matemáticas que describen este tipo de sistemas, ecuaciones diferenciales con retraso (EDR), involucran la dependencia del sistema a estados anteriores del mismo. Existen varios tipos de EDR. Por ejemplo, consideremos la ecuación lineal escalar de primer orden:

$$f(t) = a_0 \frac{dx(t)}{dt} + a_1 \frac{dx(t - \tau)}{dt} + b_0 x(t) + b_1 x(t - \tau), \quad (2.1)$$

donde  $a_0, a_1, b_0$  y  $b_1$  son constantes y  $f(t)$  es un forzamiento. Para  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 = 0$  decimos que  $f(t)$  es una EDR retardada. Si  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 \neq 0$  entonces  $f(t)$  es EDR neutral y para  $a_0 = 0, a_1 \neq 0$   $f(t)$  pertenece al tipo de EDR avanzadas.

---

<sup>1</sup>Ver Lakshmanan *et al*[33] para mayor información.

En nuestro trabajo usamos ecuaciones diferenciales retrasadas del tipo retardadas a las que simplemente llamaremos EDR's.

La evolución de una variable dinámica correspondiente a un sistema EDR no solamente depende del valor en su estado presente (instantáneo),  $x(t)$ , sino también del valor de  $x(t - \tau)$  con  $\tau > 0$  el tiempo de retraso. Entonces, la solución dependiente del tiempo para un sistema de EDR's no solamente está determinada por su estado inicial en un único momento, sino que se tienen que considerar todos los estados iniciales que se encuentran dentro del intervalo infinito y continuo  $(t - \tau, t)$ . A este conjunto de estados iniciales le llamamos función inicial. Lo anterior provoca que los sistemas con EDR's sean de dimensión infinita, incluso aún cuando el sistema únicamente esté descrito por una ecuación escalar con retraso.

De manera general los sistemas asociados a EDR's (tipo retardados) se pueden representar de la forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t - \tau_i)), \quad (2.2)$$

donde  $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  y  $\tau_i > 0$  con  $i = 1, 2, \dots$ . Dentro de los sistemas con EDR's existen distintas categorías como:

1. Un retraso constante  $\tau = \tau_i$  para alguna y sólo una  $i$ .
2. Retrasos discretos  $\tau_i$  con  $i = 1, 2, \dots$
3. Retrasos distribuidos (representados por integrales de distribuciones temporales).
4. Retrasos dependientes del estado  $\tau = \tau(\mathbf{X})$ .

5. Retrasos dependientes del tiempo  $\tau = \tau(t)$ .

## 2.1. Ecuaciones Diferenciales con Retraso Constante

Comenzamos con abordar el problema de una EDR con un solo retraso constante para después generalizar a sistemas dinámicos descritos por sistemas de EDR's<sup>2</sup>. Consideremos la ecuación diferencial de primer orden con un solo retraso constante de la forma:

$$\dot{x} = F(t, x(t), x(t - \tau)). \quad (2.3)$$

Para generar las soluciones de la ec. 2.3 para  $t > 0$  es necesario definir la función inicial  $x(t')$  sobre cada punto del intervalo  $(-\tau, 0)$  lo cual, como ya mencionamos, provoca que el sistema tenga dimensión infinita. En la práctica recurrimos a una discretización en  $X$  y en  $t$ . De esta forma para cada punto  $x(t)$  requerimos la información de  $x(t - h)$  y  $x(t - \tau)$ .

Entonces, para calcular la solución  $x(t)$  de la EDR para valores mayores a  $t$  definimos una función  $x(t)$  arbitraria en el intervalo  $(-\tau, 0)$ . Esta función la aproximamos por  $N$  puntos tomados en intervalos temporales  $\Delta t = \frac{\tau}{N-1}$ :

$$(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) = f(x(t - (N - 1)\Delta t), \dots, x(t - \Delta t), x(t)) \quad (2.4)$$

Estos  $N$  puntos pueden verse como las  $N$  variables de un mapeo discreto de dimensión  $N$ .

---

<sup>2</sup>Con un sólo retraso constante.

Escogiendo algún método de integración como el método de Euler:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + F(x, x_\tau)\Delta t \quad (2.5)$$

con  $x_\tau = (x(t-\tau))$ . El procedimiento se puede reducir a un mapeo discreto N-dimensional iterativo  $x(k+1) = G(x(k))$ . Cada iteración del mapeo  $G$  corresponde a  $N$  pasos de tiempo  $\Delta t$  de la ecuación continua.

Una vez que se tiene el algoritmo numérico para obtener las soluciones de la EDR podemos proceder a calcular por algún método los exponentes de Lyapunov. En general las EDR exhiben enormes efectos transientes. El número de puntos del transiente depende del paso de integración  $\Delta t$ , el número de ecuaciones acopladas y la naturaleza de la función no lineal.

## 2.2. Exponentes de Lyapunov para una EDR

Una ecuación diferencial con retraso (EDR) de la forma

$$\dot{X} = F(t, X(t), X(t - \tau)) \quad (2.6)$$

se puede aproximar mediante las iteraciones de un mapeo N-dimensional de la forma  $X(K+1) = G(X(K))$ .

Los exponentes de Lyapunov del mapeo N-dimensional se pueden obtener calculando una trayectoria de referencia y las trayectorias ligeramente separadas a ésta de manera simultánea para cada una de las condiciones iniciales que definen un marco de referencia orientado arbitrariamente.

Tambi3n se pueden obtener calculando la evoluci3n de una esfera de volumen infinitesimal formada por un conjunto de vectores  $\delta x$  separados infinitesimalmente que evolucionan como

$$\delta x(k+1) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial G(x(k))}{\partial x_i(k)}. \quad (2.7)$$

Para evitar problemas computacionales relacionados con el c3lculo de las trayectorias adyacentes la evoluci3n de las separaciones infinitesimales se pueden calcular directamente de la ec. 2.7.

La evoluci3n de los semiejes de la hiperelipsoide  $\delta x^i$  infinitesimal correspondiente a la EDR continua se puede escribir como

$$\frac{d\delta x^i}{dt} = \frac{\partial F(x^i, x_\tau)}{\partial x} \delta x^i + \frac{\partial F(x, x_\tau)}{\partial x_\tau} \delta x_\tau^i, \quad (2.8)$$

Existen  $N$  de tales semiejes asociados a cada coordenda del sistema  $N$ -dimensional correspondiente a los  $N$  exponentes de Lyapunov.

Si  $\delta x^i(k)$  denota la colecci3n de todas las separaciones de la  $i$ -3sima coordenada durante la  $k$ -3sima iteraci3n, el exponente de Lyapunov ser3

$$\lambda_i = \frac{1}{L_\tau} \sum_{k=1}^L \log \frac{\|\delta x^i(k)\|}{\|\delta x^1(k-1)\|}. \quad (2.9)$$



# Capítulo 3

## Modelos

En primer lugar estudiamos el modelo de Mackey-Glass (MG) porque fue uno de los trabajos pioneros en mostrar que un retraso temporal es capaz de modificar notablemente la dinámica de un sistema[28]. Posteriormente aplicamos los conocimientos aprendidos, después de trabajar con el modelo MG al modelo de Rossler. Usamos el modelo de Rossler[6] porque es un modelo muy bien comprendido, con el que es relativamente sencillo comparar y extrapolar resultados. Finalmente trabajamos con el modelo propuesto por FitzHugh-Nagumo[26] ya que nuestro objetivo final es estudiar los efectos causados por el retraso temporal en la dinámica de un sistema excitable.

### 3.1. Modelo de Mackey-Glass

En 1977 Michael Mackey y Leon Glass presentaron un modelo matemático[28] que permite ilustrar la aparición de dinámicas complejas en sistemas de control fisiológicos

al presentarse bifurcaciones en la dinámica. En su trabajo ellos sugieren que muchos trastornos fisiológicos, nombrados como enfermedades dinámicas, pueden caracterizarse por cambios en la dinámica del sistema. Es decir, cambios cualitativos en la dinámica fisiológica corresponden a bifurcaciones de la dinámica del sistema. Estas bifurcaciones pueden ser inducidas por cambios en los parámetros del sistema y que pueden vincularse con: enfermedades, drogas, cambios en la estructura del sistema, etc.

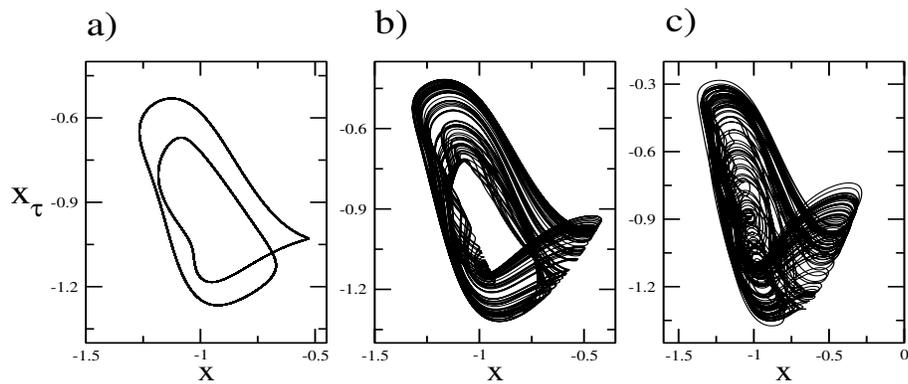
El modelo de MG[28] está representado por la EDR adimensional:

$$\frac{dx}{dt} = -bx + \frac{ax_\tau}{1 + x_\tau^c}. \quad (3.1)$$

Originalmente fue propuesto para explicar la producción de sangre en pacientes con leucemia donde  $a, b$  y  $c$  son constantes positivas,  $x$  representa la concentración de sangre al tiempo  $t$  en el flujo sanguíneo,  $x_\tau = x(t - \tau)$  es la concentración de sangre cuando la médula ósea da la señal de que se necesita más sangre y  $\tau$  es el tiempo en que  $x_\tau$  tarda en incorporarse al flujo sanguíneo.

A pesar de que el modelo de Mackey-Glass es un modelo simple, una sólo ecuación escalar, puede generar comportamientos dinámicos tan complejos tales como el caótico. La gran diferencia de este modelo, comparado con otros de baja dimensionalidad como el de Rossler[6], es que las ecuaciones diferenciales con retraso temporal (EDR) son intrínsecamente de dimensión infinita. Como ya vimos, esto se debe a que para resolver las EDR's es necesario especificar una función inicial  $x_\tau$  definida en el intervalo de tiempo  $[-\tau, 0]$  para que la solución esté bien definida y la ecuación se pueda integrar.

Doyne Farmer caracterizó la dinámica caótica del modelo de Mackey-Glass calculando el espectro de Lyapunov correspondiente [29][30].



**Figura 3.1:** Proyecciones del atractor de Mackey-Glass en el plano  $x_\tau$  vs  $x$  para distintos valores de retraso temporal: **a)**  $\tau = 14$ , **b)**  $\tau = 147$  y **c)**  $\tau = 23$ .

En la figura 3.1<sup>1</sup> se observa que conforme incrementa el valor del retraso temporal  $\tau$  la dinámica del sistema se hace más compleja hasta llegar a un estado caótico. Este sistema también puede ser llevado a una dinámica caótica al variar el valor de la constante  $c$  de la ec. 3.1 mientras  $\tau$  se mantiene constante.

<sup>1</sup>Curiosamente para obtener las gráficas presentadas por Mackey-Glass en realidad se gráfica  $-x_\tau$  vs

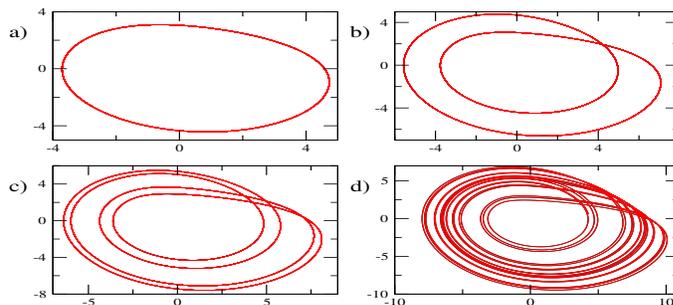
### 3.2. Modelo de Rossler

En 1976 O. E. Rossler presentó un modelo no lineal de tres ecuaciones acopladas [6]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros del sistema.

Una de las características que hace que este modelo sea interesante es que, conforme se varía uno de los parámetros, manteniendo los otros fijos, el sistema muestra diferentes tipos de comportamiento dinámico, alcanzando el caos a través de la ruta de duplicación de periodo. En la figura 3.2 se muestran proyecciones del atractor en el plano  $xy$  del espacio fase fijando  $a = b = 0.2$  mientras  $c$  va tomando diferentes valores.



**Figura 3.2:** Proyecciones en el plano  $xy$  de: Ciclos límite **a)-c)** y proyección del atractor extraño:

**a)** periodo 1 ( $c=2.5$ ), **b)** periodo 2 ( $c=3.5$ ), **c)** periodo 4 ( $c=4$ ), **d)** atractor extraño ( $c=5$ ).

Para estudiar los efectos que produce el retraso temporal sobre este sistema analizamos cuatro variantes del mismo, las cuales planteamos a continuación. Cabe mencionar que para cada variante se estudiaron distintas configuraciones pero aquí sólo reportamos las que presentaron dinámicas más interesantes para nuestro estudio.

### 3.2.1. Retraso Temporal en una Variable

El modelo conserva su forma original pero una de las variables en alguna de las ecuaciones se cambia por una variable con retraso temporal. Uno de los modelos estudiados queda descrito por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_{2\tau} \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Nótese que en la segunda ecuación del sistema se intercambia la variable  $x_2$  por la variable  $x_{2\tau} = x_2(t - \tau)$ .

### 3.2.2. Retroalimentación Lineal Retrasada

Al modelo original de Rossler (ec. 3.2) se le agrega un forzamiento lineal en la primer ecuación. Para este forzamiento se introduce un término de la forma  $\alpha x_{1\tau}$ , donde  $\alpha$  es una constante y para evitar que el sistema diverja pedimos  $\alpha < 1$ . Las ecuaciones

correspondientes son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \alpha x_{1\tau} \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\
 \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c).
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

### 3.2.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada

Ahora se agrega un forzamiento senoidal  $\alpha \sin(kx_{1\tau})$  con  $\alpha = 1$  y  $k$  constantes en la primer ecuación. Lo anterior queda descrito por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \alpha \sin(kx_{1\tau}) \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\
 \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c).
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

### 3.2.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD

Finalmente analizamos el comportamiento dinámico de dos sistemas tipo Rossler acoplados difusiva y bidireccionalmente, pero con la particularidad de que en el término de acoplamiento se ha introducido la variable retrasada  $x_{1\tau}$ . Este ensamble

queda determinado por el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \gamma(x_4 - x_{1\tau}) \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\
 \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c) \\
 \dot{x}_4 &= -x_5 - x_6 + \gamma(x_{1\tau} - x_4) \\
 \dot{x}_5 &= x_4 + ax_5 \\
 \dot{x}_6 &= b + x_6(x_4 - c),
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes del sistema,  $\gamma$  es la constante de acoplamiento y  $x_{1\tau}$  es la única variable con retraso temporal. Las primeras tres ecuaciones corresponden al sistema 1 y las restantes al sistema 2.

### 3.3. Modelo de FitzHugh-Nagumo

En 1961, R. FitzHugh[26] y J. Nagumo[26] propusieron un modelo para emular la señal electroquímica que se observa en las células excitables de un organismo vivo, particularmente en el axón de un calamar gigante. Este modelo es una versión más simple del propuesto por Hodgkin-Huxley[27] el cual simula las corrientes de interacción entre neuronas.

A continuación describimos brevemente el proceso fisiológico simulado por el modelo de FitzHugh-Nagumo. Las células nerviosas están separadas de la región extracelular mediante una membrana bicapa lipídica. Cuando las células no están conduciendo una

señal, existe una diferencia de potencial de aproximadamente  $-70$  mV a través de la membrana. Esta diferencia se conoce como el potencial de reposo de la célula. Los iones minerales, como el sodio y el potasio, además de los iones proteicos cargados negativamente, contenidos dentro de la célula, mantienen el potencial de reposo. Cuando la célula recibe un estímulo externo, su potencial se dispara hacia un valor positivo, un proceso conocido como despolarización acompañado por la transferencia de iones, antes de caer de nuevo al potencial de reposo, llamado repolarización regresando los iones a la región inicial.

La concentración de iones de sodio en reposo es mucho más alta en la región extracelular que dentro de la célula. La membrana contiene canales de acceso que permiten selectivamente el paso de iones a través de ellos. Cuando se estimula la célula, los canales de sodio se abren y hay una avalancha de iones de sodio en la célula. Esta corriente de sodio aumenta el potencial de la célula, dando como resultado la despolarización. Sin embargo, dado que las compuertas del canal son accionadas por la diferencia de potencial, las compuertas de sodio se cierran después de un tiempo. Los canales de potasio se abren y fluye una corriente de potasio saliente, que conduce a la repolarización de la célula.

Hodgkin y Huxley implementaron[27] este mecanismo de generación de potencial de acción a través de ecuaciones matemáticas. Aunque esto fue un gran éxito en el modelado matemático de fenómenos biológicos, el modelo completo de Hodgkin-Huxley es bastante complicado. Por otro lado, el modelo FitzHugh-Nagumo es relativamente simple ya que consta de menos parámetros y sólo dos ecuaciones: una para la cantidad

$V$ , que imita el potencial de acción, y la otra para la variable  $W$ , que modula a  $V$ . El modelo queda determinado por el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= V - \frac{V^3}{3} - W + I, \\ \frac{dW}{dt} &= \epsilon(V + a - bW).\end{aligned}\tag{3.7}$$

El parámetro  $I^2$  corresponde a una excitación, mientras que  $a$  y  $b$  son parámetros del modelo. La dinámica del sistema evoluciona en dos escalas temporales ya que la evolución de  $W$  es más lenta que la evolución de  $V$  debido al parámetro  $\epsilon$  que multiplica los términos del miembro derecho de la segunda ecuación.

Los puntos de equilibrio de este modelo son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}0 &= V - \frac{V^3}{3} - W + I \\ 0 &= V + a - bW,\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde la curva cúbica  $V - \frac{V^3}{3} - W + I$  es la nullclina de  $V$  y la línea recta  $V + a - bW$  es la nullclina de  $W$  en el plano  $VW$ . La pendiente de la recta  $V + a - bW$  se controla para que las nullclinas se intersecten en un sólo punto, provocando que el sistema tenga un único punto fijo.

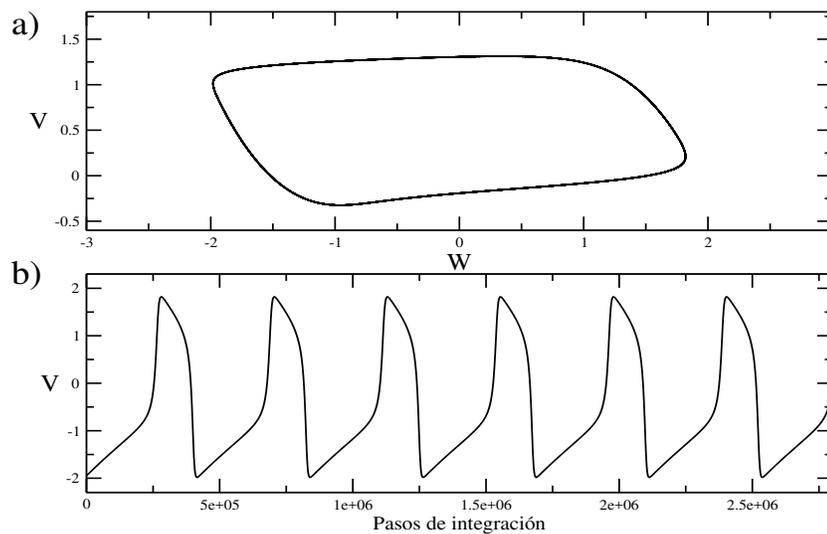
El parámetro  $I$  simplemente corre la nullclina de  $V$  hacia arriba o hacia abajo. Entonces, cambiando el valor de  $I$  se obliga a que el punto fijo esté a la izquierda, a la mitad o a la derecha de la curva  $V - \frac{V^3}{3} - W + I$ .

El modelo de FitzHugh-Nagumo es un ejemplo de un oscilador excitable, ya que si un estímulo externo es aplicado instantáneamente considerando como condición inicial el

---

<sup>2</sup> $I$  es el parámetro de control del sistema,

punto fijo, el sistema exhibirá una gran excursión en el espacio fase y regresará al estado inicial. Por otro lado, al aumentar  $I$  manteniéndolo constante en el tiempo y sobrepasar un valor umbral el punto fijo cambiará de estabilidad dando lugar a la aparición de un ciclo límite, como el mostrado en la parte superior de la figura 3.3.



**Figura 3.3:** **a)** Atractor característico (ciclo límite) del modelo FitzHugh-Nagumo. **b)** Serie de tiempo de la variable  $V$ .

Para simular numéricamente este modelo (fig. 3.3), usamos las ecuaciones 3.7 haciendo el cambio de variables  $x_1 = V$  y  $x_2 = W$ , quedando de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - x_2 + I, \\ \dot{x}_2 &= c(x_1 + a - bx_2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros del sistema, mientras que  $I$  es el estímulo externo (parámetro de control).

Es importante remarcar que dado que el sistema solamente está dado por dos ecuaciones (2D) no puede presentar comportamiento caótico por si mismo. Esta última es una de las razones importantes por las que escogimos estudiar este modelo, esperando ver una transición al caos debida a un retraso introducido en alguno de los esquemas planteados y estudiar así mecanismos correspondientes.

### 3.3.1. Retraso Temporal en una Variable

Al modelo original de Fitzhug-Nagumo (ecuaciones 3.9) añadimos un retraso temporal en la variable  $x_1$ , que denotamos como  $x_{1\tau}$ , en la segunda ecuación. Esta nueva configuración queda dada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + I, \\ \dot{x}_2 &= c(x_{1\tau} + a - bx_2),\end{aligned}\tag{3.10}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros del sistema, mientras que  $I$  es el estímulo externo (parámetro de control).

También probamos introduciendo el retraso en la primer ecuación del modelo original, pero esto provocó que el sistema divergiera muy rápido. Así mismo, es posible trabajar con un retraso  $x_{2\tau}$  siempre y cuando se introduzca en la segunda ecuación del modelo de Fitzhug-Nagumo.

### 3.3.2. Retroalimentación Lineal Retrasada

Estudiamos la dinámica del modelo original de Fitzhug-Nagumo (ecuaciones 3.9) al introducir un término de retroalimentación lineal con retraso de la forma  $\alpha x_\tau$  donde  $0 < \alpha < 1$  es una constante positiva y  $x_\tau$  es la variable con retraso temporal asociada a  $x_1$  ó  $x_2$ .

Este nuevo modelo resulta ser muy inestable y diverge rápidamente sin importar en cual ecuación se agregue el término de retroalimentación. Una posible solución a este problema, la cual no realizamos, es que la constante  $\alpha$  sea menor que cero.

### 3.3.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada

En la primer ecuación del modelo original propuesto por Fitzhugh-Nagumo (ec. 3.7) agregamos un término adicional que es una función senoidal con retraso temporal en la variable  $x$  ( $x_\tau$ ) como argumento. Este modelo queda determinado por el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + I + \alpha \sin(kx_{2\tau}), \\ \dot{x}_2 &= c(x_1 + a - bx_2),\end{aligned}\tag{3.11}$$

tomando  $a = 0.7, b = 0.8, c = 0.08, I = 0.4, \alpha = 1.0$  y  $k = 1$ .

### 3.3.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD

Consideramos dos sistemas FitzHugh-Nagumo con un acoplamiento difusivo bidireccional en la primer variable de cada sistema. El término de acoplamiento contiene

la variable  $x_\tau$  que representa un retraso temporal en la variable  $x$  del primer sistema, quedando las ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + I_1 + \gamma(x_3 - x_{1\tau}), \\ \dot{x}_2 &= c_1(x_1 + a - bx_2), \\ \dot{x}_3 &= x_3 - \frac{1}{3}x_3^3 - x_4 + I_2 + \gamma(x_{1\tau} - x_3), \\ \dot{x}_4 &= c_2(x_3 + a - bx_4),\end{aligned}\tag{3.12}$$

tomando  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $c_1 = 0.04$ ,  $c_2 = 0.08$ ,  $I_1 = 0.2$ ,  $I_2 = 0.4$  y  $\gamma = 0.05$ .



# Capítulo 4

## Metodología

Para comenzar a estudiar los efectos producidos por un retraso  $\tau$  en la dinámica de un sistema utilizamos dos herramientas: El diagrama de bifurcación del sistema y el exponente maximal de Lyapunov. Posteriormente, para caracterizar cada uno de los estados presentes en el sistema dinámico usamos otros métodos aplicables a series de tiempo, los cuales se describen en las siguientes secciones. Generamos las series de tiempo al integrar numéricamente, utilizando un método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4), las ecuaciones diferenciales que corresponden al sistema estudiado. Todos los programas empleados en este trabajo fueron elaborados en Fortran.

## 4.1. Métodos de Análisis

### 4.1.1. Series de Tiempo y Espacio Fase del Sistema

El espacio fase de un sistema es un concepto que fue desarrollado a finales del siglo XIX por Ludwig Boltzmann, Henri Poincare y Willard Gibbs[31]. En teoría de sistemas dinámicos el espacio fase es el espacio que contiene al conjunto de todos los estados posibles que el sistema puede tener; y cada estado del sistema corresponde a un único punto del espacio fase.

El número de grados de libertad de un sistema dinámico, es decir, el número de variables necesarias para describir completamente al sistema, es igual a la dimensión de su espacio fase. Por lo tanto un espacio fase puede ser de dimensión finita o infinita como en el caso de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales con retraso (EDR).

Entonces, después de un tiempo suficientemente largo en la evolución del sistema, el conjunto de puntos del espacio fase corresponde al atractor del sistema dinámico. A partir de la topología del atractor podemos darnos una idea del comportamiento dinámico del sistema. Por ejemplo, si el atractor muestra trayectorias cerradas definidas se infiere que el sistema está en régimen periódico.

Al analizar las series de tiempo del sistema, obtenidas por integración numérica de las EDR's, también podemos clasificar la dinámica del sistema utilizando otras técnicas que a continuación abordamos.

### 4.1.2. Gráficos $x_2$ vs. $x_1$

Estos gráficos nos resultan especialmente útiles en el estudio de SD's acoplados ya que, por ejemplo, cuando dos sistemas logran estar completamente sincronizados significa que tienen exactamente el mismo comportamiento y por tanto sus series de tiempo deben ser idénticas. Entonces en una gráfica tal como  $x_2$  vs  $x_1$  correspondiente a la serie de tiempo del sistema 2 contra la serie de tiempo del sistema 1, el resultado debe ser un segmento de la función identidad. Cuando en estas gráficas las series de tiempo aparecen con estructuras cerradas alrededor de la función identidad existe sincronización de fase entre los sistemas, o posiblemente sincronización retrasada si las estructuras están muy cerca del segmento correspondiente a la diagonal.

### 4.1.3. Transformada de Fourier y Espectro de Potencias

La transformada de Fourier (TF) es una técnica que permite describir cualquier función  $f(t)$ , periódica o no, en términos de funciones trigonométricas (senos y cosenos).

La transformada está definida por la relación:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (4.1)$$

Con esta herramienta podemos pasar una función que originalmente está en el dominio del tiempo a una representación en el dominio de frecuencia. Esta acción es reversible aplicando la transformada inversa de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.2)$$

La ecuación 4.1  $f(t)$  es una transformada continua, pues  $f(t)$  se integra sobre todo el espacio y además debe ser integrable en el sentido de la integral de Lebesgue<sup>1</sup>. Para implementar numéricamente la ecuación 4.1 tenemos que considerar su versión discreta ya que nuestras series de tiempo ya son discretas. A esta versión se le conoce como *transformada de Fourier discreta* (TFD):

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad (4.3)$$

donde  $X_k$  representa la amplitud y fase de diferentes componentes sinusoidales de la señal discreta de entrada  $x_n$ . La TFD solamente evalúa los componentes frecuenciales que son suficientes para reconstruir el segmento finito que se está analizando. Una forma de calcular eficientemente la TFD es utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (TRF).

El espectro de Fourier se obtiene al graficar la amplitud de cada una de las frecuencias asociadas, obtenidas mediante la TRF. Entonces el espectro de Fourier nos sirve para determinar si una señal es periódica, ya que en este caso el espectro es de carácter discreto al tener frecuencias principales y quizá subarmónicos.

El espectro de potencias se obtiene al graficar el cuadrado de la amplitud de las frecuencias correspondientes contra la frecuencia correspondiente. Entonces, el espectro de Fourier y el espectro de potencias básicamente proporcionan la misma información.

En nuestro análisis tomamos una serie de tiempo correspondiente al sistema diná-

---

<sup>1</sup>La integración de Riemann no funciona bien al tomar límites de sucesiones de funciones como en el estudio de las series de Fourier, la transformada de Fourier y otros. La integral de Lebesgue, que es una extensión más general de la integral de Riemann, resuelve estos problemas.

mico estudiado y calculamos su espectro de potencias, como ya mencionamos. Si el sistema está en régimen periódico su espectro de potencias es discreto. En cambio si el sistema está en régimen caótico el sistema cuenta con una contribución continua de frecuencias y por tanto el espectro de potencias es continuo. A este espectro le llamamos *espectro total*.

Desafortunadamente, este método no es capaz de distinguir entre un sistema caótico y algunos cuasiperiódicos o un sistema con carácter estocástico. Como sólo nos interesan en este estudio los sistemas deterministas, es muy útil poder determinar si hay dinámica cuasiperiódica en un sistema.

#### 4.1.4. Identificación de Sistemas Cuasiperiódicos

Como discutimos en la sección anterior, el espectro de potencias no sirve para diferenciar un régimen caótico de régimen cuasiperiódico pues ambos regímenes poseen un espectro de potencias continuo. Para resolver este problema utilizamos un nuevo método establecido por Suzuki *et. al.*[32]: Tomamos una serie de tiempo del sistema dinámico y a partir de ésta creamos una nueva serie de datos que contenga únicamente los máximos y mínimos de las oscilaciones de la serie de tiempo del sistema. Calculamos el espectro de potencia de la serie que contiene los máximos y mínimos respetando su ordenamiento temporal, al que llamamos espectro máximo-mínimo, y si el sistema es caótico el espectro de potencias nuevamente será continuo, pero si el sistema está en régimen cuasiperiódico el espectro de potencias tendrá grandes contribuciones discretas aunque tenga pequeñas contribuciones continuas.

### 4.1.5. Diagrama de Bifurcación y Análisis del Exponente Maximal de Lyapunov

Para analizar la periodicidad en series de sistemas continuos daremos una definición alternativa que utilizamos en este trabajo. Decimos que un sistema periódico tiene periodo 1 cuando en cada ciclo de su serie de tiempo aparece un máximo y un mínimo. Así mismo un sistema periódico será periodo 2 si posee dos máximos distintos y dos mínimos distintos en cada ciclo. De manera general un sistema periódico tiene periodo  $n$  si para cada ciclo tiene contenidos  $n$  máximos distintos y  $n$  mínimos distintos.

El diagrama de bifurcación<sup>2</sup> se obtiene al graficar los máximos y mínimos de la serie de tiempo para cada valor de  $\tau$  ( $\tau$  es el retraso temporal). Por ejemplo, para un sistema de periodo 1 aparecerán dos puntos en el diagrama de bifurcación: un máximo y un mínimo. Para un periodo 2 parecerán 4 puntos: dos máximos y dos mínimos.

Cuando el sistema tiene comportamiento caótico aparecen zonas densas de puntos en el diagrama de bifurcación. Desafortunadamente, para dinámicas cuasiperiódicas y tipo ráfaga de disparos (bursting)<sup>3</sup> también aparecen zonas densas. Por lo tanto este diagrama no es útil para caracterizar tales dinámicas. El exponente maximal de Lyapunov se calcula para valores distintos de  $\tau$  y así se obtiene un diagrama donde podemos localizar las bifurcaciones del sistema. En base a este diagrama se estudian zonas de interés, como aquellas donde el exponente cruza por cero.

---

<sup>2</sup>De manera formal es un diagrama orbital, pues no consideramos órbitas inestables

<sup>3</sup>Se dice que un sistema exhibe un comportamiento de ráfaga de disparos (bursting) cuando su actividad alterna entre un estado de reposo y un estado de actividad [34].

# Capítulo 5

## Resultados

Para estudiar el papel que juega el retraso temporal en los cambios de la dinámica asociados consideramos diversas configuraciones y variaciones para cada modelo utilizado. Sin embargo, en este capítulo solamente presentamos aquellos resultados que son relevantes para nuestro estudio.

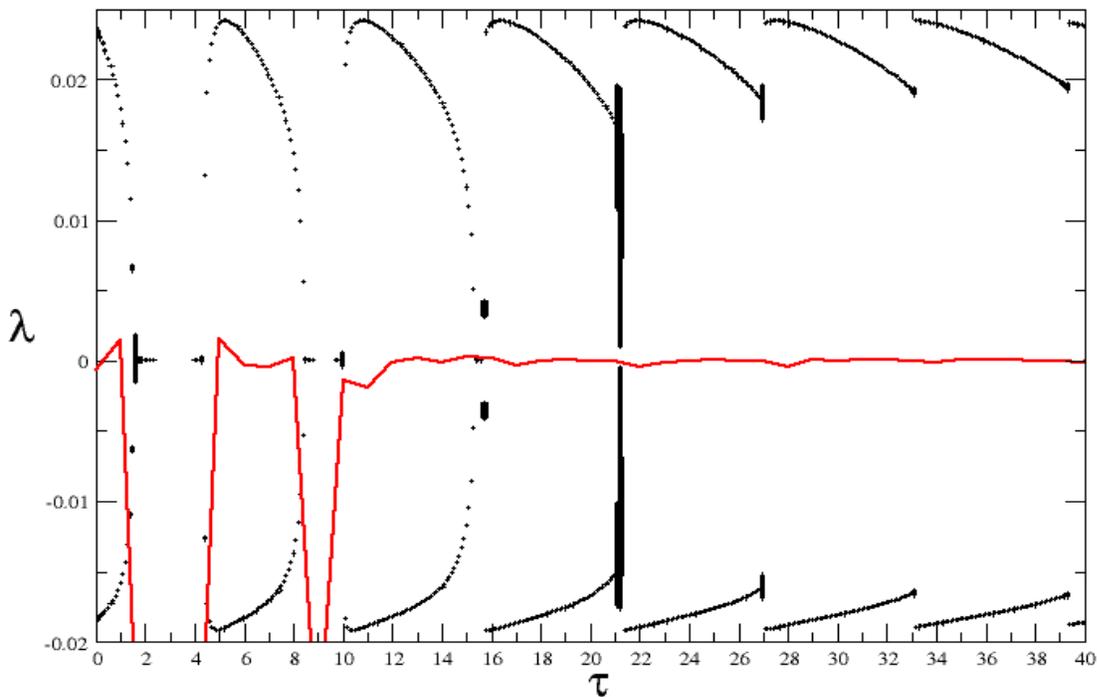
### 5.1. Sistemas Tipo Rossler

Considerando las configuraciones descritas en la sección 3.2 fijamos los parámetros  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y, para que los sistemas tengan diferentes dinámicas iniciales, el parámetro  $c$  toma diferentes valores:  $c = 2.5$  (periodo 1),  $c = 3.5$  (periodo 2),  $c = 4$  (periodo 4) y  $c = 5.7$  (dinámica caótica). Se escogieron estos regímenes para estudiar a profundidad los efectos producidos en la dinámica al introducir un retraso temporal constante. A continuación reportamos los resultados obtenidos en cada uno de los

cuatro estados iniciales (valores de  $c$ ) para cada una de las configuraciones de los sistemas explorados.

### 5.1.1. Retraso Temporal en una Variable

#### 5.1.1.1. Estado Inicial: Periodo 1

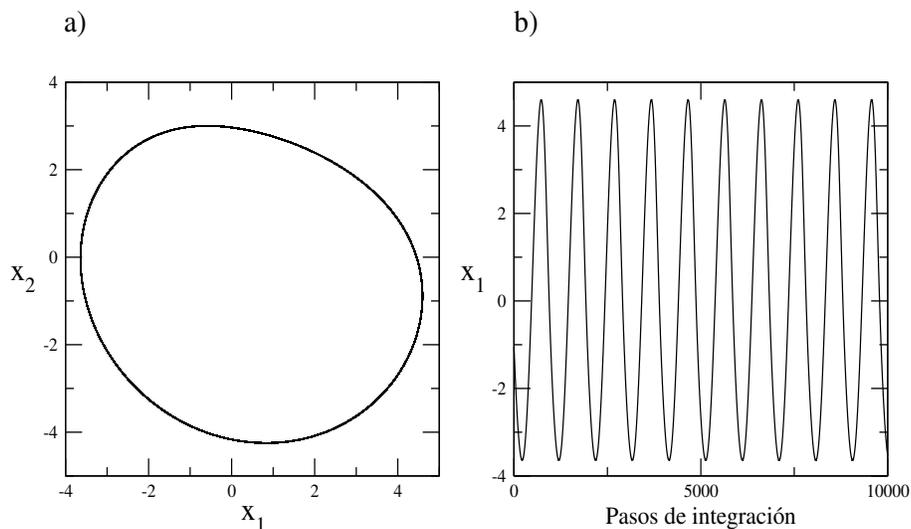


**Figura 5.1:** Diagrama de bifurcación y exponente máximo de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente periodo 1 con retraso temporal en una variable.

Este sistema está representado por las ecuaciones 7.1 e inicialmente tiene una dinámica de periodo 1 ( $c = 2.5$ ). A medida que se incrementa el retraso temporal  $\tau$  en

la variable  $x_{1\tau}$  el sistema sufre cambios en su dinámica. En la gráfica 5.1 mostramos el diagrama de bifurcación y el exponente maximal de Lyapunov para este sistema. Como se puede observar el exponente maximal de Lyapunov mantiene un valor constante después de  $\tau = 12$ , con muy pequeñas fluctuaciones, alrededor del valor cero. Esto indica que a partir de este valor, a pesar del incremento de  $\tau$ , el sistema mantiene una dinámica no caótica. Sin embargo aparecen comportamientos interesantes.

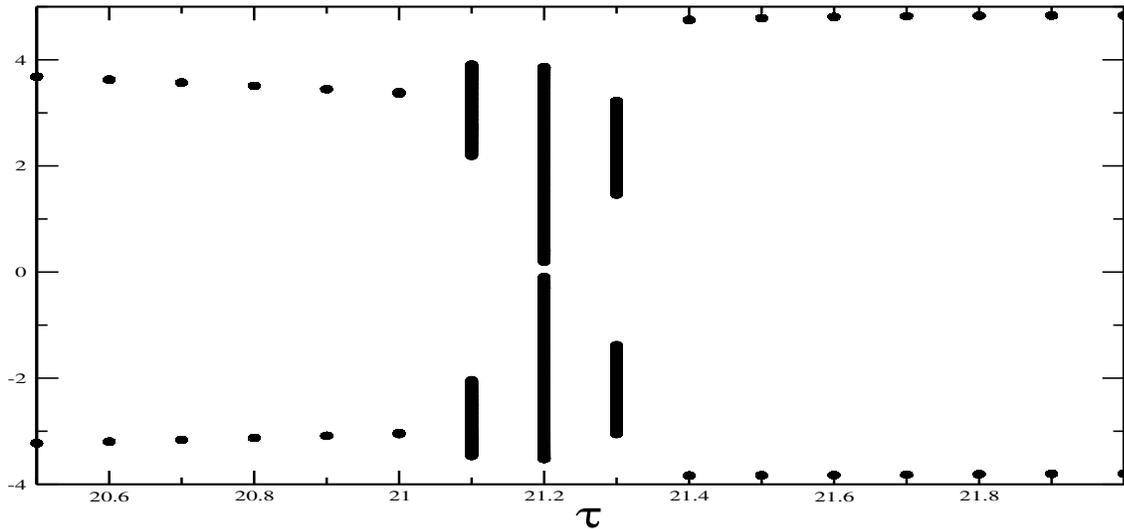
En la figura 5.2 mostramos el atractor, panel a), y serie de tiempo, panel b), del sistema cuando  $\tau = 12$ . El sistema está en periodo 1, lo cual concuerda con el diagrama de bifurcación.



**Figura 5.2:** Diagrama  $x_2$  vs  $x_1$  y series de tiempo para un sistema Rossler inicialmente en un comportamiento con periodo 1 con retraso temporal en una variable ( $\tau = 12.0$ ).

Cuando el sistema tiene un retraso temporal en el rango  $\tau \in [2.4, 3.0]$  la amplitud de la oscilación casi desaparece y el exponente de Lyapunov alcanza el mínimo global con  $\lambda = -0.16$  para  $\tau = 3$ . Posteriormente con  $\tau \in [3.1, 3.9]$  la amplitud de la oscilación se va

incrementando pero permaneciendo en una dinámica con periodo 1. Estos cambios en la magnitud de la amplitud aparecen de forma gradual. Este comportamiento se repite para  $\tau \in [8.53, 9.56]$  donde para  $\tau = 9$  hay un mínimo local con  $\lambda = -0.02$ .



**Figura 5.3:** Acercamiento al diagrama de bifurcación para un sistema Rossler periodo 1 con retraso temporal en una variable, en el intervalo  $\tau \in (20.4, 22.0)$ .

A pesar de que en la región cercana a  $\tau = 21$  aparece una zona densa en el diagrama de bifurcación el sistema no es caótico pues el exponente maximal de Lyapunov sigue siendo cero. Al calcular la transformada de Fourier para estos se obtiene un espectro discreto con sólo dos picos, lo cual nos dice que el sistema está en régimen periódico. En la figura 5.5 mostramos la transformada de Fourier para  $\tau = 21.2$ .

En la figura 5.3 se hace un acercamiento a esa región y la figura 5.4 muestra proyecciones de los atractores y series de tiempo correspondientes. En el panel **b)** se observa que para  $\tau = 21.2$  aparece un comportamiento de *bursting* en el sistema que desaparece para  $\tau = 21.3$ .

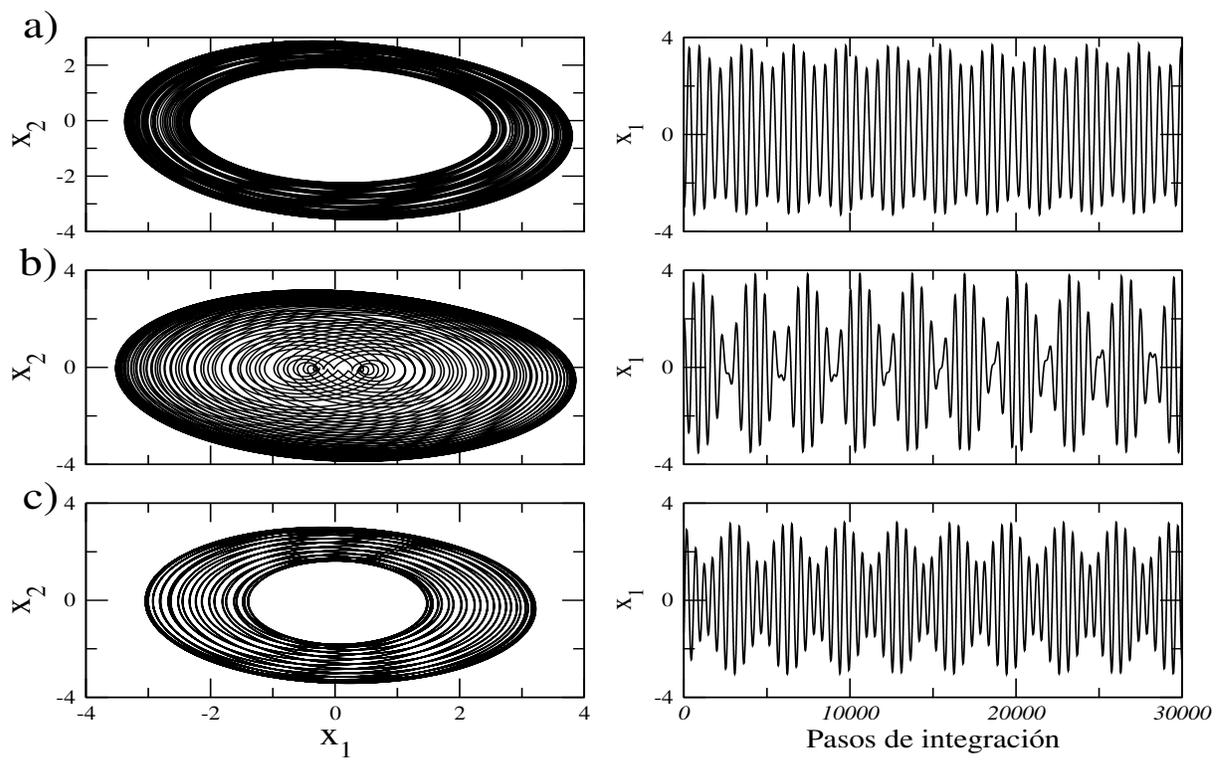


Figura 5.4: Diagramas  $x_2$  vs  $x_1$  y series de tiempo para a)  $\tau = 21.1$ , b)  $\tau = 21.2$  y c)  $\tau = 21.3$ .

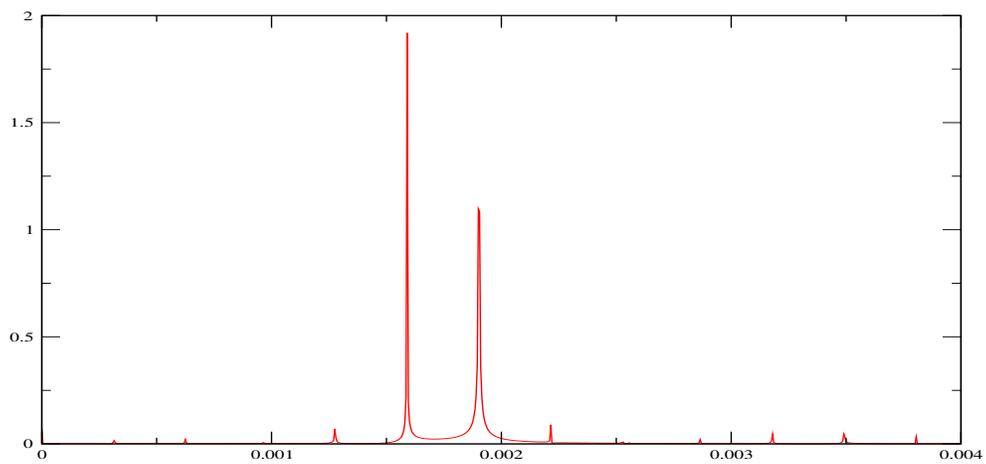
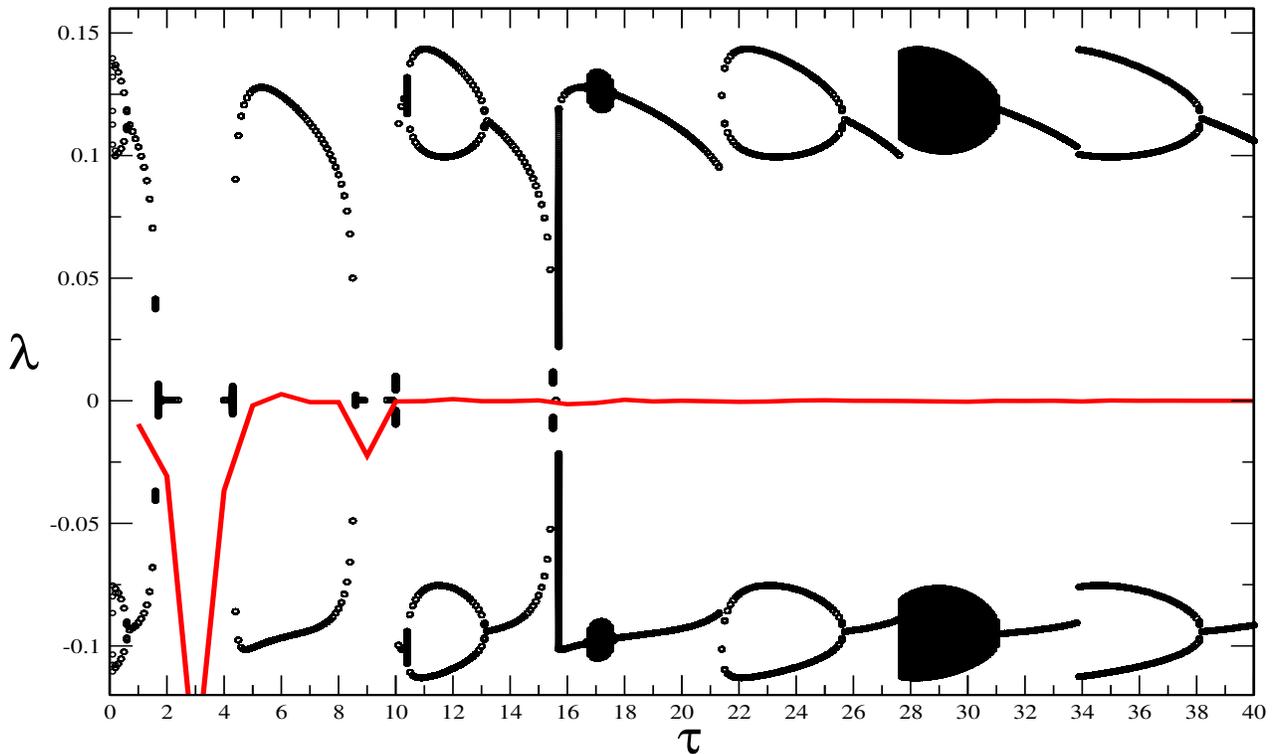


Figura 5.5: Transformada de Fourier para  $\tau = 21.2$ .

### 5.1.1.2. Estado Inicial: Periodo 2

El sistema descrito por las ecuaciones 7.1 inicialmente tiene una dinámica de periodo 2 ( $c = 3.5$ ). A medida que aumenta el retraso en  $x_{1\tau}$  (aumenta el valor de  $\tau$ ) el sistema experimenta cambios fuertes en su dinámica, como se puede observar en la figura 5.6.



**Figura 5.6:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente periodo 2 con retraso temporal en una variable.

En la gráfica 5.6 podemos notar que, a pesar de los cambios topológicos, el sistema siempre se mantiene en un régimen periódico pues el exponente maximal de Lyapunov nunca es mayor que cero. Aún así ocurren comportamientos interesantes, que describimos a continuación.

Al igual que en el caso con  $c = 2.5$  (periodo 1) el sistema presenta dos regiones

donde la amplitud de la oscilación prácticamente desaparece y el maximal de Lyapunov alcanza un mínimo. La primer región es  $\tau \in [2.4, 3.9]$  donde  $\lambda = -0.15$  es un mínimo para  $\tau = 3$ . La segunda región es  $\tau \in [8.9, 9.7]$  con  $\lambda = -0.02$  en  $\tau = 9$ . Vemos que hay cambios de periodo 2 a periodo 1 y al revés.

Aunque en el diagrama de bifurcación existen zonas que se ven densas el sistema sigue manteniendo una dinámica periódica pues el exponente de Lyapunov es cero y al calcular la transformada de Fourier se obtiene un espectro discreto. En la figura 5.7 se muestran los resultados de los cálculos correspondientes para  $\tau = 17.0$ .

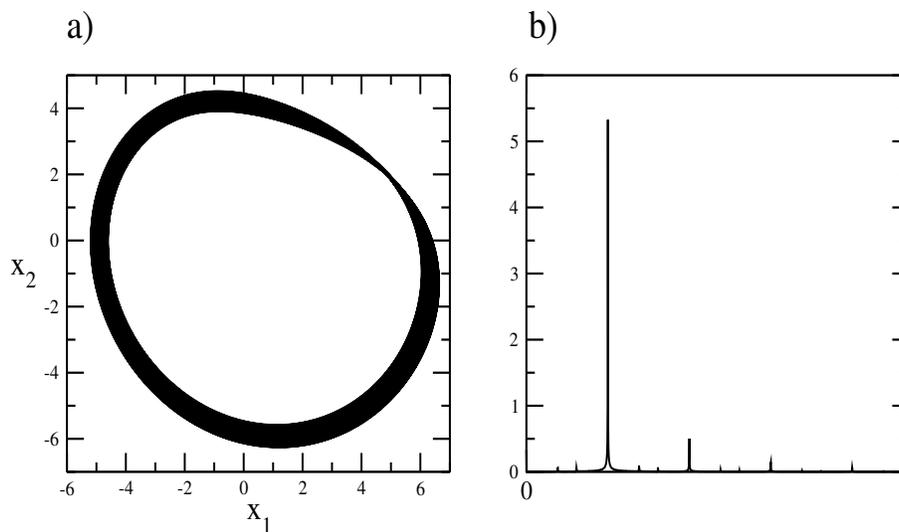
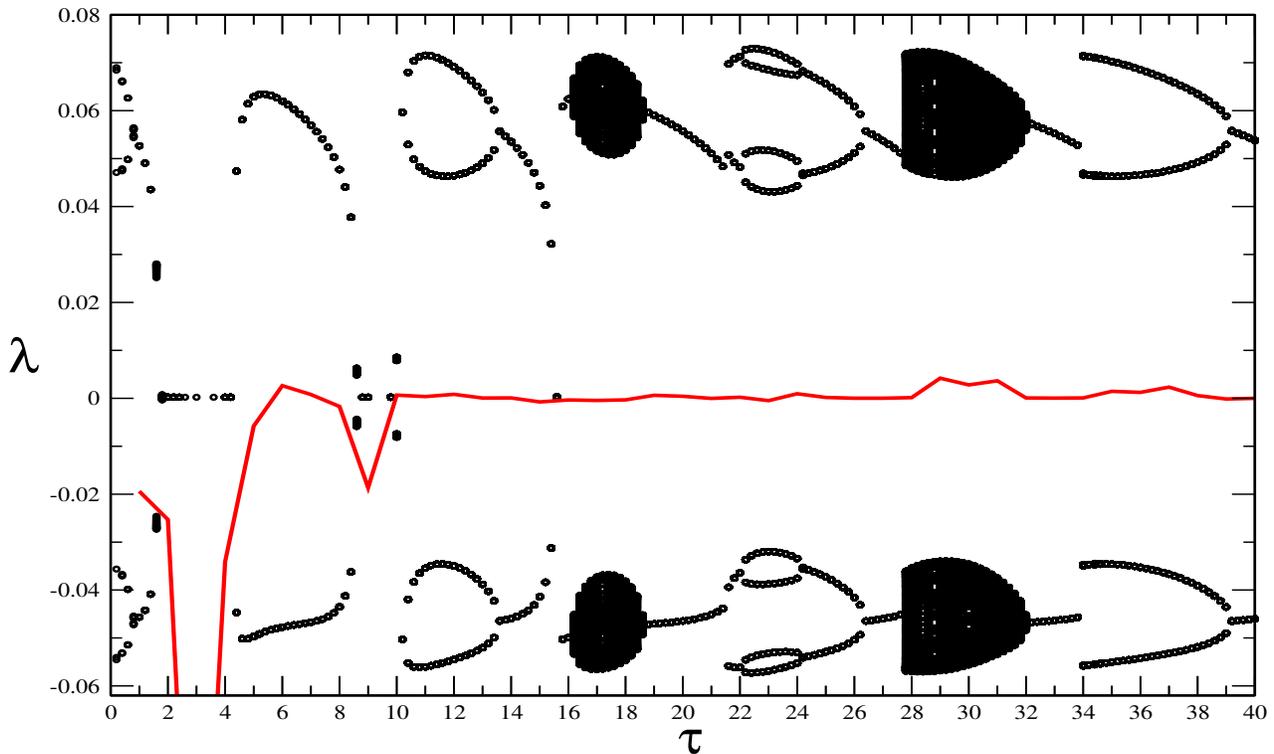


Figura 5.7: a) Atractor y b) transformada de Fourier para  $\tau = 17$ .

### 5.1.1.3. Estado Inicial: Periodo 4

El sistema está dado por el sistema de ecuaciones 7.1 pero ahora tiene una dinámica con periodo 4 ( $c = 4.0$ ). En la figura 5.8 mostramos que el exponente maximal de Lyapunov se mantiene muy cerca del valor cero, lo cual indica que a pesar del incremento

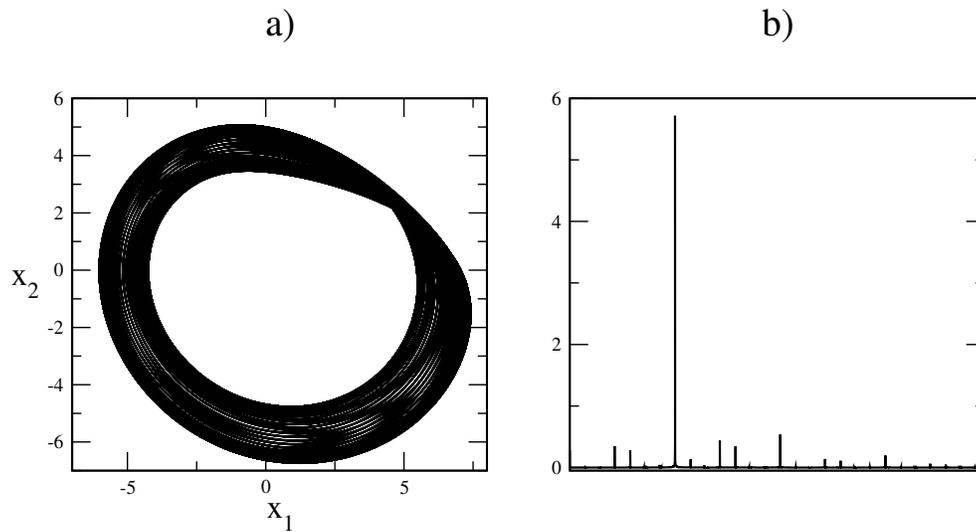
de  $\tau$  el sistema siempre se mantiene en régimen no caótico.



**Figura 5.8:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente con periodo 4 y retraso temporal en una variable.

Para ciertos valores de  $\tau$ , como  $\tau \in [16, 18.8]$  y  $\tau \in [27.9, 32]$ , aparecen zonas densas en el diagrama de bifurcación a pesar de que el sistema está en régimen periódico pues el espectro de la transformada de Fourier para las series de tiempo es discreto. Además el exponente maximal de Lyapunov es cero<sup>1</sup>, como ya se había mencionado. En la figura 5.9 mostramos una proyección del atractor y la transformada de Fourier para el sistema en una de estas regiones, específicamente para  $\tau = 31.0$ .

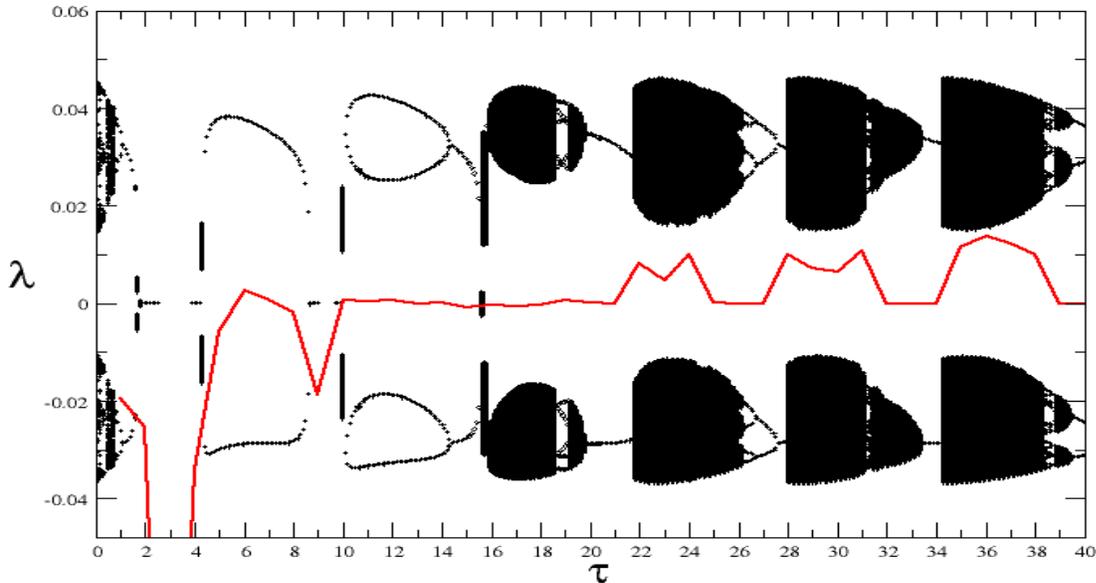
<sup>1</sup>dentro de una pequeña incertidumbre  $\pm 0.002$



**Figura 5.9:** a) Diagrama  $x_2$  vs  $x_1$  y b) transformada de Fourier para un sistema Rossler con retraso en una variable inicialmente en periodo 4 con  $\tau = 31.0$ .

#### 5.1.1.4. Estado Inicial: Dinámica Caótica

El sistema ahora se encuentra en estado caótico ( $c = 5.7$ ) para  $\tau = 0$ . Al incrementarse el valor de  $\tau$  en  $x_{1\tau}$  el sistema sufre cambios drásticos en su dinámica. En la figura 5.17 reportamos el exponente maximal de Lyapunov y diagrama de bifurcación correspondiente a este sistema.



**Figura 5.10:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente en estado caótico con retraso temporal en una variable.

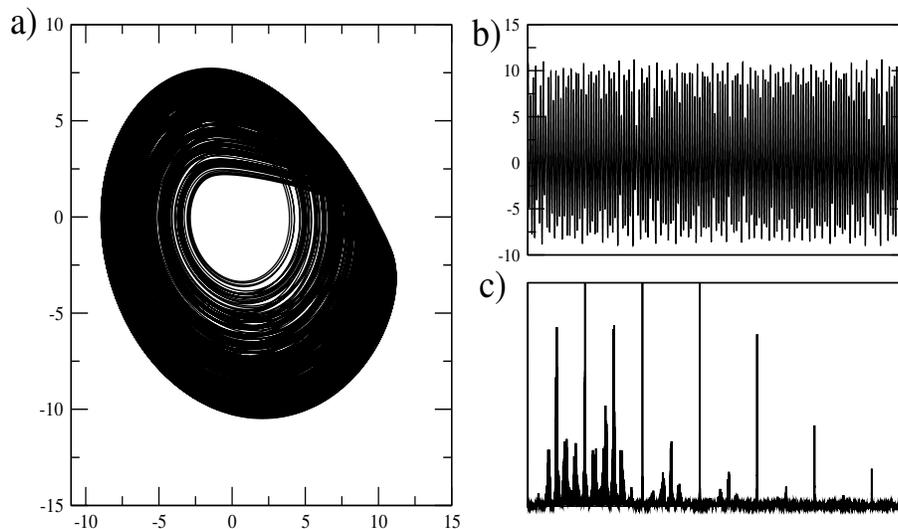
Pasando por una cascada inversa de duplicación de periodo en la región  $\tau \in [2.0, 4.0]$  el sistema deja de ser caótico y la amplitud de su oscilación comienza a disminuir hasta prácticamente desaparecer. En esta región el exponente maximal de Lyapunov alcanza un mínimo con  $\lambda = -0.14$  para  $\tau = 3$ . Al salir de este intervalo para  $\tau$ , la amplitud de la oscilación aumenta paulatinamente y el sistema evoluciona a una dinámica con periodo 1. Este comportamiento vuelve a repetirse para  $\tau \in [9, 10]$  donde  $\lambda = -0.02$  es un mínimo para  $\tau = 9$ .

A partir de  $\tau = 21.0$  el sistema alterna entre dinámica caótica y periódica. En  $\tau = 26.0$  el sistema viene de régimen caótico y se bifurca pasando por un régimen periodo 4,

posteriormente periodo 2 y, antes de regresar al régimen caótico, se convierte a periodo

1. Estas transiciones, cualitativamente, se repiten para  $\tau$  mayores.

En este caso  $\tau$  funciona como parámetro de control de tal forma que se puede obligar al sistema a ser periódico.



**Figura 5.11:** a) Proyección del atractor y b) series de tiempo para un sistema Rossler con retraso en una variable en régimen caótico, c) espectro de potencias.

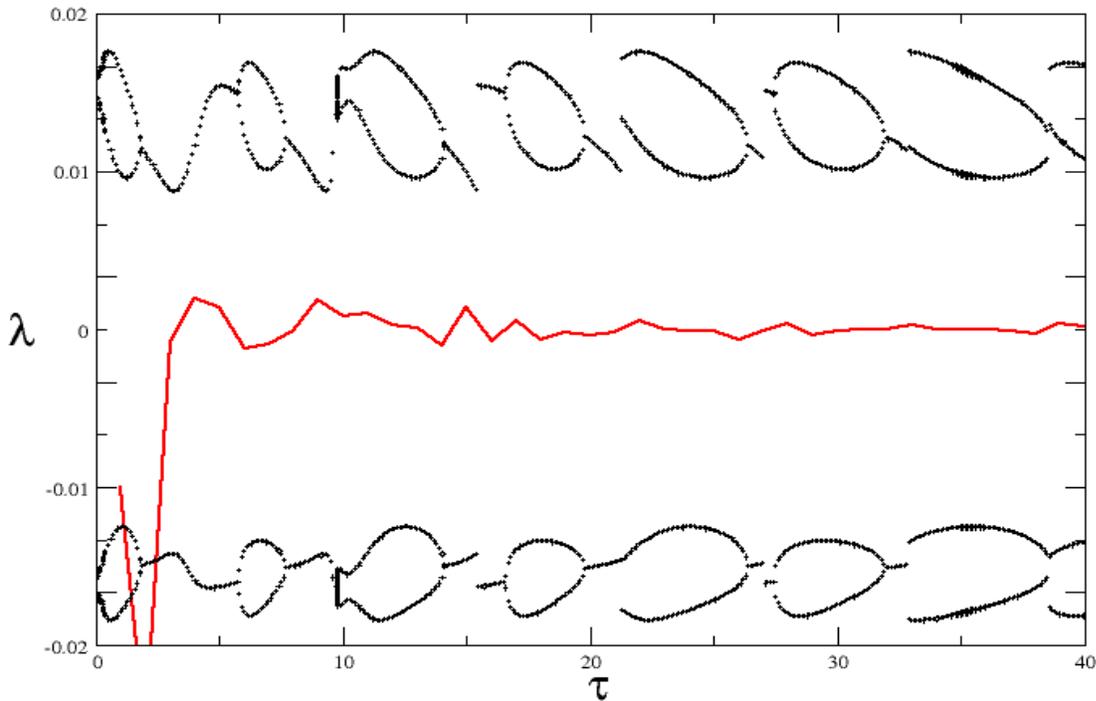
### 5.1.2. Retroalimentación Lineal Retrasada

Este sistema está descrito por el sistema de ecuaciones 7.2 y a continuación mostramos los principales resultados obtenidos en nuestra investigación.

#### 5.1.2.1. Estado Inicial: Periodo 1

Originalmente el sistema se encuentra en una dinámica de periodo 1 y, como se muestra en la figura 5.12, a pesar del incremento en  $\tau$  el sistema se mantiene en ré-

gimen periódico. Conforme aumenta el retraso temporal el sistema experimenta una alternancia entre dinámica de periodo 1 y dinámica de periodo 2 en la región estudiada.

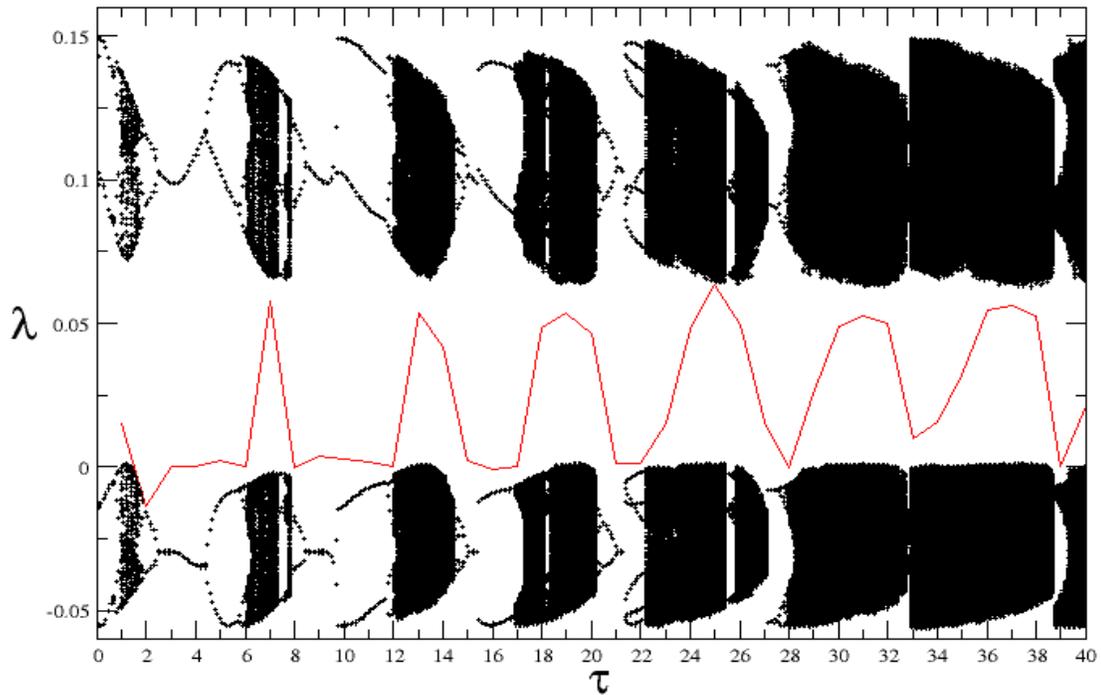


**Figura 5.12:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente periodo 1 con forzamiento lineal con retraso.

#### 5.1.2.2. Estado Inicial: Periodo 2

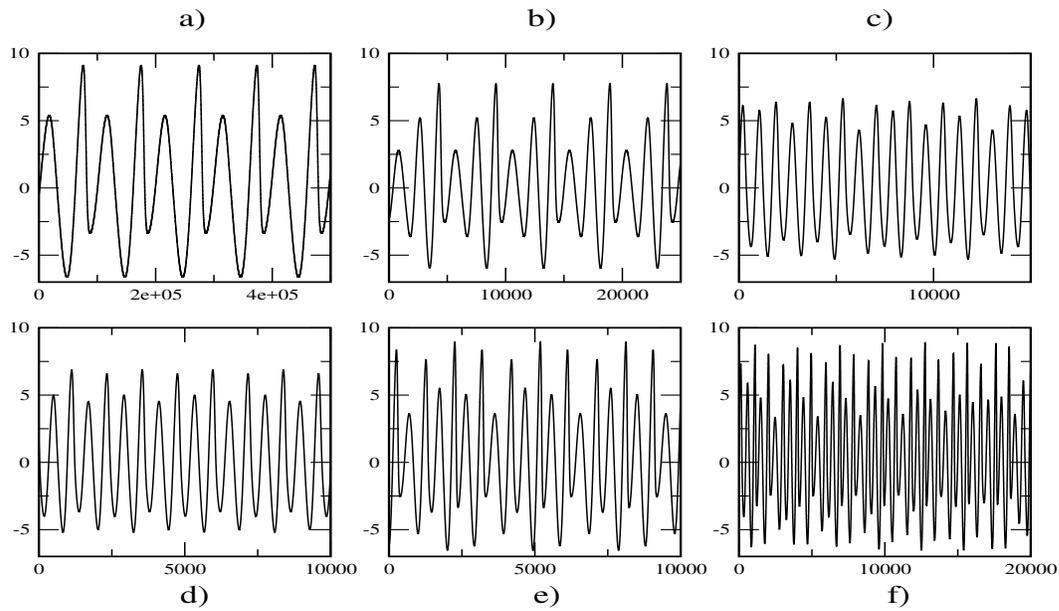
En la figura 5.6 mostramos el diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler de periodo 2 con retraso lineal para  $\tau = 0.0$ . En este modelo el sistema alterna entre estados periódicos y caóticos para distintos valores de

$\tau$ .



**Figura 5.13:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente periodo 2 con forzamiento lineal con retraso.

A medida que aumenta la magnitud de  $\tau$  el sistema sufre cambios bruscos en su dinámica. Para  $\tau = 1$  el sistema deja de estar en periodo 2 y aumenta su periodicidad, pues en el diagrama de bifurcación aparecen zonas densas pero con exponente maximal de Lyapunov igual a cero como en el caso para  $\tau \in [1,2]$ . El sistema pasa por dinámicas, no necesariamente en este orden, de periodo 2, 3, 4, 6, 8 y caos. En la figura 5.14 reportamos las series de tiempo de estos cambios dinámicos.

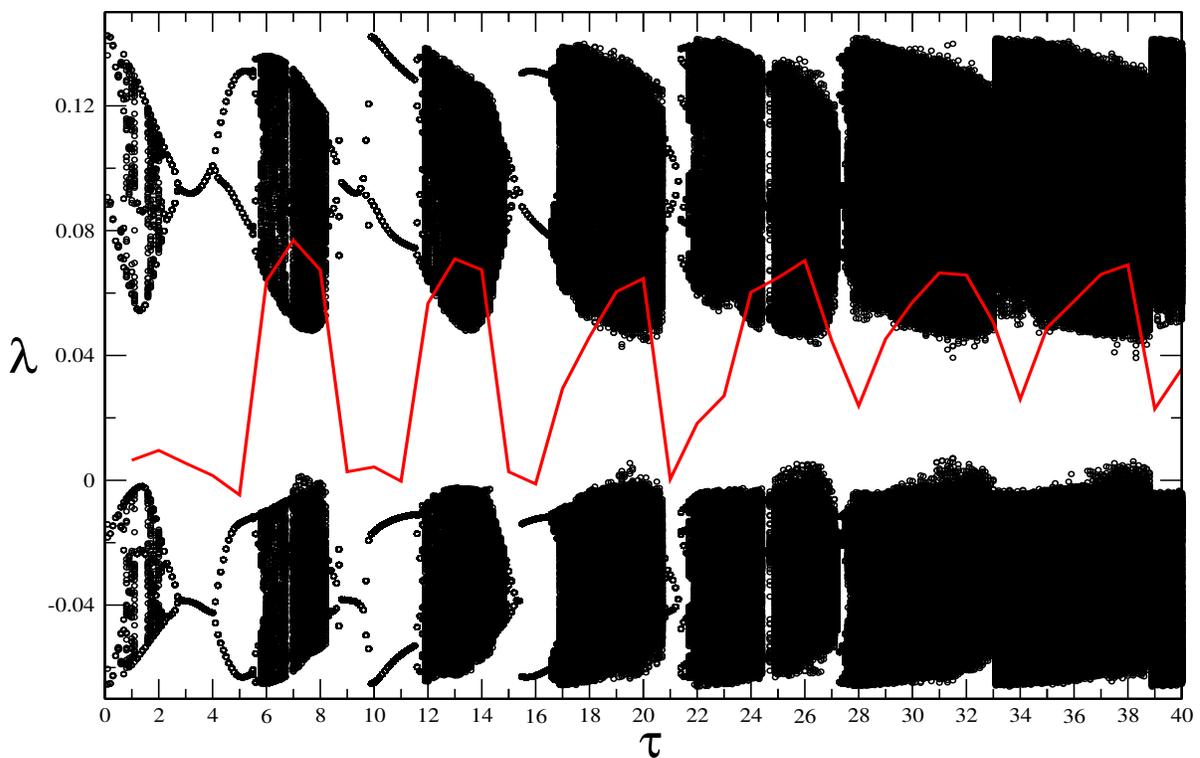


**Figura 5.14:** Series de tiempo de un sistema Rossler con retraso lineal para **a)**  $\tau = 0.2$  (periodo 2), **b)**  $\tau = 7.4$  (periodo 3), **c)**  $\tau = 14.5$  (periodo 8), **d)**  $\tau = 20.4$  (periodo 4), **e)**  $\tau = 22.0$  (periodo 6), **f)**  $x_\tau = 22.7$  (caos).

También observamos que a medida que se incrementa el retraso temporal el sistema aumenta la frecuencia intrínseca.

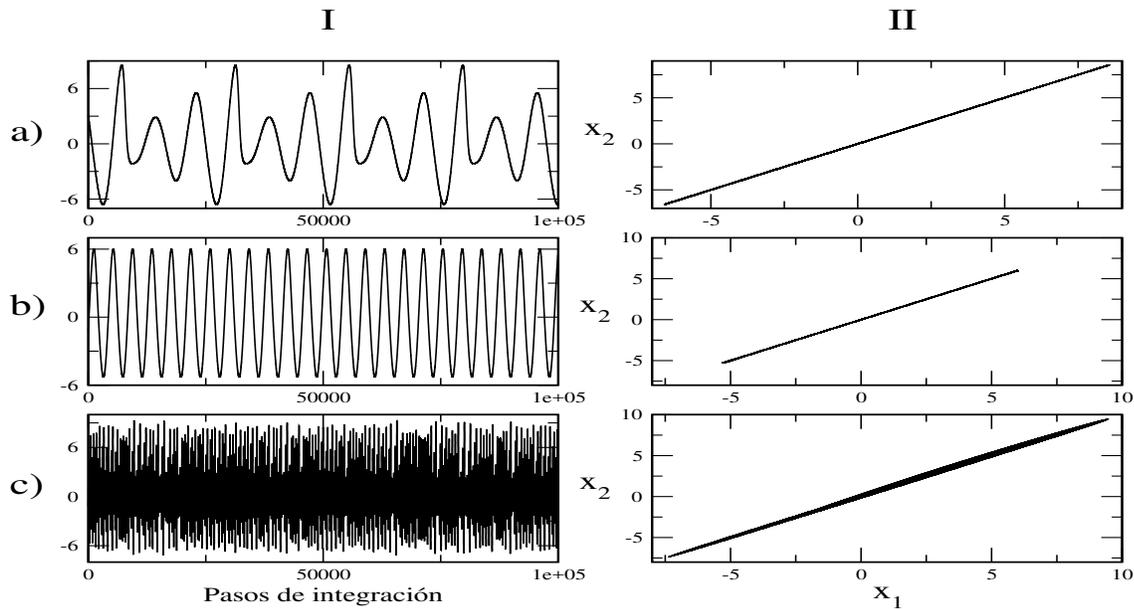
## 5.1.2.3. Estado Inicial: Periodo 4

Para  $\tau = 0.0$ , como mostramos en la figura 5.15, el sistema tiene una dinámica de periodo 4. En el intervalo temporal  $\tau \in [0.0, 27.0]$  el sistema pasa por distintos estados periódicos, periodo 1, 2, 3, 4, 6, y también alcanza el estado caótico. Para valores mayores a  $\tau = 28.0$  el sistema se mantiene en régimen caótico.



**Figura 5.15:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente periodo 4 con forzamiento lineal con retraso.

Un punto, que nos ha llamado la atención, es que el retraso temporal provoca que las variables del sistema muestren cierto tipo de sincronización entre si. Pues al graficar  $x_2$  vs  $x_1$  (figura 5.16) se obtiene la recta identidad.

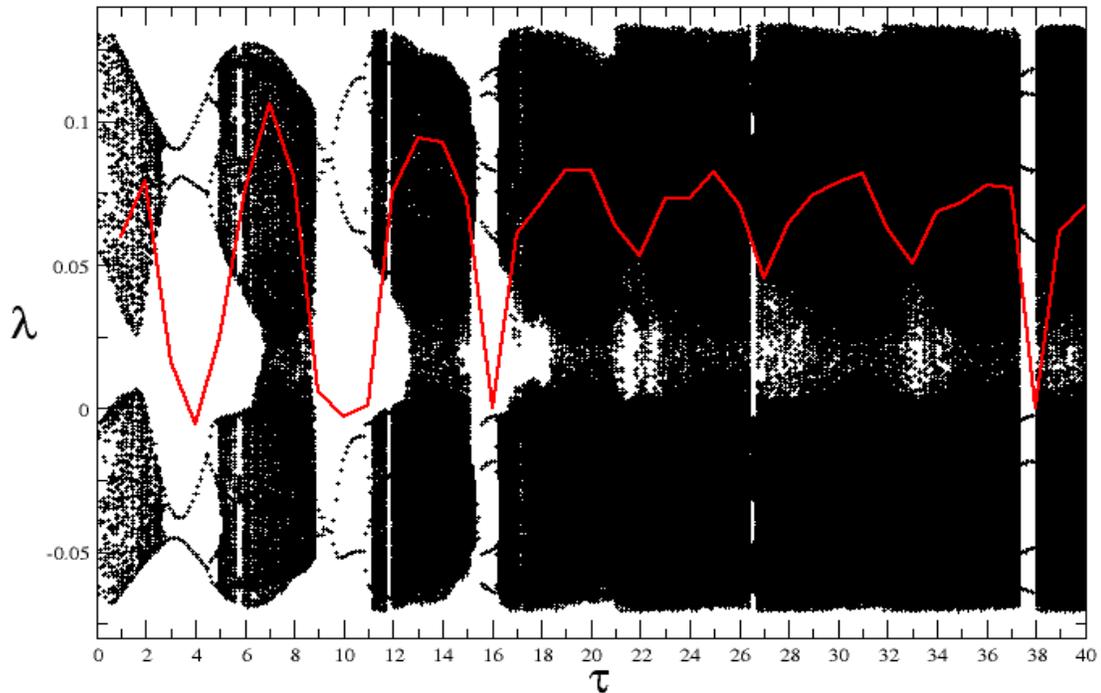


**Figura 5.16:** Series de tiempo (columna I) y diagrama  $x_2$  vs  $x_1$  (columna II) para **a)**  $\tau = 1.5$  (periodo 3), **b)**  $\tau = 3.0$  (Periodo 1) y **c)**  $\tau = 38.0$  (caos).

#### 5.1.2.4. Estado Inicial: Dinámica Caótica

En la figura 5.17 mostramos que cuando  $\tau = 0.0$  el sistema se encuentra en régimen caótico pues el exponente maximal de Lyapunov es mayor a cero. Para  $\tau = 3.0$  el sistema cambia su dinámica caótica por una periódica de periodo 2. En  $\tau = 5.0$  ocurre una duplicación de periodo y pasa a periodo 4 para que posteriormente, con  $\tau = 6.0$  regrese al régimen caótico. Este comportamiento se repite para valores mayores de  $\tau$ .

Esto indica que el retraso temporal, que puede ser visto como una retroalimentación del sistema, funciona como un control de caos pues puede suprimirlo o provocarlo.

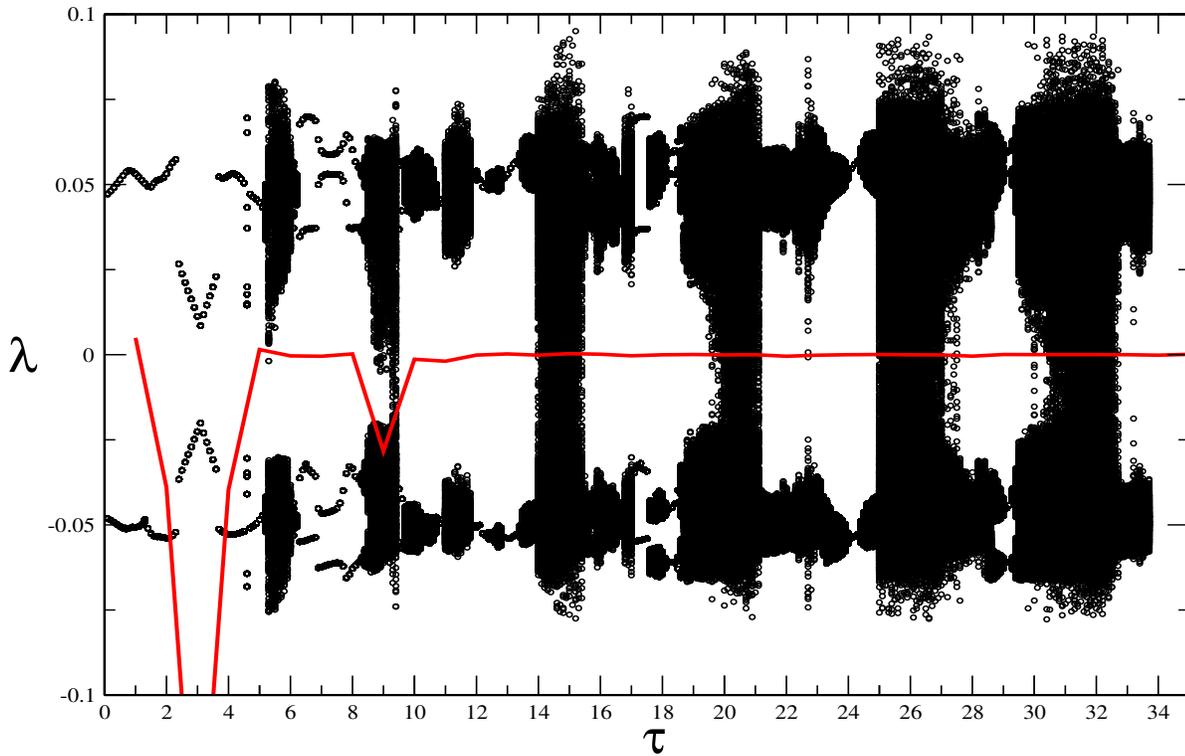


**Figura 5.17:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente en estado caótico con forzamiento lineal con retraso.

### 5.1.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada

A continuación presentamos los principales resultados obtenidos al agregar un forzamiento lineal senoidal con retraso (ecuaciones 7.3) a sistemas tipo Rossler en distintos regímenes periódicos o caóticos.

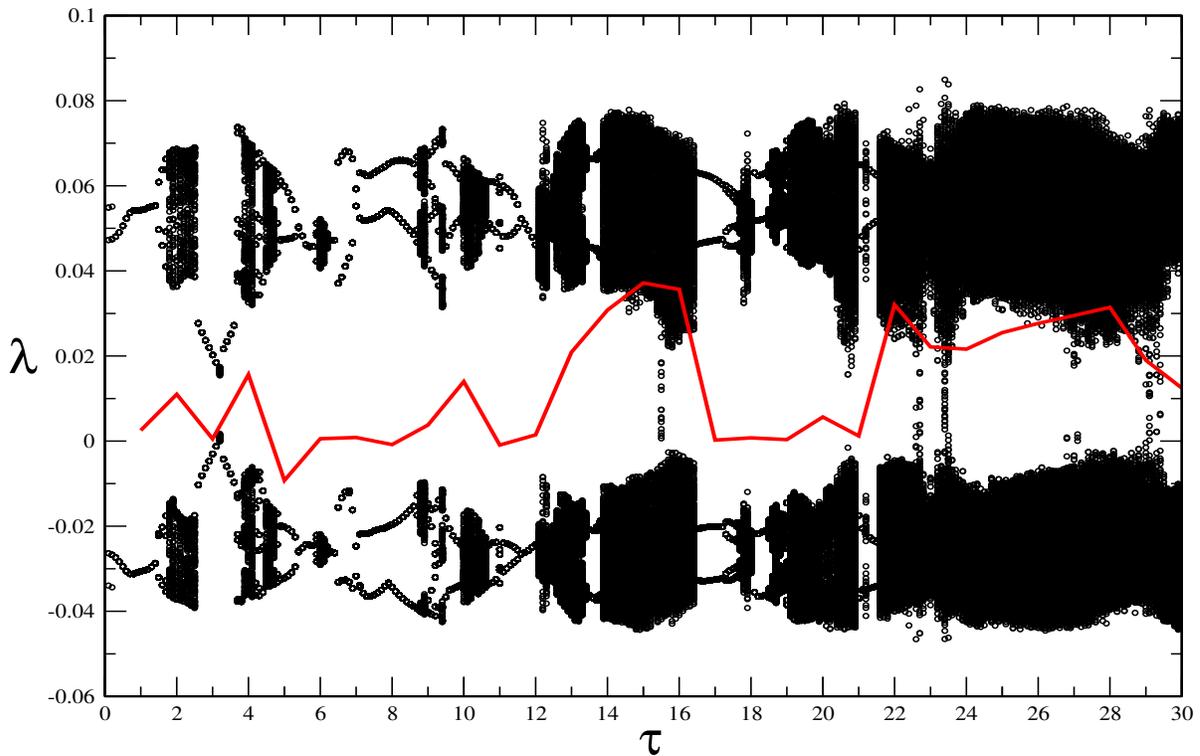
## 5.1.3.1. Estado Inicial: Periodo 1



**Figura 5.18:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente en periodo 1 con forzamiento senoidal con retraso.

La figura 5.18 muestra el diagrama de bifurcación y el exponente maximal de Lyapunov correspondientes al sistema. Para  $\tau = 0.0$  el sistema se encuentra en un régimen de periodo 1, por tanto su exponente maximal de Lyapunov es igual a cero. A medida que  $\tau$  incrementa en magnitud, el sistema evoluciona a dinámicas de periodo más alto pero no alcanza, al menos en la región reportada, un estado caótico pues el exponente maximal de Lyapunov asociado al sistema se mantiene en valores menores o iguales a cero.

## 5.1.3.2. Estado Inicial: Periodo 2

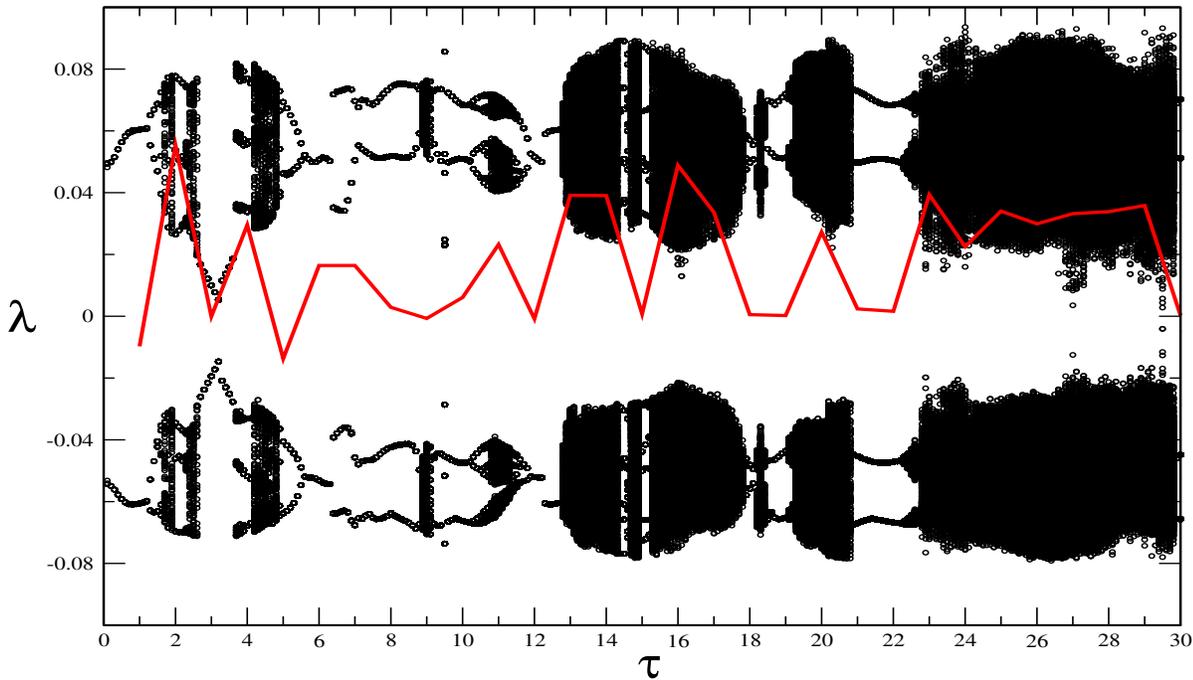


**Figura 5.19:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente en periodo 2 con forzamiento senoidal con retraso.

Cuando el sistema está sin perturbar,  $\tau = 0.0$ , tiene una dinámica de periodo 2 (figura 5.19). Para retrasos pequeños, como  $\tau = 2.0$ , ocurren cambios drásticos en su dinámica pues pasa de un régimen periódico a uno caótico. Para  $\tau = 3.0$  el sistema abandona el régimen caótico y pasa a uno periódico de periodo 1. Para valores mayores de  $\tau$  se mantiene en dinámicas periódicas de mayor orden hasta que  $\tau = 12.0$  el exponente maximal de Lyapunov ( $\lambda$ ) comienza a hacerse mayor que cero indicando que el sistema nuevamente tiene una dinámica caótica. Este comportamiento se repite cualitativamente para valores mayores de  $x_\tau$ .

### 5.1.3.3. Estado Inicial: Periodo 4

En la figura 5.20 reportamos el diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov correspondientes a un sistema Rossler periodo 4, para  $\tau = 0.0$ , con forzamiento senoidal con retraso.



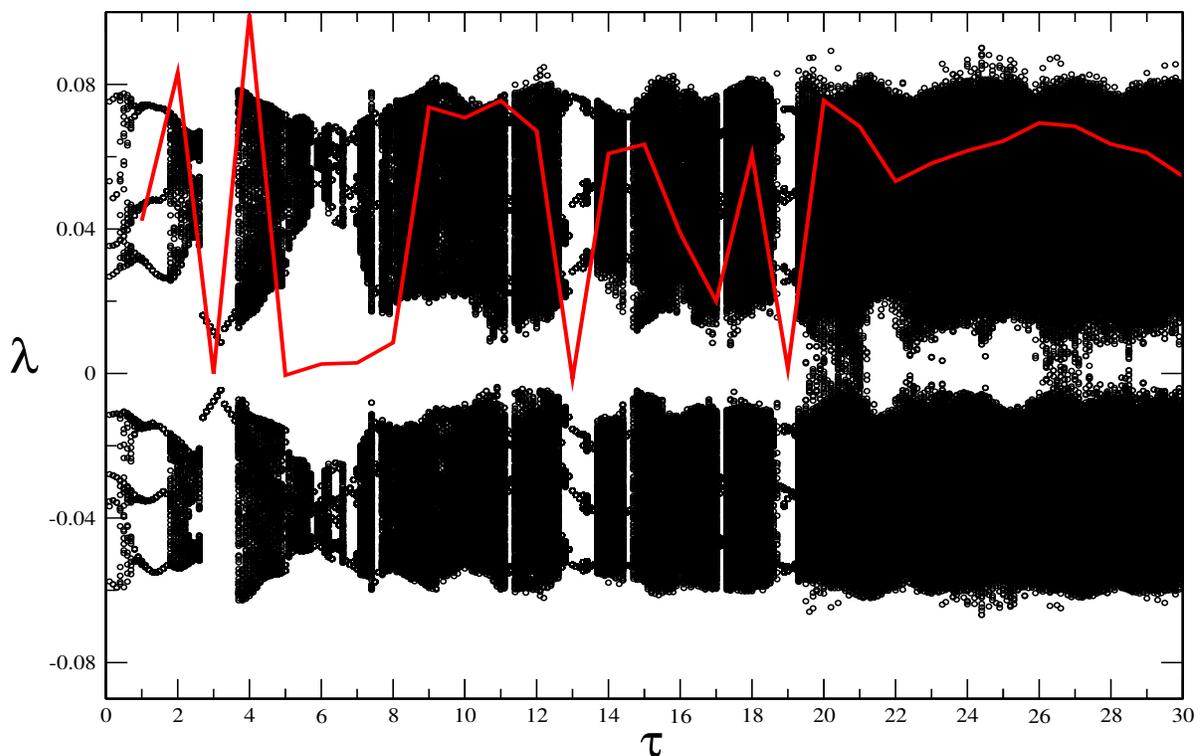
**Figura 5.20:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente en periodo 4 con forzamiento senoidal con retraso.

Este sistema rapidamente,  $\tau = 1.6$ , abandona el régimen periódico para entrar a una dinámica caótica. Al igual que los sistemas reportados anteriormente en este trabajo, el sistema presenta una alternancia entre dinámicas periódicas y caóticas conforme  $\tau$  va creciendo en magnitud.

En la figura 5.20 se observa que entre regiones de caoticidad aparecen ventanas de periodicidad (como en  $\tau = 14.5$  y  $15.0$ ). A partir de  $\tau = 22.8$  el sistema muestra un alto

grado de caoticidad, comparado con retrasos menores, pues el exponente maximal de Lyapunov se mantiene alrededor de 0.05 y el diagrama de bifurcación muestra zonas densas. Para valores mayores a  $\tau = 30.0$  el sistema sigue alternando entre dinámicas periódicas y caóticas.

#### 5.1.3.4. Estado Inicial: Caótico



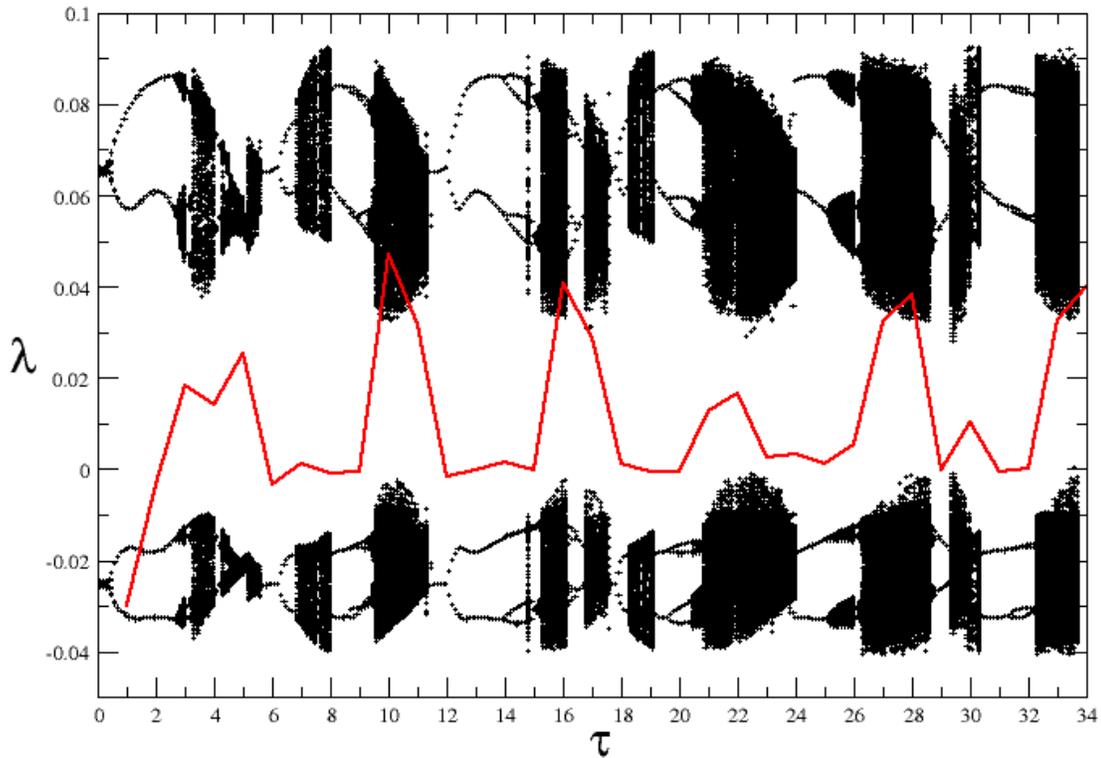
**Figura 5.21:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para un sistema Rossler inicialmente en estado caótico con forzamiento senoidal con retraso.

Para  $\tau = 0.0$  el sistema posee una dinámica caótica, exponente maximal de Lyapunov mayor que cero.

En  $\tau = 3.0$  el retraso temporal actúa como un supresor de caos pues el sistema pasa a

un régimen de periodo 2 provocando que su exponente maximal de Lyapunov sea igual a cero. Esto lo podemos observar en la figura 5.21. En esta misma figura reportamos que aunque el sistema principalmente se encuentra en régimen caótico presenta ventanas de periodicidad, como en  $x_\tau = 19.1$  donde tiene un periodo 3. Para valores mayores de  $\tau$  a los reportados en la figura el sistema mantiene, cualitativamente, el mismo comportamiento dinámico.

### 5.1.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso



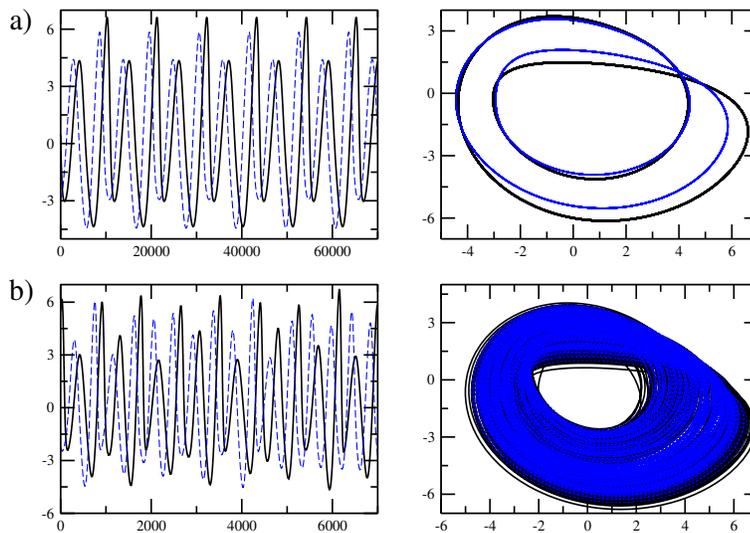
**Figura 5.22:** Diagrama de bifurcación y exponente maximal de Lyapunov para dos sistemas Rossler con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso.

Este arreglo, descrito por el sistema de ecuaciones 7.4, está formado por dos sistemas Rossler idénticos ( $a = b = 0.2$ ) que para  $\tau = 0.0$  se encuentran en un régimen periódico con periodo 1 ( $c = 2.5$  y  $\gamma = 0.05$ ). En la figura 5.22 presentamos la evolución dinámica de un sistema, perteneciente al arreglo, a medida que  $\tau$  va aumentando en magnitud.

Inicialmente, cuando el arreglo está sin perturbar ( $\tau = 0$ ), su exponente maximal

de Lyapunov asociado es menor a cero. Al aumentar la magnitud de  $\tau$  el sistema sufre una duplicación de periodo ( $\tau = 0.4$ ) para posteriormente entrar al régimen caótico ( $\tau = 2.7$ ). Este proceso de duplicación de periodo se repite en otros valores mayores de  $\tau$ . Los sistemas también presentan otros periodos; como periodo 3 en  $\tau = 14.0$ .

También observamos que el retraso temporal influye en la sincronización entre los sistemas. Para  $\tau = 0.0$  los sistemas presentan sincronización completa, pues ambos sistemas son idénticos y con mismas condiciones iniciales. Al introducir un retraso temporal ambos sistemas presentan sincronización de fase tanto en régimen periódico como caótico. En la imagen 5.23 comparamos las series de tiempo de ambos sistemas así como sus atractores. Otra cosa que observamos es que el retraso temporal ocasiona que el sistema aumente su frecuencia.



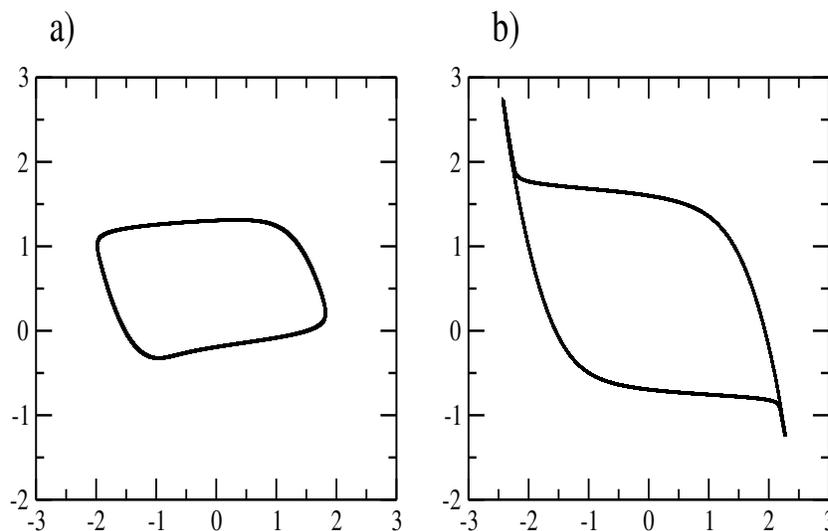
**Figura 5.23:** Series de tiempo y atractores para dos sistemas Rossler con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso para **a)**  $\tau = 2.0$  (periodo 2) y **b)**  $\tau = 27.0$  (dinámica caótica).

## 5.2. Sistemas Tipo Fitzhug-Nagumo

Para analizar este modelo (ec. 3.9) usamos las mismas configuraciones que con el modelo de Rossler: Retraso temporal en una variable, retroalimentación lineal, retroalimentación senoidal y acoplamiento bidireccional difusivo con retraso temporal entre dos sistemas iguales. Sin embargo, en el estudio nos dimos cuenta que sólo dos de las cuatro configuraciones exploradas presentaban comportamientos interesantes. Estas dos configuraciones son las que reportamos con mayor detalle en este trabajo.

En todas las configuraciones se usaron los siguientes parámetros:  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.08$  e  $I = 0.4$ .

### 5.2.1. Retraso Temporal en una Variable



**Figura 5.24:** Atractor para un sistema Fitzhug-Nagumo a) sin retraso temporal y b) con retraso temporal en una variable ( $\tau = 80.0$ ).

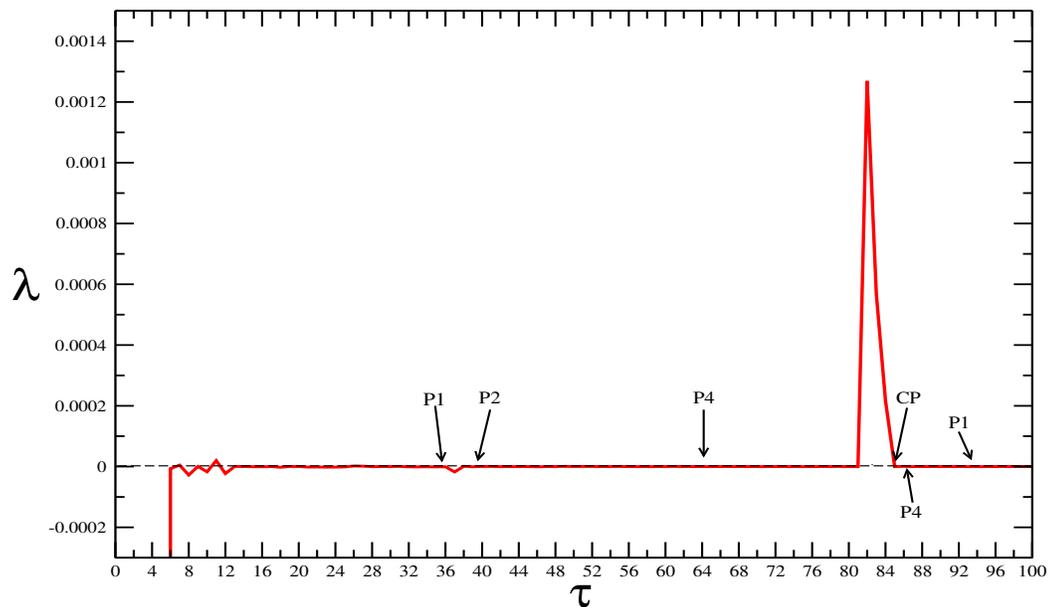
Esta configuración, dada por las ecuaciones 7.5, la estudiamos con un retraso temporal en el rango  $\tau \in [0.0, 100.0]$ . En todo este rango el sistema no presentó cambios significativos en su dinámica, siempre se mantuvo en régimen periódico con periodo 1. El único cambio observable es que la amplitud de las oscilaciones aumentó, lo cual provoca que su atractor (figura 5.24) sufra cambios en su topología más no en su estabilidad.

### 5.2.2. Forzamiento Lineal con Retraso

Esta configuración provoca que el sistema diverja rápidamente, incluso para valores muy pequeños de  $\tau$ , imposibilitando su análisis numérico y por consiguiente no reportamos resultados para él.

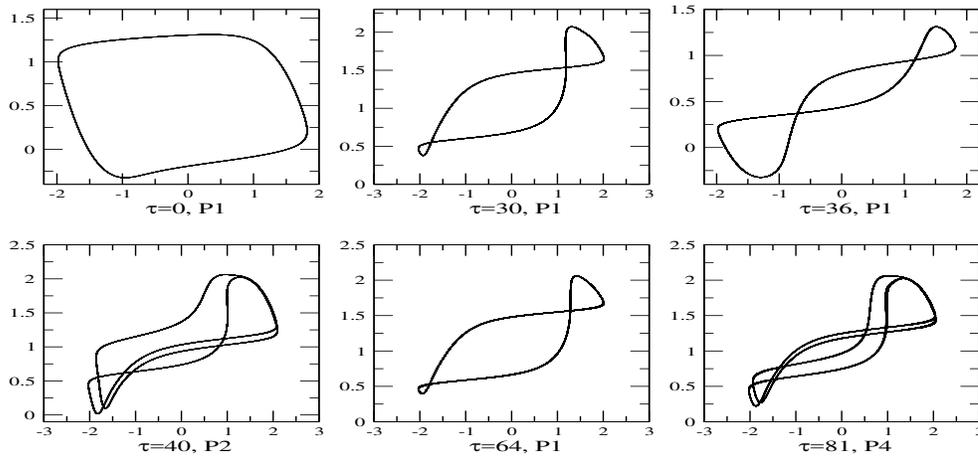
### 5.2.3. Retroalimentación Senoidal con Retraso

Este sistema está determinado por el conjunto de ecuaciones 7.6. Inicialmente, con  $\tau = 0.0$ , el sistema se encuentra en régimen periódico con periodo 1 y por tanto su exponente maximal de Lyapunov asociado es menor a cero. Al incrementar la magnitud de  $\tau$  ocurren varios cambios interesantes en la dinámica del sistema, los cuales detallamos a continuación.



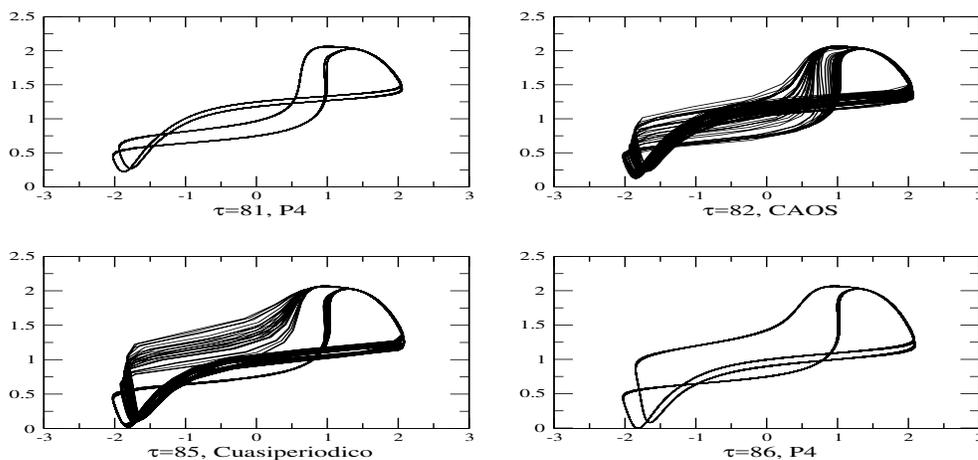
**Figura 5.25:** Exponente maximal de Lyapunov para un sistema Fitzhug-Nagumo con retroalimentación senoidal con retraso.

En el intervalo  $\tau \in [0.0, 81.0]$  el sistema se mantiene en régimen periódico pues su exponente maximal de Lyapunov se mantiene menor a cero, como lo mostramos en la figura 5.25. Para  $\tau \in [0.0, 38.0]$  se conserva la dinámica periodo 1, pero a medida que se incrementa  $\tau$  el atractor sufre cambios topológicos (figura 5.26) hasta que finalmente en  $\tau = 40.0$  experimenta una duplicación de periodo y pasa a una dinámica periodo 2. El sistema se mantiene en ese periodo hasta  $\tau = 64.0$ , donde ocurre otra duplicación de periodo y el sistema bifurca a una dinámica periodo 4. Para  $\tau = 81.0$  el sistema continua con dinámica periodo 4.



**Figura 5.26:** Atractores interesantes del sistema Fitzhug-Nagumo para distintos valores de  $\tau$ .

Cuando  $\tau \in [82.0, 85.0]$  el exponente maximal de Lyapunov se vuelve positivo, alcanzando su máximo en  $\tau = 82.0$  con  $\lambda = 0.00129$ , indicando que el sistema ahora se encuentra en régimen caótico. La caoticidad del sistema se confirma al graficar las series de tiempo y obtener un espectro de potencia continuo (figura 5.28).

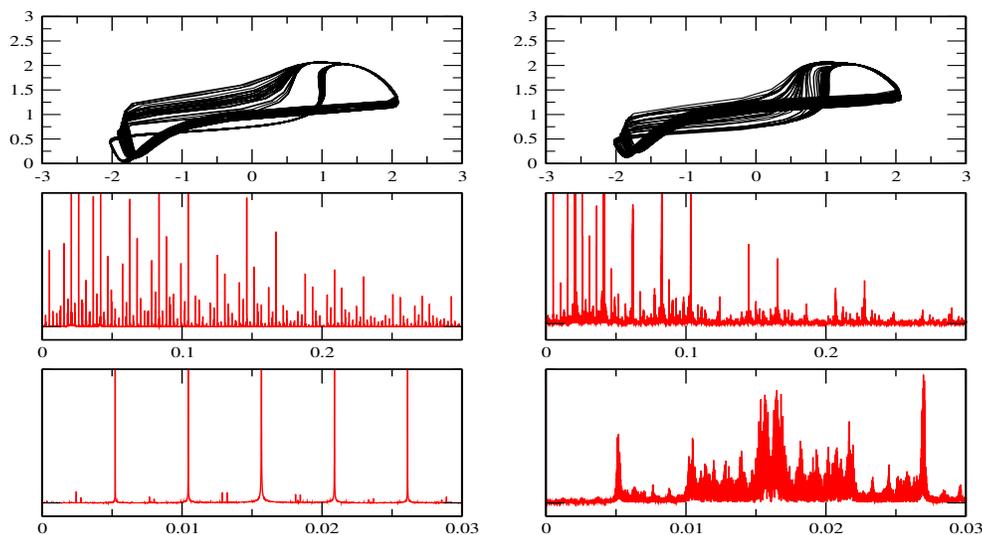


**Figura 5.27:** Atractores interesantes del sistema Fitzhug-Nagumo par distintos valores de  $\tau$ .

Para  $\tau = 85.0$  el sistema tiene un exponente maximal de Lyapunov igual a cero, pero cuando graficamos su atractor observamos que es muy parecido a uno caótico

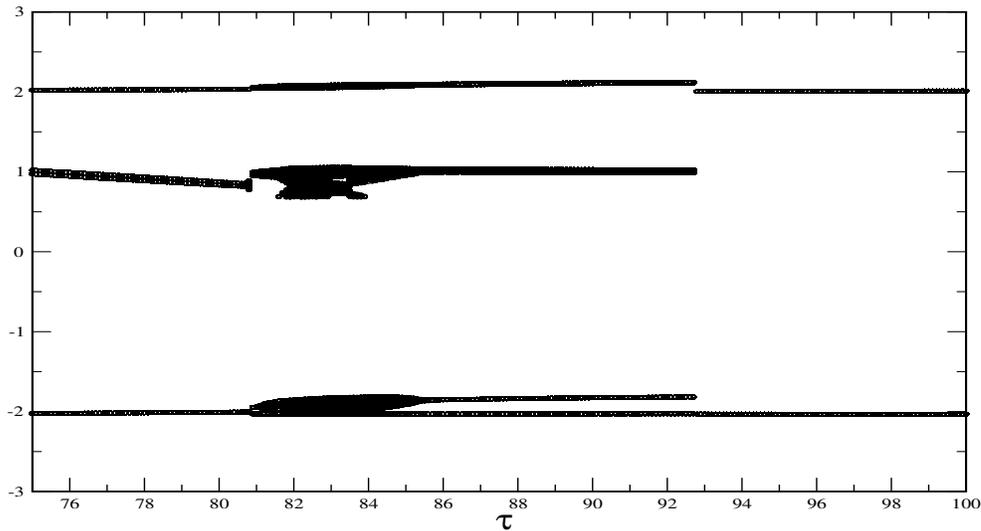
(figura 5.27). Al calcular el espectro de potencias correspondiente se obtiene un espectro continuo, lo cual no dice mucho sobre como clasificar el sistema.

Los resultados anteriores nos impulsaron a realizar el análisis descrito en la sección 4.1.1 para determinar si el sistema está en régimen cuasiperiódico. El resultado de calcular el espectro de potencias, solamente a los máximos y mínimos de la serie de tiempo, es un espectro con contribuciones discretas. Con este resultado podemos concluir que para  $\tau = 85.0$  el sistema se encuentra en un régimen cuasiperiódico. La figura 5.28 contiene dos columnas: la primera para  $\tau = 85.0$  (cuasiperiódico) y la segunda para  $\tau = 83.0$  (caos). La primera fila muestra los atractores, la segunda el espectro de potencias correspondiente a la serie de tiempo completa y la tercera el espectro de potencias obtenido al utilizar únicamente los máximos y mínimos de la serie de tiempo.



**Figura 5.28:** Método para identificar régimen cuasiperiódico y caótico. A la izquierda sistema Fitzhug-Nagumo cuasiperiódico y a la derecha caótico.

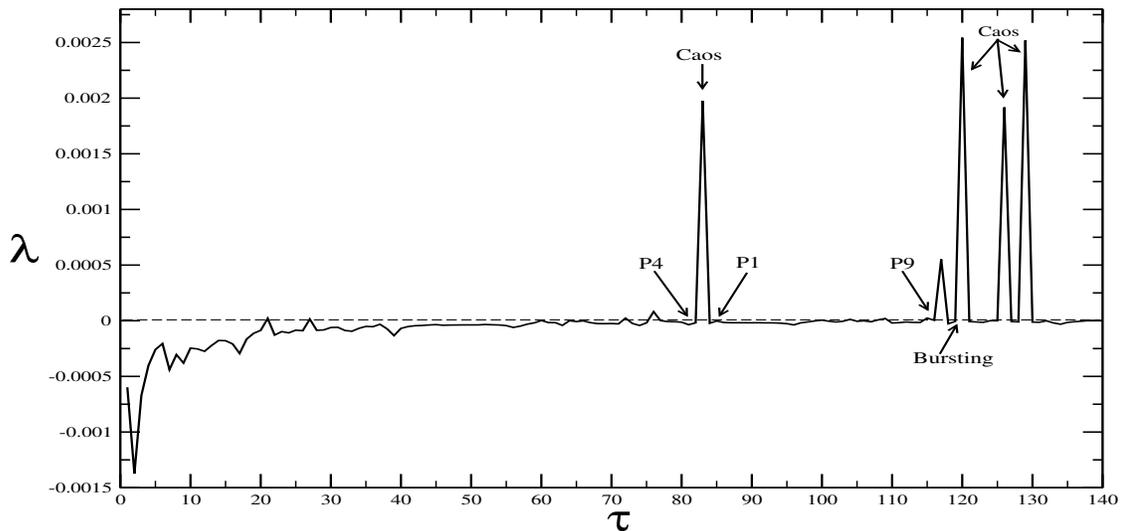
En la figura 5.29 mostramos un zoom del diagrama de bifurcación en las zonas de mayor interés. No se aprecia gran diferencia entre  $\tau = 83.0$  (caos) y  $\tau = 85.0$  (cuasiperiódico).



**Figura 5.29:** Ampliación en la región  $\tau \in [75, 100]$  del diagrama de bifurcación para un sistema Fitzhug-Nagumo con retroalimentación senoidal con retraso.

#### 5.2.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso

Este arreglo, dado por las ec. 7.7, está conformado por dos sistemas Fitzhug-Nagumo en régimen periódico con periodo 1. Escogimos que fueran sistemas periódicos porque queremos estudiar como el retraso temporal puede inducir un comportamiento caótico. Solamente una variable de uno de los sistemas Fitzhug-Nagumo tiene retraso temporal en el término de acoplamiento, al cual llamamos sistema 1, La constante de acoplamiento,  $\gamma = 0.05$ , se escoge con un valor pequeño para que no influya demasiado en la dinámica del sistema y se pierda la influencia del retraso.



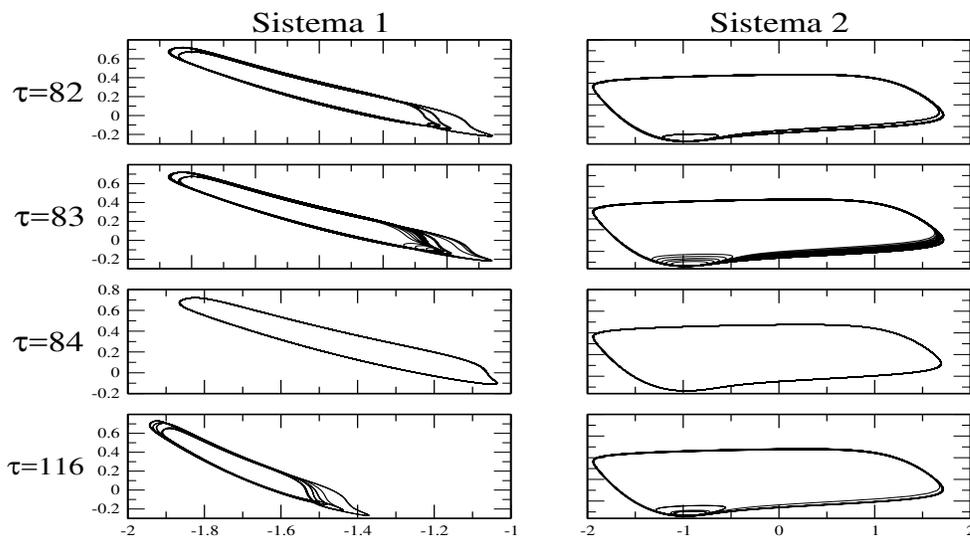
**Figura 5.30:** Exponente maximal de Lyapunov para dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso temporal.

En la figura 5.30 reportamos los cambios que sufre el exponente maximal de Lyapunov del arreglo conforme  $\tau$  va incrementando. Para  $\tau = 0.0$  este exponente es menor que cero, como era de esperar. En la región  $\tau \in [0.0, 82.0]$  el arreglo experimenta varios cambios dinámicos, como duplicación de periodo, en régimen periódico similares a los de un sistema Fitzhug-Nagumo con retroalimentación senoidal con retraso. En esta sección nos centramos en discutir los cambios dinámicos que ocurren en valores de  $\tau$  cercanos a aquellos donde el arreglo presenta dinámica caótica.

En  $\tau = 82.0$  ambos sistemas tienen periodo 4. La figura 5.31 muestra los atractores correspondientes. Aunque los atractores presentan distinta topología los sistemas presentan sincronización de fase. Esta sincronización la conservan incluso en régimen caótico.

En la figura 5.30 se observa que para  $\tau = 83.0$  la gráfica presenta un pico positivo, que indica que el arreglo tiene una dinámica caótica alrededor de este valor de  $\tau$ . Al analizar los series de tiempo correspondientes a cada sistema (figura 5.31) nos damos cuenta que ambos sistemas presentan atractor caótico. En  $\tau = 84.0$  el arreglo regresa a régimen periódico (ambos sistemas con periodo 1) mostrando nuevamente que el retraso temporal puede funcionar como un generador o supresor de caos.

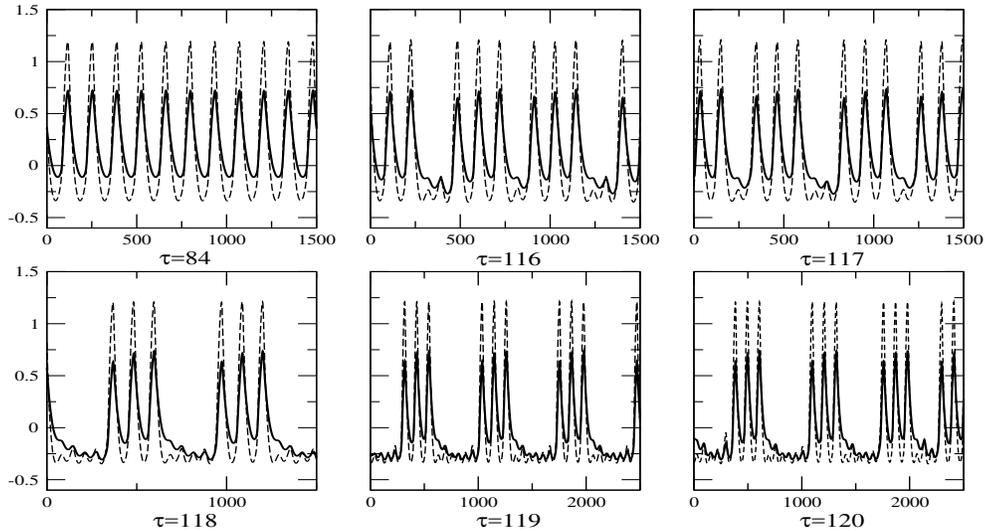
La gráfica del máximo exponente de Lyapunov presenta otros picos, indicando que el arreglo tiene dinámica caótica alrededor de  $\tau = 120, 126$  y  $129$ .



**Figura 5.31:** Gráficas  $x_2$  vs  $x_1$  de los atractores interesantes de dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso temporal para distintos valores de  $\tau$ .

Cuando  $\tau = 116.0$  el arreglo sigue en régimen periódico y los sistemas presentan un aumento en sus periodos pues partiendo de un periodo 1 bifurcan hasta un periodo 9. En  $\tau = 117.0$  y  $\tau = 118.0$  los sistemas conservan un periodo alto pero, como mostramos

en la figura 5.32, sus series de tiempo parecen indicar que estamos en el umbral para una dinámica tipo bursting hasta que en  $\tau = 118.0$  es más evidente.

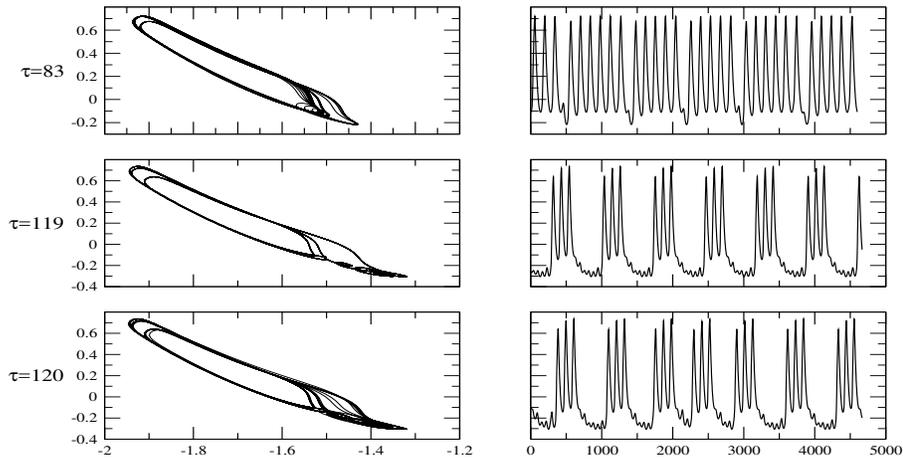


**Figura 5.32:** Series de tiempo de dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso temporal.

En la misma gráfica (figura 5.32) reportamos las series de tiempo de ambos sistemas (sistema 1 línea continua y sistema 2 línea punteada) con distintos valores de  $\tau$  y por tanto distintos regímenes dinámicos. Podemos observar que los sistemas conservan sincronización de fase en todo momento, tanto en comportamiento periódico ( $\tau = 84.0$ ), de bursting ( $\tau = 119.0$ ) y caótico ( $\tau = 120.0$ ).

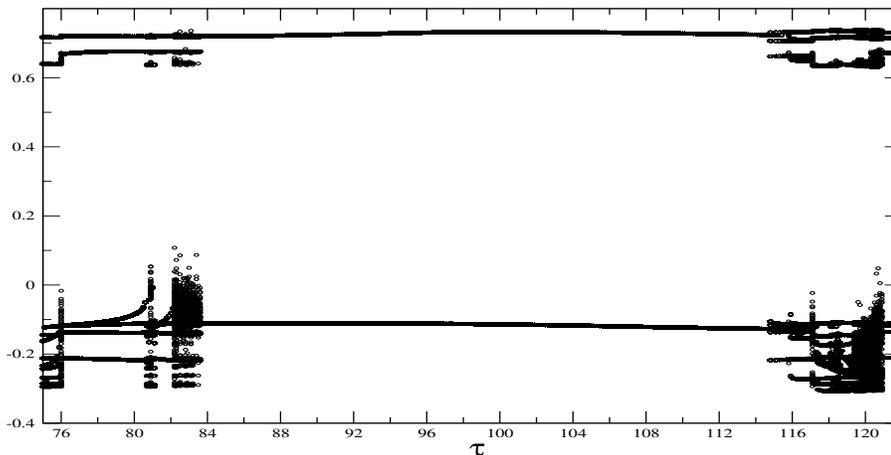
El comportamiento de bursting, para ambos sistemas, aparece tanto en régimen periódico como caótico. En la figura 5.33 reportamos el atractor (primer columna) y serie de tiempo (segunda columna) correspondientes al sistema 1. En el primer renglón ( $\tau = 83.0$ ) y segundo ( $\tau = 120.0$ ) el sistema está en régimen caótico, pues su exponente maximal de Lyapunov es positivo, pero en  $\tau = 120.0$  el sistema presenta

comportamiento tipo bursting similar a cuando  $\tau = 119.0$  (régimen periódico).



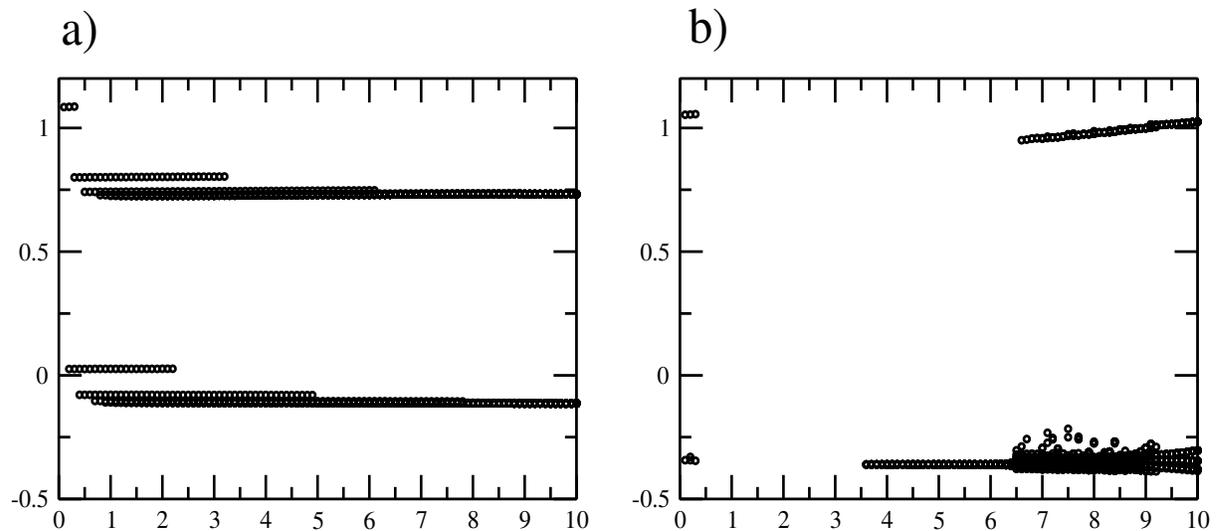
**Figura 5.33:** Distintos regímenes de bursting para dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso temporal.

En la figura 5.34 mostramos el diagrama de bifurcación correspondiente en las zonas donde se presentan los mayores cambios dinámicos. En este diagrama es difícil distinguir donde se presenta el comportamiento de bursting.



**Figura 5.34:** Diagrama de bifurcación para un arreglo formado por dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso.

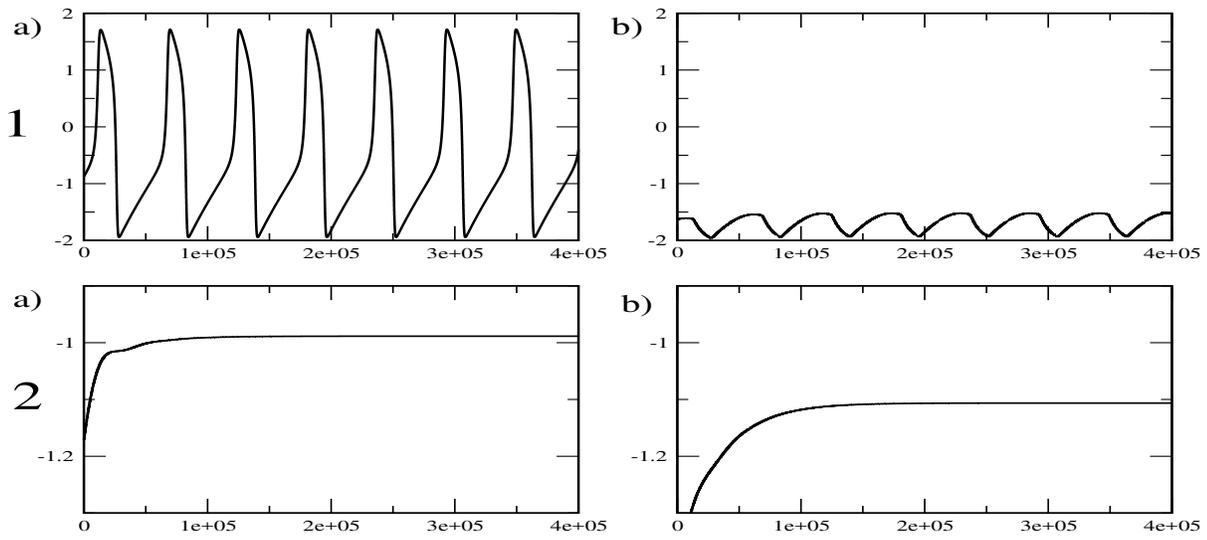
También investigamos el comportamiento dinámico de este arreglo cuando la constante de acoplamiento  $\gamma$  es mayor. Al valor reportado en las secciones anteriores ( $\gamma = 0.05$ ) le llamaremos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  al valor  $\gamma = 0.8$ .



**Figura 5.35:** Diagrama de bifurcación para un arreglo formado por dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso y constante de acoplamiento **a)**  $\gamma_1 = 0.05$ , **b)**  $\gamma_2 = 0.8$ .

En la figura 5.35**a)** mostramos que en el rango  $\tau \in [0, 10]$  con  $\gamma_1$  la dinámica de los sistemas alterna entre periodo 1 y 2. Con  $\gamma_2$ , que es 16 veces mayor que  $\gamma_1$ , en el rango  $\tau \in [0.3, 3.6]$  el diagrama de bifurcación no muestra puntos, lo cual indica que las series de tiempo de los sistemas no presentan máximos ni mínimos.

Al analizar las series de tiempo de los sistemas con  $\tau = 2.0$  (figura 5.36) nos damos cuenta que con  $\gamma_2$  el arreglo experimenta muerte de amplitud.



**Figura 5.36:** Series de tiempo para un arreglo formado por dos sistemas Fitzhug-Nagumo con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso. Renglón 1  $\gamma_1$  y renglón 2  $\gamma_2$ , **a)** sistema 1 y **b)** sistema 2.

# Capítulo 6

## Discusión de Resultados



# Capítulo 7

## Discusión y Conclusiones

En este capítulo presentamos un resumen de los resultados obtenidos así como la discusión correspondiente estableciendo conclusiones. También planteamos una perspectiva sobre los temas que no abordamos a detalle en la tesis y que podrían ser desarrollados en un trabajo a futuro.

Todas las simulaciones se corrieron en una máquina de 64 bits, este dato es importante porque, como es de esperarse y durante nuestras simulaciones numéricas fue obvio, influye en la precisión de los datos.

Para cada uno de los modelos analizados: Rossler y Fitzhug-Nagumo, estudiamos cuatro configuraciones distintas que se logran al introducir un retraso temporal constante en formas diferentes en las ecuaciones del mismo. A continuación explicamos por qué elegimos estas configuraciones.

1. **Retraso temporal en una variable.** Con esta configuración podemos estudiar los efectos que produce en la dinámica del sistema un retraso temporal en una variable propia del sistema. Es decir, el retraso se introduce como un parámetro dentro de una variable intrínseca del sistema.
2. **Retroalimentación lineal con retrasada.** El retraso temporal se introduce como un forzamiento externo, lo cual puede ser útil en el estudio de algunos sistemas electrónicos de control o en láseres, por mencionar un ejemplo.
3. **Retroalimentación senoidal retrasada.** Nuevamente el retraso aparece como un forzamiento externo al sistema pero al tener forma senoidal resulta interesante por sus aplicaciones al tratamiento de señales.
4. **Acoplamiento bidireccional difusivo con retraso en dos SD.** Introducimos un término de retraso temporal en el acoplamiento entre dos sistemas. Este arreglo es de especial interés porque con él podemos simular la interacción que existe entre dos sistemas conectados entre sí por medio de señales producidas por ellos pero con retraso. Esto nos permite generarnos hipótesis para el comportamiento de dos neuronas o dos celdas electroquímicas.

## 7.1. Sistemas Tipo Rossler

Este modelo ha sido ampliamente estudiado desde su publicación en 1976, por esta razón lo usamos en nuestra investigación ya que es relativamente fácil de manipular

y se conocen muchos aspectos dinámicos de él. Para las tres primeras configuraciones partimos de cuatro regímenes dinámicos distintos: periodo 1, 2, 4 y régimen caótico. Utilizamos sistemas en régimen periódico porque nos interesa investigar como un sistema en estado periódico puede cambiar a dinámicas más complejas como por ejemplo la caótica, únicamente por el efecto de retraso temporal. También estudiamos el efecto del retraso sobre un sistema en régimen caótico por completes del estudio.

### 7.1.1. Retraso Temporal en una Variable

Se estudió el modelo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_{2\tau} \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c).\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c$  son parámetros propios del sistema mientras que  $x_\tau$  representa la variable  $x$  con retraso temporal  $\tau$ .

#### 7.1.1.1. Estado Inicial: Periodo 1 ( $c = 2.5$ )

Estudiamos el comportamiento del sistema con retraso temporal  $\tau$  en el rango  $\tau \in [0, 100]$ . En todo este rango el sistema siempre se mantuvo en régimen periódico. Para  $\tau \in [2.4, 3.9]$  y  $\tau \in [8.53, 9.56]$  el sistema sufre una bifurcación gradual de ciclo limite periodo 1 a punto fijo y viceversa.

En  $\tau = 21.2$  el sistema adquiere una dinámica de ráfagas de disparo (tipo bursting) en régimen no caótico, pues su exponente maximal de Lyapunov es cero. Al analizar la serie de tiempo correspondiente nos damos cuenta que el sistema en realidad se encuentra en régimen cuasiperiódico (el cual frecuentemente luce similar al bursting) y por tanto tiene un atractor toroidal asociado [35].

#### 7.1.1.2. Estado Inicial: Periodo 2 ( $c = 3.5$ )

Cuando el sistema está sin perturbar ( $\tau = 0.0$ ) muestra una dinámica periódica de periodo 2. Durante todo el intervalo que analizamos ( $\tau \in [0, 100]$ ) el sistema siempre se mantuvo en régimen periódico pero presentando transiciones entre periodo 1 y periodo 2.

El diagrama de bifurcación del sistema (fig. 5.6) muestra zonas densas donde el exponente maximal de Lyapunov sigue siendo cero y en el espectro de Fourier aparecen contribuciones discretas. Todo lo anterior indica que el sistema no está en régimen caótico pero da el indicio de que podría tener una dinámica cuasiperiódica.

#### 7.1.1.3. Estado Inicial: Periodo 4 ( $c = 4$ )

La dinámica del sistema en  $\tau = 0$  es de periodo 4. En el diagrama de bifurcación (fig. 5.8) pareciese que el sistema es periodo 2 en  $\tau = 0$ , lo cual indica que para ratrosos muy pequeños ( $\tau = 0.01$ ) el sistema ya experimenta cambios drásticos en su dinámica.

Durante todo el intervalo de estudio ( $\tau \in [0, 100]$ ) el sistema se mantiene en régimen

periódico al tener un exponente maximal de Lyapunov en cero (fig. 5.8). El diagrama de bifurcación muestra zonas densas que podrían indicar que el sistema está en régimen cuasiperiódico.

#### 7.1.1.4. Estado Inicial: Dinámica Caótica (c=5.7)

Para  $\tau = 0$  el sistema tiene un exponente maximal de Lyapunov mayor a cero, lo cual indica que se encuentra en régimen caótico. Al aumentar el valor de  $\tau$  su comportamiento dinámico experimenta varios cambios.

En el diagrama de bifurcación (fig. 5.10) mostramos que un retraso temporal puede actuar como supresor de caos. Este control de caos, de acuerdo a nuestros resultados, puede ocurrir en dos formas: la amplitud de la oscilación del sistema empieza a disminuir gradualmente hasta hacerse cero ó que el sistema bifurca de un régimen caótico a uno periódico. En cualquier caso habría que estudiar cuál es el mecanismo que provoca la supresión de caos.

## 7.2. Retroalimentación Lineal Retrasada

El modelo estudiado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \alpha x_{1\tau}, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c)\end{aligned}\tag{7.2}$$

donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c$  son parámetros propios del sistema mientras que  $x_\tau$  representa la variable  $x$  con retraso temporal  $\tau$ .

#### 7.2.0.1. Estado Inicial: Periodo 1 ( $c = 2.5$ )

Estudiamos los cambios dinámicos de este sistema en el rango  $\tau \in [0.100]$ . Durante todo el intervalo el sistema siempre se mantuvo en régimen periódico alternando entre periodo 1 y periodo 2 (fig. 5.12), lo cual muestra que para esta condición inicial un retraso temporal  $\tau$  no es capaz de provocar dinámicas caóticas.

#### 7.2.0.2. Estado Inicial: Periodo 2 ( $c = 3.5$ )

En este sistema el retraso temporal  $\tau$  influye drásticamente en el comportamiento dinámico del mismo. Conforme se incrementa el valor de  $\tau$  el sistema alterna entre el régimen periódico (con periodo: 2, 3, 4, 6 y 8) y caótico. En la figura 5.13 mostramos las bifurcaciones que experimenta el sistema así como el exponente maximal de Lyapunov.

#### 7.2.0.3. Estado Inicial: Periodo 4 ( $c = 4$ )

Los efectos del retraso en este sistema (fig. 5.15) se pueden clasificar en dos intervalos: 1)  $\tau \in [0.0, 27.0]$ : El sistema alterna entre un régimen periódico ( periodo: 1, 2, 3, 4 y 6) y uno caótico y 2)  $\tau \in [28.0, 100.0]$ : El sistema conserva una dinámica caótica.

**7.2.0.4. Estado Inicial: Dinámica Caótica ( $c = 5.7$ )**

En la figura 5.17 mostramos el comportamiento dinámico de este sistema conforme  $\tau$  se incrementa y podemos concluir que el retraso temporal puede actuar como un mecanismo de control de caos: puede suprimirlo o provocarlo.

**7.2.1. Retroalimentación Senoidal Retrasada**

Ahora el sistema está dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \alpha \sin(kx_{1\tau}), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c),\end{aligned}\tag{7.3}$$

donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c$  son parámetros propios del sistema,  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$  y  $x_\tau$  representa la variable  $x$  con retraso temporal  $\tau$ .

**7.2.1.1. Estado Inicial: Periodo 1 ( $c = 2.5$ )**

En ausencia de retraso temporal el sistema se encuentra en régimen periódico con periodo 1. Estudiamos el comportamiento del sistema en el rango  $\tau \in [0, 100]$ , dentro de este rango el sistema siempre se mantuvo en régimen periódico. El diagrama de bifurcación (fig. 5.18) muestra zonas densas que indican que el sistema puede tener regímenes periódicos más altos.

**7.2.1.2. Estado Inicial: Periodo 2 ( $c = 3.5$ )**

Dentro del rango  $\tau \in [0, 100]$  el sistema alterna entre régimen periódico y caótico mostrando nuevamente que el retraso temporal puede actuar como un control para el caos.

**7.2.1.3. Estado Inicial: Periodo 4 ( $c = 4$ )**

Nuevamente el sistema alterna su dinámica entre el régimen periódico y el caótico.

**7.2.1.4. Estado Inicial: Dinámica caótica ( $c = 5.7$ )**

Para esta configuración el retraso temporal  $\tau$  también funciona como un control de caos. Valores pequeños de  $\tau$  ( $\tau = 0.01$ ) provocan cambios en la dinámica del sistema de tal forma que en el diagrama de bifurcación (fig. 5.21) pareciese que el sistema tiene periodo 4 para  $\tau = 0.0$ .

**7.2.2. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD**

Analizamos un ensamble formado por dos sistemas idénticos tipo Rossler periodo 1 con acoplamiento bidireccional difusivo con retraso. Este ensamble está dado por las

ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \gamma(x_4 - x_{1\tau}), \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\
 \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c), \\
 \dot{x}_4 &= -x_5 - x_6 + \gamma(x_{1\tau} - x_4), \\
 \dot{x}_5 &= x_4 + ax_5, \\
 \dot{x}_6 &= b + x_6(x_4 - c),
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes del sistema,  $\gamma$  es la constante de acoplamiento y  $x_{1\tau}$  es la única variable con retraso temporal. Las primeras tres ecuaciones corresponden al sistema 1 y las restantes al sistema 2.

Como ambos sistemas tienen los mismos parámetros e inician con condiciones iniciales idénticas presentan sincronización completa en  $\tau = 0.0$ . A medida que incrementamos el valor de  $\tau$  y los sistemas sufren cambios en su dinámica, como duplicación de periodo o transición a dinámicas caóticas, mantienen una sincronización de fase en todo momento (fig. 5.23). Este cambio en el tipo de sincronización únicamente se debe al retraso temporal pues la constante de acoplamiento  $\gamma$  permanece constante. Entonces concluimos que para este arreglo el retraso temporal favorece la sincronización de fase incluso en régimen caótico.

### 7.3. Sistemas Tipo Fitzhug-Nagumo

Analizamos el sistema Fitzhug-Nagumo por tres razones principales: es excitable, de baja dimensionalidad (2D) y porque modela de manera relativamente sencilla el comportamiento de una neurona. Estudiamos el comportamiento dinámico de este sistema usando las mismas configuraciones que con el modelo de Rossler y en esta sección discutimos los resultados obtenidos.

#### 7.3.1. Retraso Temporal en una variable

Este arreglo está determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + I, \\ \dot{x}_2 &= c(x_{1\tau} + a - bx_2),\end{aligned}\tag{7.5}$$

donde  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$  y  $c = 0.08$  son parámetros del sistema, mientras que  $I = 0.4$  es el estímulo externo.

Dentro del intervalo  $\tau \in [0, 100]$  el sistema no sufrió bifurcaciones que provocaran alguna variación en su comportamiento dinámico. El único cambio observable es un aumento en la amplitud de la oscilación lo que fisiológicamente significa un aumento en el estímulo externo  $I$ . Es decir, al introducir un retraso temporal en el sistema se produce un efecto similar al de aumentar la intensidad del estímulo externo de corriente  $I$ .

### 7.3.2. Retroalimentación Lineal Retrasada

Analizamos la dinámica del modelo original de Fitzhug-Nagumo (ecuaciones 3.9) al introducir un término de retroalimentación lineal con retraso de la forma  $\alpha x_\tau$  donde  $\alpha < 1$  es una constante positiva y  $x_\tau$  es la variable con retraso temporal asociada a  $x_1$  ó  $x_2$ .

Para esta configuración el sistema diverge rápidamente imposibilitando su estudio. Una posible solución, que no realizamos en este estudio pero nos gustaría analizar en un futuro, es que la constante  $\alpha$  sea negativa.

### 7.3.3. Retroalimentación Senoidal Retrasada

Estudiamos la dinámica del sistema determinado por el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + I + \alpha \sin(kx_{2\tau}), \\ \dot{x}_2 &= c(x_1 + a - bx_2),\end{aligned}\tag{7.6}$$

tomando  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.08$ ,  $I = 0.4$ ,  $\alpha = 1.0$  y  $k = 1$ .

Este arreglo resultó ser el más interesante y rico en cuanto a comportamiento dinámico para un sólo sistema Fitzhug-Nagumo. Para  $\tau = 0.0$  el sistema posee una dinámica periodo 1. Aunque durante el intervalo  $\tau \in [0.0, 38.0]$  el sistema se mantiene en periodo 1 el atractor correspondiente experimenta cambios topológicos (fig. 5.26) indicando que los puntos fijos del sistema están cambiando de posición en el espacio fase debido al retraso temporal.

El retraso temporal también provoca que el sistema experimente una cascada de bifurcación pasando por periodo 1, 2 y 4 para posteriormente bifurcar a una dinámica caótica. Esta cascada de duplicación antes del caos nos dice que el mecanismo por el que se llega al caos es la ruta de duplicación de periodo debida al incremento del retraso temporal.

Al aumentar el valor de  $\tau$  el sistema pasa del régimen caótico a uno cuasiperiódico mostrando nuevamente que  $\tau$  puede actuar como un supresor de caos. Para valores mayores de  $\tau$  el sistema abandona la dinámica cuasiperiódica y regresa a comportamiento periódico. Aquí no hay un comportamiento que nos indique una ruta al caos por cuasiperiodicidad.

#### 7.3.4. Acoplamiento Bidireccional Difusivo con Retraso entre dos SD

El arreglo está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + I_1 + \gamma(x_3 - x_{1\tau}), \\
 \dot{x}_2 &= c_1(x_1 + a - bx_2), \\
 \dot{x}_3 &= x_3 - \frac{1}{3}x_3^3 - x_4 + I_2 + \gamma(x_{1\tau} - x_3), \\
 \dot{x}_4 &= c_2(x_3 + a - bx_4),
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

donde  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $c_1 = 0.04$ ,  $c_2 = 0.08$ ,  $I_1 = 0.2$ ,  $I_2 = 0.4$  y  $\gamma = 0.05$ .

Escogimos dos sistemas Fitzhug-Nagumo con parámetros distintos para analizar

con más detalle los efectos del retraso temporal en la sincronización de los mismos. La constante de acoplamiento  $\gamma$  se escoge con valor pequeño para que no influya demasiado en la dinámica de los sistemas restandole importancia a los efectos producidos por retrasos temporales pequeños.

Para  $\tau = 0.0$  ambos sistemas tienen una dinámica periodo 1. Al aumentar el valor de  $\tau$  los dos sistemas bifurcan a dinámicas de periodo más alto. El arreglo adquiere dinámica caótica para los valores alrededor de  $\tau = 83, 120, 126$  y  $129$ .

Un comportamiento interesante es que para ciertos valores de  $\tau$  los sistemas presentan una dinámica tipo ráfaga de disparo (bursting) y por la topología que presentan sus series de tiempo pareciese que el bursting ocurre por una bifurcación tipo silla-nodo homoclínica [35]<sup>1</sup>. Este comportamiento de bursting aparece tanto en régimen periódico como caótico.

En nuestras simulaciones observamos que al introducir un retraso temporal en el acoplamiento los dos sistemas presentan sincronización de fase durante todas las bifurcaciones que experimentan (fig. 5.32). Es decir, el retraso temporal favorece la sincronización entre los sistemas.

Finalmente, al aumentar el valor de la constante de acoplamiento  $\gamma$  entre los sistemas observamos el fenómeno llamado muerte de amplitud [36] (fig. 5.35), el cual por

---

<sup>1</sup>Mecanismo que tiene que ser verificado analíticamente en un trabajo a futuro

cuestiones topológicas es diferente, aunque con similitud, a la muerte de oscilación[40].

## 7.4. Conclusiones Generales

En este trabajo mostramos, mediante simulación numérica, que el retraso temporal influye drásticamente en el comportamiento dinámico de un sistema. El retraso puede actuar como generador o supresor de caos, puede inducir o reprimir dinámicas cuasi-periódicas, provocar estados de bursting y en el caso de sistemas acoplados favorece el estado de sincronización. Además el retraso también puede inducir la muerte de amplitud.

En nuestro trabajo mostramos que en dos sistemas tipo Fitzhug-Nagumo con acoplamiento difusivo bidireccional con retraso se puede inducir el bursting únicamente por la introducción de un retraso temporal. También que el estado de bursting se puede tener en régimen periódico y caótico y que los sistemas presentan sincronización de fase en el estado de bursting.

Como trabajo futuro podríamos calcular la diferencia de fase que hay entre los sistemas que presentan sincronización de fase. También falta investigar cuáles son los mecanismos que provocan las transiciones en la dinámica de los sistemas<sup>2</sup>. De igual

---

<sup>2</sup>A través de análisis de estabilidad. Especialmente de los casos de ráfagas de disparo y muerte de amplitud.

manera podríamos profundizar más en las implicaciones y relevancia fisiológica de los fenómenos obtenidos.



# Bibliografía

- [1] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20 p. 130-141.
- [2] G.M. Shepherd (1983). *Neurobiology*. Oxford University Press, New York.
- [3] Ismael A. Heisler and Thomas Braun, Experimental investigation of partial synchronization in coupled chaotic oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 13, 185 (2003).
- [4] E. G. de Oliveira y T. Braun, Partial Synchronization on a network with different classes of oscillators. *Phys. Rev. E* 76, 06721 (2007).
- [5] Holger Kantz and Thomas Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge Nonlinear Science Series 7 (2004).
- [6] O. E. Rossler, *Phys. Lett. A* 57, 397 (1976).
- [7] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (2000).
- [8] Arkady Pikovsky and Michale Rosenblum, Synchronization: A General Phenomenon in an Oscillatory World. *NF* 88, Nr. 332, 255-268 (2003).

- [9] G. Osipov, A. Pikovsky et al., *Phys. Rev. E* **55**, 2353 (1997).
- [10] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge (2001).
- [11] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky and J. Kurths, *Phase Synchronization of Chaotic Oscillators*, *Phys. Lett.* **76**,11 (1996).
- [12] D. Gabor, *J. IEE London* **93**, 429 (1946).
- [13] P. Panter, *Modulation, Noise and Spectral Analysis*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [14] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1993)
- [15] J. M. González-Miranda, *Synchronization and Control of Chaos*, Imperial College Press (2004).
- [16] L. Pecora, T. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
- [17] H. Fujisaka and T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 32 (1983).
- [18] I. Blekhman, *Synchronization in Science and Technology*, Nauka, Moscow (1981).
- [19] Wolf, A. Swift, H. L. and Vastano, J. A., Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica* **16**, pp. 285-317.
- [20] J. B. Talbot and R. A. Oriani, *Electrochim. Acta.* **30**, 1277 (1985).

- [21] M. Rivera, G. Martínez Mekler and P. Parmananda, Synchronization phenomena for a pair of locally coupled chaotic electrochemical oscillators: A survey, *CHAOS* **16**, 037105 (2006).
- [22] P. Parmananda, P. Sherard, R. W. Rollins, *Phys. Rev. E.* **47**, R780 (1993).
- [23] P. Parmananda, Application of nonlinear dynamics to electrochemical corrosion, 1993.
- [24] Benettin, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them. *C. R. Academie Sci. Paris A*, 206, 431 (1978).
- [25] Wolf, A., Swift, *et. al.* Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D* **16**, pp. 285-317 (1985).
- [26] FitzHugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*. 1961;1(6):445-466.
- [27] Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*. 1952;117(4):500-544.
- [28] Mackey, M. C. and Glass, L. (1977). Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197(4300):287-289.

- [29] Farmer, J.D. (1982). Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D*, 4(3).
- [30] Farmer, J. D., Ott, E., and Yorke, J. A. (1983). The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, 7(1-3).
- [31] Nolte, D. D. (2010). The tangled tale of phase space. *Physics Today*. 63 (4): 33–38.
- [32] Yoko Suzuki, Mingyang Lu (2016). Periodic, quasi-periodic and chaotic dynamics in simple gene elements with time delay, *Scientific reports*, Nature.
- [33] M. Lakshmanan, D. V. Senthilkumar(2010). *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems*. Springer
- [34] A. H. Abbasian, H. Fallah, M. R. Razvan. Symmetric bursting behaviors in the generalized FitzHugh–Nagumo model. *Biol Cybern* (2013) 107:465–476.
- [35] Eugene M. Izhikevich (1999). Neural excitability, spiking and bursting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 10, No. 6 (2000), 1171-1266.
- [36] Awadhesh Prasad (2005). Amplitude death in coupled chaotic oscillators.
- [37] Y. Yamaguchi and H. Shimizu (1984). *Physica D* 11:212
- [38] M. Gassel, E. Glatt and F. Kaiser (2007). Time-delayed feedback in a net of neural-elements.
- [39] Keiji Konishi (2006). Amplitud death induced by a global dynamic coupling. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 17, No. 8 (2006), 2781-2789.

- [40] Aronson, D, Ermentrout, GB, Kopell, N, *Physica D*:403-449, 1990.