

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

OSCILACIONES ELÁSTICAS CON ATMÓSFERA CONTROLADA

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

AUTOR:

JAZIEL ALBERTO ROJAS GUADARRAMA

ASESOR:

DR. ALEJANDRO MORALES MORI

CUERNAVACA, MORELOS

NOVIEMBRE 2018

RESUMEN

Este trabajo busca medir experimentalmente las pérdidas de energía en una barra vibrante de sección transversal circular y se comparan los resultados con un modelo teórico. Las pérdidas de energía disipativa juegan un papel importante en el experimento porque de otra forma la respuesta de la barra crecería indefinidamente. Para el estudio de las pérdidas de energía en la barra vibrante se plantea un modelo teórico que reproduce la respuesta de la barra a una excitación, dicho modelo incluye un término de amortiguamiento moderado por una constante de amortiguamiento. Este modelo teórico solo toma en cuenta las pérdidas de energía por fricción interna del metal. Haciendo una serie de aproximaciones al modelo se encuentra el cuadrado de la aceleración de la barra a la excitación las resonancias en la barra tienen una forma lorentziana, siendo este un resultado original ya que en la literatura se menciona la forma lorentziana de las resonancias pero no se reporta una demostración. Este modelo es utilizado para comparar con las medidas experimentales. En el experimento la técnica de excitación se hace mediante el empleo de Transductores electromagnéticos acústicos (EMAT's), mismos que han sido diseñados para las necesidades experimentales de este problema. La técnica experimental de medición de pérdidas de energía consiste en medir la amplitud de la respuesta de la barra a una excitación a una frecuencia fija, registrando la amplitud de respuesta a n frecuencias se forma una curva lorentziana de resonancia, cuya anchura está dada por las pérdidas de energía del sistema. En el experimento se estudiaron las pérdidas de energía por acoplamiento atmosférico, midiendo la respuesta de la barra a la excitación dentro de una cámara de vacío variando la presión de aire, encontrando que las pérdidas de energía son mayores cuando la presión de aire alrededor de la barra es muy pequeña del orden de 0.2 cmHg. También estudiaron las pérdidas de energía por acoplamiento mecánico, esto es por los soportes donde está fijada la barra, se midieron las pérdidas de energía son menores cuando los soportes se colocan en los nodos y que la pérdida de energía es mayor cuando los soportes se colocan en los antinodos. Los resultados obtenidos en este trabajo cobran relevancia por la técnica experimental de excitación en este caso los EMAT's permiten medir directamente la barra.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	2
1 Introducción	5
1.1 Planteamiento del problema	5
1.2 Investigaciones recientes	6
2 Oscilaciones elásticas en una barra	7
2.1 Ondas compresionales	7
2.2 Ondas torsionales	8
2.3 Ondas flexionales	8
3 Modelo elástico con amortiguamiento	11
3.1 Barra con muesca	11
3.2 Barra lisa	14
3.3 Aproximación	16
4 Sistema experimental	23
4.1 Sistema de excitación-detección: EMAT's	23
4.2 Configuración experimental	24
5 Resultados	29
5.1 Resonancias en una barra	29
5.1.1 Resonancias compresionales, flexionales y torsionales	29
5.1.2 Velocidad de fase	29
5.2 Resonancias con amortiguamiento	32
5.2.1 Modelo teórico	32
5.2.2 Aproximación	33
5.2.3 Acoplamiento mecánico	34

5.2.4	Acoplamiento atmosférico	35
6	Conclusiones	39

1

Introducción

El estudio de las vibraciones u oscilaciones de sistemas mecánicos tiene gran importancia en la Física. En un sistema oscilatorio siempre hay pérdidas. Si son ondas electromagnéticas hay pérdidas. En el caso de ondas de sonido, ondas elásticas, hay pérdidas en los materiales. Una onda acústica que viaja en el aluminio, si el material fuera infinito, la onda no llegaría a todo el material porque la onda se atenuaría. Esta clase de pérdidas se atribuyen a una “fricción interna” que es un tipo de “viscosidad”. Las pérdidas de energía en metales es muy pequeña pero existe. Considerando una geometría simple de una onda que se propaga en una varilla cilíndrica, si la onda es estacionaria y no hubiera pérdidas entonces la onda seguiría en resonancia estacionaria eternamente. Esto no ocurre, ya que la práctica muestra que al mandar la onda estacionaria empieza a decrecer con el tiempo en forma exponencial.

1.1 Planteamiento del problema

La pregunta que nos hacemos es: ¿De dónde vienen las pérdidas de energía en el caso de una barra vibrando en forma compresional? Efectivamente hay una “fricción interna”, que atacarlo como tal es un problema complicado de estado solido, que ha sido abordado desde muchas perspectivas [1] [2] [3] [4] [5]. Si se habla de metales su estructura es policristalina y las pérdidas tienen que ver con las fronteras de los cristales. ¿Qué pérdidas puede haber adicionales a la propia fricción interna del metal? Hay dos: Primero, el acoplamiento con la atmósfera. La vibración compresional menores a 18kHz es audible, esto significa que está radiando energía. Segundo, el acoplamiento mecánico. Los soportes donde está soportada la varilla pueden llevarse parte de la energía. Cualquier acoplamiento el experimento lo va a sentir, ya sea el soporte o el acoplamiento con el aire. Cuando se miden experimentalmente las resonancias de una varilla, técnica llamada espectro scopía resonante, la forma de estas resonancias tienen una apariencia de deltas de Dirac. Pero un análisis fino de cada

resoancia muestra una anchura en la curva. Experimentalmente es posible medir esta anchura, que está relacionada con las pérdidas de energía que está teniendo el sistema. A esta técnica de medición de pérdidas se le conoce en la literatura como ancho de banda resonante (en inglés "resonant bandwidth"). En esta técnica se requiere un cuidadoso análisis de las señales de entrada y salida en la vibración resonante estacionaria, además de una alta estabilidad en el sistema experimental [1]. Existe también la técnica de decaimiento libre (free delay), entre otros métodos que, al igual que los métodos mencionados, también son usados para medir el módulo de Young en materiales [2].

1.2 Investigaciones recientes

En los últimos años se han hecho investigaciones que buscan entender diferentes aspectos de la disipación de energía en sistemas elásticos. Duffy [6] reporta mediciones de pérdidas de energía por fricción interna de barras de aluminio vibrando en el modo torsional en un rango de temperaturas de 50mK a 300K. Wert [7] describe la fricción interna de la reorientación molecular en polímeros sólidos. Miles [8] reporta mediciones de fricción interna para aluminio refinado expuesto a presión hidrostática. Un trabajo importante en el estudio de las pérdidas de energía por acoplamiento a la atmósfera es el realizado por O. Anderson [9], donde utilizando el método de espectroscopía resonante miden la impedancia de radiación en una barra de polímero vibrando compresionalmente en diferentes atmósferas como el aire, helio y argón a temperatura ambiente. Además de las mediciones experimentales Anderson hace un cálculo de las pérdidas de energía considerando que la contribución más importante a las pérdidas de energía la hacen las tapas de la barra y desprecia cualquier contribución por el resto del cuerpo de la barra.

2

Oscilaciones elásticas en una barra

En este capítulo se hace un breve resumen sobre la bien conocida teoría clásica de la barra vibrante. Se plantean las ecuaciones de onda para los modos compresional y torsional, así como la ecuación de movimiento para las oscilaciones flexionales. Una deducción completa y detallada de las ecuaciones de movimiento aquí planteadas se pueden encontrar en diferentes fuentes de la literatura [10].

2.1 Ondas compresionales

Las ondas compresionales en una barra consisten en la propagación de compresiones y extensiones de la barra a lo largo de ella.

La ecuación de onda para oscilaciones compresionales es:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Donde u_z es el vector de deformación en la dirección z , ρ la densidad de la barra, E el módulo de Young, z y t son la componente espacial z y variable espacial respectivamente. Físicamente u_z representa el desplazamiento en la dirección z de un punto material alrededor de su posición de equilibrio.

La velocidad de propagación de la onda está dada por:

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.2)$$

Para el caso de la barra con extremos libres y de longitud L , se tienen soluciones de la forma;

$$u_z(z, t) = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz \quad (2.3)$$

con $\omega = 2\pi f_c$, donde f_c es la frecuencia dada por:

$$f_c = \frac{nv_c}{2L}, \quad (2.4)$$

donde n es un número entero y representa el número de nodos en la barra. Los nodos son aquellas regiones donde la oscilación es nula. De la ecuación 2.4 podemos obtener la longitud de onda λ_l correspondiente a cada frecuencia de oscilación.

$$f_c = \frac{v_c}{\lambda_l} \quad (2.5)$$

Entonces:

$$\lambda_l = \frac{2L}{n} \quad (2.6)$$

Una deducción detallada para la ecuación de onda compresional en términos de la teoría clásica de la elasticidad puede ser encontrada en [10]

2.2 Ondas torsionales

Para oscilaciones torsionales en una barra circular se propone que todos los puntos de la barra se tuerquen un ángulo de $\phi(z)$, como se muestra en la Figura 2.1.

La ecuación de onda para oscilaciones torsionales es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

donde ρ es la densidad de la barra y μ el módulo de corte.

La velocidad de fase de las ondas torsionales es:

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.8)$$

Cabe señalar que tanto las oscilaciones compresionales como las torsionales cumplen la ecuación de onda, por lo tanto sus soluciones son similares. Las frecuencias de los modos normales en torsionales cumplen con:

$$f_t = \frac{nv_t}{2L}, \quad (2.9)$$

donde n es el número de nodos, v_t la velocidad y L la longitud de la barra.

2.3 Ondas flexionales

Las oscilaciones flexionales cumplen la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} = \frac{\rho}{E\kappa^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

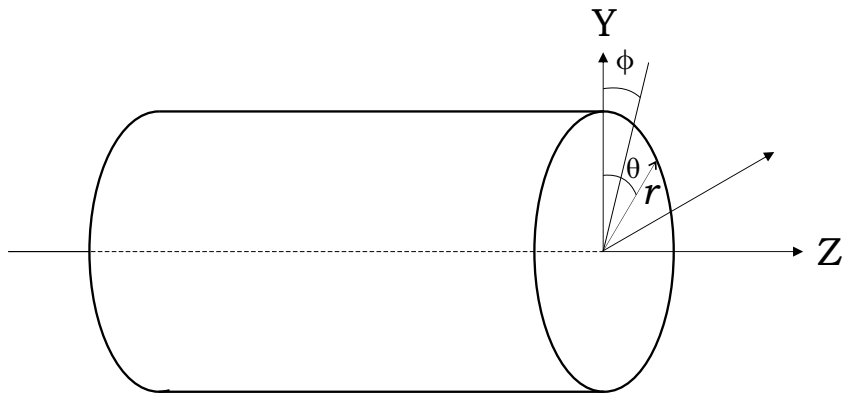


Figura 2.1: Oscilaciones torsionales en una barra circular.

donde ρ es la densidad, E el módulo de Young y κ el radio de giro.

Es notorio que las oscilaciones flexionales no cumplen la ecuación de onda, ya que la ecuación de movimiento incluye un término con derivadas parciales de cuarto orden del desplazamiento respecto a z .

Las frecuencias normales para el caso flexional se calculan con la siguiente expresión:

$$f_F = \frac{\pi(2n-1)^2\kappa}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.11)$$

La velocidad de fase es:

$$v_F = \left(\frac{4\pi^2 E \kappa^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{f_F}, \quad (2.12)$$

mientras que la longitud de onda λ_F se calcula usando:

$$\lambda_F = \frac{4L}{2n-1}. \quad (2.13)$$

3

Modelo elástico con amortiguamiento

Para el estudio de las pérdidas de energía en la barra vibrante es necesario utilizar un modelo teórico que reproduzca la respuesta de la barra a una excitación periódica, dicho modelo debe incluir un término de amortiguamiento. Cabe mencionar que las pérdidas de energía o disipación debe jugar un papel importante en el experimento porque de otra forma la respuesta de la barra crecería ilimitadamente. Este modelo es utilizado para comparar con las medidas experimentales.

El modelo utilizado en este trabajo es el propuesto por Monsivais [11] para una barra con una muesca, en la primera sección del capítulo se discuten los pasos principales para el desarrollo de este modelo. En la segunda sección se describe detalladamente el procedimiento seguido para simplificar el modelo de la barra con muesca al caso de la barra lisa, que es el caso estudiado experimentalmente. En la tercera sección se efectúa una aproximación al modelo de la barra lisa.

3.1 Barra con muesca

El modelo busca determinar analíticamente la respuesta de una barra de sección transversal circular, como la que se muestra en la Figura 3.1, a una fuerza $f_A(t)$ que oscila sinusoidalmente con una frecuencia angular $\Omega = \frac{2\pi}{T_\Omega}$ y con una amplitud h_0 . La excitación a cada frecuencia $n\Omega$ se mantiene igual a $f_A(t) = h_0 \sin(n\Omega t)$. Se realiza el procedimiento seguido por Auld [12].

Primero se deriva la ecuación de movimiento, partiendo de la segunda ley de Newton:

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{F(x, t)}{a}, \quad (3.1)$$

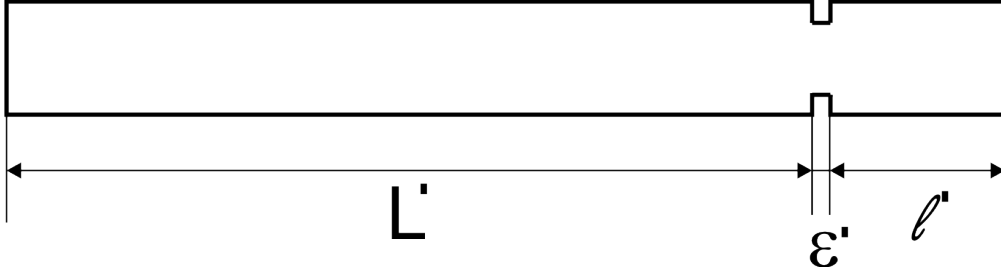


Figura 3.1: Barra con muesca. R es el radio de la barra y r el radio de la muesca.

donde,

$$T = ES + \lambda \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$= E \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$= E \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$A(x, t)$ es la amplitud de la oscilación en el punto x al tiempo t , $S = \frac{\partial A}{\partial x}$ la deformación por unidad de longitud, E el módulo de Young, λ el coeficiente de viscosidad, $a = \pi r^2$ el área de la sección transversal y $F(x, t)$ la fuerza externa aplicada por unidad de longitud.

El coeficiente de viscosidad se mide en poises y se tiene que $1 \text{ poise} = 0.1 \text{ N s m}^{-2}$, los valores típicos del coeficiente de viscosidad oscila en 1 poise para los metales.

Sustituyendo 3.4 en 3.1 y denotando $H(x, t) = \frac{F(x, t)}{Ea}$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial t^2} = -H(x, t). \quad (3.5)$$

El problema tiene que resolverse para $x \in (0, L')$, $x \in (L', \epsilon')$ y $x \in (\epsilon', \ell')$, un sistema de tres ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq L' \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad L' \leq x \leq L' + \epsilon' \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial A^2(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad L' + \epsilon' \leq x \leq L' + \epsilon' + \ell' \quad (3.8)$$

No aparece el término $H(x, t)$ porque es diferente de cero solo en el extremo derecho, entonces se tienen tres ecuaciones de movimiento homogéneas iguales.

Para resolver este problema se utiliza el método de transformada de Laplace. Este método requiere el valor de la deformación inicial $A(x, t = 0)$ y la velocidad inicial de deformación $\left. \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}$, ambas son iguales a cero en los tres sectores.

El procedimiento consiste en resolver la ecuación de movimiento no homogénea utilizando el método de transformada de Laplace en donde el término no homogéneo será el correspondiente a una excitación monocromática de frecuencia fija Ω . Con esto se obtiene la amplitud de la oscilación de respuesta como función del tiempo, la cual incluye tanto la respuesta transitoria como la estabilizada asociada a la frecuencia Ω . Para obtener la respuesta estabilizada basta con desechar los términos asociados a la respuesta transitoria.

El problema tiene 12 condiciones de contorno: en las primeras dos condiciones se tiene la continuidad de $A(x, t)$ entre los segmentos de la barra, en la tercera la deformación en $x = 0$ es nula, en las dos siguientes la deformación debe ser continua entre cada sección de la barra, la sexta condición es la fuerza aplicada en el extremo derecho, en las tres siguientes condiciones se da la deformación inicial de la barra en los tres sectores y en las últimas tres condiciones se da la velocidad inicial en los tres sectores.

La transformada de Laplace respecto a t es:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}(x, s)}{\partial x^2} = \xi^2 \mathbf{A}(x, s) \quad (3.9)$$

donde $\xi = \frac{s}{\nu} \frac{1}{\sqrt{1+s\frac{\lambda}{E}}} = \frac{s}{\nu'}$ con $\nu' = \nu \sqrt{1+s\frac{\lambda}{E}}$ y $\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. La solución es:

$$\mathbf{A}(x, s) = A \cosh(\xi x) + B \sinh(\xi x). \quad (3.10)$$

Se reescribe la solución utilizando las condiciones a la frontera y encontrando las constantes correspondientes, luego se calcula la transformada inversa de Laplace donde para calcular la integral se utiliza el teorema del residuo.

Finalmente la aceleración está dada por:

$$\frac{d^2 A(0, t)}{dt^2} = \frac{v h_0}{\pi R^2 E} \Omega R e \left\{ \frac{\sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}}{\mathbf{G}(x(i\Omega))} e^{i\Omega t} \right\}, \quad (3.11)$$

donde

$$x(s) = s \left(1 + \frac{\lambda s}{E} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.12)$$

y

$$\mathbf{G}(y) = \left[\frac{1}{\eta^2} \sinh \frac{yL'}{v} \sinh \frac{y\ell'}{v} + \eta^2 \cosh \frac{yL'}{v} \cosh \frac{y\ell'}{v} \right] \times \sinh \frac{y\epsilon'}{v} + \sinh \frac{y(L' + \ell')}{v} \cosh \frac{y\epsilon'}{v} \quad (3.13)$$

con $\eta = r/R$.

3.2 Barra lisa

Sustituyendo 3.13 y 3.12 en 3.11, además utilizando $\eta = 1$ y $L = L' + \epsilon' + \ell'$ condiciones de la barra lisa, se tiene:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{v h_0}{\pi R^2 E} \Omega Re \left\{ \frac{\sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}}{i \sin \left(\frac{\Omega L}{v \sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}} \right)} e^{i\Omega t} \right\}. \quad (3.14)$$

Para obtener una expresión analítica de la aceleración con números reales es necesario obtener la forma polar del número complejo entre corchetes de la ecuación 3.14 y de esta manera obtener la parte real de dicho número complejo,

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}}{i \sin \left(\frac{\Omega L}{v \sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}} \right)} e^{i\Omega t} = \frac{\sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}}{i \sin \left(\frac{\Omega L}{v \sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}} \right)} (\cos \Omega t + i \sin \Omega t). \quad (3.15)$$

Es posible ver este término como el producto de dos números complejos:

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc), \quad (3.16)$$

donde

$$a = Re[a + ib], \quad b = Im[a + ib], \quad (3.17)$$

$$c = Re[c + id], \quad d = Im[c + id], \quad (3.18)$$

así, la parte real del producto de los dos números complejos es:

$$Re[ac - bd + i(ad + bc)] = ac - bd, \quad (3.19)$$

se propone que estos números complejos se definan de la siguiente manera:

$$a + ib = \frac{\sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}}{i \sin \left(\frac{\Omega L}{v \sqrt{1 + \frac{i\lambda\Omega}{E}}} \right)}, \quad c + id = (\cos \Omega t + i \sin \Omega t). \quad (3.20)$$

Empleando Mathematica se calcula la parte real e imaginaria de los números complejos propuestos en la ecuación 3.20 de manera individual, por comodidad se definen las siguientes variables:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\lambda\Omega}{E} \right), \quad (3.21)$$

$$r = \frac{L\Omega}{v \left(1 + \frac{\lambda^2\Omega^2}{E^2} \right)^{1/4}} = \frac{L\Omega}{v\beta}, \quad (3.22)$$

$$\beta = \left(1 + \frac{\lambda^2\Omega^2}{E^2} \right)^{1/4}. \quad (3.23)$$

De Mathematica se obtiene:

$$a = \frac{-2\beta (\cosh[r \sin \theta] \sin \theta \sin[r \cos \theta] + \cos \theta \cos[r \cos \theta] \sinh[r \sin \theta])}{\cos[2r \cos \theta] - \cosh[2r \sin \theta]}, \quad (3.24)$$

$$b = \frac{2\beta (\cosh[r \sin \theta] \sin[r \cos \theta] \cos \theta - \sinh[r \sin \theta] \cos[r \cos \theta] \sin \theta)}{\cos[2r \cos \theta] - \cosh[2r \sin \theta]}, \quad (3.25)$$

$$c = \cos[\Omega t], \quad (3.26)$$

$$d = \sin[\Omega t], \quad (3.27)$$

así la parte real del número complejo propuesto es:

$$ac - bd = -\frac{2\beta (\cosh[r \sin \theta] \sin[r \cos \theta] \sin[\Omega t + \theta] + \sinh[r \sin \theta] \cos[r \cos \theta] \cos[\Omega t + \theta])}{\cos[2r \cos \theta] - \cosh[2r \sin \theta]}. \quad (3.28)$$

Si se definen los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} F &= \cosh[r \sin \theta] \sin[r \cos \theta], \\ G &= \sinh[r \sin \theta] \cos[r \cos \theta], \end{aligned}$$

con el propósito de compactar la dependencia temporal de la ecuación 3.28,

$$\begin{aligned} F \sin[\Omega t + \theta] + G \cos[\Omega t + \theta] &= H \cos[(\Omega t + \theta) + \alpha] \\ &= -H \sin \alpha \sin[\Omega t + \theta] + H \cos \alpha \cos[\Omega t + \theta], \end{aligned}$$

comparando se tiene que:

$$\begin{aligned} F &= -H \sin \alpha, \\ G &= H \cos \alpha. \end{aligned}$$

La Ec. (3.28) se vuelve:

$$ac - bd = -\frac{2\beta}{\cos[2r \cos \theta] - \cosh[2r \sin \theta]} (H \cos[(\Omega t + \theta) + \alpha]), \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} H &= (F^2 + G^2)^{1/2}, \\ \alpha &= \arctan[-\frac{F}{G}]. \end{aligned}$$

Además, para volver a las variables originales, se utiliza:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos \left[\frac{\arctan\left[\frac{\lambda\Omega}{E}\right]}{2} \right] = \left(\frac{1 + \left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda\Omega}{E}\right)^2 + 1} \right)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}, \\ \sin \theta &= \sin \left[\frac{\arctan\left[\frac{\lambda\Omega}{E}\right]}{2} \right] = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda\Omega}{E}\right)^2 + 1} \right)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Finalmente se sustituye la ecuación 3.29 en 3.14 y se obtiene una expresión analítica con valores reales:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 A}{dt^2} &= -4\Omega h_0 v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\cosh^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \sin^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + \sinh^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \cos^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\pi E R^2 \left[\cos \left(\frac{\sqrt{2}L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{2}L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right]} \times \\ &\times \cos \left\{ t\Omega + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\lambda\Omega}{E} \right) - \arctan \left[\coth \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \tan \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right] \right\}. \quad (3.30)\end{aligned}$$

En forma general se tiene una ecuación con la forma:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = B \cos(\Omega t + \phi), \quad (3.31)$$

donde B es la amplitud y ϕ la fase.

3.3 Aproximación

En esta sección se busca aproximar 3.30, la amplitud de aceleración de la barra lisa dada una excitación. Algunos autores afirman que la forma de la amplitud de una resonancia contra la frecuencia es una lorentziana, tales afirmaciones se basan en la intuición o la forma aparente de los datos experimentales. Sin embargo, no suele darse una formulación matemática contundente para

confirmar que la forma de la amplitud de la aceleración es una lorentziana. Aquí se busca aproximar 3.30 de modo de obtener una formulación matemática capaz de mostrar explícitamente la forma lorentziana de la resonancia.

La fórmula exacta para la amplitud de aceleración es:

$$B = -4\Omega h_0 v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\cosh^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \sin^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) + \sinh^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \cos^2 \left(\frac{L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{\sqrt{2}v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right)}{\pi E R^2 \left[\cos \left(\frac{\sqrt{2}L\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{2}L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) \right]}$$
(3.32)

En la ecuación 3.32 se excluyó la función armónica y la fase.

Para iniciar las aproximaciones se considera:

$$\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} \ll 1. \quad (3.33)$$

Esta aproximación es válida, ya que el orden de magnitud de Ω está entre 10^3 y 10^5 , se toma 10^5 . Mientras que λ está reportado en la literatura entre 1 y 10. El módulo de Young está en el orden de 10^{10} . Por lo tanto;

$$\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} \sim 10^{-8}, \quad (3.34)$$

que comparado con 1 es muy pequeño.

Ya que 3.33 es válida, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{\Omega^2 \lambda^2}{4E^2}, \\ \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{\Omega^2 \lambda^2}{2E^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Considérese el argumento del coseno hiperbólico del denominador en 3.32, utilizando 3.35 se obtiene:

$$\begin{aligned} \cosh \left(\frac{\sqrt{2}L\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1}}}}{v_c \left(\frac{\Omega^2 \lambda^2}{E^2} + 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \right) &= \cosh \left(\frac{\sqrt{2}L\Omega \sqrt{1 - 1 + \frac{\Omega^2 \lambda^2}{2E^2}}}{v_c \left(1 + \frac{\Omega^2 \lambda^2}{4E^2} \right)} \right), \\ &\simeq \cosh \left(\frac{L\Omega^2 \lambda}{v_c E} \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde se ha despreciado el término $\frac{\Omega^2\lambda^2}{4E^2}$. Para el argumento del coseno del denominador en la ecuación 3.32 se tiene:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\sqrt{2}L\Omega\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1}}}}{v_c\left(\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) &= \cos\left(\frac{\sqrt{2}L\Omega\sqrt{1+1-\frac{\Omega^2\lambda^2}{2E^2}}}{v_c\left(1+\frac{\Omega^2\lambda^2}{4E^2}\right)}\right) \\ &\simeq \cos\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

habiendo despreciado en 3.37 los términos: $\frac{\Omega^2\lambda^2}{2E^2}$ y $\frac{\Omega^2\lambda^2}{4E^2}$.

Así el denominador de 3.32 queda:

$$\frac{1}{\pi ER^2 \left[\cos\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right) - \cosh\left(\frac{L\Omega^2\lambda}{v_c E}\right) \right]}. \quad (3.38)$$

Utilizando los mismos criterios de aproximación, ahora para el argumento del coseno hiperbólico al cuadrado del numerador en 3.32, tomando en cuenta que Ω es pequeña se tiene:

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{L\Omega\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1}}}}{\sqrt{2}v_c\left(\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) &\simeq \cosh^2\left(\frac{L\Omega^2\lambda}{2v_c E}\right), \\ &\simeq 1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Considerando el argumento del seno hiperbólico al cuadrado del numerador en 3.32, se tiene:

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{L\Omega\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1}}}}{\sqrt{2}v_c\left(\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) &\simeq \sinh^2\left(\frac{L\Omega^2\lambda}{2v_c E}\right), \\ &\simeq \left(\frac{L\Omega^2\lambda}{2v_c E}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Los términos del seno al cuadrado y coseno al cuadrado del numerador en 3.32 quedan aproximados como:

$$\sin^2\left(\frac{L\Omega\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1}}}}{\sqrt{2}v_c\left(\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) \simeq \sin^2\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right) \quad (3.41)$$

$$\cos^2\left(\frac{L\Omega\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1}}}}{\sqrt{2}v_c\left(\frac{\Omega^2\lambda^2}{E^2}+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) \simeq \cos^2\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right) \quad (3.42)$$

Incorporando estas primeras aproximaciones se obtiene una aproximación intermedia para la amplitud de la aceleración:

$$B \simeq \frac{-4\Omega h_0 v_c \sqrt{\sin^2\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right) + \cos^2\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right) \left(\frac{L\Omega^2\lambda}{2v_c E}\right)^2}}{\pi E R^2 \left(\cos\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right) - \cosh\left(\frac{L\Omega^2\lambda}{v_c E}\right)\right)} \quad (3.43)$$

Aproximando el coseno hiperbólico al segundo término de Taylor se tiene:

$$\cosh\left(\frac{L\Omega^2\lambda}{v_c E}\right) \simeq 1 + \left(\frac{L\Omega^2\lambda}{v_c E}\right)^2. \quad (3.44)$$

Es importante hacer notar que la amplitud de la aceleración dada por 3.43 tiene valores máximos cuando el denominador es muy pequeño. El coseno hiperbólico del denominador tiene valores cercanos a 1 cuando Ω no es demasiado grande, por lo que los mínimos del denominador se presentan cuando $\cos\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right)$ es cercano a 1. Esto ocurre cuando $\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right)$ está alrededor de $2\pi n$ (donde $n = 0, 1, 2, \dots$). El desarrollo en serie de Taylor alrededor de $2\pi n$ del coseno es:

$$\cos\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2L\Omega}{v_c} - 2\pi n\right)^2. \quad (3.45)$$

Cuando los argumentos de las funciones trigonométricas $\left(\frac{2L\Omega}{v_c}\right)$ están alrededor de $2\pi n$, los argumentos con $\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right)$ están alrededor de $n\pi$. Considerando esto, el desarrollo en serie de Taylor del término del seno al cuadrado del numerador en 3.43 alrededor de $n\pi$ es:

$$\sin^2\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right) \simeq \left(\frac{L\Omega}{v_c} - n\pi\right)^2. \quad (3.46)$$

Por otra parte, el $\cos^2\left(\frac{L\Omega}{v_c}\right)$ evaluado alrededor de $n\pi$ es cercano a 1, por lo que se puede omitir de 3.43.

Incorporando estas aproximaciones a 3.43, se tiene:

$$\begin{aligned} B &\simeq \frac{8\Omega h_0 v_c \sqrt{\left(\frac{L\Omega}{v_c} - n\pi\right)^2 + \left(\frac{L\Omega^2\lambda}{2v_c E}\right)^2}}{\pi E R^2 \left(\left(\frac{2L\Omega}{v_c} - 2\pi n\right)^2 + \left(\frac{L\Omega^2\lambda}{v_c E}\right)^2\right)} \\ &= \frac{2\Omega h_0 v_c^2 \sqrt{\left(\Omega - \frac{n\pi v_c}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2\lambda}{2E}\right)^2}}{\pi E R^2 L \left(\left(\Omega - \frac{n\pi v_c}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2\lambda}{2E}\right)^2\right)} \\ &= \frac{2\Omega h_0 v_c^2}{\pi E R^2 L \sqrt{\left(\Omega - \frac{n\pi v_c}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2\lambda}{2E}\right)^2}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Elevando al cuadrado 3.47, la amplitud de la aceleración al cuadrado es:

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{\left(\frac{2\Omega h_0 v_c^2}{\pi E R^2 L}\right)^2}{\left(\Omega - \frac{n\pi v_c}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2 \lambda}{2E}\right)^2}, \\ &= \left(\frac{4h_0 v_c^2}{\pi R^2 L \Omega \lambda}\right)^2 \frac{\left(\frac{\Omega^2 \lambda}{2E}\right)^2}{\left(\Omega - \frac{n\pi v_c}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2 \lambda}{2E}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

En 3.48 Ω tiene unidades de rad/s. Conviene expresar 3.48 en Hz, aplicando $\Omega = 2\pi f$ se tiene:

$$B^2 = \left(\frac{2h_0 v_c^2}{\pi^2 f R^2 L \lambda}\right)^2 \frac{\left(\frac{\pi f^2 \lambda}{2E}\right)^2}{\left(f - \frac{nv_c}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\pi f^2 \lambda}{2E}\right)^2}. \quad (3.49)$$

La ecuación 3.49 tiene la forma típica de una función lorentziana, también conocida como distribución de Cauchy-Lorentz o distribución de Breit-Wigner, que en forma general se expresa como:

$$P(x, \gamma, I) = I \frac{\gamma^2}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}, \quad (3.50)$$

donde I es la altura del pico de la resonancia, x_0 el parámetro de localización y γ es un parámetro de escala que especifica la mitad de la anchura a la mitad del máximo de la resonancia. Alternativamente 2γ representa la anchura completa de la resonancia a la mitad del pico, FWHM (por sus siglas en inglés *Full-Width at Half-Maximum*). Variando los parámetros de 3.50 se obtienen distribuciones de Cauchy-Lorentz como las mostradas en la Figura 3.2.

Comparando la ecuación 3.49 con la ecuación 3.50 se puede obtener el parámetro de localización x_0 en términos de v_c y L ;

$$x_0 = \frac{nv_c}{2L}, \quad (3.51)$$

que es la expresión clásica para determinar las resonancias en el modo compresional. Este resultado, en principio, da certidumbre de la validez de la aproximación desarrollada. Así mismo, se puede obtener una expresión para la anchura de la resonancia (FWHM) en términos de la frecuencia f , el módulo de Young E y el parámetro de amortiguamiento λ :

$$2\gamma = \frac{\pi f^2 \lambda}{2E}. \quad (3.52)$$

Este último resultado permite relacionar directamente los resultados experimentales con el modelo teórico, ya que al medir el FWHM de las resonancias experimentales se puede asociar con un valor de λ que es el parámetro de amortiguamiento por fricción interna propuesto en el modelo.

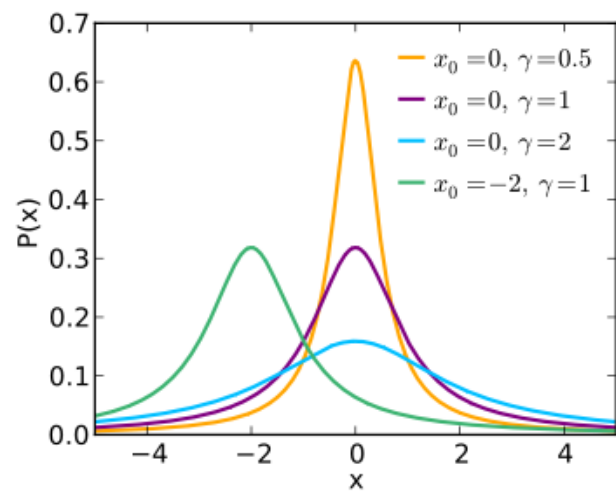


Figura 3.2: Curvas típicas de la distribución de Cauchy-Lorentz.

4

Sistema experimental

El sistema experimental usado en este trabajo es presentado en este capítulo. En la primera sección se explica el funcionamiento de la técnica de excitación-detección utilizada, mientras que en la segunda sección se describe el sistema experimental en su conjunto.

4.1 Sistema de excitación-detección: EMAT's

La técnica de excitación-detección utilizada en el laboratorio de *Vibraciones y Ondas Elásticas* es mediante el empleo de *Transductores Electromagnéticos Acústicos*, EMAT's (por sus siglas en inglés, *Electromagnetic Acoustic Transducers*), mismos que han sido desarrollados y perfeccionados en el laboratorio mencionado.

Los EMAT's constan de dos componentes principales; una bobina y un imán permanente altamente divergente.

Para el estudio de vibraciones se utiliza como muestra barras o placas de aluminio, es necesario utilizar este material por la técnica de excitación-detección empleada, ya que se requiere que la muestra sea un material no ferromagnético y conductor. Ambas características cumplidas por el aluminio.

Excitador EMAT: Mediante una señal sinusoidal amplificada se hace circular una corriente eléctrica alterna en la bobina, que genera un campo magnético variable en el tiempo. Este campo magnético varía a la frecuencia de la señal sinusoidal. La muestra de aluminio (barra o placa) debe estar muy cerca de la bobina pero sin tocarla. El flujo magnético variable en el aluminio induce sobre este corrientes de remolino, también conocidas como corrientes parásitas, de Foucault o *eddy currents* en inglés. La dirección de las corrientes de remolino cambian dependiendo si el campo entra o sale del aluminio, esta frecuencia de cambio es la frecuencia de la señal sinusoidal. El campo magnético del imán permanente interactúa con las corrientes de remolino generando una fuerza

de Lorentz que "empuja" la muestra de aluminio como se muestra en la Figura, la componente radial del campo magnético del imán permanente es la que interactúa para generar la fuerza de Lorentz. La dirección de esta fuerza está determinada por la dirección de las corrientes de remolino y dado que estas varían con la frecuencia de la señal sinusoidal, entonces la dirección de la fuerza de Lorentz varía con la frecuencia de la señal sinusoidal. De este modo el EMAT "empuja" y "jala" con la frecuencia deseada a la muestra de aluminio.

Detector EMAT: Se tiene la misma configuración del imán permanente y bobina, situados a muy corta distancia de una muestra de aluminio vibrando a cierta frecuencia y amplitud. Por la presencia del imán permanente que permanece inmóvil frente a la muestra vibrando se genera, en una espira imaginaria sobre la superficie del aluminio, un flujo de campo magnético variable que su vez induce corrientes de remolino en la superficie de la muestra. La intensidad de las corrientes de remolino están directamente relacionadas con la amplitud de vibración de la muestra, además la dirección de las corrientes de remolino varían a la misma frecuencia con la que el aluminio está vibrando. Las corrientes de remolino generan a su vez un campo magnético variable que es "recogido" por la bobina, generando en ella una corriente eléctrica alterna. La intensidad de esta corriente alterna estará relacionada con amplitud de la oscilación de la muestra, de igual modo la frecuencia de oscilación del aluminio será la frecuencia de la corriente alterna.

4.2 Configuración experimental

Para el funcionamiento de los EMAT's es necesario montar los instrumentos como se muestra en el diagrama de la Figura ??.

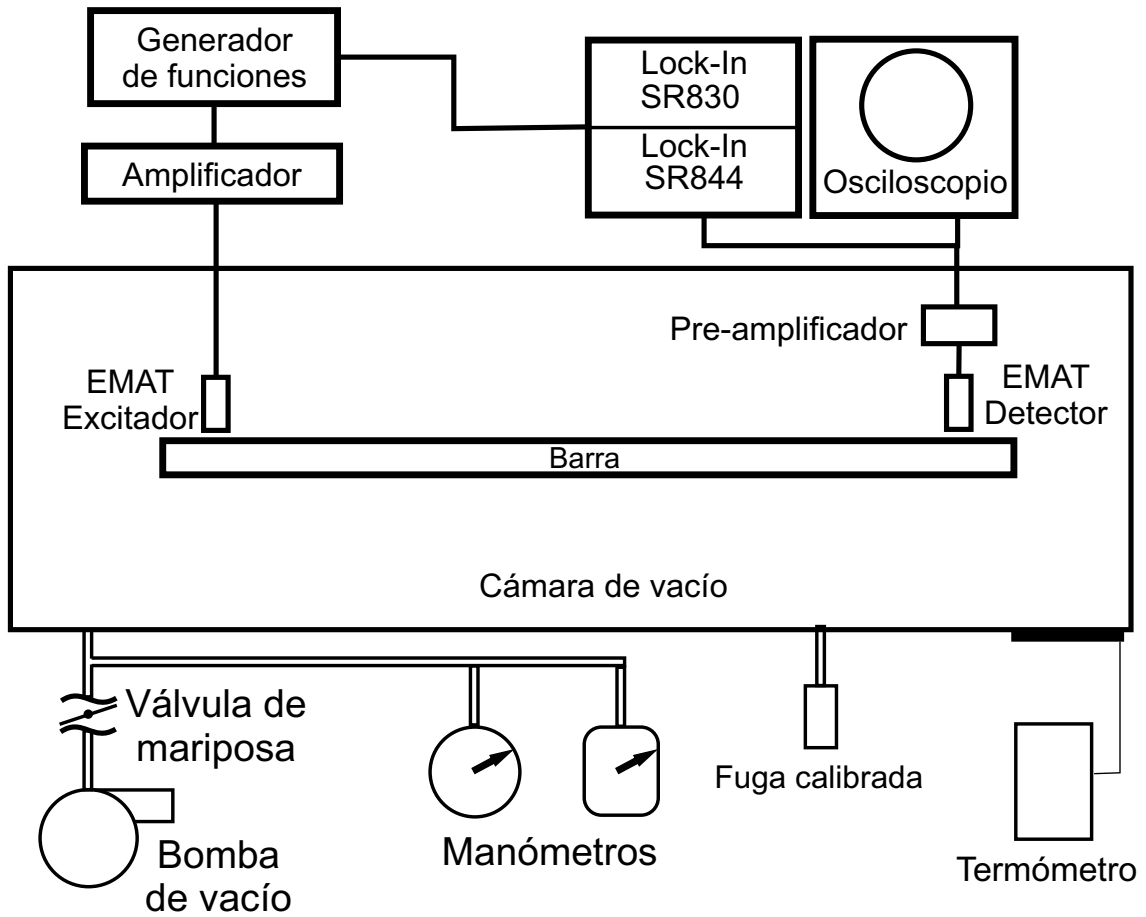


Figura 4.1: Esquema del sistema experimental.

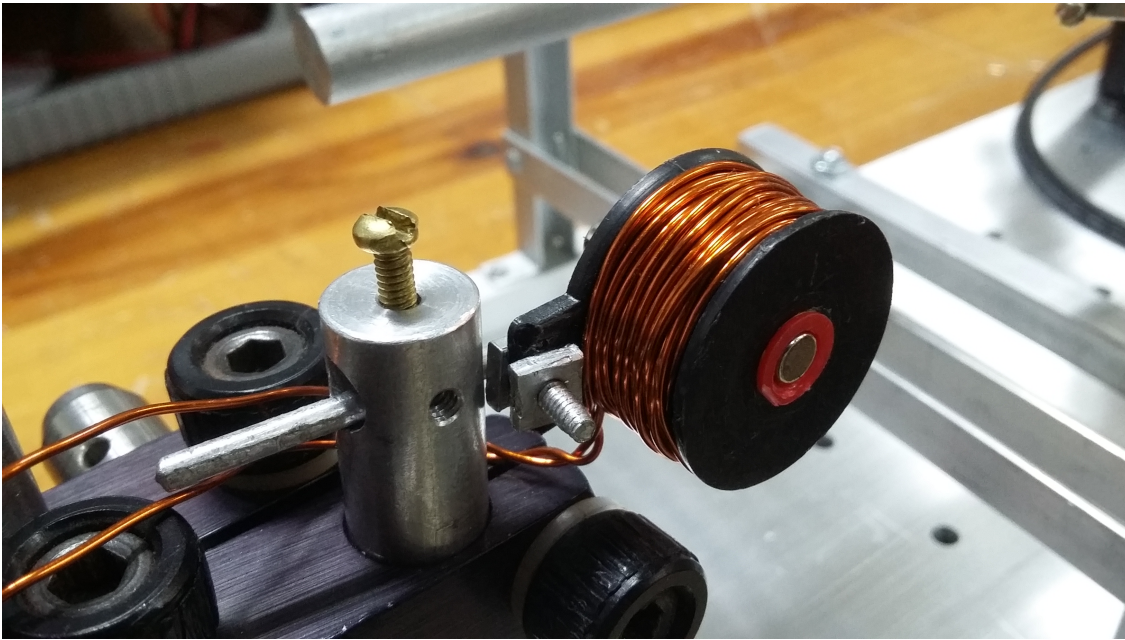


Figura 4.2: Excitador EMAT



Figura 4.3: Detector EMAT

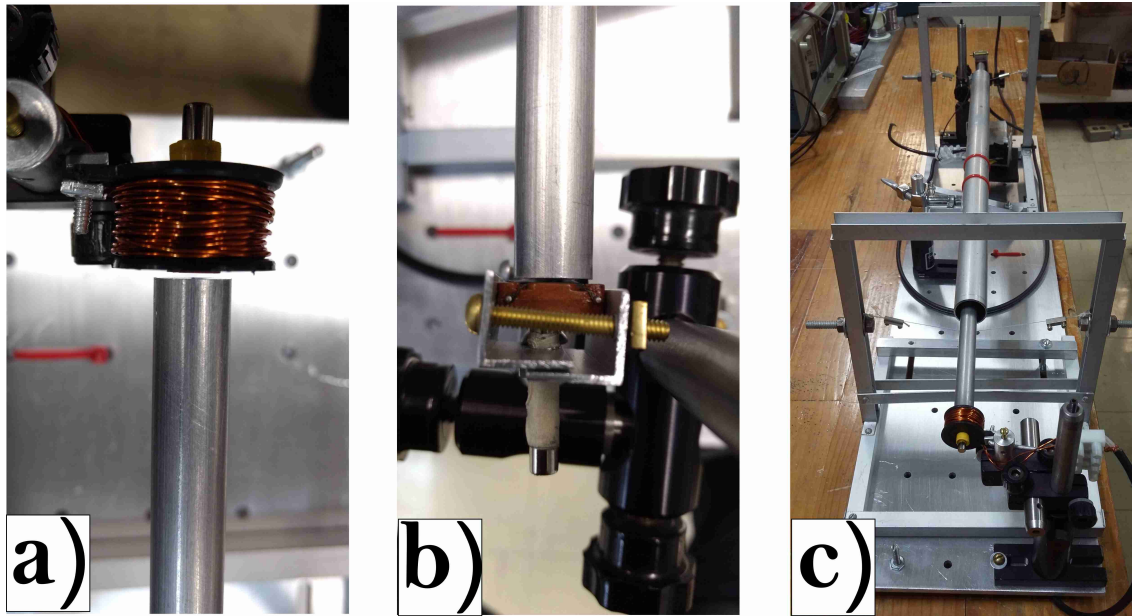


Figura 4.4: (a) Excitador EMAT montado. (b) Detector EMAT montado. (c) Sistema de excitación-detección EMAT.

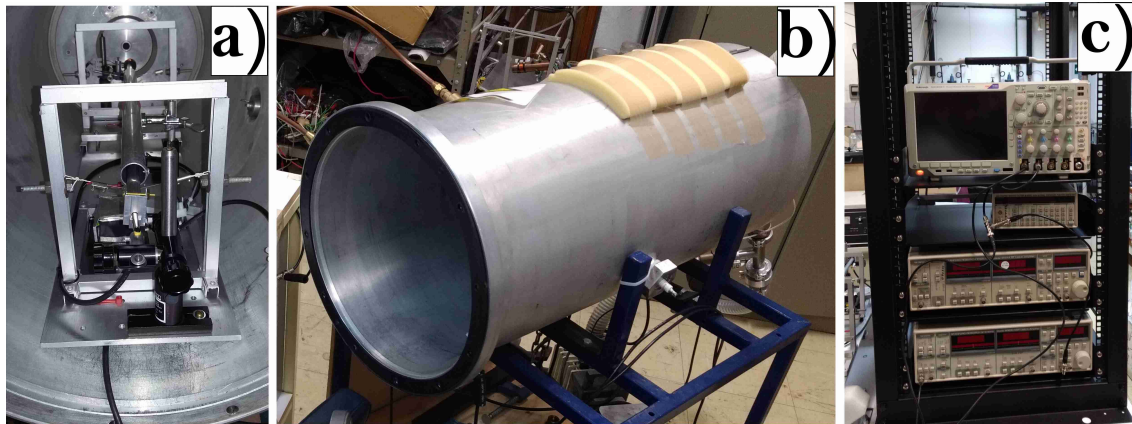


Figura 4.5: (a) Sistema de excitación-detección EMAT montado dentro de la cámara de vacío. (b) Cámara de vacío. (c) Equipo electrónico de medidas (arriba hacia abajo): Osciloscopio, generador de funciones, Lock-in amplifiers.

5

Resultados

Se presentan los resultados obtenidos para una barra lisa de 0.6292 m de longitud y 0.0127 m de diámetro.

En la primera sección del presente capítulo se muestra el espectro de resonancias medidas para la barra descrita, en los modos; compresional, torsional y flexional. En la segunda sección se muestran los resultados del modelo teórico desarrollado en este trabajo en comparación con medidas experimentales.

5.1 Resonancias en una barra

5.1.1 Resonancias compresionales, flexionales y torsionales

En la Figura 5.1 se muestra el espectro de resonancias en función del número de nodos para los modos compresional, torsional y flexional. El EMAT excita a una frecuencia definida en unidades de Hz, ya que el detector EMAT mide la amplitud de la aceleración de respuesta de la barra a la excitación, se hace un barrido en frecuencias observando la respuesta de la barra. Cuando la barra entra en resonancia la amplitud de respuesta se incrementa drásticamente. El barrido de frecuencia se puede hacer tan fino como se desee, desde milésimas de Hz hasta centenas de Hz. Debido a que el intervalo de barrido puede ser muy amplio se hace uso de la teoría para reducir este intervalo, utilizando las fórmulas para calcular las frecuencias de resonancia planteadas en el Capítulo "Oscilaciones elásticas en una barra".

5.1.2 Velocidad de fase

Con los resultados mostrados en la Figura 5.1 se puede calcular la velocidad de fase utilizando la conocida fórmula $v_f = \lambda_l f$; donde v_f es la velocidad de fase, λ_l la longitud de onda y f la frecuencia. Para cada frecuencia de resonancia se tiene el número de nodos correspondiente a esa frecuencia,

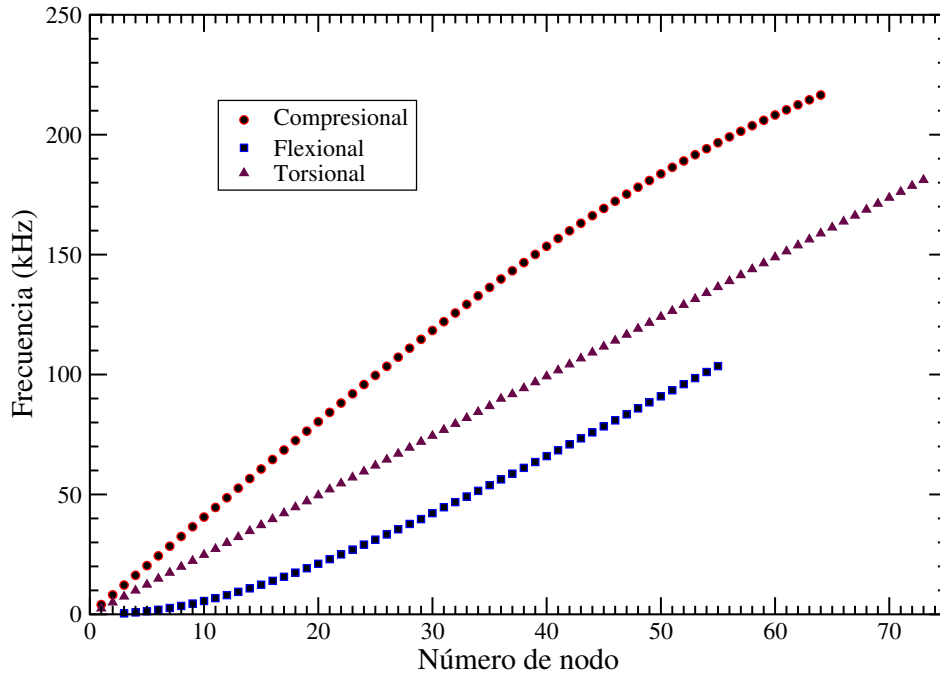


Figura 5.1: Frecuencias de resonancia experimentales.

por lo tanto se puede calcular la longitud de onda ($\lambda_l = 2L/n$). Multiplicando la longitud de onda por la frecuencia se obtiene la velocidad de fase.

Los resultados de la velocidad de fase se muestran en la Figura 5.2 donde puede observar que la velocidad de fase para torsionales permanece constante aún a frecuencias grandes. La velocidad de fase para compresionales es constante para frecuencias bajas, mientras que para frecuencias grandes la velocidad de fase disminuye. En el modo flexional la velocidad de fase va creciendo con la frecuencia, sin embargo este incremento es cada vez menor conforme la frecuencia crece.

En la Figura 5.3 los resultados experimentales obtenidos para esta barra se comparan con el modelo teórico de diferencias finitas desarrollado por el Dr. José Antonio Otero. Este modelo teórico consiste, básicamente, en resolver las ecuaciones de la elasticidad (para la geometría de la barra lisa circular) con el método de diferencias finitas. Es notable que los resultados experimentales se ajusten perfectamente al modelo teórico del Dr. José Antonio Otero. Las líneas rojas continuas en la Figura 5.3 representan todos los modos de vibración; compresional, torsional y flexional de la barra lisa aquí estudiada. Las líneas rojas que vienen de velocidad de fase infinita corresponden a modos de vibración llamados *modos guiados*, estos modos de vibración se presentan a altas frecuencias. El estudio de los modos guiados de vibración representan un desafío experimental que se abordará en trabajos futuros.

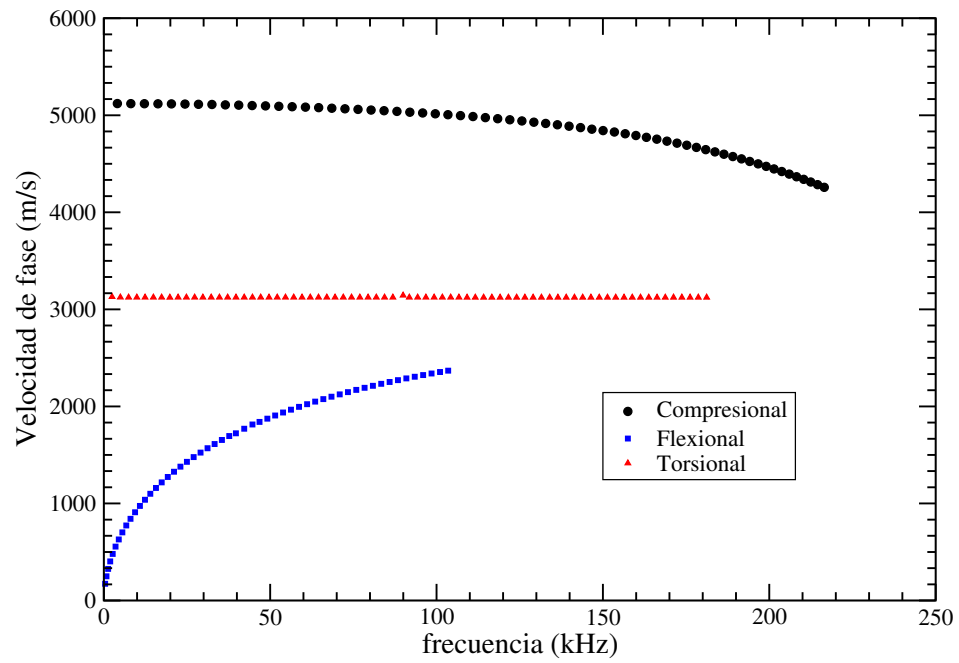


Figura 5.2: Velocidad de fase experimental.

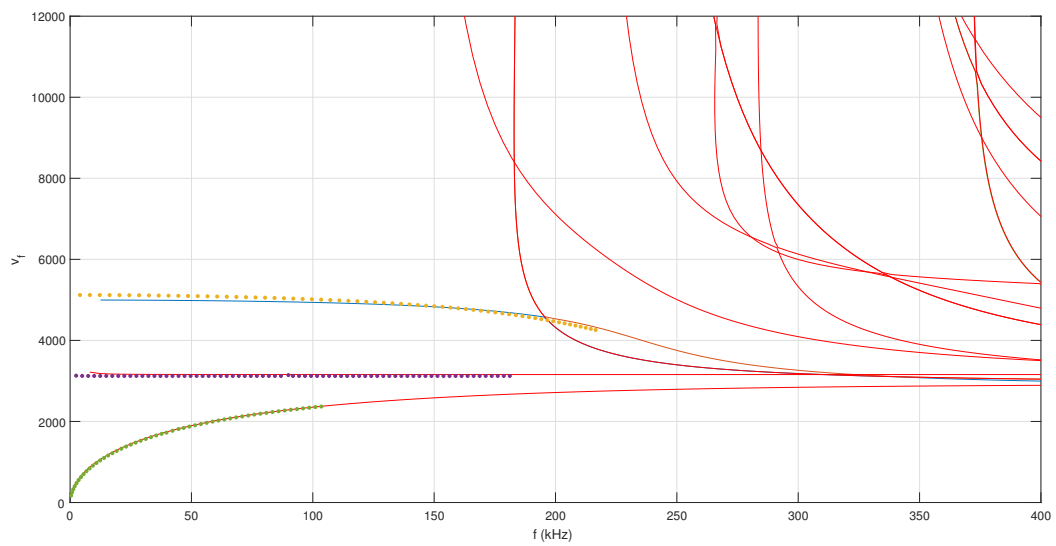


Figura 5.3: Modelo teórico de diferencias finitas en comparación con las medidas experimentales.

5.2 Resonancias con amortiguamiento

5.2.1 Modelo teórico

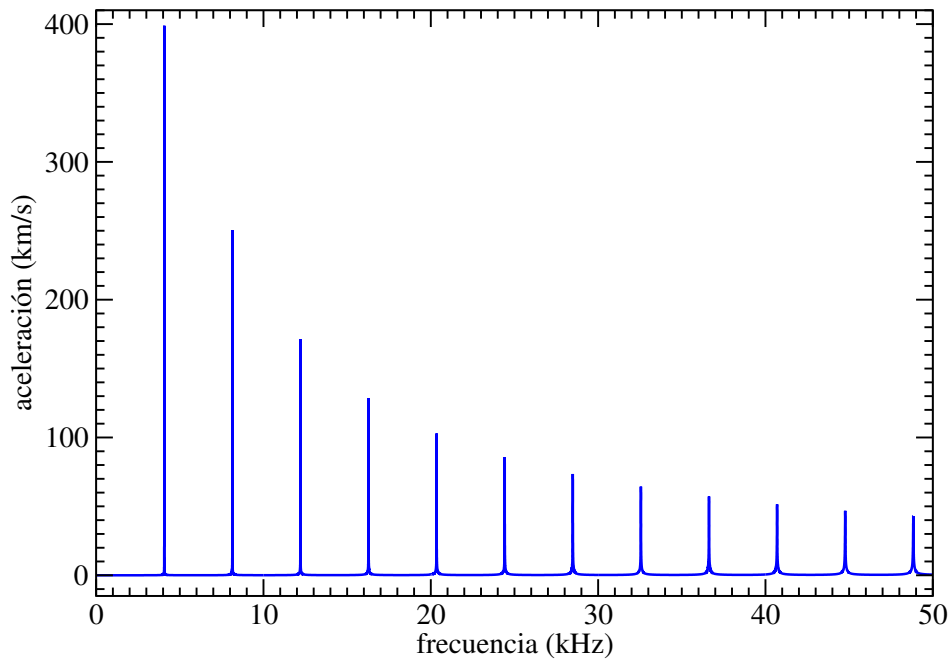


Figura 5.4: Modelo teórico con amortiguamiento. La longitud de la barra $L = 0.6292$ m, el radio $R = 0.0127$ m, el módulo de Young $E = 67.19$ GPa, la densidad $\rho = 2705$ kg/m³, el parámetro de amortiguamiento $\lambda = 100$ Pa · s, la fuerza de excitación $h_0 = 1$ N.

El espectro de resonancias calculado con el modelo teórico, en su forma completa dada por la ecuación 3.32, para la barra lisa se muestra en la Figura 5.4. Se grafica la aceleración contra la frecuencia, cada línea vertical es una resonancia. Para el cálculo de los valores de esta gráfica se utiliza la paquetería de Mathematica. Cuando la barra entra en resonancia la amplitud de la aceleración aumenta drásticamente. La forma aparente de cada resonancia es de una delta de Dirac, sin embargo, al acortar el intervalo en la región cercana a una sola resonancia se puede notar que la resonancia tiene una anchura. Es notorio en la Figura 5.4 que el modelo teórico predice que la altura del pico de resonancia, esto es la amplitud de la aceleración, disminuye cuando la frecuencia aumenta. Las resonancias dadas por el modelo teórico en la Figura 5.4 coinciden con las frecuencias de resonancias experimentales mostradas en la Figura 5.1 en el intervalo de 0 a 50 kHz.

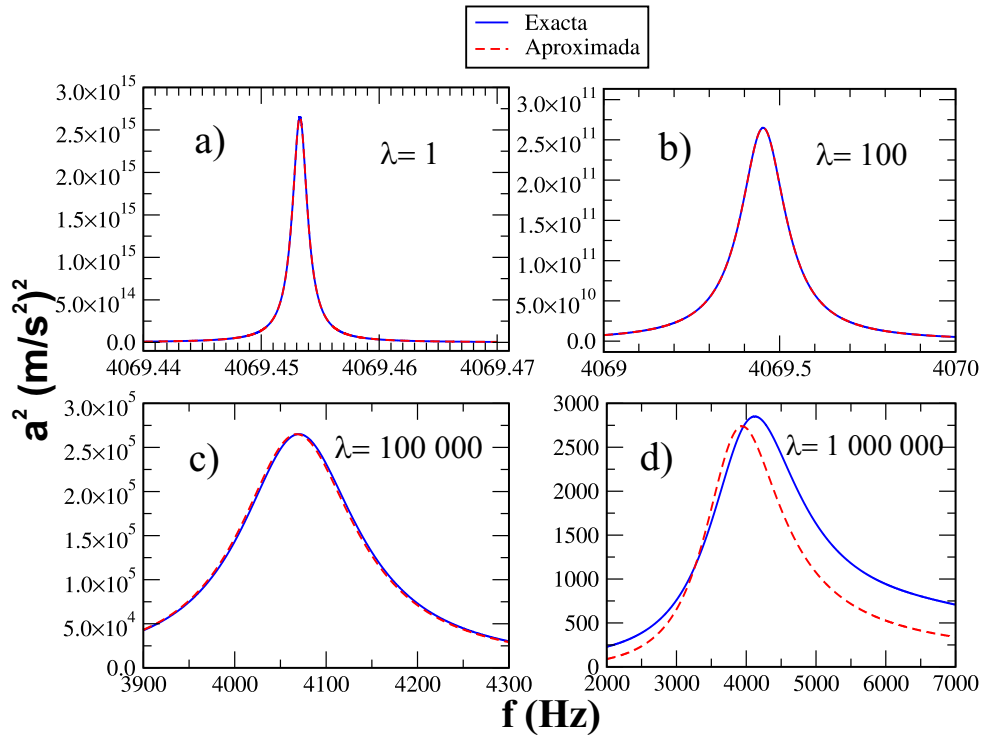


Figura 5.5: Comparación del modelo teórico en su forma exacta con el modelo teórico en su forma aproximada para diferentes valores de λ .

5.2.2 Aproximación

En la Figura 5.5 se muestra una comparación entre el modelo teórico en su forma exacta con la aproximación desarrollada en este trabajo, graficando la aceleración al cuadrado contra la frecuencia. La comparación se hace para probar los alcances de la aproximación, se conservan todos los valores que caracterizan a la barra y se calcula para distintos valores de λ . Se observa que la aproximación es buena para valores de λ entre 1 y 100, para $\lambda = 100000$ la aproximación empieza a diferir de la forma exacta. El modelo teórico en su forma exacta y la aproximación predicen que si se aumenta λ , el parámetro de amortiguamiento, la anchura aumenta y la altura del pico de resonancia disminuye. Este comportamiento es típico para describir el amortiguamiento. Dado que los valores de λ reportados en la literatura para diferentes aleaciones de aluminio están entre 1 y 10, se puede concluir que la aproximación es suficiente para plantear un comportamiento teórico. Esto tiene un alto beneficio, ya que la forma de la aproximación es una lorentziana en términos de la anchura de la resonancia, esto permite una comparación directa con resultados experimentales.

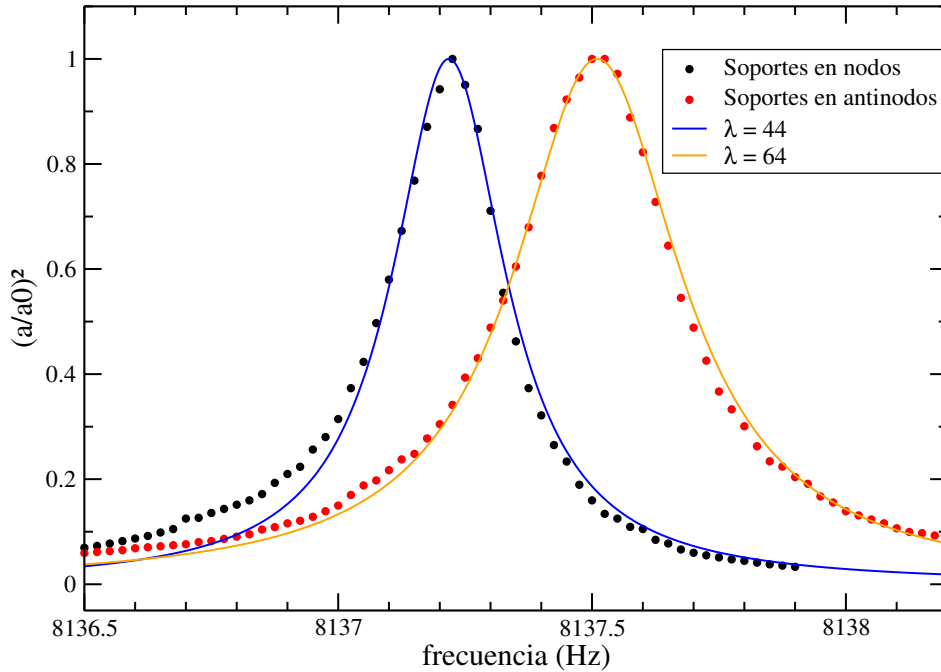


Figura 5.6: Comparación del experimento con el modelo teórico aproximado. $N = 2$ Los puntos en negro corresponden a resultados con soportes en nodos, los puntos en rojo a soportes en los antinodos, las líneas continuas corresponden a curvas del modelo teórico aproximado con su respectivo valor de λ .

5.2.3 Acoplamiento mecánico

Uno de los factores de amortiguamiento que se observan en el experimento es el acoplamiento mecánico. La hipótesis consiste en que una parte de la energía es disipada a través de los soportes que sostienen la barra, esta hipótesis es confirmada por los resultados mostrados en la Figura 5.6, donde se grafica la amplitud de la aceleración al cuadrado contra la frecuencia para dos nodos. Las anchuras de las resonancias son notoriamente diferentes para ambos experimentos. La anchura de la resonancia con soportes en los nodos es menor a la anchura con soportes en los antinodos. Se entiende por nodos a aquella región de la barra donde no hay movimiento, dado que el movimiento estudiado es una oscilación compresional, no hay movimiento en la dirección z . Estos nodos están ubicados a $\frac{1}{3}L$ y a $\frac{2}{3}L$. Los antinodos son aquellas regiones donde la amplitud del movimiento es máxima, esto ocurre en los extremos de la barra y al centro de la misma. Para estudiar el efecto de los soportes en los antinodos, estos se colocan muy cerca de los extremos de la barra.

Cabe señalar que en las oscilaciones compresionales no existen nodos reales, ya que en los nodos no hay oscilación en la dirección z pero si hay movimiento radial. En esta zona la barra se expande

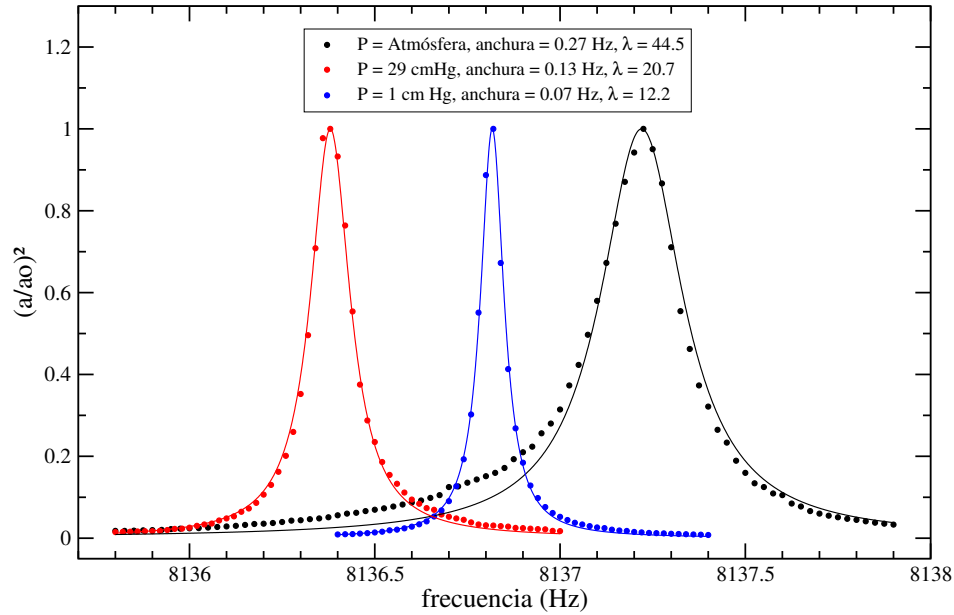


Figura 5.7: Comparación de las anchuras de las resonancias para distintas presiones. $N = 2$, soportes en los nodos, λ de fórmula aproximada. Presión atmosférica en el laboratorio de 59 cmHg.

radialmente, mientras que en los antinodos se comprime radialmente. A este efecto algunos autores lo denominan como un tipo de "respiración" de la barra. En la literatura se han propuesto diferentes configuraciones para los soportes afirmando que reducen la pérdida de energía por acoplamiento mecánico cuando los soportes están en los nodos, el diseño y construcción de estas nuevas configuraciones de soportes constituyen un reto experimental que se retomará en trabajos futuros.

5.2.4 Acoplamiento atmosférico

El efecto de la presión atmosférica en la pérdida de energía de la barra se hace evidente en la Figura 5.7, donde se grafica la amplitud de la aceleración al cuadrado contra la frecuencia para la barra sometida a tres diferentes presiones. Es claro que cuando la presión ejercida sobre la barra disminuye también lo hace la anchura de la resonancia, por lo que se disipa menos energía cuando la presión del aire alrededor de la barra es mínima.

En los resultados mostrados en la Figura 5.7 se mide la anchura de la resonancia para cada presión ajustando una lorentziana mediante una transformación no lineal utilizando la paquetería de Grace. Una vez tenido el valor de la anchura de la resonancia en unidades de Hz se calcula el parámetro de amortiguamiento λ correspondiente, dado por el modelo teórico aproximado.

Se mide la anchura de la resonancia (FWHM) para diferentes presiones y los resultados se

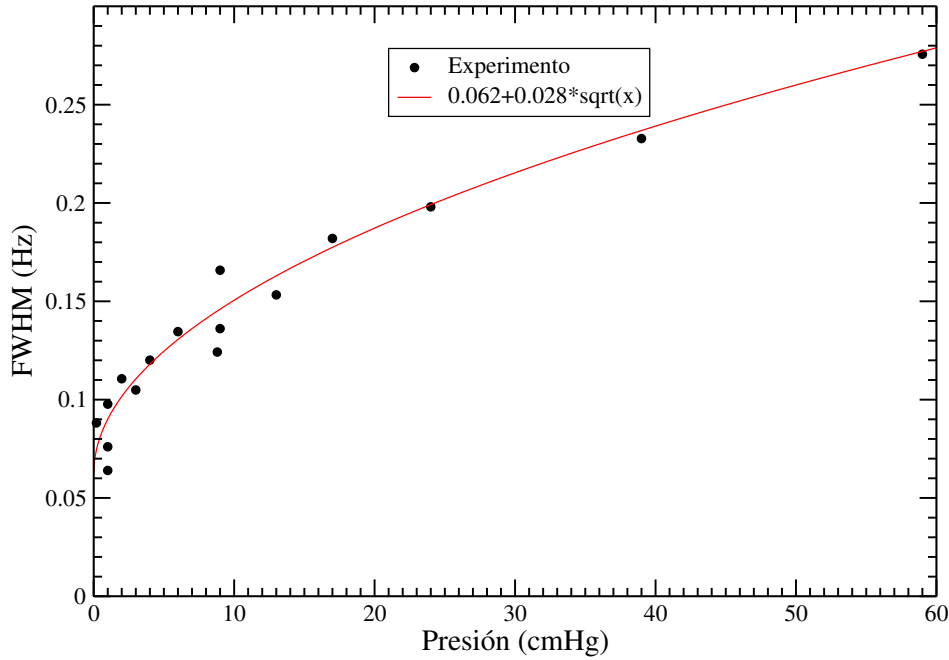


Figura 5.8: Resultados experimentales de la anchura de las resonancias (FWHM) contra la presión dentro de la cámara de vacío. $N = 2$, soportes en los nodos. Presión atmosférica 59 cmHg.

muestran en la Figura 5.8, aquí se grafica la anchura de la resonancia contra la presión. Los puntos en negro en la Figura 5.8 corresponden a medidas experimentales, mientras que la línea roja continua es una parábola que se ajusta a los valores experimentales obtenidos. El error del experimento está en el orden de 0.05 Hz, los resultados mostrados están dentro del error. Este error se debe en gran medida a la variación térmica del sistema experimental, dichas variaciones recorren algunas décimas de Hz el pico de la resonancia, una medida de la amplitud de la resonancia cuando esta se mueve debido a la temperatura da como resultado una anchura aparente mayor o menor. Este efecto aumenta la incertidumbre del error experimental.

Con estos resultados se calcula el parámetro de amortiguamiento λ y se grafica en la Figura 5.9. Dado que FWHM y λ son proporcionales por una constante la tendencia parabólica se conserva.

En este experimento se busca reducir las pérdidas de energía por acoplamiento mecánico y atmosférico, el último tipo de pérdida de energía se debe a la fricción interna del material de la barra. En los resultados para las Figuras 5.8 y 5.9 para las presiones más bajas corresponderían entonces a medidas de fricción interna. Esta hipótesis queda por confirmarse una vez que se superen los diversos desafíos experimentales.

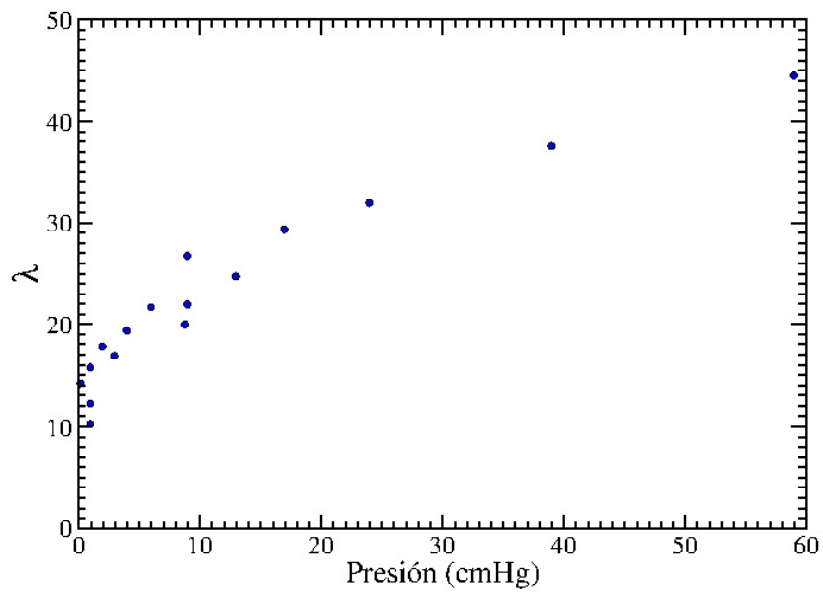


Figura 5.9: Resultados experimentales de la anchura de las resonancias (FWHM) contra la presión dentro de la cámara de vacío. $N = 2$, soportes en los nodos. Presión atmosférica 59 cmHg.

6

Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo cobran relevancia por la técnica experimental de excitación-detección que en este caso los EMAT's permiten medir sin tocar físicamente a la barra. Se estudiaron las pérdidas de energía por acoplamiento atmosférico, midiendo la respuesta de la barra a la excitación dentro de una cámara de vacío y variando la presión del aire, encontrando que las pérdidas de energía disminuyen cuando la presión del aire alrededor de la barra decrece. Las pérdidas por acoplamiento mecánico fueron estudiadas, encontrando que las pérdidas de energía son mínimas cuando los soportes se colocan en los nodos de la barra. En la aproximación del modelo teórico se encontró que el cuadrado de la aceleración (respuesta de la barra a la excitación) de las resonancias en la barra tiene una forma lorentziana, siendo este un resultado original ya que en la literatura se menciona la forma lorentziana de las resonancias pero no se reporta una demostración matemática.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. S. Blander, I. S. Golovin, H. Neuhauser, and H. R. Sinning. *Internal Friction in Metallic Material*. Springer, 2007.
- [2] Anton Puškár. *Internal Friction of Materials*. Cambridge International Science Publishing, 2001.
- [3] A. L. Kimball and D. E. Lovell. Internal friction in solids. *Physical Review*, pages 948–959, 1927.
- [4] V. Palmov. *Vibration of Elasto-Plastic Bodies*. Springer, 1998.
- [5] L. B. Magalas. Mechanical spectroscopy, internal friction and ultrasonic attenuation: Collection of works. *Materials Science and Engineering*, pages 405–415, 2009.
- [6] William Duffy. Acoustic quality factor of aluminum alloys from 50mk to 300k. *Journal of Applied Physics*, pages 5601–5609, 1990.
- [7] C. A. Wert. Internal friction in solids. *Journal of Applied Physics*, pages 1888–1895, 1986.
- [8] M. H. Miles, K. L. DeVries, and P. Gibbs. Internal friction under hydrostatic pressure. *Journal of Applied Physics*, pages 852–858, 1965.
- [9] O. Anderson, H. Zhang, and R. S. Sorbello. Radiation impedance of resonant ultrasound spectroscopy modes in fused silica. *The Journal of the Acoustic Society of America*, pages 2385–2394, 1998.
- [10] A. Morales, L. Gutierrez, and J. Flores. *Escuela de verano en Física: La visión molecular de la materia*, chapter Vibraciones de una barra elástica: teoría y experimento, pages 115–136. UNAM, 2000.
- [11] J. A. Otero, G. Monsivais, A. Morales, L. Gutierrez, A. Díaz de Anda, and J. Flores. Further understanding of doorway states in elastic systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, pages 646–652, 2017.

- [12] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Wiley interscience, 1973.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Coordinación de Programas Educativos

Posgrado en Ciencias



DR. VÍCTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada *“Oscilaciones elásticas con atmósfera controlada”* que presenta el alumno **Jaziel Alberto Rojas Guadarrama (5620160908)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Rolando Pérez Álvarez CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Guillermo Monsivais Galindo IF-UNAM	APROBADO	
Dr. Joaquín Escalona Segura CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Alejandro Morales Mori ICF-UNAM	Aprobado	