

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Estudio de las contribuciones cromáticas δ^2 a la dinámica
no lineal en sincrotrones usando cuasi-invariantes
polinomiales

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

HARIM JOSAFAT VILLARREAL MIRANDA

DIRECTOR:

Dr. Armando Antillón Díaz

CUERNAVACA, MORELOS

MAYO, 2026

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Glosario	
Siglas	

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Objetivos del trabajo y organización de la tesis	3
1.1.1. Objetivo general	3
1.1.2. Objetivos específicos	3
2. Tendencia de diseño en fuentes de luz sincrotrón de ultrabaja emitancia	5
2.1. Actualización a SPring-8-II	6
2.2. Actualización a NSLS-IIU	8
2.3. Actualización de PETRA III	10
2.4. Korea-4GSR	12
3. Elementos teóricos pertinentes	14
3.1. Dinámica lineal	14

3.2.	La cromaticidad y su corrección	17
3.3.	Espacio fase y Apertura Dinámica	18
3.3.1.	Espacio fase	18
3.3.2.	Apertura dinámica	19
3.3.3.	Apertura de momento	21
3.4.	Derivación del Hamiltoniano no lineal con efectos cromáticos	23
3.5.	Simulación de trayectorias de partículas: una técnica para aumentar la AD	25
3.5.1.	Optimización Genética Multiobjetivo (MOGO)	26
3.5.2.	Optimización basada en la corrección de términos no lineales resonantes	27
4.	Construcción de un Cuasi-invariante	29
4.1.	Estudios anteriores del cuasi-invariante hasta orden δ	29
4.1.1.	Visualización geométrica del cuasi-invariante	33
4.1.2.	Líneas de contorno y trayectorias en el espacio fase	34
4.1.3.	Propuesta de una función objetivo geométrica	35
4.1.4.	Aplicación de la función objetivo a un sincrotrón tipo MBA (Multi-bend Achromat)	36
4.1.5.	Ejemplo de optimización usando tres desviaciones relativas de momento	38
5.	Resultados	42
5.1.	Incorporación de δ^2 al cuasi-invariante	42
5.1.1.	Ambigüedad en la elección de los eigenvalores	43
5.1.2.	Comparación de los espacios fase que se derivan del cuasi-invariante, a orden δ y δ^2	46
5.2.	Optimización no lineal con términos hasta δ y δ^2 en el modelo elegido de FLS	47
6.	Discusión y conclusiones	50
	Bibliografía	55

A. Derivación del Hamiltoniano	60
B. Ecuaciones Diferenciales para funciones A^2	68

Índice de figuras

2.1. Funciones β_{0x} , β_{0y} y dispersión η_{1x} , de una celda unitaria en el SPring-8-II	7
2.2. Diagrama del dipolo complejo Complex Bend (CB) [1].	9
2.3. Funciones β_x , β_y y dispersión η_x de una celda unitaria del NSLS-IIU	10
2.4. Funciones β_x , β_y y dispersión η de una celda unitaria en PETRA-IV-H6BA	11
2.5. Funciones β_x , β_y y dispersión η_x de una celda H7BA para el Korea-4GSR .	13
3.1. Diagrama de la compresión de paquetes: Emitancia	16
3.2. Estructura de dos celdas de un anillo de un modelo tipo ESRF-EBS	19
3.3. Representación esquemática de la AD [2] en el espacio fase transversal . . .	20
3.4. Representación esquemática de la apertura de momento [2] en el espacio transversal de un sincrotrón	22
4.1. Comparación entre la superficie de Courant-Snyder y una superficie no lineal	34
4.2. Comparación entre curvas de contorno no lineales teóricas (arriba) y resultados de simulación con OPA (abajo)	35
4.3. Reconstrucción del diseño de celda MBA reportado en [3]	37
4.4. Espacios fase para varios valores de δ	40
5.1. Eigenvalores normalizados obtenidos para el modelo de sincrotrón tipo MBA	44
5.2. Comparación de los espacios fase para $\delta = -1\%$	45
5.3. Comparación de los espacios fase para $\delta = 1\%$	45
5.4. Comparación entre espacios fase del cuasi-invariante polinomial a orden δ y δ^2	46
5.5. Apertura de momento del modelo estudiado en [3]	48

5.6.	Apertura de momento del modelo, usando una optimización no lineal hasta $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$, con 33 particiones en el intervalo $\delta = \pm 4\%$	48
6.1.	Muestreo aleatorio de diferentes aperturas de momento en la optimización	52

Índice de cuadros

2.1. Comparativa de instalaciones de sincrotrón [4]	6
4.1. Parámetros reportados para el diseño del anillo de almacenamiento	38
4.2. Amplitud máxima de estabilidad en función de δ	41
5.1. Elementos de la celda del modelo de la Fig. 4.3 bajo estudio	49

Glosario

brillantez Se define como la intensidad del haz de fotones dividida por su volumen en el espacio de fase [5]. (Ver pág. 1)

DBA Celda magnética que consiste en dos imanes dipolares que curvan la trayectoria del haz de electrones en una sección de arco. Entre ellos se ubican cuadrupolos que enfocan el haz para lograr la **acromaticidad**, que es la condición donde la dispersión y su derivada se anulan a la salida de la celda, logrando que la posición y el ángulo del haz sean independientes de las variaciones de energía de las partículas first. (Ver pág. 8)

DESY Centro de investigación alemán de física de partículas y fotones localizado en Hamburgo, Alemania. (Ver pág. 10, 11)

evolución diferencial Algoritmo de evolución diferencial (Differential Evolution), técnica de optimización evolutiva que utiliza operadores de mutación basados en diferencias vectoriales y cruce binomial para generar nuevas soluciones. (Ver pág. 25)

Korea-4GSR Sincrotrón coreano de cuarta generación actualmente en desarrollo, diseñado para ser una fuente de luz de ultrabaja emitancia. (Ver pág. 12)

LGB Imán dipolar diseñado con un campo magnético variable a lo largo de su eje longitudinal. A diferencia de un dipolo convencional de campo uniforme, el LGB ajusta la intensidad del campo para que coincida con la evolución de la función de dispersión a lo largo del imán, optimizando así la radiación (synchrotron radiation) para minimizar la emitancia natural del anillo de almacenamiento. (Ver pág. 7, 36)

MAX IV Sincrotrón de cuarta generación ubicado en Lund, Suecia. (Ver pág. 6)

MBA El Multi-bend achromat Estructura magnética compuesta por una serie de múltiples dipolos y cuadrupolos que mantiene la **acromaticidad** del sistema (dispersión nula en las secciones rectas). Su diseño reduce el **ángulo de deflexión por cada dipolo**, lo cual es fundamental para disminuir la emitancia natural del haz de electrones de forma proporcional al cubo del ángulo de giro. (Ver pág. , 2, 5, 6, 8, 12, 14, 29, 36, 37)

NanoTerasu Sincrotrón 3 GeV ubicado en el New Industry Creation Hatchery Center (NICHe) de la Universidad de Tohoku, Japón. (Ver pág. 7)

OPA Herramienta de software para el diseño y simulación de sistemas ópticos de partículas cargadas. Permite el modelado de diversos arreglos magnéticos y líneas de transporte con un enfoque particular en la visualización en tiempo real y la interactividad para la optimización de parámetros del haz. (Ver pág. , 27, 35, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 51)

particle swarm Algoritmo de optimización basado en el comportamiento estocástico y social de grupos de individuos. Se fundamenta en el movimiento de un conjunto de partículas (candidatos de solución) que exploran el espacio de búsqueda ajustando su trayectoria en función de su mejor experiencia propia y la del grupo para converger a un óptimo. (Ver pág. 25)

PEP-X Diseño conceptual de un acelerador de partículas tipo sincrotrón de electrones propuesto como fuente de luz de cuarta generación. No está en funcionamiento ni construido - representa una propuesta de actualización de PEP-II ubicado en el SLAC National Accelerator Laboratory en Menlo Park, California, Estados Unidos. (Ver pág. 26)

PETRA III Sincrotrón de tercera generación en DESY (Alemania). (Ver pág. 6, 10, 11)

RB El Reverse bend es un imán dipolar cuyo campo magnético desvía el haz de electrones en la dirección opuesta a la de los dipolos principales del arco. Esta configuración permite un control independiente de la función de dispersión, facilitando la reducción de la emitancia natural en celdas magnéticas compactas. (Ver pág. 12, 36)

skew Término utilizado en física de aceleradores para describir componentes del campo magnético que presentan una simetría rotada 45° respecto a los componentes normales. En español se traduce como *sesgado* o *asimétrico*: Los componentes skew generan campos que no son simétricos ni antisimétricos respecto al plano medio del acelerador. (Ver pág. 66)

SPring-8-II Fuente de luz sincrotrón de cuarta generación ubicada en Japón, que representa una actualización en proceso del sincrotrón SPring-8 original. (Ver pág. 6)

VUV Región del espectro electromagnético entre aproximadamente 10 nm y 200 nm. Se denomina "de vacío" porque esta radiación es fuertemente absorbida por el oxígeno molecular del aire y por la mayoría de los medios ópticos sólidos (como el vidrio o el cuarzo), lo que exige el uso de sistemas de vacío y ópticas especiales de reflexión para su manipulación y transporte. (Ver pág. 8)

wigglers Es un dispositivo que consiste en una serie de imanes dipolares dispuestos en una secuencia alternante de polaridades opuestas. A medida que un haz de electrones pasa a través de este arreglo, experimenta una serie de oscilaciones forzadas, o zigzagueos, debido a los campos magnéticos [6]. (Ver pág. 8)

XFEL Acelerador de partículas lineal tipo láser de electrones libres de rayos X (X-ray Free-Electron Laser). (Ver pág. 6)

Siglas

AD apertura dinámica. (Ver pág. , 2, 5, 7, 9, 18, 19, 20, 25, 26, 27, 28, 38)

APS Advanced Photon Source. (Ver pág. 6)

BA Bend Achromat. (Ver pág. 6)

CB Complex Bend. (Ver pág. , 8, 9)

CBA Complex Bend Achromat. (Ver pág. 8)

ESRF-EBS European Synchrotron Radiation Facility - Extreme Brilliance Source. (Ver pág. 6, 36, 37)

FLS fuente de luz sincrotrón. (Ver pág. , 25, 29, 42, 47, 48, 49)

MOGA Multi-Objective Genetic Algorithm. (Ver pág. 25)

MOGO Multi-Objective Genetic Optimization. (Ver pág. , 26)

NSGA-II Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II. (Ver pág. 25, 26)

NSLS National Synchrotron Light Source. (Ver pág. 8)

PLS-II Pohang Light Source II. (Ver pág. 12)

PMQ Permanent Magnet Quadrupole. (Ver pág. 8)

SLS-2 Swiss Light Source 2. (Ver pág. 36, 37)

Dedicatoria

A mis queridos padres, Francisco y Vianey, quienes con su apoyo incondicional, me han guiado en la vida y han sido el cimiento sobre el que he construido mis sueños. A mi amada abuela, Guillermina, por su amor que me ha permitido mantener mi camino.

Quiero reconocer el amor, porque juntos hemos caminado en toda circunstancia, recordando: ‘Enséñanos a entender la brevedad de la vida, para que crezcamos en sabiduría’ (Salmos 90:12). A todos, gracias por ser mi familia y mi mayor bendición.

A Melani, mi esposa y mi mayor fortuna: caminar a tu lado me ha enseñado que el éxito compartido sabe mejor.

Con gratitud y amor,

Harim J. Villarreal

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al equipo de trabajo del proyecto Sincrotrón Mexicano, en especial al Dr. Edgar Andrés Sánchez García, su apoyo y colaboración ha sido fundamental para la culminación de esta tesis. También agradezco a mi asesor, el Dr. Armando Antillón Díaz, cuya guía ha sido un pilar esencial en mi viaje académico.

Investigación realizada gracias a los proyectos UNAM-PAPIIT N108522 e IN109125. Proyecto apoyado por el “CONACYT” en el año 2023, con número CF-2023-I-119. Se agradece con el ICF por su hospitalidad y los recursos otorgados para realizar esta tesis.

Resumen

Las fuentes de luz sincrotrón de última generación requieren actualizaciones constantes en sus arreglos magnéticos para responder a la creciente demanda de experimentos de alta precisión. Esta evolución plantea retos importantes en el diseño y la optimización de la dinámica no lineal de los aceleradores modernos. En este contexto, la presente tesis estudia la extensión a segundo orden en la desviación de momento del formalismo de cuasi-invariantes polinomiales, con el propósito de mejorar la descripción analítica de la estabilidad transversal del haz y su aplicación a la optimización de la apertura dinámica. Como base conceptual, se revisan los fundamentos de la dinámica de partículas en aceleradores y el marco teórico que sustenta los métodos utilizados. Posteriormente, se desarrolla la construcción del cuasi-invariante y se analiza su aplicación en un sincrotrón de baja emitancia. La validez del modelo se examina mediante comparaciones entre superficies analíticas sobre el espacio fase y simulaciones de seguimiento de partículas.

Los resultados muestran que la incorporación de términos en δ^2 mejora la representación de la dinámica fuera del momento de referencia y favorece una optimización más precisa de la apertura dinámica. En conjunto, estos hallazgos indican que este nivel de aproximación constituye un avance relevante para el análisis y diseño de aceleradores de cuarta generación.

Capítulo 1

Introducción

La contribución de las fuentes de luz sincrotrón a la física experimental abarca una amplia gama de disciplinas, desde la investigación en física de materiales hasta la biología estructural. Estas instalaciones destacan por el gran y diverso número de experimentos que se realizan anualmente. La mayoría de estas investigaciones han demostrado un impacto significativo tanto a nivel académico como social. Un ejemplo destacado es el desarrollo de fármacos mediante cristalografía de rayos X, técnica que permite estudiar la interacción de compuestos con moléculas asociadas a enfermedades específicas, incrementando así la eficacia terapéutica al elucidar los mecanismos de interacción a nivel molecular [7].

El número de usuarios de estas instalaciones ha aumentado considerablemente en la última década, gracias en parte a las actualizaciones tecnológicas que permiten realizar experimentos de vanguardia. Un caso emblemático fue su rol durante la pandemia de COVID-19, donde las fuentes de luz sincrotrón demostraron su valor como herramienta indispensable para la comunidad científica frente a crisis globales [8].

Para mantener los experimentos a la vanguardia en instalaciones sincrotrón, es esencial contar con líneas de experimentación actualizadas que integren mejoras continuas en la instrumentación, adaptadas a las necesidades específicas de cada comunidad científica. Un factor igualmente crítico es la calidad y la brillantez de la luz emitida, ya que estos parámetros determinan directamente la resolución y la eficiencia de las técnicas empleadas. El tema central de esta tesis es estudiar la dinámica de partículas que viajan por el

acelerador, las cuales son responsables de generar los rayos X que alimentan cada línea de experimentación.

En la actualidad, una parte de las fuentes de luz sincrotrón está en proceso de rediseño o planea actualizaciones importantes. Estas mejoras suelen incluir una mayor compactación entre los arreglos magnéticos, lo que conlleva un aumento en la intensidad de los campos magnéticos. Este diseño es conocido como celdas MBA [9], que se caracterizan por tener un número mayor de dipolos por celda. Sin embargo, este incremento genera efectos no lineales intensos en la dinámica del haz, los cuales presentan desafíos técnicos considerables para su corrección y control.

El principal desafío es encontrar una amplitud transversal suficiente que permita la supervivencia de un mayor número de partículas durante múltiples vueltas en el anillo de almacenamiento [10].

Generalmente, los problemas no lineales se abordan con herramientas de simulación de partículas que requieren una gran capacidad de cómputo. En esta investigación, se busca explorar un método novedoso basado en cuasi-invariantes polinomiales, el cual, al no utilizar simulación de partículas, reduce significativamente los tiempos de cómputo. Este método ha demostrado ser efectivo en la optimización de las intensidades sextupolares y octupolares.

El método emplea una expansión en la desviación de momento, validada hasta primer orden. En este trabajo se propone extenderla a segundo orden y evaluar si ello mejora la descripción de la dinámica y, en consecuencia, la optimización.

Este método está pensado para ser particularmente útil en el estudio y la fase de diseño de sincrotrones modernos, complementando los métodos existentes como una herramienta para abordar el régimen no lineal e incrementar la apertura dinámica (AD) del haz de electrones

Además, proporciona una base teórica y herramientas matemáticas sencillas para analizar y comprender la dinámica no lineal, visualizar la deformación del espacio de fase, predecir resonancias y encontrar trayectorias estables sin recurrir a simulación de seguimiento de partículas.

Una de las principales limitaciones es la precisión en la descripción de los efectos no lineales

y cromáticos. El uso de funciones de primer orden ($A^{(1)}$) puede ser insuficiente cuando la desviación relativa de momento de las partículas excede 2 %. Por ello, se requiere explorar extensiones que mejoren la precisión de los resultados, por ejemplo, incluir funciones de segundo orden ($A^{(2)}$).

1.1. Objetivos del trabajo y organización de la tesis

1.1.1. Objetivo general

Desarrollar y evaluar una extensión a segundo orden en la desviación de momento (δ^2) del formalismo de cuasi-invariantes polinomiales, con el fin de mejorar la descripción analítica de la dinámica no lineal y su aplicación a la optimización de la apertura dinámica en sincrotrones de baja emitancia.

1.1.2. Objetivos específicos

- Construir la extensión a segundo orden del formalismo de cuasi-invariantes polinomiales, incorporando efectos cromáticos relevantes para el análisis de la dinámica no lineal.
- Evaluar la capacidad del modelo extendido para describir la estructura del espacio de fase y la apertura dinámica en un sincrotrón de baja emitancia.
- Validar los resultados del modelo mediante la comparación entre las superficies analíticas obtenidas en MATLAB y simulaciones numéricas de seguimiento de partículas realizadas con OPA.
- Analizar la utilidad del formalismo extendido en la optimización de una red magnética tipo MBA, en particular mediante el ajuste de elementos no lineales y el estudio de su efecto sobre la estabilidad del haz.

Para cumplir con estos objetivos, la tesis se organiza de la siguiente manera.

En el **Capítulo 2** se describen las tendencias actuales en el diseño de fuentes de luz sincrotrón y los retos asociados a las redes magnéticas de ultra-baja emitancia. El **Capítulo 3** presenta los fundamentos teóricos de la dinámica de partículas y el formalismo hamiltoniano necesario para el estudio de los efectos no lineales. La metodología principal del trabajo se desarrolla en el **Capítulo 4**, donde se expone la construcción del cuasi-invariante y la incorporación de los términos de segundo orden en la desviación de momento. Los resultados, incluyendo las comparaciones con seguimiento de partículas y las pruebas de optimización, se presentan en el **Capítulo 5**. Finalmente, en el capítulo de **Discusión y conclusiones** se analizan los alcances del método, sus limitaciones y sus posibles extensiones.

Capítulo 2

Tendencia de diseño en fuentes de luz sincrotrón de ultrabaja emitancia

Como marco de referencia para nuestro trabajo se revisan algunos nuevos avances en el diseño de fuentes de luz y sus logros en la reducción de emitancia. La creciente demanda de brillantez por parte de los usuarios de fuentes de luz sincrotrón ha impulsado el desarrollo de variantes del diseño de celda MBA [9], el cual se ha consolidado como estándar para reducir la emitancia en sincrotrones de última generación. Sin embargo, los sincrotrones en operación enfrentan el desafío de adaptar estas variantes a sus infraestructuras existentes. Un reto crítico en el diseño de celdas de baja emitancia es la necesidad de emplear sextupolos de alta intensidad para corregir la elevada cromaticidad generada por cuadrupolos de gran gradiente, lo que introduce no linealidades fuertes y reduce la AD. Garantizar una AD suficiente para la inyección y una vida útil adecuada del haz de electrones constituye un objetivo esencial en estos proyectos. En este capítulo se explorarán algunos diseños de actualización basados en celdas MBA que se desarrollan a nivel mundial y que permiten alcanzar configuraciones de ultra baja emitancia.

El Cuadro 2.1 presenta una comparativa de los principales parámetros de diseño para cuatro instalaciones de sincrotrón de última generación en desarrollo o actualización. El Cuadro incluye características fundamentales como la energía de operación (E), circunferencia (C), corriente (I), emitancias horizontales y verticales ($\varepsilon_x, \varepsilon_y$), dispersión de momentum

(σ_δ) y funciones beta en los centros de las secciones rectas (β_x, β_y). En las siguientes secciones se describirán brevemente las características particulares de cada sincrotrón listado en el Cuadro.

Cuadro 2.1: Comparativa de instalaciones de sincrotrón [4]

Instalación	Año	E (GeV)	C (m)	I (mA)	ε_x (pm rad)	ε_y (pm rad)	σ_δ (%)	β_x (m)	β_y (m)
SPring8-II	2030	6	1435	200	50	5	0.098	8.2	2.8
NSLS-IIU	2032	4	792	400	16	16	0.109	1.9	2.0
PETRA-IV	2032	6	2304	200	20	5	0.090	4.0	4.0
K4GSR	2028	4	799	400	58	5.8	0.120	8.6	2.5

2.1. Actualización a SPring-8-II

La primera fuente de luz sincrotrón en Japón, SPring-8, ha estado en funcionamiento desde 1997. Se trata de un sincrotrón de tercera generación con una energía de 8 GeV en su anillo de almacenamiento, una circunferencia de 1436 m y una emitancia de 2.4 nmrad. Debido a su gran tamaño, cuenta con 62 líneas de experimentación y alberga un láser de rayos X de electrones libres (XFEL) conocido como SACLA, cuya construcción finalizó en 2011. Desde sus inicios, SPring-8 ha mantenido colaboraciones con instalaciones líderes como el ESRF, APS y PETRA III, lo que ha permitido mantenerla a la vanguardia mediante el intercambio de métodos y desarrollos conceptuales. Tras la inauguración de SACLA, se comenzó a considerar la actualización de SPring-8 a un modelo de cuarta generación. Para esta actualización, se adoptó la decisión de utilizar celdas de MBA [9], siguiendo los diseños conceptuales del ESRF-EBS y MAX IV. El proyecto de actualización, denominado Spring8-II, se llevará a cabo durante un período de cuatro años, con conclusión prevista para 2028 y una inversión estimada de 330 millones de dólares estadounidenses [11, 12].

La actualización consiste en reducir la energía del anillo de almacenamiento a 6 GeV y alcanzar una emitancia de 50 pm-rad, lo que clasifica la instalación como un sincrotrón de ultrabaja emitancia. Para lograr este objetivo, el diseño implementa un diseño de tipo 5-Bend Achromat (BA) , que utiliza cinco dipolos por celda base; cuatro dipolos con

gradiente longitudinal (LGB) y un dipolo central de 0.953 T [13]. La Fig. (2.1) muestra los puntos de la celda entre los cuales se busca que la diferencia de fase cumpla la condición: $\Delta\psi^{arc} = (2n+1)\pi$, siendo n un entero. En estos puntos la dispersión η_{1x} alcanza su máximo valor.

Este ajuste mitiga los efectos no lineales dominantes generados por los sextupolos que corrigen la cromaticidad. Los valores específicos de $\Delta\psi_x = 2.98\pi$ (horizontal) y $\Delta\psi_y = 0.99\pi$ (vertical) permiten, tras la optimización no lineal, alcanzar una AD de ~ 10 -12 mm en el plano horizontal y ~ 2 -3 mm en el vertical para el anillo ideal [14].

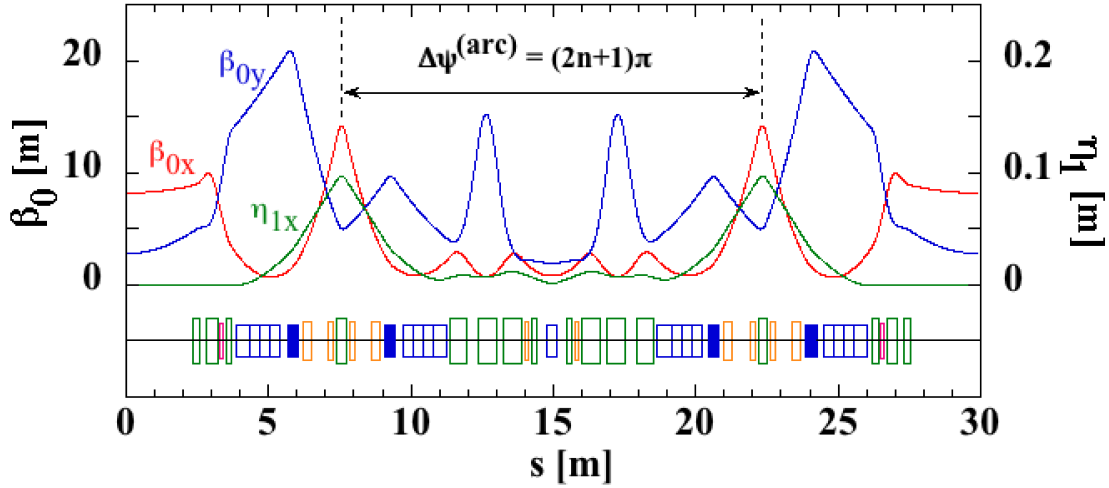


Figura 2.1: Funciones β_{0x} , β_{0y} y dispersión η_{1x} , de una celda unitaria en el SPring-8-II [13]. Los cuadrados que se muestran en la parte inferior de la figura representan dipolos (azules), cuadrupolos (verdes), sextupolos (naranjas) y octupolos (rojos). Los cuadrados rellenos de azul son imanes de curvatura del tipo de función combinada.

Debido a los estragos causados por el terremoto de Tohoku en 2011, se propuso la construcción de una fuente de luz sincrotrón de cuarta generación en dicha región como memorial del desastre. Así nació el proyecto NanoTerasu que tiene como objetivo proporcionar un rango espectral desde el ultravioleta hasta rayos X suaves y que se ha desarrollado en paralelo con SPring-8-II que se enfocará principalmente en rayos X duros.

2.2. Actualización a NSLS-IIU

La Fuente Nacional de Luz de Sincrotrón NSLS, fue la primera instalación diseñada y construida específicamente para producir y aprovechar la radiación de sincrotrón. La NSLS, fue un proyecto de 24 millones de dólares que nació alrededor de 1970, fue propuesto oficialmente en 1976 e inició su construcción en 1978. El NSLS era una instalación dividida en dos aceleradores comparativamente pequeños, con el anillo de rayos X midiendo aproximadamente 170 metros de circunferencia y el anillo VUV alrededor de 51 metros [15]. Su edificación fue un episodio clave en la historia de Brookhaven y un punto de inflexión de los científicos que trabajan con radiación de sincrotrón, que pasaron del uso parásito de las instalaciones a ser autónomos [16].

La circunferencia del NSLS-II es de 792 m, con una energía de 3 GeV y una emitancia de 2086 pm·rad. Este sincrotrón de tercera generación, fue diseñado con una celda magnética de Doble Bend Achromat (DBA) [17]. La combinación de su gran circunferencia, que permite múltiples secciones rectas para dispositivos de inserción (onduladores y *wigglers*), y su emitancia, se traduce en un brillo máximo superior a 10^{21} fotones/s, siendo 10.000 veces más brillante que la fuente original National Synchrotron Light Source (NSLS). Este rendimiento colocó al NSLS-II entre las fuentes de luz sincrotrón líderes a nivel mundial para la investigación en ciencia de materiales y biología estructural a escala atómica.

Para su actualización a NSLS-IIU, las emitancia se reducirá hasta 23 pm · rad. Una variante de diseño MBA que se estudia en la literatura es denominada Complex Bend Achromat (CBA) [9], que incorpora cuatro unidades CB. Cada CB consiste en un arreglo de 4 a 10 dipolos-cuadruolos híbridos con imán permanente (Hybrid PM quadrupole) [18]. La función combinada de estos elementos es fundamental: un CBA es un imán curvo y largo diseñado para proporcionar simultáneamente una fuerte curvatura (campo dipolar) y un fuerte enfoque (campo cuadrupolar) en un solo dispositivo. Este enfoque se logra integrando el campo cuadrupolar en el campo dipolar mediante el uso de Cuadruolos de Imán Permanente (Permanent Magnet Quadrupole (PMQ)), como se ilustra en la Fig. (2.2).

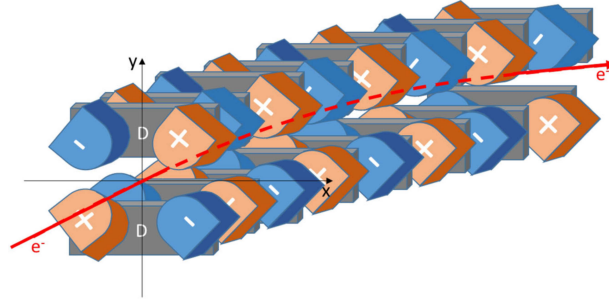


Figura 2.2: Diagrama del dipolo complejo CB [1].

La disposición y la intensidad de estos elementos CB dentro de la celda del acelerador son críticas para el desempeño óptimo de la máquina. Como se muestra en la Fig. (2.3), donde se presenta el arreglo magnético y las funciones beta del diseño NSLS-IIU, se puede apreciar la ubicación estratégica y las intensidades de campo de los distintos elementos CB. Estas modificaciones innovan principalmente en la superposición de campos dipolares y cuadrupolares dentro de segmentos más cortos, optimizando así la óptica del acelerador [19]. En su fase inicial, en la literatura [19] se reporta que la optimización de la dinámica no lineal alcanza aproximadamente $-9/+9$ mm de AD en el punto de inyección.

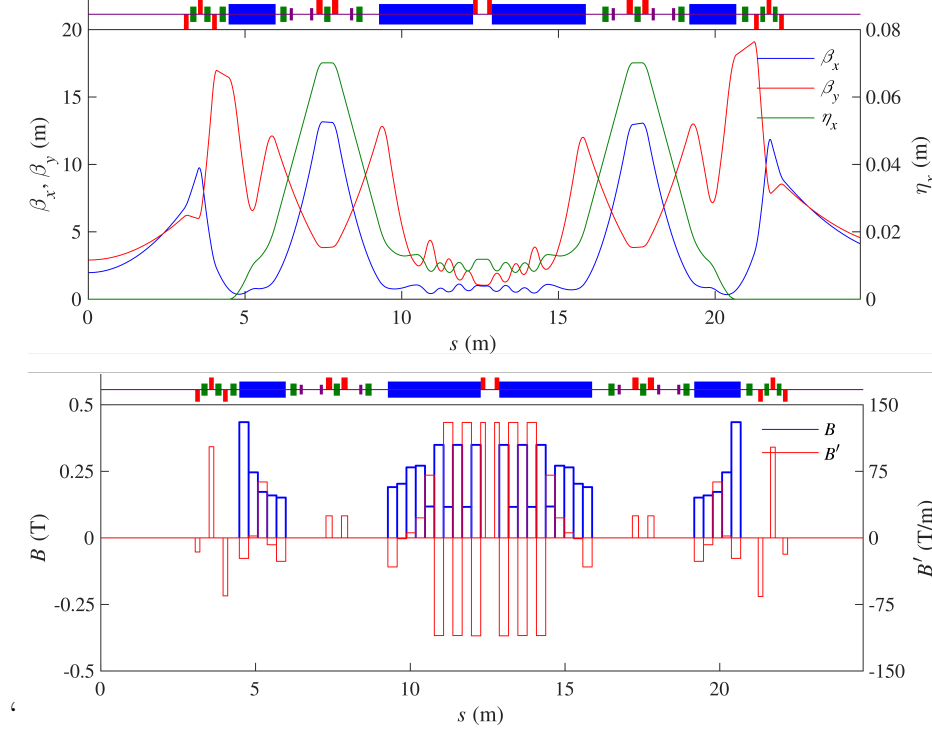


Figura 2.3: En la gráfica superior se muestran las funciones β_x , β_y y dispersión η_x de una celda unitaria del NSLS-IIU [20]. Los cuadrados que se muestran en la parte inferior de la figura representan dipolos (azules), cuadrupolos (rojos), sextupolos (verdes) y octupolos (morado). Los cuadrados rellenos de azul son imanes de curvatura del tipo de función combinada. En la grafica inferior se muestran los campos magnéticos y gradientes.

2.3. Actualización de PETRA III

PETRA III se encuentra en el centro de investigación DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron, Hamburgo, Alemania). Tiene una circunferencia enorme (2304 m, la más grande del mundo para fuentes de luz) y opera a 6 GeV de energía. Ofrece 25 líneas de luz que utilizan rayos X duros de alta energía.

Atiende a una amplia comunidad científica internacional (más de 3150 usuarios en 2019) con investigaciones en energía, salud, materiales y nanotecnología orientadas a resolver los grandes desafíos sociales actuales. Está gestionado principalmente por DESY, con líneas de luz operadas por instituciones asociadas como el Laboratorio Europeo de Biología Molecular (EMBL) y el Helmholtz-Zentrum Hereon [21].

En 2016, DESY propuso el proyecto PETRA IV para actualizar PETRA III y convertirla en una fuente de cuarta generación de emitancia ultrabaja. La primera fase del diseño consiste en el arreglo Hybrid Six-Bend Achromat (H6BA) que se muestra en la Fig. (2.4), tiene como elementos centrales onduladores de amortiguación de radiación. La segunda parte conlleva la modernización de las líneas de haz existentes y la construcción de nuevas, optimizadas para explotar al máximo las propiedades únicas del haz. Debido a la gran circunferencia del anillo de almacenamiento, un requisito crucial para lograr haces más brillantes, se prevé que PETRA IV supere en rendimiento a todas las instalaciones similares actualmente planificadas o en operación, colocándola así en una posición privilegiada para impulsar la ciencia y la innovación. Funcionando como el microscopio 3D in situ definitivo para procesos biológicos, químicos y físicos, se espera que la instalación realice contribuciones cruciales para resolver los grandes desafíos sociales.

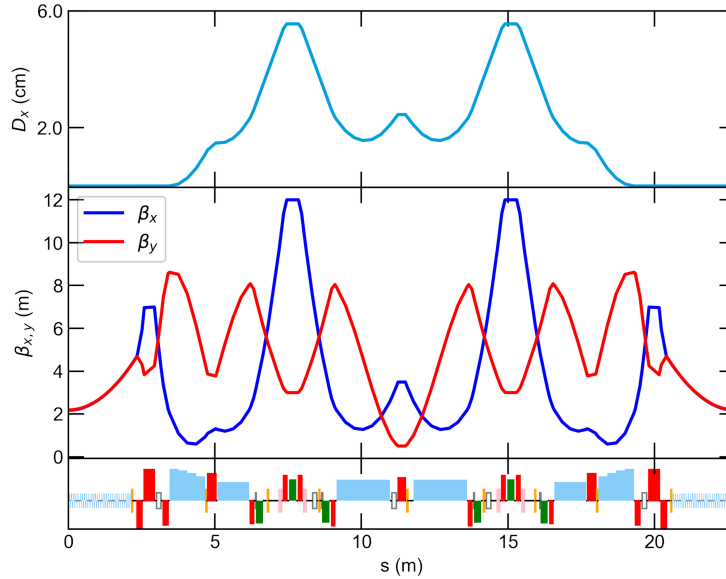


Figura 2.4: Funciones β_x , β_y y dispersión η de una celda unitaria en PETRA-IV-H6BA [22]. Los cuadrados que se muestran en la parte inferior de la figura representan dipolos (azules), cuadrupolos (rojos), sextupolos (verdes) y octupolos (rosa). Los demás elementos en la figura son correctores y dispositivos de inserción.

2.4. Korea-4GSR

Corea del Sur cuenta con el PLS-II (Pohang Light Source II), que constituye la quinta instalación a nivel mundial en alcanzar la tercera generación de fuentes de luz sincrotrón. Esta instalación, con 280 m de circunferencia y una emitancia de $5.8 \text{ nm} \cdot \text{rad}$, inició operaciones en 2012 tras una actualización que incrementó su energía de 2 GeV a 3 GeV después de 14 años de servicio de su predecesor.

Dado que el Pohang Light Source II (PLS-II) se especializa en generar radiación sincrotrón de alto brillo en el rango del infrarrojo a los rayos X blandos, se aprobó el proyecto Korea-4GSR (Fourth-Generation Storage Ring) para satisfacer la demanda de rayos X duros de la comunidad científica. Este nuevo sincrotrón, ubicado en la región de O'chan, empleará un diseño MBA con 799 m de circunferencia y alcanzará una emitancia de $58 \text{ pm} \cdot \text{rad}$ a 4 GeV, con fecha de terminación proyectada para 2027.

El diseño magnético del Korea-4GSR utiliza arreglo de siete dipolos acromáticos de tipo híbrido (H7BA) [23], cuyas funciones ópticas resultantes se muestran en la Fig. 2.5. Una característica destacable de este diseño es la incorporación de un super-bend en el centro de la celda, el cual genera un campo magnético de 2 T para la producción específica de rayos X duros [24]. En la dinámica lineal, se amplió deliberadamente la dispersión entre el primer y segundo dipolo, y entre el sexto y séptimo dipolo.

Los sextupolos cromáticos se ubicaron estratégicamente en estas regiones de alta dispersión para reducir la intensidad requerida en el control de la cromaticidad. Para minimizar adicionalmente los efectos no lineales, los avances de fase betatrón entre los dos picos de dispersión se configuraron en $\Delta\psi_x \approx 3\pi$ en el plano horizontal y $\Delta\psi_y \approx \pi$ en el plano vertical. Como resultado, los efectos no cromáticos de los sextupolos se reducen naturalmente. Finalmente, se incorporaron dipolos con gradiente longitudinal en cinco pasos e imanes RB para minimizar la emitancia natural.

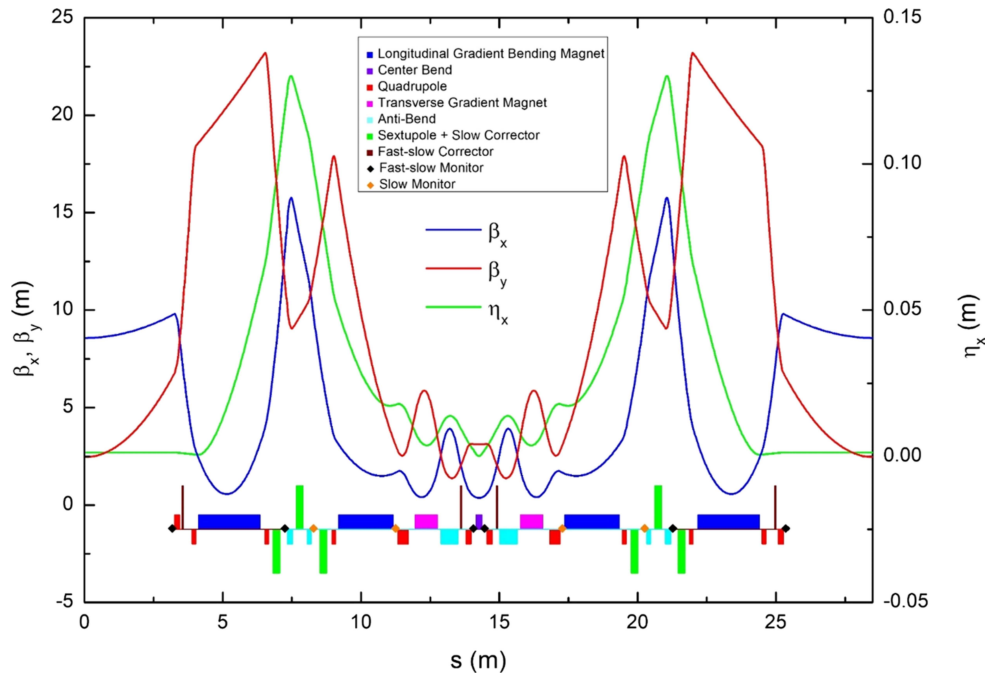


Figura 2.5: Funciones ópticas del arreglo magnético H7BA para el Korea-4GSR, mostrando las funciones beta (β_x , β_y) y la dispersión (η_x) a lo largo de una celda [23].

Capítulo 3

Elementos teóricos pertinentes

El estudio de la dinámica de los electrones en un sincrotrón requiere una comprensión sólida de los principios teóricos que gobiernan su movimiento y estabilidad dentro del anillo de almacenamiento. En este capítulo se presentan los elementos teóricos más relevantes que sustentan el análisis de la dinámica de los electrones, con el propósito de establecer el marco conceptual necesario para interpretar el comportamiento del haz bajo la acción de los campos magnéticos de enfoque y de curvatura. Se discute cómo pequeñas desviaciones del momento de referencia introducen efectos adicionales que modifican la trayectoria ideal de las partículas, dando lugar a fenómenos cromáticos y a la aparición de no linealidades que afectan la estabilidad a largo plazo del haz. Estos aspectos se vuelven particularmente importantes en el diseño de fuentes de luz sincrotrón de cuarta generación, donde la adopción de configuraciones MBA [9] ha permitido alcanzar emitancias extremadamente bajas, al costo de una mayor intensidad de efectos no lineales. La comprensión y el control de estos efectos constituyen, por tanto, un paso esencial para garantizar la operación estable y eficiente de los sincrotrones modernos.

3.1. Dinámica lineal

Como punto de partida, se examina el caso lineal en una sola dimensión, que representa la aproximación básica para comprender el comportamiento transversal de las partículas

cargadas en un acelerador. Este modelo es fundamental para entender el enfoque fuerte, donde los campos magnéticos cuadrupolares proporcionan el confinamiento radial. El hamiltoniano para este sistema es

$$H = \frac{1}{2} [p_x^2 + K(s)x^2] \quad (3.1)$$

donde x representa la coordenada transversal de la partícula (desviación del eje del diseño), p_x es el momento conjugado correspondiente, y $K(s)$ es una función periódica en s (la coordenada longitudinal a lo largo del anillo) que está directamente relacionada con el gradiente de campo magnético de los cuadrupolos. La periodicidad, $K(s + L) = K(s)$, donde L es la longitud del período del anillo, refleja la estructura repetitiva del sistema de imanes en el acelerador.

En sistemas hamiltonianos con periodicidad espacial, la búsqueda de invariantes de movimiento es crucial para demostrar la estabilidad del haz. El invariante correspondiente a este hamiltoniano, análogo a la acción en sistemas integrables, tiene la forma

$$I(s) = \gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xp_x + \beta(s)p_x^2 \quad (3.2)$$

donde $\alpha(s)$, $\beta(s)$, y $\gamma(s)$ son las funciones periódicas de Courant-Snyder (también conocidas como funciones Twiss), que permiten calcular propiedades lineales del sistema. Estas funciones no son independientes, sino que satisfacen la relación $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$, que asegura la preservación del área del espacio fase.

Las trayectorias en el espacio fase para este sistema en un punto dado $s = s_0$ pueden visualizarse como una familia de elipses, cada una de las cuales corresponde a un valor dado del invariante (Fig. 3.1). La forma y orientación de estas elipses están determinadas por los valores de α , β y γ en ese punto específico. Este es un caso muy simple donde no se requiere hacer ninguna simulación de trayectoria de partículas porque la existencia del invariante garantiza que todos los puntos de su dinámica se encuentran en el espacio fase sobre una elipse que corresponde a este invariante.

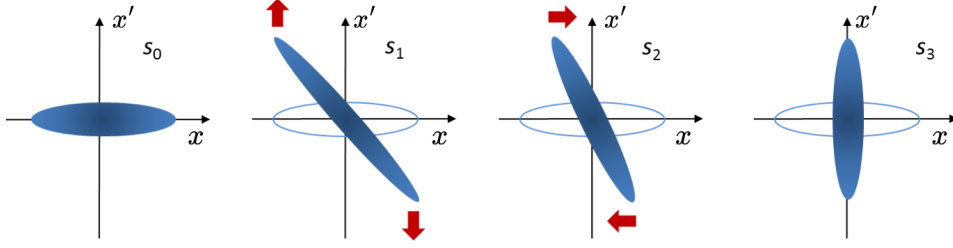


Figura 3.1: La distribución de partículas "gira" en el espacio de fase longitudinal (el área se conserva). No solo se muestra la elipse en el punto $s = s_0$, sino cómo esta evoluciona a lo largo de varias posiciones s [25].

La conservación del invariante de Courant-Snyder puede mostrarse de manera formal utilizando la mecánica hamiltoniana. La evolución de la variable física I_{CS} con respecto a s viene dada por

$$\frac{dI_{CS}}{ds} = \{I_{CS}, H\} + \frac{\partial I_{CS}}{\partial s} \quad (3.3)$$

donde $\{\cdot, \cdot\}$ denota el corchete de Poisson, H es el hamiltoniano [Ec. (3.1)], e I_{CS} es el invariante [Ec. (3.2)]. Calculando explícitamente los corchetes de Poisson y la derivada parcial temporal, tenemos

$$\frac{dI_{CS}}{ds} = (\gamma' - 2\alpha K) x^2 + [2(\alpha' - \beta K + \gamma)] xp_x + (\beta' + 2\alpha) p_x^2. \quad (3.4)$$

Para que I_{CS} sea realmente invariante (es decir, $dI_{CS}/ds = 0$ para cualquier x y p_x), los coeficientes de x^2 , xp_x y p_x^2 deben anularse independientemente. Esto nos conduce al sistema de ecuaciones

$$\alpha' = \beta K - \gamma, \quad (3.5)$$

$$\beta' = -2\alpha \quad \text{y} \quad (3.6)$$

$$\gamma' = 2\alpha K \quad (3.7)$$

que son las conocidas ecuaciones diferenciales de las funciones de Courant-Snyder, que gobiernan la evolución de los parámetros Twiss a lo largo del sistema de transporte del haz. La extensión de este procedimiento se hará más adelante en la introducción de cuasi invariantes para el problema no lineal.

3.2. La cromaticidad y su corrección

Una vez introducidas las funciones de Courant-Snyder (α, β, γ) y su papel en la descripción del movimiento transversal, estas resultan fundamentales para caracterizar otros aspectos clave de la dinámica lineal de partículas. Un concepto donde su utilidad resulta evidente es en el estudio de la cromaticidad.

La cromaticidad lineal (o natural) cuantifica la sensibilidad de las frecuencias de oscilación transversal de las partículas ante variaciones en su momento δ . Esto se debe a que las partículas con diferente momento experimentan fuerzas de enfoque diferentes en cuadrupolos. Este parámetro se define mediante la integral del producto de la intensidad de los cuadrupolos $b_2(s)$ y la función beta $\beta(s)$ a lo largo del anillo

$$\xi_{x/y} := \frac{\Delta Q}{\delta} = \mp \frac{1}{4\pi} \oint_C b_2(s) \beta(s)_{x/y} ds. \quad (3.8)$$

Si no se corrige la cromaticidad, la dispersión del haz de electrones provocará un crecimiento de su tamaño transversal, lo que eventualmente lleva a la pérdida de partículas. Este efecto es más significativo en la generación actual de FLS [26]. La corrección de la cromaticidad se implementa mediante la inserción de sextupolos en el diseño del acelerador. Estos elementos magnéticos permiten anular el valor de la cromaticidad cuando se ajustan adecuadamente sus intensidades ($b_3(s)$), como muestra la condición

$$\xi_{x/y} = \pm \frac{1}{4\pi} \oint_C [2b_3(s)D(s) - b_2(s)] \beta_{x/y}(s) ds \approx 0. \quad (3.9)$$

Sin embargo, la selección de los dos sextupolos cromáticos adecuados para corregir la cromaticidad constituye sólo la primera etapa del tratamiento no lineal. Tras esta corrección primaria, es necesario compensar las aberraciones cromáticas residuales mediante múltiples pares de sextupolos adicionales, estratégicamente distribuidos a lo largo de la celda del acelerador. Estos elementos adicionales (sextupolos geométricos) permiten corregir los efectos no lineales inducidos por la propia corrección cromática inicial.

3.3. Espacio fase y Apertura Dinámica

El espacio fase y la AD son conceptos importantes en la física de aceleradores, particularmente en el estudio de la estabilidad del haz de partículas en anillos de almacenamiento, especialmente aquellos con dinámica no lineal con efectos importantes.

3.3.1. Espacio fase

El espacio fase constituye el marco conceptual fundamental para describir y analizar el movimiento de las partículas en aceleradores. En este dominio, el estado dinámico de cada partícula queda completamente determinado por sus coordenadas de posición y momento. En el caso del movimiento transversal, cuando una partícula se desplaza en un régimen de energía constante y bajo fuerzas puramente conservativas, su trayectoria en el espacio fase describe un contorno cerrado (que en el régimen lineal de transporte es generalmente elíptico) cuya área permanece constante. Debido a que el sistema es dinámicamente conservativo, el área delimitada por este contorno permanece constante a lo largo de la evolución temporal.

Sin embargo, la presencia de campos magnéticos no lineales, como aquellos generados por elementos sextupolares, introducen distorsiones significativas en estas trayectorias. Las elipses simples se deforman, pudiendo aparecer estructuras complejas como:

- Regiones de inestabilidad donde las partículas se pierden
- Islas de estabilidad secundarias
- Puntos fijos estables e inestables

La principal consecuencia de estos efectos no lineales es la reducción de la región estable en el espacio físico transversal (x, y) accesible para el movimiento de las partículas. Esta región, denominada como AD [27] define el área efectiva donde el movimiento permanece acotado. Maximizar esta AD es uno de los desafíos centrales en el diseño y optimización de aceleradores modernos, ya que determina directamente la cantidad de partículas que pueden circular de manera estable en el anillo.

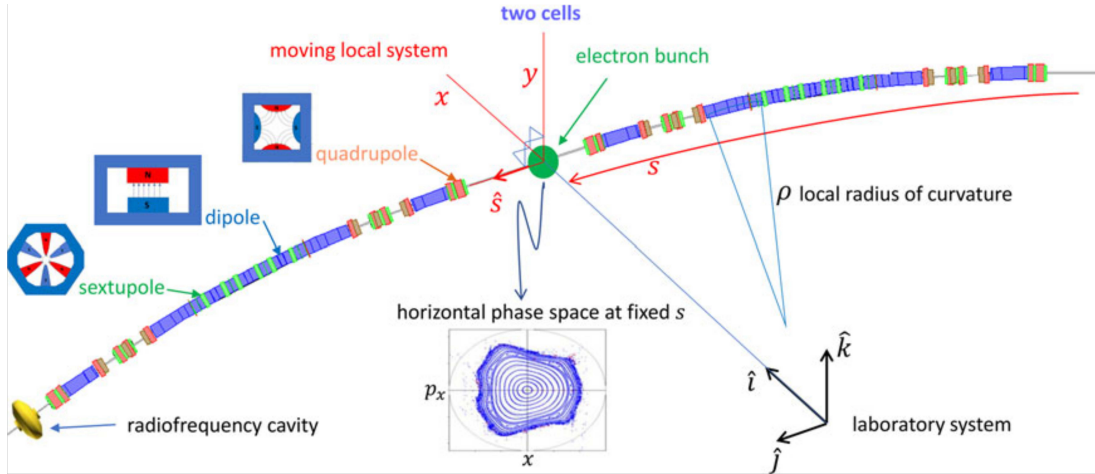


Figura 3.2: Estructura de dos celdas de un anillo de un modelo tipo ESRF-EBS. La disposición periódica de elementos magnéticos incluye: dipolos (azul) para curvar la trayectoria de los electrones y cerrar el camino circular; cuadrupolos (naranja) para confinar el haz alrededor de la órbita mediante oscilaciones betatrón; y sextupolos (verde) para corregir efectos cromáticos inducidos por los cuadrupolos. Adicionalmente, se muestra el sistema de referencia local que viaja con los electrones, permitiendo estudiar la dinámica en el plano transversal (horizontal y vertical) y visualizar los espacios fase en un punto fijo de la circunferencia [28].

La Fig. 3.2 ilustra cómo se deforma el espacio fase horizontal debido a los efectos no lineales, mostrando las regiones estables e inestables para el movimiento de las partículas.

3.3.2. Apertura dinámica

La amplitud de las oscilaciones betatrónicas determina la calidad del haz en el anillo de almacenamiento, caracterizando el espacio físico disponible para el movimiento transversal mediante un parámetro fundamental conocido como AD. Esta apertura, que define el límite de la región estable en el espacio fase transversal, está fuertemente influenciada por campos multipolares—particularmente aquellos generados por sextupolos y octupolos—cuya intensidad crítica modifica directamente los límites de estabilidad del haz a través de efectos no lineales. A diferencia de sistemas ideales, en máquinas reales la AD es finita debido a la presencia inevitable de campos no lineales, lo que establece el umbral a partir del cual las partículas dejan de mantener un movimiento estable y transitan a regímenes caóticos.

Debido a que el movimiento de las partículas cerca del límite de estabilidad suele ser caótico y sensible a las condiciones iniciales, no existe una métrica analítica que defina la AD de manera única. En la práctica, su caracterización requiere métodos numéricos de rastreo de partículas (tracking) durante miles de revoluciones, lo que convierte la evaluación y optimización de la AD en un proceso computacionalmente intensivo y en un desafío central para el diseño de aceleradores [27].

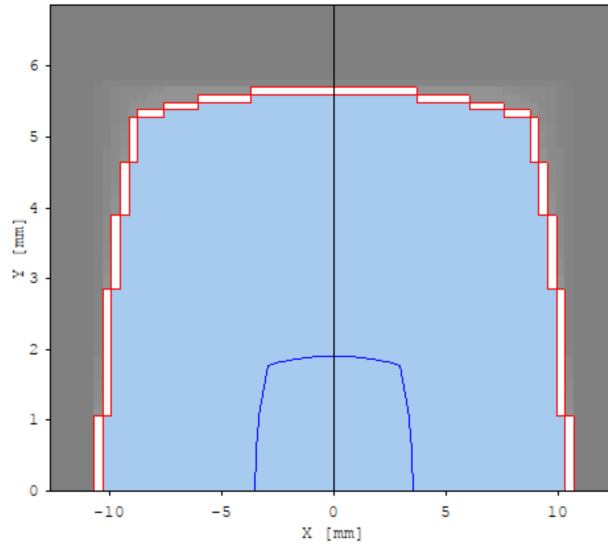


Figura 3.3: Representación esquemática de la AD [2] en el espacio fase transversal. La región central (azul) indica el área de estabilidad donde las partículas mantienen trayectorias confinadas. Las zonas exteriores (gris) representan regiones de inestabilidad donde ocurre pérdida de partículas. Los límites están determinados por los efectos no lineales de los multipolos magnéticos.

La Fig. 3.3 muestra la región estable de la AD en azul. Maximizar esta región es un objetivo fundamental del diseño de aceleradores modernos, dado que una mayor AD permite:

- Mayor capacidad de almacenamiento de partículas
- Mejor estabilidad temporal del haz
- Reducción de pérdidas por efectos no lineales
- Mayor tolerancia a imperfecciones magnéticas

La optimización de esta apertura requiere un balance cuidadoso entre la corrección de

aberraciones cromáticas (generalmente mediante sextupolos) y la minimización de sus efectos no lineales adversos.

3.3.3. Apertura de momento

El concepto de apertura de momento [27] se refiere a la capacidad de un acelerador para confinar partículas que se desvían del momento ideal (p_0), lo cual se relaciona directamente con el espacio físico requerido en la apertura transversal para albergar estas desviaciones. En aceleradores circulares, las partículas con momento diferente al ideal ($p \neq p_0$) siguen órbitas cerradas distintas a la órbita de referencia, fenómeno que surge del principio físico donde partículas con mayor momento son desviadas un ángulo menor al atravesar imanes dipolares. El desplazamiento de estas órbitas cerradas se describe cuantitativamente mediante la función de dispersión (D), que determina el espacio físico transversal que debe reservarse para acomodar la propagación de partículas con desviaciones de momento, definiendo así la apertura de momento necesaria para garantizar la estabilidad del haz.

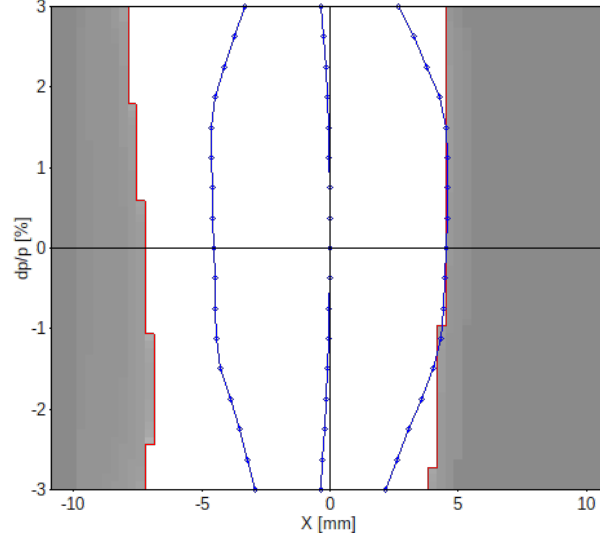


Figura 3.4: Representación esquemática de la apertura de momento [2] en el espacio transversal de un sincrotrón. La región central (blanca) indica el área de estabilidad donde las partículas con desviaciones de momento $p \neq p_0$ mantienen trayectorias confinadas. Las zonas exteriores (gris) representan regiones de inestabilidad donde ocurre pérdida de partículas. La aceptación geométrica (línea azul) delimita el espacio físico disponible, calculada mediante proyección lineal y superposición de las aberturas de todos los elementos hasta el punto de seguimiento. Los límites de estabilidad están determinados por las órbitas cerradas restringidas por las curvas rojas.

Como se ilustra en la Fig. 3.4, la apertura de momento influye directamente en el diseño físico del acelerador. El desplazamiento de la órbita de una partícula debido a su desviación de momento está descrito, en primera aproximación, por la relación:

$$\Delta x = D \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \quad (3.10)$$

donde Δx es el desplazamiento transversal de la órbita cerrada, D es la función de dispersión de momento, $\Delta p/p_0$ es la desviación relativa de momento

Es importante notar que, si bien esta ecuación gobierna el desplazamiento nominal del haz, la región de estabilidad mostrada en la Fig. 3.4 se obtiene mediante el rastreo numérico de partículas (particle tracking). Este método permite determinar el límite real de aceptación al considerar las no linealidades del sistema que no están presentes en la descripción lineal de la dispersión.

La maximización de la apertura de momento permite acomodar un rango más amplio

de desviaciones de momento, mejorando la estabilidad longitudinal del haz y reduciendo las pérdidas de partículas. Sin embargo, esto implica requisitos más estrictos en el diseño mecánico del tubo de vacío y los componentes magnéticos.

3.4. Derivación del Hamiltoniano no lineal con efectos cromáticos

Siguiendo la descripción dada en [29–31], el sistema no lineal bidimensional con efectos cromáticos se describe mediante el hamiltoniano apropiado. En el Apéndice A se incluye el desarrollo para obtener su expresión.

Al adoptar un sistema de referencia curvo con radio de curvatura $\rho = 1/h$, el hamiltoniano toma la forma general

$$H(x, p_x, y, p_y, \sigma, p_\sigma; s) = p_\sigma - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left(\frac{q}{p_0} A_s(s) + \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}\right), \quad (3.11)$$

donde:

- s : coordenada longitudinal independiente
- (x, p_x) : par canónico transversal horizontal; x es la coordenada transversal horizontal y p_x es el momento conjugado
- (y, p_y) : par canónico transversal vertical; y es la coordenada transversal vertical y p_y es el momento conjugado
- (σ, p_σ) : par canónico longitudinal; σ es la coordenada longitudinal relativa a la partícula de referencia y p_σ es el momento conjugado longitudinal
- ρ : radio de curvatura de la trayectoria de referencia
- q : carga de la partícula
- p_0 : momento de referencia de la partícula
- $A_s(s)$: componente longitudinal del potencial vectorial

- $\delta = \frac{p-p_0}{p_0}$: desviación relativa del momento, donde p es el momento de la partícula y p_0 es el momento de referencia

En el contexto de las condiciones normales en las que operan las fuentes de luz sincrotrón, la desviación de momento es muy pequeño, de modo que para cualquier partícula se cumple $\delta \ll 1$. Asimismo, bajo la aproximación paraxial, se asume que los momentos transversales son despreciables ($p_x, p_y \ll 1$) y que la variable longitudinal p_σ se mantiene cercana a cero, lo que indica una desviación mínima respecto al momento de referencia p_0 . Bajo estas consideraciones, es posible expandir en serie de Taylor el término de la raíz cuadrada en el hamiltoniano, resultando en

$$\mathcal{H} = - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \left(1 + \delta - \underbrace{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}}_{\text{Término cinético}} + \underbrace{\frac{q}{p_0} A_s(s)}_{\text{Potencial}} \right) + \mathcal{O}(4). \quad (3.12)$$

El potencial longitudinal $A_s(s)$ se desarrolla en una expansión multipolar

$$\frac{q}{p_0} A_s(s) = -\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [ia_n(s) + b_n(s)] (x + iy)^n, \quad (3.13)$$

donde los coeficientes $b_n(s)$ describen los campos normales dipolar, cuadrupolar, sextupolar y octupolar, respectivamente. Usualmente no se consideran los términos $a_n(s)$ porque representan elementos magnéticos rotados [32].

Tras expandir el término cinético en potencias de $\delta \ll 1$ y conservar los términos relevantes para la dinámica transversal, se obtiene la forma final del hamiltoniano con contribuciones cromáticas del acelerador

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p_x, y, p_y, s) = & \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) (1 - \delta + \delta^2 + \dots) \\ & - b_1(s)x\delta + \frac{b_1^2(s)}{2}x^2 + \frac{b_2(s)}{2}(x^2 - y^2) \\ & + \frac{b_3(s)}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{b_4(s)}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde x, y son las coordenadas transversales, p_x, p_y son los momentos conjugados, s es la variable longitudinal y δ es la dispersión en momento y los coeficientes $b_n(s)$ con $n =$

1, 2, 3, $\dots$, corresponden a:

- $b_1(s)$: Campo dipolar (desviación)
- $b_2(s)$: Campo cuadrupolar (enfoque)
- $b_3(s)$: Campo sextupolar (corrección cromática)
- $b_4(s)$: Campo octupolar (correcciones de tonos dependientes de amplitud)

3.5. Simulación de trayectorias de partículas: una técnica para aumentar la AD

Las estrategias actuales de optimización para FLS de baja emitancia combinan varios enfoques complementarios. La optimización directa basada en tracking ajusta sextupolos (y multipolos de orden superior) mediante simulaciones multipartícula para maximizar la AD y de momento, la vida media y la eficiencia de inyección. Los algoritmos evolutivos multiobjetivo—como NSGA-II/MOGA, particle swarm y evolución diferencial—se emplean ampliamente para explorar los compromisos entre emitancia, AD, vida media y robustez, produciendo redes ópticas adecuadas. Los métodos híbridos analítico-numéricos utilizan términos resonantes, formas normales, herramientas algebraicas de Lie para ajustar las familias de imanes y suprimir resonancias dañinas antes del tracking intensivo.

Un problema importante en el diseño de anillos de almacenamiento de cuarta generación es la aparición de efectos no lineales mayores que limitan severamente la AD. Esto resulta en que usualmente se requiere de sextupolos de gran intensidad, necesarios para lograr la corrección cromática en configuraciones de celda que priorizan una emitancia ultrabaja. Dado que alcanzar una AD suficiente amplia es fundamental para garantizar la inyección del haz y una vida útil adecuada, se requiere un proceso de acondicionamiento no lineal que parte del diseño lineal inicial.

Para abordar este problema, las metodologías de optimización se centran en equilibrar la disyuntiva inseparable entre tener una baja emitancia y el conseguir una gran AD. Las técnicas en uso emplean principalmente algoritmos genéticos multiobjetivo para una

corrección rigurosa de los efectos no lineales inducidos por los sextupolos. La necesidad de dicha optimización surge como consecuencia de una emitancia muy baja que exige funciones beta y dispersión pequeñas, logradas mediante cuadrupolos intensos. Esto, a su vez, requiere el uso de sextupolos cromáticos intensos que introducen no linealidades críticas, haciendo necesario un enfoque sistemático para maximizar el rendimiento global del anillo.

3.5.1. Optimización Genética Multiobjetivo (MOGO)

En la literatura se reportan diversas implementaciones de algoritmos genéticos para abordar el problema de optimización multiobjetivo en anillos de almacenamiento. Por ejemplo, la referencia [33] describe la aplicación de un Optimizador Genético Multiobjetivo acoplado con el código *elegant* para el diseño del anillo de almacenamiento PEP-X ultimate. En este trabajo, los investigadores optimizaron simultáneamente la vida útil del haz (*beam lifetime*) y el área total de la AD proyectada en el plano transversal (x, y) . La estrategia de corrección implementada involucró el ajuste de diez familias de sextupolos: cuatro familias cromáticas y seis geométricas (o armónicas), específicamente añadidas para corregir las tonos cromáticos y los términos dependientes de la amplitud.

De manera complementaria, en la referencia [34] se propone el uso del Algoritmo Genético de Ordenación No Dominada II (NSGA-II) para optimizar simultáneamente la emitancia y la AD. Este estudio destaca que el NSGA-II permite una optimización global basada en el seguimiento directo de la AD, lo que constituye un enfoque más directo y eficiente. Los autores definen criterios cuantitativos específicos para evaluar y optimizar el rendimiento no lineal del anillo. En este contexto, la maximización de la AD se cuantifica mediante el uso de dos radios: el radio promedio (R_{avg}), que representa la distancia media desde el origen hasta las partículas perdidas en el límite de la AD, y el radio mínimo (R_{min}), que corresponde al radio más pequeño entre todas esas partículas. La métrica combinada que formaliza este objetivo se define como $AD = kR_{min} + R_{avg}$, donde la optimización mediante el algoritmo NSGA-II busca maximizar este valor compuesto. Una característica notable de esta metodología es la optimización simultánea de las intensidades de cuadrupolos y sextupolos. Se reconoce que la variación de los avances de fase betatrón, determinada por

los cuadrupolos, define la proximidad a resonancias impulsadas por los sextupolos. De este modo, la configuración cuadrupolar influye indirectamente en la magnitud de los efectos no lineales que degradan la AD.

3.5.2. Optimización basada en la corrección de términos no lineales resonantes

En esta sección se describen métodos enfocados en minimizar los términos de excitación no lineales con el fin de maximizar la AD [33]. Como parte del acondicionamiento inicial del diseño de PEP-X, el ajuste de fases por celda se emplea para cancelar las resonancias geométricas de tercer y cuarto orden en cada arco de 8 celdas. Este procedimiento elimina los términos generadores de resonancias betatrónicas geométricas de tercer y cuarto orden, con excepción de la resonancia $2\nu_x - 2\nu_y$.

Las resonancias de tercer orden contienen términos que impulsan cinco resonancias distintas, mientras que las de cuarto orden involucran ocho, además de inducir desplazamientos de tono dependientes de la amplitud. La minimización de estos términos no lineales es esencial para maximizar la AD, ya que su cancelación simplifica la etapa de optimización posterior al permitir concentrarse principalmente en los desplazamientos de tono dependientes de la amplitud, los tonos cromáticos y la resonancia residual $2\nu_x - 2\nu_y$.

En la referencia anterior se reporta que este método de ajuste de fases no siempre resulta suficiente en las fuentes de luz sincrotrón de nueva generación, donde se requiere un enfoque de optimización más integral. Por ello, se complementa con herramientas como el programa de diseño de aceleradores OPA [2], utilizado para la optimización interactiva del hamiltoniano con contribuciones a primer y segundo orden en intensidad de sextupolos. Con OPA se corrigen específicamente los tonos cromáticos, los desplazamientos de tono dependientes de la amplitud —principales responsables de la amplia dispersión de tono— y la resonancia $2\nu_x - 2\nu_y$, empleando pesos adecuados. La técnica incorpora seis familias de sextupolos geométricos además de las cuatro familias cromáticas, con el fin de reducir de manera directa los desplazamientos de tono dependientes de la amplitud.

Usualmente este tipo de optimización se realizaba en dos etapas independientes: primero

se ajustaba la óptica lineal (emitancia y tonos) y posteriormente se abordaba la dinámica no lineal mediante la minimización analítica de términos de excitación, ya sea basados en álgebras de Lie o en la teoría de formas normales. Sin embargo, este procedimiento resulta iterativo, lento y con limitaciones claras, pues en anillos de emitancia ultrabaja no existe una correspondencia directa entre la AD y los términos de excitación no lineales. Esto ha motivado la adopción de enfoques de optimización global y multiobjetivo, los cuales permiten evaluar simultáneamente parámetros lineales y no lineales —ya sea mediante indicadores analíticos o rastreo numérico— para encontrar un equilibrio óptimo entre parámetros en conflicto, como la emitancia y la apertura dinámica.

Capítulo 4

Construcción de un Cuasi-invariante

Los trabajos que condujeron al desarrollo del concepto de cuasi-invariante aplicado a la dinámica de partículas [3, 28, 35–38], muestran que éste constituye una extensión de la teoría lineal y puede utilizarse para describir la dinámica de partículas en FLS.

Esta técnica de optimización, que incorpora explícitamente efectos cromáticos, busca mejorar significativamente la estabilidad del haz en sincrotrones modernos al abordar no linealidades complejas usando múltiples parámetros de diseño presentes en aceleradores de última generación, como aquellos basados en celdas MBA [9].

4.1. Estudios anteriores del cuasi-invariante hasta orden δ

Retomemos el hamiltoniano de la Ec. (3.14). Este contiene la información de las dos direcciones transversales e incluye los efectos cromáticos que se pueden desarrollar de la

siguiente forma

$$\begin{aligned}
 H(x, p_x, y, p_y, s) = & \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) (1 - \delta + \delta^2 + \dots) \\
 & - b_1(s)x\delta + \frac{b_1^2(s)}{2}x^2 + \frac{b_2(s)}{2}(x^2 - y^2) \\
 & + \frac{b_3(s)}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{b_4(s)}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\
 & + \dots,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $b_1(s)$, $b_2(s)$, $b_3(s)$ y $b_4(s)$ son funciones periódicas que describen, respectivamente, la curvatura de los dipolos y las intensidades de los cuadrupolos, sextupolos y octupolos del acelerador. En general, estos parámetros se calculan como

$$b_n = \frac{1}{B\rho} \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{(n-1)} B_y(x, y)}{\partial x^{n-1}} \right|_{y=0}, \tag{4.2}$$

donde $B\rho$ es la rigidez magnética del haz, $B_y(x, y)$ es la componente vertical del campo magnético total y x e y representan las coordenadas transversales horizontal y vertical, respectivamente.

La derivada se evalúa en $y = 0$, lo que corresponde al plano medio del imán, asumiendo que el campo es puramente vertical en el eje de diseño para imanes normales (normal magnets).

La variable $\delta = \Delta p/p_0$ representa la desviación del momento de la partícula con respecto al momento de diseño p_0 . En la expansión del campo, los coeficientes b_n con $n \geq 4$ representan las contribuciones de multipolos de orden superior; por ejemplo, el término b_4 cuantifica la componente octupolar del campo. Estas contribuciones, ya sean introducidas deliberadamente o derivadas de errores sistemáticos en los imanes, generan fuerzas no lineales que afectan la estabilidad del haz para grandes amplitudes de oscilación.

En relación a la dinámica no lineal la literatura propone el siguiente invariante aproximado,

$$I(x, p_x, y, p_y, s, \delta) = \sum_{i+j+k+l \geq 2, i,j,k,l=0} \sum_{n=0} A_{ijkl}^{(n)}(s) x^i p_x^j y^k p_y^l \delta^n \tag{4.3}$$

Las funciones $A_{ijkl}^{(n)}(s)$ dependen del punto s sobre la circunferencia del acelerador. En un punto fijo del anillo, estos términos poseen una representación numérica y actúan como coeficientes de los monomios del cuasi-invariante. Estos coeficientes representan una

extensión de las funciones de Courant-Snyder α_x , β_x y γ_x . Por lo que es importante resaltar que, mientras las trayectorias de las partículas individuales no son periódicas, las funciones de Courant-Snyder sí lo son, ya que describen a la celda que tiene una estructura periódica. Dado que las funciones $A_{ijkl}^{(n)}(s)$ son una generalización de estos parámetros, heredan su periodicidad respecto a s

$$A_{ijkl}^{(n)}(s + C) = A_{ijkl}^{(n)}(s) \quad (4.4)$$

donde C es la circunferencia del acelerador. Tanto las funciones de Courant-Snyder como los coeficientes $A_{ijkl}^{(n)}(s)$ dependen críticamente del arreglo magnético particular de cada sincrotrón y esta periodicidad es fundamental para garantizar la estabilidad del movimiento de las partículas en el acelerador.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento que satisfacen las funciones $A_{ijkl}^{(n)}(s)$, se impone la siguiente condición de invarianza

$$\frac{dI}{ds} = \{I, H\} + \frac{\partial I}{\partial s} = 0 \quad (4.5)$$

Siguiendo la metodología planteada en el estudio previo [3], el análisis se centro en las contribuciones hasta el orden δ en la Ec. (4.3) y expandiendo el polinomio hasta octavo orden. El sistema de ecuaciones diferenciales resultante, en este caso 418, surge de la combinación de las potencias del espacio fase (x, p_x) que conforman el polinomio. El sistema fueron obtenidas mediante el programa de manipulación simbólica **wxMaxima** aplicando la Ec. (4.5).

Una forma eficiente de abordarlo es mediante una solución numérica que aprovecha las condiciones periódicas del sistema. Cabe destacar que la cantidad de ecuaciones no representa un obstáculo, dada la naturaleza del método propuesto para su resolución.

Las primeras ecuaciones que se derivan del sistema corresponden a las funciones de Courant-Snyder: α , β y γ . En el formalismo del cuasi-invariante, estas funciones se relacionan con los términos $A_{1100}^{(0)}$, $A_{0200}^{(0)}$ y $A_{2000}^{(0)}$, mostrados en las Ec. (4.6), (4.7) y (4.8), respectivamente.

$$\frac{dA_{1100}^{(0)}}{ds} = -2A_{2000}^{(0)} + 2(b_2 + b_1^2)A_{0200}^{(0)} \quad (4.6)$$

$$\frac{dA_{0200}^{(0)}}{ds} = -A_{1100}^{(0)} \quad (4.7)$$

$$\frac{dA_{2000}^{(0)}}{ds} = (b_2 + b_1^2) A_{1100}^{(0)} \quad (4.8)$$

Conociendo los valores de cada elemento magnético involucrado en el modelo de sincrotrón, se construye una matriz cuadrada M que depende de las intensidades de los dipolos, cuadrupolos y sextupolos, las cuales se consideran constantes para cada elemento.

El conjunto de ecuaciones diferenciales se representa con $W(s)$ y se puede escribir mediante el sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado

$$\dot{W}(s) = MW(s) \quad (4.9)$$

donde $W(s)$ representa el vector columna

$$W(s) = \begin{pmatrix} \{A_{ijkl}^{(0)}(s)\} \\ \{A_{ijkl}^{(1)}(s)\} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Para cada elemento magnético se obtiene una matriz M_k constante, la solución general de la Ec. (4.9) es

$$W(s_2) = T_k(s_2, s_1)W(s_1) \quad (4.11)$$

$$T_k(s_2, s_1) = \exp(M_k(s_2 - s_1)) \quad (4.12)$$

Las matrices T_k representan las matrices de transporte de cada elemento presente en la celda del sincrotrón y $s_2 - s_1$ su longitud. Multiplicando estas matrices en el orden apropiado se obtiene la matriz de transporte para toda la celda de p elementos

$$T_c = T_p T_{p-1} \cdots T_2 T_1 \quad (4.13)$$

Considerando las condiciones de contorno periódicas $A_{ijkl}^{(n)}(s) = A_{ijkl}^{(n)}(s + C)$ para $n = 0, 1, 2$, donde C es la circunferencia del acelerador, puede escribirse

$$W(C) = T_c W(0) = W(0) \quad (4.14)$$

Lo que representa un problema de eigenvalores que puede resolverse para $W(0)$ si

$$\det[T_c - I] = 0 \quad (4.15)$$

En estudios previos [3], el análisis se ha centrado en los términos δ^0 y δ^1 , ya que estas contribuciones de la desviación de momento δ presentan el mayor impacto en la dinámica del haz. En las secciones siguientes se describirán en detalle los resultados obtenidos en dichos trabajos.

4.1.1. Visualización geométrica del cuasi-invariante

Una vez calculados los coeficientes, los primeros trabajos basados en la descripción del cuasi-invariante [38] analizaron el polinomio mediante la clasificación de sus raíces para determinar el espacio fase. No obstante, dado que el polinomio del cuasi-invariante es de grado 8, este enfoque presenta dificultades en la interpretación de las raíces complejas son menos directas de interpretar.

Por esta razón, en este trabajo, en analogía a los trabajos [3, 39] se centra el análisis en el estudio de las superficies no lineales definidas para valores fijos de δ . En la Fig. 4.1 se ilustra un ejemplo comparativo entre la superficie de Courant-Snyder (sistema lineal) y una superficie no lineal típica generada por el cuasi-invariante.

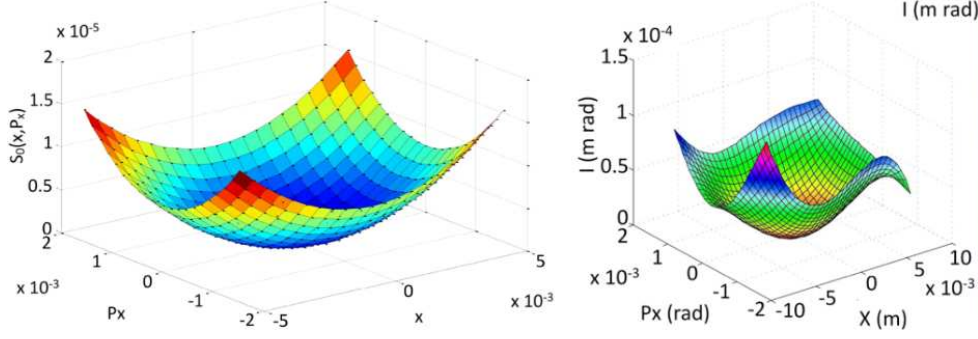


Figura 4.1: Comparación entre la superficie de Courant-Snyder (paraboloide elíptico) y una superficie no lineal sobre el plano horizontal (x, p_x) para $\delta = 0$. Las curvas de nivel de la superficie no lineal muestran distorsiones características debidas a las no linealidades del sistema. [3].

En un sistema lineal, el invariante de Courant-Snyder [Ec. (3.2)] describe un paraboloide elíptico en el espacio fase, conocido como superficie de Courant-Snyder. Sus curvas de nivel forman elipses cerradas que representan órbitas acotadas, y el área encerrada por estas curvas se conserva a lo largo del anillo.

En sistemas no lineales, el cuasi-invariante genera superficies que dependen paramétricamente de la desviación de momento δ . Las órbitas no lineales corresponden a proyecciones de estas superficies en un espacio fase (por ejemplo, el plano horizontal) para un valor fijo de δ . Estas proyecciones permiten visualizar las órbitas y analizar las distorsiones características introducidas por las no linealidades del sistema.

4.1.2. Líneas de contorno y trayectorias en el espacio fase

Debido a las no linealidades introducidas por elementos magnéticos multipolares de orden superior (como sextupolos y octupolos), las líneas de contorno de las superficies no lineales pueden adoptar formas complejas, e incluso pueden corresponder a movimiento no acotado. Sin embargo, bajo condiciones específicas y para amplitudes de oscilación limitadas, es posible obtener curvas de contorno cerradas en estas proyecciones, correspondientes a movimientos acotados. El área encerrada por dichas curvas se conserva aproximadamente para amplitudes pequeñas.

La forma de la superficie no lineal es altamente sensible a la configuración de los elementos magnéticos no lineales en la celda del acelerador. Su definición matemática involucra

funciones $A_{ijkl}^{(n)}(s)$, que generalizan los coeficientes del polinomio lineal y están sujetas a condiciones de periodicidad. Los coeficientes cromáticos $A_{ijkl}^{(n)}(s)$ incorporan correcciones específicas para partículas con desviaciones de momento δ .

En la Fig. 4.2 se compara un ejemplo representativo de curvas de contorno no lineales (teóricas) con las generadas mediante simulaciones numéricas usando el código OPA [2]). Esta comparación permite validar la precisión del modelo teórico frente a resultados numéricos.

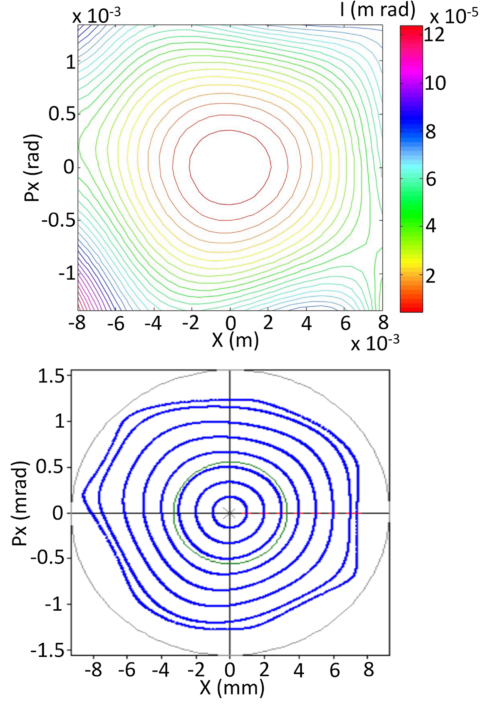


Figura 4.2: Comparación entre curvas de contorno no lineales teóricas (arriba) y resultados de simulación con OPA (abajo). Se observa la correspondencia en la forma de las curvas cerradas para amplitudes moderadas, así como las distorsiones no lineales para amplitudes mayores.

4.1.3. Propuesta de una función objetivo geométrica

A continuación, se define una función objetivo que permita optimizar las intensidades de los sextupolos mediante la minimización de dicha función. La función objetivo f_{obj}^δ , definida en la Ec. (4.16), cuantifica la diferencia entre superficies lineales y no lineales en el espacio fase

$$f_{obj}^\delta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left| S^\delta(x_i, p_{xj}) - S_0(x_i, p_{xj}) \right| \quad (4.16)$$

Las superficies $S_0(x_i, p_{xj})$ y $S^\delta(x_i, p_{xj})$ representan la superficie lineal y no lineal que se evalúan sobre puntos de una malla sobre el espacio fase y n es el número de puntos de muestreo de la malla del espacio fase (x y p_x). Para el caso $\delta = 0$, las superficies lineales corresponden a la superficie de Courant-Snyder $S_0(x, p_x)$, dada por la Ec. (3.2). Para comparar una superficie no lineal con $\delta \neq 0$ con la superficie lineal de $\delta = 0$, todos los valores x de la malla (x, p_x) se desplazan a $x + D(s)\delta$, donde $D(s)$ es la función de dispersión. La superficie no lineal se evalúa utilizando esta malla desplazada y posteriormente se centra en el origen, donde se realiza la comparación.

La definición de f_{obj}^δ en la Ec. (4.16) incluye tanto el caso para la partícula de referencia con momento nominal ($\delta = 0$) como términos correspondientes a partículas fuera de momento ($\delta \neq 0$).

La minimización de f_{obj}^δ permite encontrar soluciones del problema no lineal que se aproximen lo más posible a la superficie lineal. Este enfoque se basa en el principio de que la superficie no lineal debe asemejarse a la del caso lineal para amplitudes pequeñas.

La función objetivo f_{obj}^δ considera la suma de distancias entre las superficies lineal y no lineal para cada punto de la malla, en un espacio fase con δ fijo. Dado que estas distancias dependen de las funciones no lineales $A_{ijkl}^{(0)}(s)$ y $A_{ijkl}^{(1)}(s)$, los términos que producen mayores deformaciones en el espacio fase reciben penalizaciones más severas. Al tratarse de la única función considerada en el proceso de optimización, no se requiere la inclusión de pesos adicionales en el problema.

4.1.4. Aplicación de la función objetivo a un sincrotrón tipo MBA

La referencia [3] describe un modelo para la futura fuente de luz mexicana, el cual emplea un diseño híbrido con características de sincrotrones de cuarta generación. Este diseño incorpora de manera coherente conceptos innovadores de dos instalaciones internacionales: los dipolos con gradiente longitudinal (LGB) del sincrotrón europeo ESRF-EBS [40] y el esquema de dipolos RB del proyecto SLS-2 del sincrotrón suizo [41].

En el diseño revisado, la sección que contiene el pico de dispersión se adapta del esquema

de ESRF-EBS, mientras que la configuración de celdas internas con dipolos de flexión inversa proviene del diseño de SLS-2. Ambos diseños base, con emitancias del orden de $130 \text{ pm} \cdot \text{rad}$, son considerados referentes internacionales para anillos de almacenamiento de cuarta generación [4]. La Fig. 4.3 muestra la configuración de celda completa resultante de esta integración conceptual.

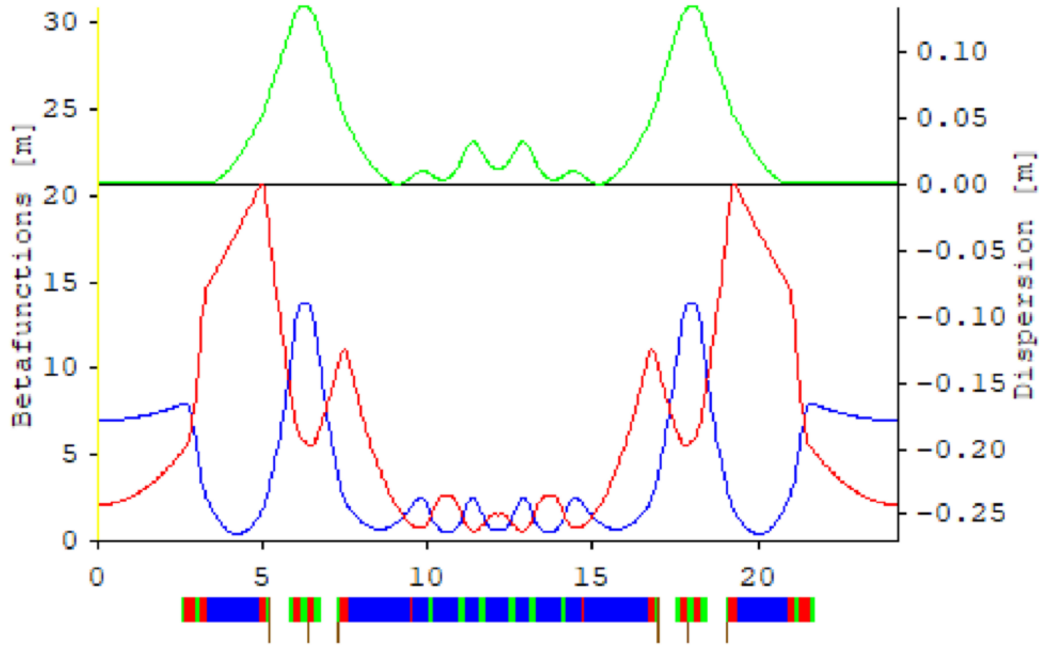


Figura 4.3: Reconstrucción del diseño de celda MBA reportado en [3]. Funciones ópticas lineales. Disposición magnética con dipolos (azul), cuadrupolos (rojo), sextupolos (verde) y octupolos (café)

El análisis de las funciones ópticas lineales (Fig. 4.3) muestra el comportamiento periódico característico de las celdas MBA. La disposición magnética inferior ilustra la distribución de elementos que conforman la celda. El diseño completo del anillo consta de 20 celdas idénticas, alcanzando una circunferencia total de 485.016 m.

Los parámetros fundamentales reportados para este diseño se resumen en el Cuadro 4.1. Las cromaticidades naturales ($\xi_x = -86.70$, $\xi_y = -64.01$) indican que se requieren intensidades moderadas de sextupolos para la corrección cromática, lo que sugiere que los efectos no lineales pueden mantenerse dentro de límites manejables.

Este diseño representa una contribución significativa al campo, proporcionando un caso de estudio valioso para metodologías de optimización no lineal debido a su baja emitancia ($113 \text{ pm} \cdot \text{rad}$) y alta complejidad en el diseño de la celda MBA.

Cuadro 4.1: Parámetros reportados para el diseño del anillo de almacenamiento

Parámetro	Valor
Energía	3 GeV
Circunferencia	485.016 m
Número de celdas	20
Túnicas betatrón (ν_x, ν_y)	48.802, 27.653
Cromaticidades naturales (ξ_x, ξ_y)	-86.70, -64.01
Emitancia (ε_x)	113 pm · rad
Factor de compactación de momento (α_c)	1×10^{-4}

4.1.5. Ejemplo de optimización usando tres desviaciones relativas de momento

El método de optimización implementado utiliza la función objetivo f_{obj}^δ para optimizar simultáneamente tres espacios fase correspondientes a desviaciones de momento de $\delta = -2\%$, 0% y 2% . Este esquema fue diseñado para mejorar la AD de fuentes de luz sincrotrón mediante la inclusión de efectos cromáticos de primer orden y posteriormente será extendido en este trabajo de tesis.

El procedimiento busca promover la similitud entre las geometrías de los espacios fase no lineales (descritos por el cuasi-invariante) y los espacios fase de la dinámica lineal (descritos por el invariante de Courant-Snyder). La función objetivo f_{obj}^δ se define geométricamente para cuantificar la separación entre la superficie no lineal $S_\delta(x, p_x)$ (construida a partir del cuasi-invariante) y la superficie lineal $S_0(x, p_x)$ (superficie de Courant-Snyder) en cada punto de una cuadrícula definida en el espacio fase horizontal.

Para un espacio fase con desviación de momento fija δ , la función objetivo se calcula mediante la expresión dada en la Ec. (4.16). La minimización de f_{obj}^δ tiene como objetivo que las soluciones del problema no lineal se aproximen lo máximo posible a la superficie lineal, condición que se busca cumplir para amplitudes pequeñas. El proceso de optimización empleó algoritmos genéticos y consideró la función objetivo de la Ec. (4.16) con tres

valores de δ , $-2, 0, 2$ %.

La amplitud de oscilación utilizada en la optimización fue de $x_0 = 7$ mm. Los parámetros libres fueron las intensidades de los sextupolos y octupolos, mientras que los sextupolos cromáticos se ajustaron para mantener las cromaticidades cercanas a cero ($\xi_x, \xi_y \approx 0$).

Comparación Teórica vs. Seguimiento de Partículas (Tracking)

El cuasi-invariante (Ec. 4.3) fue diseñado para incorporar las funciones $A_{ijkl}^{(0)}$ y $A_{ijkl}^{(1)}$, que representan la primera contribución en δ al cuasi-invariante polinomial, resultando cruciales para describir partículas fuera de momento. Los resultados obtenidos revelan:

- Para $\delta = 0$ %, se observó una superposición muy precisa entre las curvas cerradas del cuasi-invariante (teoría) y las simulaciones de seguimiento de partículas (OPA [2]).
- A medida que $|\delta|$ se aleja de 0 %, la calidad de la superposición disminuyó progresivamente, indicando que la contribución teórica de $A_{ijkl}^{(1)}$ pierde eficiencia en la descripción de órbitas con grandes desviaciones de momento, aunque sigue proporcionando una medida válida de la no linealidad del sistema.
- Se plantea que contribuciones de orden superior, particularmente las funciones $A_{ijkl}^{(2)}$ (proporcionales a δ^2), podrían ser necesarias para mejorar la superposición teórico-experimental en valores grandes de $|\delta|$.

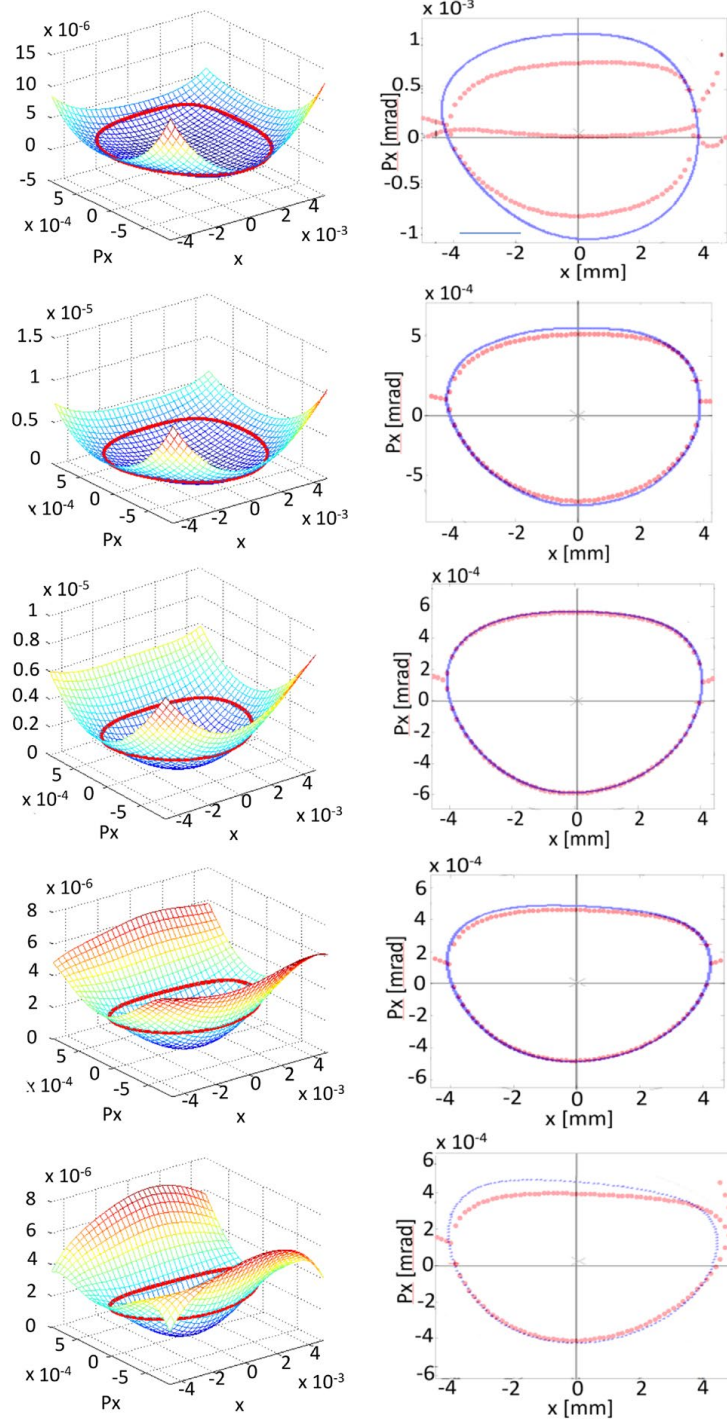


Figura 4.4: Espacios fase para varios valores de δ . La primera columna de esta figura muestra las superficies $S^\delta(x_i, p_{xj})$ correspondientes, por filas, a $\delta = -2\%$, -1% , 0% , 1% y 2% . Las trayectorias cerradas, confinadas por la cuenca, con amplitudes alrededor de 4 mm se muestran en rojo. La segunda columna muestra las trayectorias cerradas en el espacio fase y su comparación con la simulación de tracking con OPA, en azul. La optimización se realizó incluyendo los espacios fase correspondientes a $\delta = -2\%$, 0% y 2% , utilizando la función objetivo f_{obj}^δ de la Ec. (4.16) [3] .

Aunque la optimización se centró específicamente en $\delta = -2\%$, 0% y 2% , como se muestra en la Fig. 4.4, se evaluó la estabilidad en un rango extendido $\delta \in [-3\%, 3\%]$ mediante simulaciones de seguimiento de partículas (OPA). Los valores de amplitud máxima de estabilidad obtenidos se resumen en la Tabla 4.2.

Cuadro 4.2: Amplitud máxima de estabilidad en función de δ

δ	Amplitud máxima x_0 (mm)
-3%	4.7
-2%	5.9
-1%	7.0
0%	8.7
1%	10.0
2%	9.7
3%	7.5

La optimización de los tres espacios fase resultó en una estabilidad de hasta 5.9 mm en el rango optimizado $\delta \in [-2\%, 2\%]$. Se observó que esta estrategia produjo ligeras mejoras en la estabilidad en ciertas zonas del espacio de fase, pero afectó negativamente otras regiones en comparación con la optimización de un único espacio de fase. Estos resultados sugieren que la condición de similitud entre las superficies lineales y no lineales permite un margen de flexibilidad mayor al esperado, indicando que no es necesario alcanzar una linealidad absoluta para garantizar que sea viable en las aplicaciones prácticas.

Capítulo 5

Resultados

En esta sección se presentarán resultados sobre la descripción de los espacios de fase y la optimización de los elementos no lineales para dos casos de interés: (i) cálculos hasta términos lineales en δ . y (ii) cálculos que incluyen términos hasta orden δ^2 . Para ello, fue necesario ampliar tanto el desarrollo analítico como el computacional, a fin de incorporar las ecuaciones diferenciales correspondientes a la parte cuadrática en δ . El análisis parte del cálculo de las ecuaciones que describen la dinámica a segundo orden en la desviación de momento; posteriormente, estos términos se integran en la matriz de transporte correspondiente, se implementan numéricamente en el programa local y se aplican a un modelo de FLS. Finalmente, se comparan las nuevas correcciones derivadas de la ampliación teórica con los resultados previos de primer orden en la desviación de momento.

5.1. Incorporación de δ^2 al cuasi-invariante

La primera fase de este trabajo consistió en derivar un sistema de 110 ecuaciones diferenciales que, complementado con las 418 ecuaciones para $A_{ijkl}^{(0)}$ y $A_{ijkl}^{(1)}(s)$ reportadas en [3], permite describir la dinámica del sistema hasta segundo orden en δ . La obtención de este conjunto completo de ecuaciones se realizó mediante el programa de manipulación simbólica wxMaxima [42] siguiendo el procedimiento descrito en la Secc. 4.1.

La forma analítica del cuasi-invariante es un polinomio de octavo grado de acuerdo con

la metodología establecida en [3, 28, 35–38]. Se le adiciona al cuasi invariante los términos $A_{ijkl}^{(2)}(s)$ asociados a contribuciones de segundo orden en δ , tal como se muestra en la siguiente ecuación

$$I(x, p_x, y, p_y, s, \delta) = \sum_{\substack{i+j+k+l \geq 2 \\ i,j=0}}^8 \left(A_{ijkl}^{(0)}(s) + A_{ijkl}^{(1)}(s)\delta + A_{ijkl}^{(2)}(s)\delta^2 \right) x^i p_x^j y^k p_y^l, \quad (5.1)$$

Aplicando la condición de invarianza expresada en la Ec. (4.5), que utiliza el hamiltoniano cromático previamente definido en la Ec. (4.1), se obtiene el correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales. El conjunto de ecuaciones diferenciales se muestra en el Apéndice B. A continuación, se presenta el cálculo numérico de los eigenvalores descritos en las ecuaciones (4.12)–(4.15), asociados con la dinámica no lineal del sistema.

5.1.1. Ambigüedad en la elección de los eigenvalores

La solución de la Ec. (4.14) presenta sutilezas en la selección de los valores y vectores propios. Como ya se ha descrito en la Ec. (4.10), las componentes del vector W son las funciones lineales y no lineales. Sus valores numéricos pueden obtenerse de la solución de la ecuación de eigenvalores $(T_c - I)W(0) = 0$, con eigenvalor cero. En la práctica existen varios eigenvalores numéricamente cercanos a cero. La elección del eigenvalor adecuado es crucial para el problema, pues de ello depende que las funciones periódicas de la Ec. (5.1) describan apropiadamente la dinámica no lineal. Para analizar las opciones disponibles, la Fig. 5.1 muestra los eigenvalores calculados numéricamente con la función eig de MATLAB para el modelo de la Secc. 4.1.4 que satisfacen la condición de la Ec. (4.15). Los eigenvalores se normalizaron al mayor valor en el rango de eigenvalores seleccionado, para facilitar la visualización de su distribución y magnitud relativa, resaltándose los más cercanos a cero. Esta transformación resalta los valores cercanos a cero, permitiendo una comparación entre los diferentes órdenes de magnitud presentes .

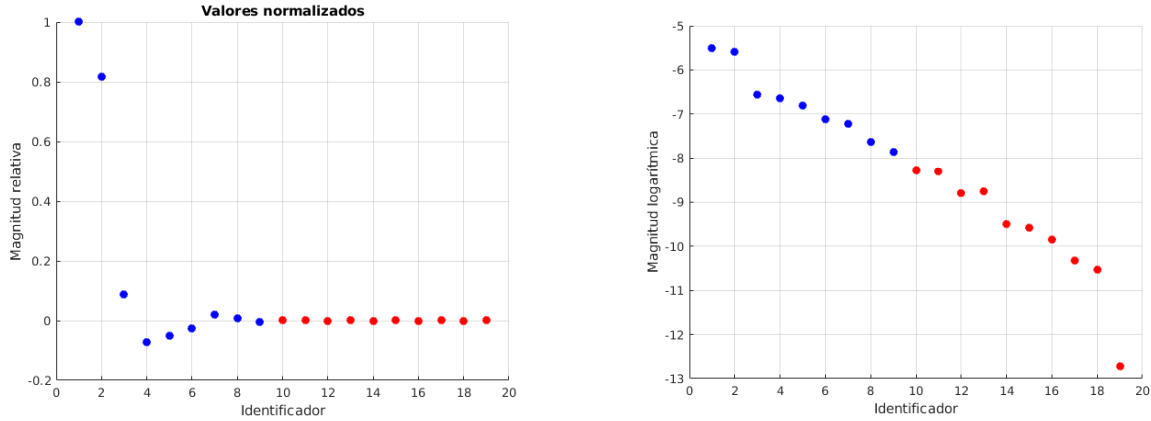


Figura 5.1: Eigenvalores normalizados obtenidos para el modelo de sincrotrón tipo MBA que se muestra en la Fig. 4.3. Los eigenvalores se normalizaron al mayor eigenvalor del rango seleccionado para facilitar su comparación y análisis. A la izquierda, eigenvalores normalizados mostrando en rojo los más cercanos a cero. A la derecha, se visualiza la magnitud de los eigenvalores sin normalizar en escala logarítmica.

A diferencia de los trabajos previos, en los cuales la exploración de los eigenvalores fue limitada, en este estudio se consideró ampliar el rango para investigar configuraciones alternativas que podrían ofrecer una descripción más precisa del sistema.

La distribución completa de estos eigenvalores se presenta en la Fig. 5.1, donde se emplea una escala logarítmica (derecha) para resaltar el rango de magnitudes. Los valores considerados están en el rango de 1×10^{-6} a 1×10^{-13} . Aquellos por debajo de 1×10^{-8} se resaltan en rojo, ya que su identificación será relevante más adelante en el proceso de optimización (Secc. 5.2).

En principio, se esperaba que los eigenvalores más pequeños proporcionaran una descripción más adecuada de la dinámica no lineal y, en consecuencia, un mejor acuerdo entre el espacio fase calculado en Matlab y la simulación de seguimiento de partículas realizada con OPA. Por ello, se realizaron comparaciones entre los diferentes eigenvalores mostrados en la Fig. 5.1, seleccionando los valores extremos y el valor medio para ejemplificar los resultados obtenidos.

En la Fig. 5.2 se observa que el eigenvalor más pequeño no necesariamente produce un mejor acuerdo entre el espacio fase calculado con Matlab (negro) y la simulación (azul). El caso mostrado corresponde a $\delta = -1\%$. En contraste, para $\delta = 1\%$, la Fig. 5.3 muestra una mayor similitud de espacios fase entre la descripción teórica y simulación para el

eigenvalor con menor valor.

Esta discrepancia sugiere la presencia de una degeneración en los valores propios para diferentes desviaciones de momento, lo cual dificulta la identificación de un único parámetro representativo para describir la dinámica no lineal en todo el rango analizado. Este comportamiento aparece de manera sistemática en todos los casos estudiados, y podría depender de las condiciones particulares de cada configuración del modelo, o de la descripción perturbativa en la desviación de momento en el hamiltoniano descrito en la Ec. (4.1).

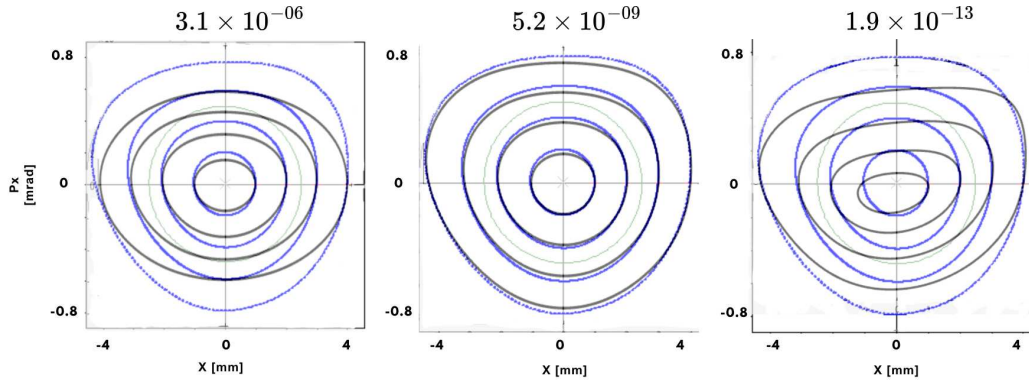


Figura 5.2: Comparación de los espacios fase obtenidos con el cuasi-invariante (negro) y con la simulación de OPA (azul) para $\delta = -1\%$, correspondientes a distintos eigenvalores indicados en la parte superior de cada subfigura.

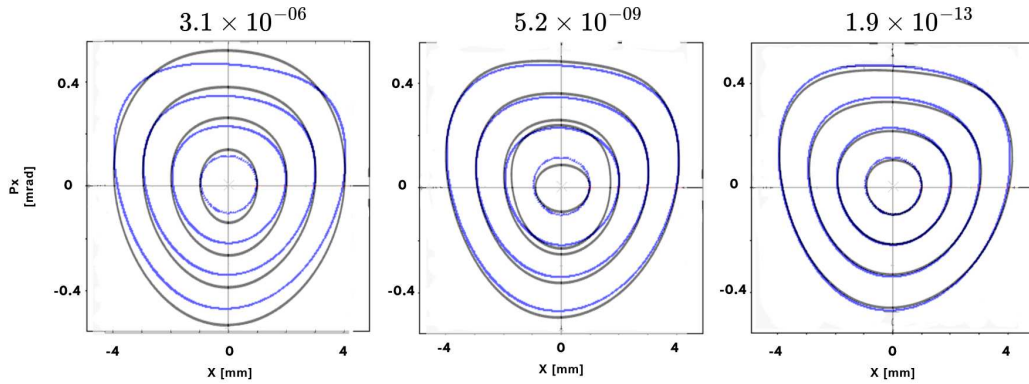


Figura 5.3: Comparación de los espacios fase obtenidos con el cuasi-invariante (negro) y con la simulación de OPA (azul) para $\delta = 1\%$, correspondientes a distintos eigenvalores indicados en la parte superior de cada subfigura.

5.1.2. Comparación de los espacios fase que se derivan del cuasi-invariante, a orden δ y δ^2

La comparación entre las aproximaciones del cuasi-invariante polinomial revela una mejora notable al incluir términos de segundo orden en la desviación de momento. Como se muestra en la Fig. (5.4), las curvas correspondientes al segundo orden (negras) presentan un ajuste significativamente mejor a los resultados de la simulación OPA (azules) en comparación con la aproximación de primer orden (naranjas). Esta mejoría se da en regiones donde las desviaciones de momento son diferentes de cero, donde los efectos no lineales se vuelven dominantes. El desarrollo hasta δ^2 muestra que en la región de $x_0 = \pm 6 \text{ mm}$ tomada en el cálculo, se tiene un buen ajuste en comparación a la distorsión que se muestra en las figuras hasta primer orden de desviación de momento.

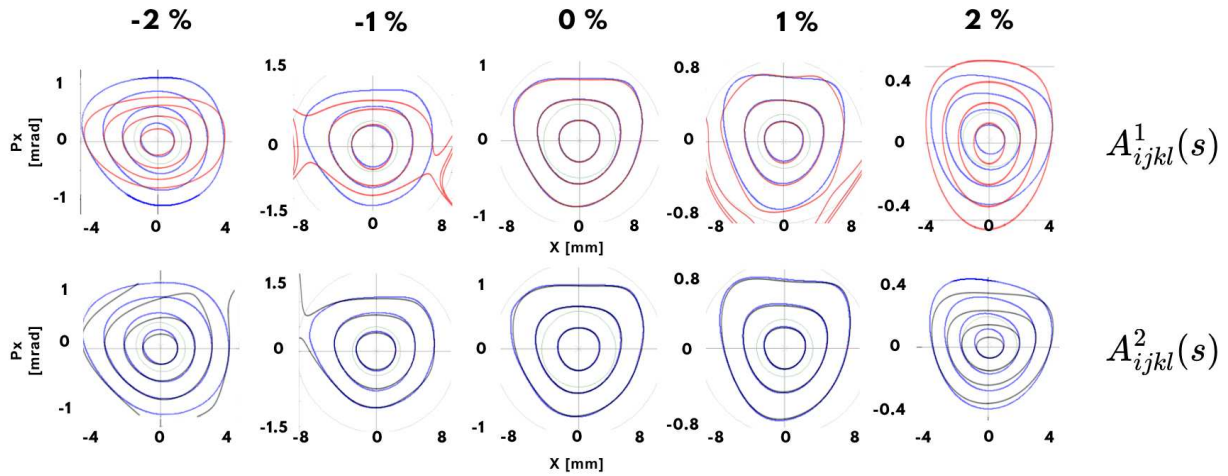


Figura 5.4: Comparación entre espacios fase del cuasi-invariante polinomial a orden δ (arriba) y δ^2 (abajo). Las curvas naranjas representan la aproximación hasta primer orden en δ , las curvas negras corresponden al desarrollo hasta segundo orden en δ^2 , y las curvas azules muestran los resultados de la simulación numérica con OPA. Se observa que resultados correspondientes al segundo orden describen con mayor precisión la simulación en todas las regiones del espacio de fase, particularmente para desviaciones de momento mayores. Fig. 5.1 se seleccionaron los eigenvalores que mostraron la mayor concordancia con la simulación para este ejemplo.

5.2. Optimización no lineal con términos hasta δ y δ^2 en el modelo elegido de FLS

Para evaluar el beneficio de incluir el segundo término de la desviación de momento en la descripción de la dinámica no lineal, se implementó una estrategia de optimización de elementos no lineales orientada a incrementar la estabilidad en el espacio de momentos. Esta metodología se aplicó al modelo que cuenta con 22 sextupolos y 7 octupolos, cuyas características se detallan en la Cuadro 5.1 y en la Secc. 4.1.4.

Inicialmente, la optimización que se realizó en la literatura [3] consideraba únicamente $\delta = -2\%, 0, 2\%$ utilizando el desarrollo del invariante hasta $A^{(1)}$ y como referencia se muestra su apertura de momento en la Fig. 5.5. Para comparar adecuadamente con el desarrollo extendido hasta $A^{(2)}$, se consideró apropiado expandir el rango de estudio a $\delta = \pm 4\%$ con 33 particiones del intervalo, lo que permitiría identificar las limitaciones del modelo teórico y de la optimización.

El procedimiento de optimización consistió en la selección de las configuraciones de sextupolo que estaban asociados a los eigenvectores con valores mínimos de la función objetivo [Ec. (4.16)], con el objetivo de mitigar los problemas descritos en la Sección 5.1.1 y evaluar simultáneamente la eficacia de la función objetivo propuesta.

Partiendo de las intensidades mostradas en el Cuadro 5.1, la optimización mediante $A^{(1)}$ reveló un incremento en la estabilidad para la región positiva de δ , aunque surgieron inestabilidades en regiones adyacentes al aumento en $dp/p = 4\%$. Esta configuración optimizada genera la apertura de momento mostrada en la Fig. 5.6, donde el análisis en el intervalo $\delta = \pm 4\%$ confirma que la estabilidad en la cota inferior resulta considerablemente menor que en la superior.

La optimización con los términos no lineales de segundo orden $A^{(2)}$ expandió significativamente la apertura de momento en x , particularmente en la región de $dp/p = -4\%$ donde el rango de estabilidad horizontal se amplió de $\pm 0,5$ mm a ± 2 mm respecto del modelo original, como se aprecia en la Fig. 5.6 (derecha). Aunque este incremento podría percibirse como marginal y la ganancia resulte cuantitativamente modesta para la aplicación,

confirmar el beneficio de incluir términos de orden superior es valioso en la práctica, donde uniformizar la zona de estabilidad constituye un desafío importante.

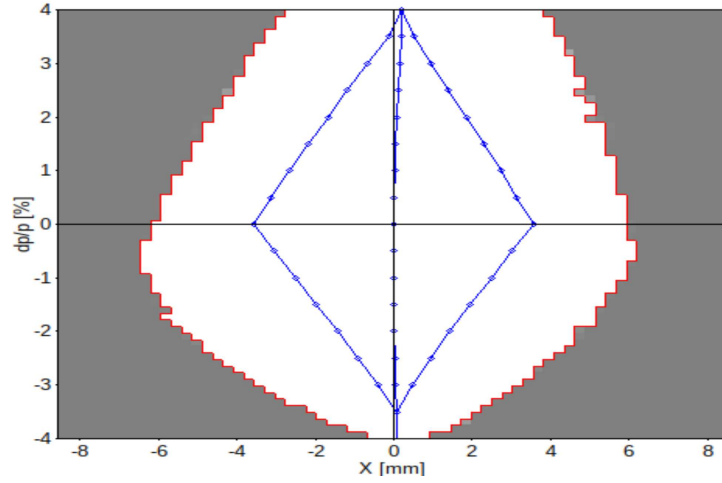


Figura 5.5: Apertura de momento del modelo estudiado en [3], correspondiente al conjunto de sextupolos originales. La figura se obtuvo usando el programa OPA [2], considerando el seguimiento de partículas colocadas sobre una malla en el espacio $x - \delta$. Se definen dos regiones. Las partículas con condiciones iniciales en la zona blanca sobreviven 100 vueltas en el acelerador y partículas con condiciones iniciales en la zona gris no sobreviven.

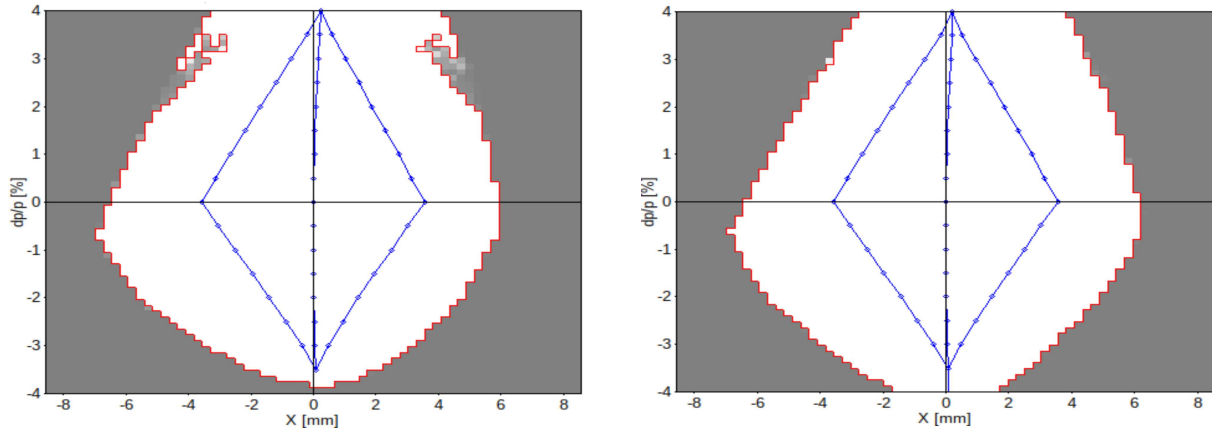


Figura 5.6: Apertura de momento del modelo, usando una optimización no lineal hasta $A^{(1)}$ (izquierda) y $A^{(2)}$ (derecha), con 33 particiones en el intervalo $\delta = \pm 4\%$. La figura fue obtenida mediante simulación de partícula única en el programa OPA.

Cuadro 5.1: Elementos de la celda del modelo de la Fig. 4.3 bajo estudio. L es la longitud del elemento y K es su intensidad. Los valores de los octupolos son las intensidades integradas, cuyas unidades son m^{-3} .

Elemento	Tipo	L (m)	K (m^{-3})
SD2	Sextupolo	0.100000	-96.7516
FD2	Sextupolo	0.094502	99.1462
FD3	Sextupolo	0.001710	-26.0529
SD3	Sextupolo	0.010176	13.4109
S1	Sextupolo	0.100000	-144.2313
S2	Sextupolo	0.100000	-31.2021
SE1	Sextupolo	0.100000	-35.3559
SE2	Sextupolo	0.100000	17.4226
S1S	Sextupolo	0.002964	86.5796
S2S	Sextupolo	0.172130	40.1972
S1SH	Sextupolo	0.001379	42.1650
SF2	Sextupolo	0.220440	113.9431
S3	Sextupolo	0.100000	-100.1985
S4	Sextupolo	0.100000	-153.6085
FD22	Sextupolo	0.094502	-23.5760
FD32	Sextupolo	0.001775	23.3468
SD32	Sextupolo	0.010176	87.6073
S1SH2	Sextupolo	0.001379	-10.9265
S2S2	Sextupolo	0.172130	80.7719
S1S2	Sextupolo	0.002964	-67.8258
SD1	Sextupolo	0.100000	-15.3932
SF1	Sextupolo	0.220440	102.6627
O1	Octupolo	—	-12.2012
O2	Octupolo	—	11.1181
O3	Octupolo	—	27.3077
O11	Octupolo	—	-17.8795
O21	Octupolo	—	6.6910
O31	Octupolo	—	47.1552

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

El objetivo de este trabajo fue analizar los efectos de incorporar el segundo término perturbativo de la desviación de momento en el formalismo de cuasi-invariantes polinomiales. Los resultados obtenidos muestran que esta extensión mejora la descripción de la dinámica transversal fuera del momento de referencia y permite representar con mayor robustez la estructura del espacio fase en comparación con la aproximación de primer orden.

En la Sección 5.1.2 se presentó una comparación entre los espacios fase calculados en MATLAB y las simulaciones de partículas. Dicha comparación mostró que la inclusión del término $A^{(2)}$ reproduce de manera más adecuada la dinámica del sistema bajo desviaciones de momento. En particular, dentro del modelo analizado, la incorporación de este segundo término conduce a una mayor amplitud en el espacio de momentos y, por consiguiente, a una descripción más robusta de la dinámica en presencia de perturbaciones de energía.

Un resultado importante del presente estudio fue identificar que la construcción de superficies cuasi-invariantes no conduce, en general, a un eigenvalor único asociado de manera natural al comportamiento físico deseado. Los cálculos numéricos producen múltiples soluciones que satisfacen simultáneamente la condición de periodicidad, sin que emerja un criterio físico unívoco para privilegiar una de ellas. Aunque se identificaron eigenvectores capaces de describir con precisión los resultados de simulación, no se encontró un patrón regular en los eigenvalores asociados que permitiera anticipar cuál de ellos sería el más adecuado para realizar comparaciones con tracking. Por esta razón, la selección del eigenvalor

se llevó a cabo mediante un criterio numérico: se eligió aquel cuyo eigenvector asociado, al ser empleado para describir la superficie no lineal, minimizaba la función objetivo definida en la Sección 4.1.3.

Con el fin de evaluar el alcance de dicha función objetivo, se realizó un análisis de magnitudes en el que se exploraron aleatoriamente distintos valores de los parámetros no lineales sometidos a optimización. Para cada conjunto de parámetros se calculó el valor de la función y, mediante OPA, se cuantificó el desempeño del sistema a través de la apertura de momento. La hipótesis de trabajo establecía que una disminución en el valor de la función objetivo debía correlacionarse con una mejora en la apertura de momento, manifestada como un incremento en su amplitud.

Los resultados muestran que esta relación se cumple de manera global, pero no de forma estricta ni monótona. Como se observa en la Fig. 6.1, la reducción de f_{obj} conduce inicialmente a configuraciones con mejor apertura de momento; sin embargo, esta tendencia no se mantiene cuando la minimización de la función se lleva al extremo. En particular, el valor mínimo de f_{obj} dentro del conjunto analizado, mostrado en el panel inferior derecho, no corresponde a la máxima estabilidad, sino a una configuración con apertura dinámica más reducida que otras asociadas a valores mayores de la función.

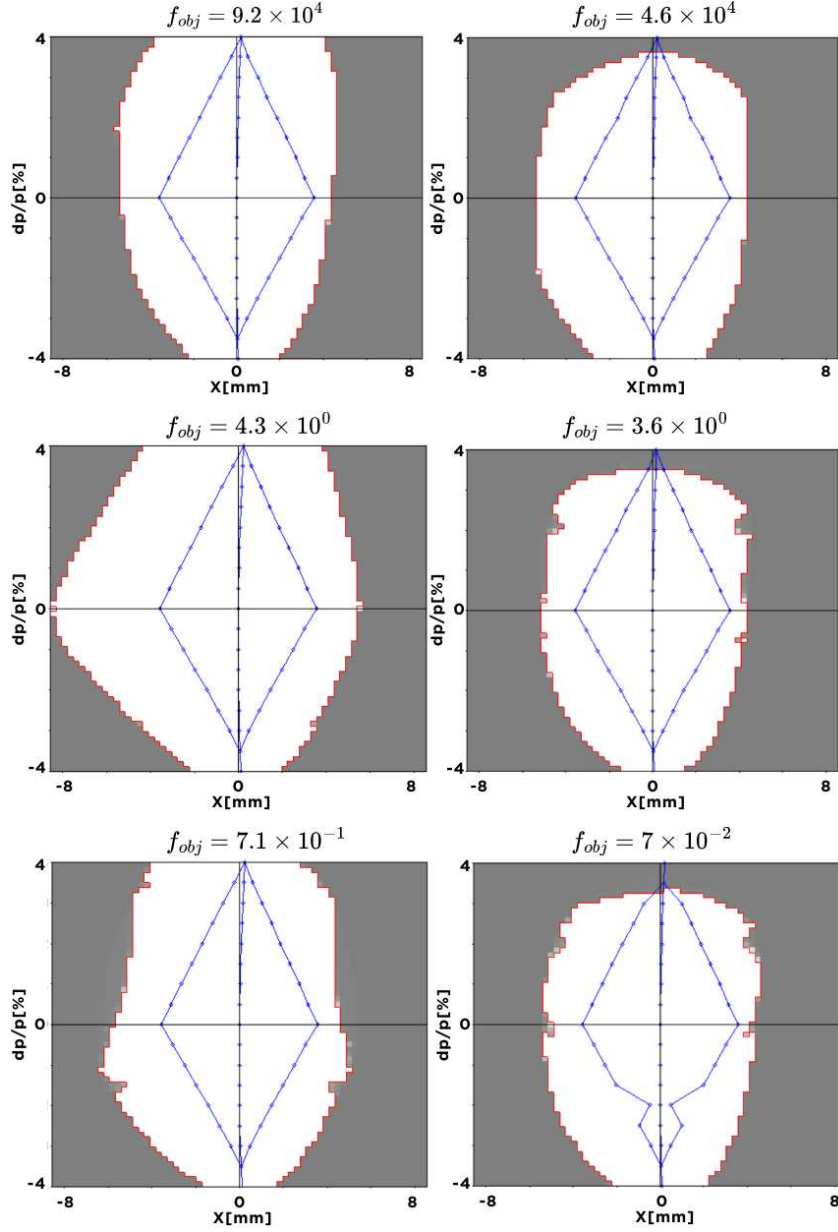


Figura 6.1: Muestreo aleatorio de diferentes aperturas de momento en la optimización. Cada panel muestra un valor distinto de la función objetivo (f_{obj}), junto con la apertura de momento del conjunto de sextupolos y octupolos asociado. Nótese que el valor mínimo seleccionado de f_{obj} (figura inferior derecha) no corresponde a la máxima estabilidad, en comparación con valores mayores de la función.

La Fig. 6.1 muestra que la correlación entre f_{obj} y la apertura de momento debe interpretarse como una tendencia global y no como un criterio de ordenamiento fino entre configuraciones cercanas. Los paneles intermedios exhiben soluciones con regiones estables más amplias que la correspondiente al mínimo absoluto de la función. Esto indica que la

función objetivo sí es útil para conducir la búsqueda hacia una región favorable del espacio de parámetros, pero no basta por sí sola para identificar la configuración óptima desde el punto de vista dinámico.

En este contexto, una apertura dinámica degradada significa que, a pesar de presentar un valor pequeño de la función objetivo, la configuración correspondiente exhibe una región estable más estrecha en el espacio de momentos que otras soluciones asociadas a valores algo mayores de la función. Desde el punto de vista físico, este comportamiento sugiere que la cercanía al régimen lineal, medida a través de la función objetivo actual, no basta para capturar todos los mecanismos relevantes de estabilidad en presencia de desviaciones de momento. Desde el punto de vista metodológico, la figura pone en evidencia que una optimización basada exclusivamente en la minimización de la f_{obj} como está definida, puede conducir a soluciones que son matemáticamente atractivas, pero dinámicamente subóptimas.

Una explicación plausible de este comportamiento radica en la propia estructura de los cuasi-invariantes. En el sistema considerado, éstos se asocian a un conjunto de polinomios cuya forma depende de los eigenvalores seleccionados. Dado que varios de estos eigenvalores pueden encontrarse próximos al valor deseado —cero, en este caso—, la función objetivo no discrimina adecuadamente entre soluciones físicamente distintas. En otras palabras, pueden existir múltiples configuraciones que produzcan valores similares, e incluso pequeños, de la función objetivo, pero que difieran significativamente en su estabilidad dinámica. La dispersión observada en la Fig. 6.1 es consistente con esta ambigüedad asociada a la selección de eigenvalores.

A partir de estos resultados, puede concluirse que la inclusión del término $A^{(2)}$ representa una mejora real del formalismo de cuasi-invariantes polinomiales, ya que fortalece la descripción de la dinámica transversal bajo desviaciones de momento y amplía la capacidad del método para reproducir la estructura del espacio fase. Sin embargo, los resultados también muestran que la consolidación de este enfoque requiere resolver dos problemas fundamentales: la formulación de un criterio sistemático para la selección de eigenvalores y el diseño de una función objetivo más robusta, capaz de distinguir con mayor fidelidad entre soluciones matemáticamente cercanas y configuraciones dinámicamente favorables.

En este sentido, la presente tesis establece dos aportaciones principales. En primer lugar, muestra que la inclusión del segundo término perturbativo en la desviación de momento mejora la caracterización de la dinámica transversal y de las regiones de estabilidad en el modelo estudiado. En segundo lugar, identifica con claridad una limitación central del enfoque actual, relacionada con la ambigüedad en la selección de eigenvalores y con el alcance limitado de la función objetivo utilizada en la optimización.

Finalmente, los resultados obtenidos permiten afirmar que el enfoque basado en cuasi-invariantes polinomiales constituye una herramienta prometedora para el análisis de la dinámica no lineal en sincrotrones de baja emitancia. Al mismo tiempo, esta tesis delimita con precisión los aspectos que deberán desarrollarse para fortalecer su capacidad predictiva y su utilidad en procesos de optimización más generales. En particular, el siguiente paso natural consiste en enriquecer la función objetivo con criterios adicionales de estabilidad y en formular un método sistemático que permita identificar aquellos eigenvalores que den lugar a superficies cuasi-invariantes con comportamiento más favorable frente a perturbaciones en la desviación de momento.

Bibliografía

- [1] G. Wang, T. Shaftan, V. Smaluk, N. Mezentsev, S. Sharma, O. Chubar, Y. Hidaka, and C. Spataro, “Complex bend: Strong-focusing magnet for low-emittance synchrotrons,” *Physical Review Accelerators and Beams*, vol. 21, no. 10, p. 100703, 2018.
- [2] A. Streun, “Opa: Lattice design code,” 2012.
- [3] E. A. Sanchez, A. Flores, J. Hernandez-Cobos, M. Moreno, and A. Antillón, “A novel approach using nonlinear surfaces for dynamic aperture optimization in mba synchrotron light sources,” *Scientific Reports*, vol. 13, Dec. 2023.
- [4] V. Smaluk, T. Shaftan, and D. Hidas, “Ultimate brightness of a medium-energy synchrotron light source at operational beam intensity,” *Journal of Synchrotron Radiation*, vol. 32, no. 3, pp. 595–604, 2025.
- [5] S.-Y. Lee, *Accelerator Physics*. World Scientific, second ed., 2019.
- [6] H. Winick, G. Brown, K. Halbach, and J. Harris, “Wiggler and undulator magnets,” *Physics Today*, vol. 34, p. 50–63, May 1981.
- [7] LNLS-CNPEM, “Synchrotron light and its benefits.” <https://www.lnls.cnpem.br/sirius-en/synchrotron-light-and-its-benefits/>, n.d. Accessed: 17 de septiembre de 2025.
- [8] Sincrotrón ALBA, “El sincrotrón alba cumple 10 años al servicio de la sociedad y de sus retos,” *Noticias*, mar 2020.
- [9] D. Einfeld, M. Plesko, and J. Schaper, “First multi-bend achromat lattice consideration,” *Journal of Synchrotron Radiation*, vol. 21, pp. 856–861, Sep 2014.

-
- [10] S. Takano, K. Fukami, T. Inagaki, T. Iwashita, C. Kondo, M. Masaki, and et al., “Commissioning of a compact multibend achromat lattice: A new 3 gev synchrotron radiation facility,” *Phys. Rev. Accel. Beams*, vol. 28, p. 020701, feb 2025.
- [11] T. Ishikawa, “Spring-8 upgrade,” *Synchrotron Radiation News*, vol. 38, no. 1, pp. 14–17, 2025.
- [12] T. Watanabe and H. Tanaka, “Spring-8 upgrade project: Accelerator redesigned and restarted,” *Synchrotron Radiation News*, vol. 36, no. 1, pp. 3–6, 2023.
- [13] K. Soutome, T. Hiraiwa, and H. Tanaka, “Update of lattice design of the spring-8-ii storage ring towards 50 pmrad,” *Proceedings of the 13th International Particle Accelerator Conference*, 2022.
- [14] K. Soutome, K. Kaneki, Y. Shimosaki, M. Takao, and H. Tanaka, “Non-linear optimization of storage ring lattice for the SPring-8 upgrade,” in *Proceedings of the 7th International Particle Accelerator Conference*, IPAC’16, (Busan, Korea), pp. 3374–3377, JACoW Publishing, may 2016.
- [15] S. Krinsky, G. K. Green, and R. Chasman, “NATIONAL SYNCHROTRON LIGHT SOURCE,” Report BNL-26331, Brookhaven National Laboratory (BNL), Upton, NY, 1979.
- [16] R. P. Crease, “The national synchrotron light source, part ii: The bakeout,” *Physics in Perspective*, vol. 11, no. 1, pp. 15–45, 2009.
- [17] S. Krinsky, P. Blewett, M. Musardo, and F. Tazzioli, “NATIONAL SYNCHROTRON LIGHT SOURCE II: Machine Design and Performance,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 637, no. 1, pp. S5–S8, 2011.
- [18] P. N’gotta, G. Le Bec, and J. Chavanne, “Hybrid high gradient permanent magnet quadrupole,” *Physical Review Accelerators and Beams*, vol. 19, no. 12, p. 122401, 2016.

-
- [19] M. Song and T. Shaftan, “Design study of a low emittance complex bend achromat lattice,” *Physical Review Accelerators and Beams*, vol. 27, p. 061601, jun 2024.
- [20] V. Smaluk, T. Shaftan, M. Song, Y. Li, Y. Hidaka, A. Khan, G. Bassi, D. Hidas, G. Wang, X. Yang, S. Sharma, P. N’Gotta, B. Kosciuk, J. Choi, J. Rose, T. Tanabe, and R. Todd, “Novel magnet lattice for the high-brightness upgrade of NSLS-II,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 3010, no. 1, p. 012036, 2025.
- [21] C. G. Schroer, H.-C. Wille, O. H. Seeck, K. Bagschik, H. Schulte-Schrepping, M. Tischer, H. Graafsma, W. Laasch, K. Baev, S. Klumpp, R. Bartolini, H. Reichert, W. Leemans, and E. Weckert, “The synchrotron radiation source PETRA III and its future ultra-low-emittance upgrade PETRA IV,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 137, p. 1360, dec 2022.
- [22] I. Agapov, S. Antipov, R. Bartolini, R. Brinkmann, Y.-C. Chae, E. C. Cortes-Garcia, D. Einfeld, T. Hellert, M. Huening, M. A. Jebramcik, J. Keil, C. Li, L. Malina, and R. Wanzenberg, “Beam dynamics performance of the proposed PETRA IV storage ring (version 1),” *arXiv*, 2024.
- [23] J. Lee, G. Jang, J. Ko, and S. Shin, “Storage rings in korea as synchrotron radiation source,” *Journal of the Korean Physical Society*, vol. 80, no. 8, pp. 859–870, 2022.
- [24] J. Kim, G. Jang, J. Lee, J. Seok, and J. Kim, “The korea-4gsr storage ring lattice design.”
- [25] T. A. Collaboration, “Measurement of the differential Drell-Yan cross-section in the dimuon channel with the ATLAS detector.” Talk at the XXXII International Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Subjects (DIS 2024), apr 2024. CERN-DP-2023-001.
- [26] T. Liu, L. Wang, and Q. Luo, “Study of chromaticity correction methods for a hybrid multi-bend-achromat lattice,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2709, p. 012001, IOP Publishing, 2024.

-
- [27] E. D. A. and S. M. J., *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators*. Wiley-VCH, second ed., 1993.
 - [28] E. A. Sánchez, A. Flores, J. Hernández-Cobos, M. Moreno, and A. Antillón, “Onset of resonances by roots overlapping using quasi-invariants in nonlinear accelerator dynamics,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 110, no. 2, pp. 1583–1596, 2022.
 - [29] J. Bengtsson, “The sextupole scheme for the swiss light source (sls): an analytic approach,” *SLS-Note*, vol. 9, p. 97, 1997.
 - [30] M. Fjellstrom, *Particle tracking in circular accelerators using the exact Hamiltonian in sixtrack*. PhD thesis, Lulea U., 2013.
 - [31] MSU-Beam-Dynamics, *2. Linear Transverse Motion: Hamiltonian Approach and Hill’s Equation*. Michigan State University - Accelerator Physics eNotes. Accessed: November 27, 2025.
 - [32] T. Zolkin, “Sector magnets or transverse electromagnetic fields in cylindrical coordinates,” *Physical Review Accelerators and Beams*, vol. 20, no. 4, p. 043501, 2017.
 - [33] M. Borland, Y. Cai, Y. Nosochkov, M. H. Wang, and R. O. Hettel, “Dynamic aperture and tolerances for pep-x ultimate storage ring design,” SLAC National Accelerator Laboratory (SLAC), 12 2011.
 - [34] W. Gao, L. Wang, and W. Li, “Simultaneous optimization of beam emittance and dynamic aperture for electron storage ring using genetic algorithm,” *Physical Review Special Topics—Accelerators and Beams*, vol. 14, no. 9, p. 094001, 2011.
 - [35] A. Antillón and B. Hoeneisen, “Emittance of a nonlinear machine: the two-dimensional problem,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 305, no. 2, pp. 239–246, 1991.
 - [36] A. Antillón, E. Forest, B. Hoeneisen, and F. Leyvraz, “Transport matrices for nonlinear lattice functions,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section*

-
- A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 305, no. 2, pp. 247–256, 1991.
- [37] A. Antillón, “Emittance for a nonlinear machine: the one-dimensional problem,” *Part. Accel.*, vol. 23, pp. 187–195, 1988.
- [38] E. A. Sánchez, A. Flores, J. Hernández-Cobos, M. Moreno, and A. Antillón, “Increasing beam stability zone in synchrotron light sources using polynomial quasi-invariants,” *Scientific Reports*, vol. 13, no. 1, p. 1335, 2023.
- [39] E. A. Sánchez, A. Flores, J. Hernández-Cobos, M. Moreno, and A. Antillón, “Balancing chromatic effects in fourth-generation synchrotrons using the quasi-invariants of motion chromatic index,” *Results in Physics*, p. 108470, 2025.
- [40] P. Raimondi, C. Benabderrahmane, P. Berkvens, J. C. Biasci, P. Borowiec, J.-F. Bouteille, T. Brochard, N. B. Brookes, N. Carmignani, L. R. Carver, *et al.*, “The extremely brilliant source storage ring of the european synchrotron radiation facility,” *Communications physics*, vol. 6, no. 1, p. 82, 2023.
- [41] A. Streun, T. Garvey, L. Rivkin, V. Schlott, T. Schmidt, P. Willmott, and A. Wrulich, “Sls-2—the upgrade of the swiss light source,” *Synchrotron Radiation*, vol. 25, no. 3, pp. 631–641, 2018.
- [42] wxMaxima development team, “wxMaxima.” <https://wxmaxima.sourceforge.net/>, 2022. Version 22.03.0.

Apéndice A

Derivación del Hamiltoniano

El lagrangiano para una partícula de masa m_0 y carga q que se mueve en un campo electromagnético con velocidad $\mathbf{v}$ es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2}{c^2}} - q\phi(\mathbf{x}, t) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{A}$ es el potencial vectorial magnético y ϕ el potencial escalar. A partir de ellos, los campos eléctrico y magnético, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, se obtienen como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Consideremos un sistema coordenado cartesiano (x, y, z) donde la partícula se mueve principalmente en la dirección z . El hamiltoniano H se obtiene del lagrangiano mediante

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = \sum_i \dot{x}_i P_i - \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (\text{A.3})$$

en donde P_i es el momento canónico y p_i es el momento mecánico de la partícula

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + qA_i$$

$$= p_i + qA_i. \quad (\text{A.5})$$

usando Ec. (A.5) y (A.1) en la Ec. (A.3) resulta

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - L \quad (\text{A.6})$$

$$= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + q\phi(\mathbf{x}, t)$$

$$= \gamma mv^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\phi(\mathbf{x}, t)$$

$$= (\gamma\beta^2 + 1/\gamma) mc^2 + q\phi(\mathbf{x}, t)$$

$$= \gamma mc^2 + q\phi(\mathbf{x}, t)$$

$$= E + q\phi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.7})$$

De la expresión relativista $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$ y usando la Ec. (A.7) podemos encontrar la siguiente expresión para el hamiltoniano

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = c\sqrt{(\mathbf{P} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + m^2c^2} + q\phi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.8})$$

Más adelante utilizaremos una serie de transformaciones canónicas para cambiar las coordenadas y la variable independiente. Una función generadora es útil para crear las transformaciones canónicas desde las coordenadas antiguas (q, p) a un nuevo conjunto (Q, P) .

Hay cuatro tipos de funciones generadoras:

$$\begin{aligned} F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad \mathbf{p} &= \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}} \\ F_2 = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \quad \mathbf{p} &= \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}} \\ F_3 = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) \quad \mathbf{q} &= -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{Q}} \\ F_4 = F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) \quad \mathbf{q} &= -\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{P}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

El nuevo hamiltoniano $K(Q, P, t)$ se calcula mediante:

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

El primer paso necesario consiste en cambiar del sistema de coordenadas cartesiano $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ al sistema de Frenet–Serret adaptado a la órbita de referencia. En este sistema la posición se escribe como

$$\mathbf{r}(s, x, y) = \mathbf{r}_0(s) + x\hat{x}(s) + y\hat{y}(s), \quad (\text{A.11})$$

mediante la función generadora de tipo 3:

$$F_3(\mathbf{P}, s, x, y, t) = -\mathbf{P} \cdot [\mathbf{r}_0(s) + x\hat{x}(s) + y\hat{y}(s)]. \quad (\text{A.12})$$

Las relaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{r}_0(s) + x\hat{x}(s) + y\hat{y}(s), \\ \mathcal{P}_s &= -\frac{\partial F_3}{\partial s} = \mathbf{P} \cdot \hat{s} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right), \\ \mathcal{P}_x &= -\frac{\partial F_3}{\partial x} = \mathbf{P} \cdot \hat{x}(s), \\ \mathcal{P}_y &= -\frac{\partial F_3}{\partial y} = \mathbf{P} \cdot \hat{y}(s). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

El hamiltoniano en el sistema coordenado Frenet-Serret

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + (\mathcal{P}_x - qA_x)^2 + (\mathcal{P}_y - qA_y)^2 + \left(\frac{\mathcal{P}_s}{1 + x/\rho} - qA_s\right)^2} + q\phi \quad (\text{A.14})$$

El potencial vector ahora también toma sus componentes del sistema de coordenadas Frenet-Serret como $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{x}$, $A_y = \mathbf{A} \cdot \hat{y}$ y $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{s}$.

A continuación, necesitamos cambiar la coordenada independiente del tiempo a 's', la posición en la órbita de referencia. El Hamiltoniano anterior es función de $(x, \mathcal{P}_x, y, \mathcal{P}_y, s, \mathcal{P}_s, t)$ y las ecuaciones Hamiltonianas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\dot{\mathcal{P}}_x & \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_x} &= \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -\dot{\mathcal{P}}_y & \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_y} &= \dot{y} \\ \frac{\partial H}{\partial s} &= -\dot{\mathcal{P}}_s & \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_s} &= \dot{s} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Para cambiar la coordenada independiente a s , primero observamos la derivada:

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_x} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

Usando la regla de la cadena diferencial de la ecuación implícita $H(x, \mathcal{P}_x, y, \mathcal{P}_y, s, \mathcal{P}_s, t) - f(t) = 0$, tenemos:

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial \mathcal{P}_x} \quad (\text{A.17})$$

Usando un truco similar, encontraremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_x &\equiv \frac{d\mathcal{P}_x}{ds} = \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial x} \\ y' &\equiv \frac{dy}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial \mathcal{P}_y} \\ \mathcal{P}'_y &\equiv \frac{d\mathcal{P}_y}{ds} = \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

También encontramos fácilmente las otras dos relaciones:

$$\begin{aligned} t' &\equiv \frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial H} \\ H' &\equiv \frac{dH}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por lo tanto, podemos elegir el nuevo hamiltoniano $K = -\mathcal{P}_s(x, \mathcal{P}_x, y, \mathcal{P}_y, H, t, s)$, que satisfará la relación hamiltoniana. Sin embargo, es incómodo establecer H como 'coordenada' y t como 'momento general'. Para solucionar esto, podemos establecer el par conjugado como $(t, -H)$. Por lo tanto, el nuevo hamiltoniano queda:

$$\begin{aligned} K(x, \mathcal{P}_x, y, \mathcal{P}_y, t, -H, s) &= -\mathcal{P}_s \\ &= - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \sqrt{\left(\frac{H - q\phi}{c} \right)^2 - (mc)^2 - (\mathcal{P}_x - qA_x)^2 - (\mathcal{P}_y - qA_y)^2} \\ &\quad - qA_s \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Dado que el nuevo hamiltoniano tiene una forma muy complicada, usaremos las siguientes simplificaciones.

1. Hemos visto que para campos magnéticos 2-D, solo se necesita el potencial vector longitudinal. Podemos establecer ambos potenciales transversales a cero: $A_x = A_y = 0$.

2. Supongamos que el potencial ϕ no depende del tiempo, entonces podemos hacer la transformación canónica $(t, -H)$ a $(t, -h)$ con $h = H - q\phi$. h es justo la energía total de la partícula y los dos primeros términos dan el momento de la partícula $p^2 = (h/c)^2 - (mc)^2$.
3. Definamos un momento de referencia de la partícula p_0 , y cada partícula tendrá una desviación de la referencia, $p = p_0(1 + \delta)$. δ se llama desviación fraccional del momento. Escalamos el hamiltoniano K por un factor de p_0 y consideramos que no existe un potencial ϕ , así obtenemos el nuevo $\tilde{K}$.

$$\begin{aligned} \frac{K}{p_0} &\equiv \tilde{K} \left(x, \tilde{p}_x = \frac{\mathcal{P}_x}{p_0}, y, \tilde{p}_y = \frac{\mathcal{P}_y}{p_0}, t, -\tilde{h} = \frac{-H}{p_0} \right) \\ &= - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \sqrt{\left(\frac{\tilde{h}}{c} \right)^2 - \left(\frac{mc^2}{p_0} \right)^2 - \tilde{p}_x^2 - \tilde{p}_y^2} - q \frac{A_s}{p_0} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Cambiamos $\tilde{h} = E/p_0$, en donde E es la energía total de la partícula

$$\left(\frac{\tilde{h}}{c} \right)^2 - \left(\frac{mc^2}{p_0} \right)^2 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{p_0^2 c^2} = \frac{p^2 c^2}{p_0^2 c^2} = (1 + \delta)^2 \quad (\text{A.22})$$

en donde la desviación relativa de momento es $\delta = \frac{p - p_0}{p_0}$ and $1 + \delta = \frac{p}{p_0}$. El hamiltoniano es entonces

$$\tilde{K}(x, \tilde{p}_x, y, \tilde{p}_y, t, E, s) = - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \sqrt{(1 + \delta)^2 - \tilde{p}_x^2 - \tilde{p}_y^2} - q \frac{A_s}{p_0} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \quad (\text{A.23})$$

El par de variables canónicas $(-t, E)$ no es muy conveniente de usar, ya que t es una cantidad que aumenta constantemente. Por lo tanto, se introduce la función generadora para una transformación canónica desde las variables antiguas $(x, \tilde{p}_x, y, \tilde{p}_y, -t, E)$ hacia las variables nuevas $(x, p_x, y, p_y, \sigma = s - \beta_0 c t, p_\sigma = \frac{E - E_0}{\beta_0 p_0 c})$ como

$$F_2 = x p_x + y p_y + (s - \beta_0 c t) \left(p_\sigma + \frac{E_0}{\beta_0 p_0 c} \right) \quad (\text{A.24})$$

Las nuevas coordenadas de posición y el nuevo hamiltoniano se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\partial F_2}{\partial p_i} \\ K &= \tilde{K} + \frac{\partial F_2}{\partial s} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Las variables del momento transversal se dejan sin cambios pero la relación entre la antigua y la nueva variable del momento longitudinal p_σ se convierte en

$$\frac{E}{p_0} = \beta_0 c \left(\frac{E_0}{\beta_0 p_0 c} + p_\sigma \right) \quad (\text{A.26})$$

El nuevo hamiltoniano renombrando $K \rightarrow H$ es

$$H(x, p_x, y, p_y, \sigma, p_\sigma; s) = p_\sigma - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \times \left(\frac{q}{p_0} A_s(s) + \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \right). \quad (\text{A.27})$$

En el contexto de las condiciones normales en las que operan las fuentes de luz sincrotrón, la desviación de momento es muy pequeño, de modo que para cualquier partícula se cumple $\delta \ll 1$. Asimismo, en la aproximación paraxial se asume que el momento longitudinal p_σ es cercano al de referencia y que $p_x, p_y \ll 1$. Con estas consideraciones, se puede expandir en serie de Taylor el término bajo la raíz cuadrada, obteniendo

$$\sqrt{D} \approx (1 + \delta) - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + \mathcal{O}(4) \quad (\text{A.28})$$

lo que permite simplificar el hamiltoniano conservando únicamente los términos necesarios para realizar la descripción teórica.

Sustituyendo los terminos de mayor contribución de la Ec. (A.28) en la Ec. (A.27), encontramos el hamiltoniano aproximado $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \times \left(1 + \delta - \underbrace{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}}_{\text{Término cinético}} + \underbrace{\frac{q}{p_0} A_s(s)}_{\text{Potencial}} \right) + \mathcal{O}(4) \quad (\text{A.29})$$

El potencial vectorial $A_s(s)$ se puede expresar como serie multipolar:

$$\frac{q}{p_0} A_s(s) = -\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [i a_n(s) + b_n(s)] (x + iy)^n \quad (\text{A.30})$$

La elección de eliminar los coeficientes $a_n(s)$ (o equivalentemente, considerar $a_n(s) = 0$) se debe a que se busca que el campo magnético sea normal (o dipolar, cuadrupolar, etc.,

según el término n), sin componentes skew [32].

$$\begin{aligned} \frac{q}{p_0} A_s(s) = & -b_1(s)x - \frac{b_2(s)}{2}(x^2 - y^2) \\ & - \frac{b_3(s)}{3}(x^3 - 3xy^2) - \frac{b_4(s)}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

donde los coeficientes $b_n(s)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$, corresponden a:

- $b_1(s)$: Campo dipolar (dipolos)
- $b_2(s)$: Campo cuadrupolar (enfoque)
- $b_3(s)$: Campo sextupolar (corrección cromática)
- $b_4(s)$: Campo octupolar (no linealidades superiores)

Como última consideración, la curvatura del sistema de referencia local se elige de tal manera que

$$b_1(s) \equiv \frac{1}{\rho_b(s)} \quad (\text{A.32})$$

Al sustituir (A.32) y el término potencial de la Ec. (A.31) en la Ec. (A.29)

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - b_1(s)x\delta + \frac{b_1^2(s)}{2}x^2 + \frac{b_2(s)}{2}(x^2 - y^2) + \frac{b_3(s)}{3}(x^3 - 3xy^2) + \mathcal{O}(4) \quad (\text{A.33})$$

Solo queda expandir $\delta \ll 1$, que del término cinético:

$$\frac{1}{1 + \delta} = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots \quad (\text{A.34})$$

Resultando en el Hamiltoniano final:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p_x, y, p_y, s) = & \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) (1 - \delta + \delta^2 + \dots) \\ & - b_1(s)x\delta + \frac{b_1^2(s)}{2}x^2 + \frac{b_2(s)}{2}(x^2 - y^2) \\ & + \frac{b_3(s)}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{b_4(s)}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

donde x, y son las coordenadas transversales, p_x, p_y son los momentos conjugados, s es la variable longitudinal, δ es la dispersión en momento y $b_1(s), b_2(s), \dots$ son las intensidades de dipolos, cuadrupolos, sextupolos y octupolos.

Apéndice B

Ecuaciones Diferenciales para funciones A^2

68

$$\frac{d}{ds}A_{1100}^{(2)} + 2A_{2000}^{(2)} - 2A_{2000}^{(1)} + 2A_{2000}^{(0)} + 2b_1A_{1200}^{(1)} - 2b_2A_{0200}^{(2)} - 2b_1^2A_{0200}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0200}^{(2)} + A_{1100}^{(2)} - A_{1100}^{(1)} + A_{1100}^{(0)} + 3b_1A_{0300}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1000}^{(2)} + b_1A_{1100}^{(1)} - b_2A_{0100}^{(2)} - b_1^2A_{0100}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2000}^{(2)} + b_1A_{2100}^{(1)} - b_2A_{1100}^{(2)} - b_1^2A_{1100}^{(2)} - b_3A_{0100}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d}{ds}A_{3000}^{(2)} + b_1A_{3100}^{(1)} - b_2A_{2100}^{(2)} - b_1^2A_{2100}^{(2)} - b_3A_{1100}^{(2)} - b_4A_{0100}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d}{ds}A_{4000}^{(2)} + b_1A_{4100}^{(1)} - b_2A_{3100}^{(2)} - b_1^2A_{3100}^{(2)} - b_3A_{2100}^{(2)} - b_4A_{1100}^{(2)} - b_5A_{0100}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d}{ds}A_{5000}^{(2)} + b_1A_{5100}^{(1)} - b_2A_{4100}^{(2)} - b_1^2A_{4100}^{(2)} - b_3A_{3100}^{(2)} - b_4A_{2100}^{(2)} - b_5A_{1100}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1020}^{(2)} + b_1A_{1120}^{(1)} + b_3A_{1100}^{(2)} + b_2A_{1011}^{(2)} - b_2A_{0120}^{(2)} - b_1^2A_{0120}^{(2)} + 3b_4A_{0100}^{(2)} + 2b_3A_{0011}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{2020}^{(2)} + b_1A_{2120}^{(1)} + b_3A_{2100}^{(2)} + b_2A_{2011}^{(2)} - b_2A_{1120}^{(2)} - b_1^2A_{1120}^{(2)} + 3b_4A_{1100}^{(2)} + 2b_3A_{1011}^{(2)} - b_3A_{0120}^{(2)} + 6b_5A_{0100}^{(2)} \\ + 3b_4A_{0011}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{3020}^{(2)} + b_1A_{3120}^{(1)} + b_3A_{3100}^{(2)} + b_2A_{3011}^{(2)} - b_2A_{2120}^{(2)} - b_1^2A_{2120}^{(2)} + 3b_4A_{2100}^{(2)} + 2b_3A_{2011}^{(2)} - b_3A_{1120}^{(2)} + 6b_5A_{1100}^{(2)} + 3b_4A_{1011}^{(2)} \\ - b_4A_{0120}^{(2)} + 4b_5A_{0011}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1040}^{(2)} + b_1A_{1140}^{(1)} + b_3A_{1120}^{(2)} - b_5A_{1100}^{(2)} + b_2A_{1031}^{(2)} - b_4A_{1011}^{(2)} - b_2A_{0140}^{(2)} - b_1^2A_{0140}^{(2)} + 3b_4A_{0120}^{(2)} + 2b_3A_{0031}^{(2)} - 4b_5A_{0011}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2100}^{(2)} + 3A_{3000}^{(2)} - 3A_{3000}^{(1)} + 3A_{3000}^{(0)} + 2b_1A_{2200}^{(1)} - 2b_2A_{1200}^{(2)} - 2b_1^2A_{1200}^{(2)} - 2b_3A_{0200}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d}{ds}A_{3100}^{(2)} + 4A_{4000}^{(2)} - 4A_{4000}^{(1)} + 4A_{4000}^{(0)} + 2b_1A_{3200}^{(1)} - 2b_2A_{2200}^{(2)} - 2b_1^2A_{2200}^{(2)} - 2b_3A_{1200}^{(2)} - 2b_4A_{0200}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{d}{ds}A_{4100}^{(2)} + 5A_{5000}^{(2)} - 5A_{5000}^{(1)} + 5A_{5000}^{(0)} + 2b_1A_{4200}^{(1)} - 2b_2A_{3200}^{(2)} - 2b_1^2A_{3200}^{(2)} - 2b_3A_{2200}^{(2)} - 2b_4A_{1200}^{(2)} - 2b_5A_{0200}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0120}^{(2)} + A_{1020}^{(2)} - A_{1020}^{(1)} + A_{1020}^{(0)} + 2b_1A_{0220}^{(1)} + 2b_3A_{0200}^{(2)} + b_2A_{0111}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1011}^{(2)} + b_1A_{1111}^{(1)} + 2A_{1020}^{(2)} - 2A_{1020}^{(1)} + 2A_{1020}^{(0)} + 2b_2A_{1002}^{(2)} - b_2A_{0111}^{(2)} - b_1^2A_{0111}^{(2)} + 4b_3A_{0002}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1120}^{(2)} + 2A_{2020}^{(2)} - 2A_{2020}^{(1)} + 2A_{2020}^{(0)} + 2b_1A_{1220}^{(1)} + 2b_3A_{1200}^{(2)} + b_2A_{1111}^{(2)} - 2b_2A_{0220}^{(2)} - 2b_1^2A_{0220}^{(2)} + 6b_4A_{0200}^{(2)} + 2b_3A_{0111}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2011}^{(2)} + b_1A_{2111}^{(1)} + 2A_{2020}^{(2)} - 2A_{2020}^{(1)} + 2A_{2020}^{(0)} + 2b_2A_{2002}^{(2)} - b_2A_{1111}^{(2)} - b_1^2A_{1111}^{(2)} + 4b_3A_{1002}^{(2)} - b_3A_{0111}^{(2)} + 6b_4A_{0002}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{2120}^{(2)} + 3A_{3020}^{(2)} - 3A_{3020}^{(1)} + 3A_{3020}^{(0)} + 2b_1 A_{2220}^{(1)} + 2b_3 A_{2200}^{(2)} + b_2 A_{2111}^{(2)} - 2b_2 A_{1220}^{(2)} - 2b_1^2 A_{1220}^{(2)} + 6b_4 A_{1200}^{(2)} + 2b_3 A_{1111}^{(2)} \\ - 2b_3 A_{0220}^{(2)} + 12b_5 A_{0200}^{(2)} + 3b_4 A_{0111}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{3011}^{(2)} + b_1 A_{3111}^{(1)} + 2A_{3020}^{(2)} - 2A_{3020}^{(1)} + 2A_{3020}^{(0)} + 2b_2 A_{3002}^{(2)} - b_2 A_{2111}^{(2)} - b_1^2 A_{2111}^{(2)} + 4b_3 A_{2002}^{(2)} - b_3 A_{1111}^{(2)} + 6b_4 A_{1002}^{(2)} \\ - b_4 A_{0111}^{(2)} + 8b_5 A_{0002}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0140}^{(2)} + A_{1040}^{(2)} - A_{1040}^{(1)} + A_{1040}^{(0)} + 2b_1 A_{0240}^{(1)} + 2b_3 A_{0220}^{(2)} - 2b_5 A_{0200}^{(2)} + b_2 A_{0131}^{(2)} - b_4 A_{0111}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{1031}^{(2)} + b_1 A_{1131}^{(1)} + b_3 A_{1111}^{(2)} + 4A_{1040}^{(2)} - 4A_{1040}^{(1)} + 4A_{1040}^{(0)} + 2b_2 A_{1022}^{(2)} - 2b_4 A_{1002}^{(2)} - b_2 A_{0131}^{(2)} - b_1^2 A_{0131}^{(2)} + 3b_4 A_{0111}^{(2)} \\ + 4b_3 A_{0022}^{(2)} - 8b_5 A_{0002}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0100}^{(2)} + A_{1000}^{(2)} - A_{1000}^{(1)} + 2b_1 A_{0200}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{d}{ds} A_{1200}^{(2)} + 2A_{2100}^{(2)} - 2A_{2100}^{(1)} + 2A_{2100}^{(0)} + 3b_1 A_{1300}^{(1)} - 3b_2 A_{0300}^{(2)} - 3b_1^2 A_{0300}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{d}{ds}A_{6000}^{(2)} + b_1A_{6100}^{(1)} - b_2A_{5100}^{(2)} - b_1^2A_{5100}^{(2)} - b_3A_{4100}^{(2)} - b_4A_{3100}^{(2)} - b_5A_{2100}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{4020}^{(2)} + b_1A_{4120}^{(1)} + b_3A_{4100}^{(2)} + b_2A_{4011}^{(2)} - b_2A_{3120}^{(2)} - b_1^2A_{3120}^{(2)} + 3b_4A_{3100}^{(2)} + 2b_3A_{3011}^{(2)} - b_3A_{2120}^{(2)} + 6b_5A_{2100}^{(2)} + 3b_4A_{2011}^{(2)} \\ - b_4A_{1120}^{(2)} + 4b_5A_{1011}^{(2)} - b_5A_{0120}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{2040}^{(2)} + b_1A_{2140}^{(1)} + b_3A_{2120}^{(2)} - b_5A_{2100}^{(2)} + b_2A_{2031}^{(2)} - b_4A_{2011}^{(2)} - b_2A_{1140}^{(2)} - b_1^2A_{1140}^{(2)} + 3b_4A_{1120}^{(2)} + 2b_3A_{1031}^{(2)} - 4b_5A_{1011}^{(2)} \\ - b_3A_{0140}^{(2)} + 6b_5A_{0120}^{(2)} + 3b_4A_{0031}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2200}^{(2)} + 3A_{3100}^{(2)} - 3A_{3100}^{(1)} + 3A_{3100}^{(0)} + 3b_1A_{2300}^{(1)} - 3b_2A_{1300}^{(2)} - 3b_1^2A_{1300}^{(2)} - 3b_3A_{0300}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{d}{ds}A_{3200}^{(2)} + 4A_{4100}^{(2)} - 4A_{4100}^{(1)} + 4A_{4100}^{(0)} + 3b_1A_{3300}^{(1)} - 3b_2A_{2300}^{(2)} - 3b_1^2A_{2300}^{(2)} - 3b_3A_{1300}^{(2)} - 3b_4A_{0300}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0111}^{(2)} + A_{1011}^{(2)} - A_{1011}^{(1)} + A_{1011}^{(0)} + 2b_1A_{0211}^{(1)} + 2A_{0120}^{(2)} - 2A_{0120}^{(1)} + 2A_{0120}^{(0)} + 2b_2A_{0102}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0220}^{(2)} + A_{1120}^{(2)} - A_{1120}^{(1)} + A_{1120}^{(0)} + 3b_1A_{0320}^{(1)} + 3b_3A_{0300}^{(2)} + b_2A_{0211}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{1111}^{(2)} + 2A_{2011}^{(2)} - 2A_{2011}^{(1)} + 2A_{2011}^{(0)} + 2b_1 A_{1211}^{(1)} + 2A_{1120}^{(2)} - 2A_{1120}^{(1)} + 2A_{1120}^{(0)} + 2b_2 A_{1102}^{(2)} - 2b_2 A_{0211}^{(2)} - 2b_1^2 A_{0211}^{(2)} \\ + 4b_3 A_{0102}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{1220}^{(2)} + 2A_{2120}^{(2)} - 2A_{2120}^{(1)} + 2A_{2120}^{(0)} + 3b_1 A_{1320}^{(1)} + 3b_3 A_{1300}^{(2)} + b_2 A_{1211}^{(2)} - 3b_2 A_{0320}^{(2)} - 3b_1^2 A_{0320}^{(2)} + 9b_4 A_{0300}^{(2)} \\ + 2b_3 A_{0211}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{2111}^{(2)} + 3A_{3011}^{(2)} - 3A_{3011}^{(1)} + 3A_{3011}^{(0)} + 2b_1 A_{2211}^{(1)} + 2A_{2120}^{(2)} - 2A_{2120}^{(1)} + 2A_{2120}^{(0)} + 2b_2 A_{2102}^{(2)} - 2b_2 A_{1211}^{(2)} - 2b_1^2 A_{1211}^{(2)} \\ + 4b_3 A_{1102}^{(2)} - 2b_3 A_{0211}^{(2)} + 6b_4 A_{0102}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0131}^{(2)} + A_{1031}^{(2)} - A_{1031}^{(1)} + A_{1031}^{(0)} + 2b_1 A_{0231}^{(1)} + 2b_3 A_{0211}^{(2)} + 4A_{0140}^{(2)} - 4A_{0140}^{(1)} + 4A_{0140}^{(0)} + 2b_2 A_{0122}^{(2)} - 2b_4 A_{0102}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0000}^{(2)} + b_1 A_{0100}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{d}{ds} A_{1002}^{(2)} + b_1 A_{1102}^{(1)} + A_{1011}^{(2)} - A_{1011}^{(1)} + A_{1011}^{(0)} - b_2 A_{0102}^{(2)} - b_1^2 A_{0102}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0020}^{(2)} + b_1A_{0120}^{(1)} + b_3A_{0100}^{(2)} + b_2A_{0011}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0040}^{(2)} + b_1A_{0140}^{(1)} + b_3A_{0120}^{(2)} - b_5A_{0100}^{(2)} + b_2A_{0031}^{(2)} - b_4A_{0011}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0060}^{(2)} + b_1A_{0160}^{(1)} + b_3A_{0140}^{(2)} - b_5A_{0120}^{(2)} + b_2A_{0051}^{(2)} - b_4A_{0031}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2002}^{(2)} + b_1A_{2102}^{(1)} + A_{2011}^{(2)} - A_{2011}^{(1)} + A_{2011}^{(0)} - b_2A_{1102}^{(2)} - b_1^2A_{1102}^{(2)} - b_3A_{0102}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{d}{ds}A_{3002}^{(2)} + b_1A_{3102}^{(1)} + A_{3011}^{(2)} - A_{3011}^{(1)} + A_{3011}^{(0)} - b_2A_{2102}^{(2)} - b_1^2A_{2102}^{(2)} - b_3A_{1102}^{(2)} - b_4A_{0102}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1022}^{(2)} + b_1A_{1122}^{(1)} + b_3A_{1102}^{(2)} + 3A_{1031}^{(2)} - 3A_{1031}^{(1)} + 3A_{1031}^{(0)} + 3b_2A_{1013}^{(2)} - b_2A_{0122}^{(2)} - b_1^2A_{0122}^{(2)} + 3b_4A_{0102}^{(2)} + 6b_3A_{0013}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{d}{ds}A_{5100}^{(2)} + 6A_{6000}^{(2)} - 6A_{6000}^{(1)} + 6A_{6000}^{(0)} + 2b_1A_{5200}^{(1)} - 2b_2A_{4200}^{(2)} - 2b_1^2A_{4200}^{(2)} - 2b_3A_{3200}^{(2)} - 2b_4A_{2200}^{(2)} - 2b_5A_{1200}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0300}^{(2)} + A_{1200}^{(2)} - A_{1200}^{(1)} + A_{1200}^{(0)} + 4b_1A_{0400}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{3120}^{(2)} + 4 - 4A_{4020}^{(1)} + 4A_{4020}^{(0)} + 2b_1A_{3220}^{(1)} + 2b_3A_{3200}^{(2)} + b_2A_{3111}^{(2)} - 2b_2A_{2220}^{(2)} - 2b_1^2A_{2220}^{(2)} + 6b_4A_{2200}^{(2)} + 2b_3A_{2111}^{(2)} \\ - 2b_3A_{1220}^{(2)} + 12b_5A_{1200}^{(2)} + 3b_4A_{1111}^{(2)} - 2b_4A_{0220}^{(2)} + 4b_5A_{0111}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{4011}^{(2)} + b_1A_{4111}^{(1)} + 2A_{4020}^{(2)} - 2A_{4020}^{(1)} + 2A_{4020}^{(0)} + 2b_2A_{4002}^{(2)} - b_2A_{3111}^{(2)} - b_1^2A_{3111}^{(2)} + 4b_3A_{3002}^{(2)} - b_3A_{2111}^{(2)} + 6b_4A_{2002}^{(2)} \\ - b_4A_{1111}^{(2)} + 8b_5A_{1002}^{(2)} - b_5A_{0111}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{1140}^{(2)} + 2A_{2040}^{(2)} - 2A_{2040}^{(1)} + 2A_{2040}^{(0)} + 2b_1A_{1240}^{(1)} + 2b_3A_{1220}^{(2)} - 2b_5A_{1200}^{(2)} + b_2A_{1131}^{(2)} - b_4A_{1111}^{(2)} - 2b_2A_{0240}^{(2)} - 2b_1^2A_{0240}^{(2)} \\ + 6b_4A_{0220}^{(2)} + 2b_3A_{0131}^{(2)} - 4b_5A_{0111}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{2031}^{(2)} + b_1A_{2131}^{(1)} + b_3A_{2111}^{(2)} + 4A_{2040}^{(2)} - 4A_{2040}^{(1)} + 4A_{2040}^{(0)} + 2b_2A_{2022}^{(2)} - 2b_4A_{2002}^{(2)} - b_2A_{1131}^{(2)} - b_1^2A_{1131}^{(2)} + 3b_4A_{1111}^{(2)} \\ + 4b_3A_{1022}^{(2)} - 8b_5A_{1002}^{(2)} - b_3A_{0131}^{(2)} + 6b_5A_{0111}^{(2)} + 6b_4A_{0022}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1300}^{(2)} + 2A_{2200}^{(2)} - 2A_{2200}^{(1)} + 2A_{2200}^{(0)} + 4b_1A_{1400}^{(1)} - 4b_2A_{0400}^{(2)} - 4b_1^2A_{0400}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2300}^{(2)} + 3A_{3200}^{(2)} - 3A_{3200}^{(1)} + 3A_{3200}^{(0)} + 4b_1A_{2400}^{(1)} - 4b_2A_{1400}^{(2)} - 4b_1^2A_{1400}^{(2)} - 4b_3A_{0400}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0031}^{(2)} + b_1A_{0131}^{(1)} + b_3A_{0111}^{(2)} + 4A_{0040}^{(2)} - 4A_{0040}^{(1)} + 4A_{0040}^{(0)} + 2b_2A_{0022}^{(2)} - 2b_4A_{0002}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0051}^{(2)} + b_1A_{0151}^{(1)} + b_3A_{0131}^{(2)} - b_5A_{0111}^{(2)} + 6A_{0060}^{(2)} - 6A_{0060}^{(1)} + 6A_{0060}^{(0)} + 2b_2A_{0042}^{(2)} - 2b_4A_{0022}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0102}^{(2)} + A_{1002}^{(2)} - A_{1002}^{(1)} + A_{1002}^{(0)} + 2b_1A_{0202}^{(1)} + A_{0111}^{(2)} - A_{0111}^{(1)} + A_{0111}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.54})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0011}^{(2)} + b_1A_{0111}^{(1)} + 2A_{0020}^{(2)} - 2A_{0020}^{(1)} + 2b_2A_{0002}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0211}^{(2)} + A_{1111}^{(2)} - A_{1111}^{(1)} + A_{1111}^{(0)} + 3b_1A_{0311}^{(1)} + 2A_{0220}^{(2)} - 2A_{0220}^{(1)} + 2A_{0220}^{(0)} + 2b_2A_{0202}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.56})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1102}^{(2)} + 2A_{2002}^{(2)} - 2A_{2002}^{(1)} + 2A_{2002}^{(0)} + 2b_1A_{1202}^{(1)} + A_{1111}^{(2)} - A_{1111}^{(1)} + A_{1111}^{(0)} - 2b_2A_{0202}^{(2)} - 2b_1^2A_{0202}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0320}^{(2)} + A_{1220}^{(2)} - A_{1220}^{(1)} + A_{1220}^{(0)} + 4b_1A_{0420}^{(1)} + 4b_3A_{0400}^{(2)} + b_2A_{0311}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{1211}^{(2)} + 2A_{2111}^{(2)} - 2A_{2111}^{(1)} + 2A_{2111}^{(0)} + 3b_1A_{1311}^{(1)} + 2A_{1220}^{(2)} - 2A_{1220}^{(1)} + 2A_{1220}^{(0)} + 2b_2A_{1202}^{(2)} - 3b_2A_{0311}^{(2)} - 3b_1^2A_{0311}^{(2)} \\ + 4b_3A_{0202}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2102}^{(2)} + 3A_{3002}^{(2)} - 3A_{3002}^{(1)} + 3A_{3002}^{(0)} + 2b_1A_{2202}^{(1)} + A_{2111}^{(2)} - A_{2111}^{(1)} + A_{2111}^{(0)} - 2b_2A_{1202}^{(2)} - 2b_1^2A_{1202}^{(2)} - 2b_3A_{0202}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0122}^{(2)} + A_{1022}^{(2)} - A_{1022}^{(1)} + A_{1022}^{(0)} + 2b_1A_{0222}^{(1)} + 2b_3A_{0202}^{(2)} + 3A_{0131}^{(2)} - 3A_{0131}^{(1)} + 3A_{0131}^{(0)} + 3b_2A_{0113}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1013}^{(2)} + b_1A_{1113}^{(1)} + 2A_{1022}^{(2)} - 2A_{1022}^{(1)} + 2A_{1022}^{(0)} + 4b_2A_{1004}^{(2)} - b_2A_{0113}^{(2)} - b_1^2A_{0113}^{(2)} + 8b_3A_{0004}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{d}{ds}A_{4200}^{(2)} + 5A_{5100}^{(2)} - 5A_{5100}^{(1)} + 5A_{5100}^{(0)} + 3b_1A_{4300}^{(1)} - 3b_2A_{3300}^{(2)} - 3b_1^2A_{3300}^{(2)} - 3b_3A_{2300}^{(2)} - 3b_4A_{1300}^{(2)} - 3b_5A_{0300}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.63})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{2220}^{(2)} + 3 - 3A_{3120}^{(1)} + 3A_{3120}^{(0)} + 3b_1A_{2320}^{(1)} + 3b_3A_{2300}^{(2)} + b_2A_{2211}^{(2)} - 3b_2A_{1320}^{(2)} - 3b_1^2A_{1320}^{(2)} + 9b_4A_{1300}^{(2)} + 2b_3 \\ - 3b_3A_{0320}^{(2)} + 18b_5A_{0300}^{(2)} + 3b_4A_{0211}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{3111}^{(2)} + 4A_{4011}^{(2)} - 4A_{4011}^{(1)} + 4A_{4011}^{(0)} + 2b_1 + 2A_{3120}^{(2)} - 2A_{3120}^{(1)} + 2A_{3120}^{(0)} + 2b_2 A_{3102}^{(2)} - 2b_2 A_{2211}^{(2)} - 2b_1^2 A_{2211}^{(2)} \\ + 4b_3 A_{2102}^{(2)} - 2b_3 + 6b_4 A_{1102}^{(2)} - 2b_4 A_{0211}^{(2)} + 8b_5 A_{0102}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0240}^{(2)} + A_{1140}^{(2)} - A_{1140}^{(1)} + A_{1140}^{(0)} + 3b_1 A_{0340}^{(1)} + 3b_3 A_{0320}^{(2)} - 3b_5 A_{0300}^{(2)} + b_2 A_{0231}^{(2)} - b_4 A_{0211}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.66})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{1131}^{(2)} + 2A_{2031}^{(2)} - 2A_{2031}^{(1)} + 2A_{2031}^{(0)} + 2b_1 A_{1231}^{(1)} + 2b_3 A_{1211}^{(2)} + 4A_{1140}^{(2)} - 4A_{1140}^{(1)} + 4A_{1140}^{(0)} + 2b_2 A_{1122}^{(2)} - 2b_4 A_{1102}^{(2)} \\ - 2b_2 A_{0231}^{(2)} - 2b_1^2 A_{0231}^{(2)} + 6b_4 A_{0211}^{(2)} + 4b_3 A_{0122}^{(2)} - 8b_5 A_{0102}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{d}{ds} A_{4002}^{(2)} + b_1 A_{4102}^{(1)} + A_{4011}^{(2)} - A_{4011}^{(1)} + A_{4011}^{(0)} - b_2 A_{3102}^{(2)} - b_1^2 A_{3102}^{(2)} - b_3 A_{2102}^{(2)} - b_4 A_{1102}^{(2)} - b_5 A_{0102}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.68})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{2022}^{(2)} + b_1 A_{2122}^{(1)} + b_3 A_{2102}^{(2)} + 3A_{2031}^{(2)} - 3A_{2031}^{(1)} + 3A_{2031}^{(0)} + 3b_2 A_{2013}^{(2)} - b_2 A_{1122}^{(2)} - b_1^2 A_{1122}^{(2)} + 3b_4 A_{1102}^{(2)} + \\ 6b_3 A_{1013}^{(2)} - b_3 A_{0122}^{(2)} + 6b_5 A_{0102}^{(2)} + 9b_4 A_{0013}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0400}^{(2)} + A_{1300}^{(2)} - A_{1300}^{(1)} + A_{1300}^{(0)} + 5b_1 A_{0500}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.70})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1400}^{(2)} + 2A_{2300}^{(2)} - 2A_{2300}^{(1)} + 2A_{2300}^{(0)} + 5b_1A_{1500}^{(1)} - 5b_2A_{0500}^{(2)} - 5b_1^2A_{0500}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.71})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0022}^{(2)} + b_1A_{0122}^{(1)} + b_3A_{0102}^{(2)} + 3A_{0031}^{(2)} - 3A_{0031}^{(1)} + 3A_{0031}^{(0)} + 3b_2A_{0013}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.72})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0042}^{(2)} + b_1A_{0142}^{(1)} + b_3A_{0122}^{(2)} - b_5A_{0102}^{(2)} + 5A_{0051}^{(2)} - 5A_{0051}^{(1)} + 5A_{0051}^{(0)} + 3b_2A_{0033}^{(2)} - 3b_4A_{0013}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0002}^{(2)} + b_1A_{0102}^{(1)} + A_{0011}^{(2)} - A_{0011}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.74})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0202}^{(2)} + A_{1102}^{(2)} - A_{1102}^{(1)} + A_{1102}^{(0)} + 3b_1A_{0302}^{(1)} + A_{0211}^{(2)} - A_{0211}^{(1)} + A_{0211}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.75})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0311}^{(2)} + A_{1211}^{(2)} - A_{1211}^{(1)} + A_{1211}^{(0)} + 4b_1A_{0411}^{(1)} + 2A_{0320}^{(2)} - 2A_{0320}^{(1)} + 2A_{0320}^{(0)} + 2b_2A_{0302}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.76})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1202}^{(2)} + 2A_{2102}^{(2)} - 2A_{2102}^{(1)} + 2A_{2102}^{(0)} + 3b_1A_{1302}^{(1)} + A_{1211}^{(2)} - A_{1211}^{(1)} + A_{1211}^{(0)} - 3b_2A_{0302}^{(2)} - 3b_1^2A_{0302}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.77})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0113}^{(2)} + A_{1013}^{(2)} - A_{1013}^{(1)} + A_{1013}^{(0)} + 2b_1A_{0213}^{(1)} + 2A_{0122}^{(2)} - 2A_{0122}^{(1)} + 2A_{0122}^{(0)} + 4b_2A_{0104}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.78})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1004}^{(2)} + b_1A_{1104}^{(1)} + A_{1013}^{(2)} - A_{1013}^{(1)} + A_{1013}^{(0)} - b_2A_{0104}^{(2)} - b_1^2A_{0104}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.79})$$

$$\frac{d}{ds}A_{3300}^{(2)} + 4A_{4200}^{(2)} - 4A_{4200}^{(1)} + 4A_{4200}^{(0)} + 4b_1A_{3400}^{(1)} - 4b_2A_{2400}^{(2)} - 4b_1^2A_{2400}^{(2)} - 4b_3A_{1400}^{(2)} - 4b_4A_{0400}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.80})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{1320}^{(2)} + 2A_{2220}^{(2)} - 2A_{2220}^{(1)} + 2A_{2220}^{(0)} + 4b_1A_{1420}^{(1)} + 4b_3A_{1400}^{(2)} + b_2A_{1311}^{(2)} - 4b_2A_{0420}^{(2)} - 4b_1^2A_{0420}^{(2)} + \\ 12b_4A_{0400}^{(2)} + 2b_3A_{0311}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{2211}^{(2)} + 3A_{3111}^{(2)} - 3A_{3111}^{(1)} + 3A_{3111}^{(0)} + 3b_1A_{2311}^{(1)} + 2A_{2220}^{(2)} - 2A_{2220}^{(1)} + 2A_{2220}^{(0)} + 2b_2A_{2202}^{(2)} - 3b_2A_{1311}^{(2)} - 3b_1^2A_{1311}^{(2)} + \\ 4b_3A_{1202}^{(2)} - 3b_3A_{0311}^{(2)} + 6b_4A_{0202}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0231}^{(2)} + A_{1131}^{(2)} - A_{1131}^{(1)} + A_{1131}^{(0)} + 3b_1A_{0331}^{(1)} + 3b_3A_{0311}^{(2)} + 4A_{0240}^{(2)} - 4A_{0240}^{(1)} + 4A_{0240}^{(0)} + 2b_2A_{0222}^{(2)} - 2b_4A_{0202}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.83})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{3102}^{(2)} + 4A_{4002}^{(2)} - 4A_{4002}^{(1)} + 4A_{4002}^{(0)} + 2b_1 A_{3202}^{(1)} + A_{3111}^{(2)} - A_{3111}^{(1)} + A_{3111}^{(0)} - 2b_2 A_{2202}^{(2)} - 2b_1^2 A_{2202}^{(2)} \\ - 2b_3 A_{1202}^{(2)} - 2b_4 A_{0202}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{1122}^{(2)} + 2A_{2022}^{(2)} - 2A_{2022}^{(1)} + 2A_{2022}^{(0)} + 2b_1 A_{1222}^{(1)} + 2b_3 A_{1202}^{(2)} + 3A_{1131}^{(2)} - 3A_{1131}^{(1)} + 3A_{1131}^{(0)} \\ + 3b_2 A_{1113}^{(2)} - 2b_2 A_{0222}^{(2)} - 2b_1^2 A_{0222}^{(2)} + 6b_4 A_{0202}^{(2)} + 6b_3 A_{0113}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

$$\frac{d}{ds} A_{2013}^{(2)} + b_1 A_{2113}^{(1)} + 2A_{2022}^{(2)} - 2A_{2022}^{(1)} + 2A_{2022}^{(0)} + 4b_2 A_{2004}^{(2)} - b_2 A_{1113}^{(2)} - b_1^2 A_{1113}^{(2)} + 8b_3 A_{1004}^{(2)} - b_3 A_{0113}^{(2)} + 12b_4 A_{0004}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.86})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0500}^{(2)} + A_{1400}^{(2)} - A_{1400}^{(1)} + A_{1400}^{(0)} + 6b_1 A_{0600}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.87})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0013}^{(2)} + b_1 A_{0113}^{(1)} + 2A_{0022}^{(2)} - 2A_{0022}^{(1)} + 2A_{0022}^{(0)} + 4b_2 A_{0004}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.88})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0033}^{(2)} + b_1 A_{0133}^{(1)} + b_3 A_{0113}^{(2)} + 4A_{0042}^{(2)} - 4A_{0042}^{(1)} + 4A_{0042}^{(0)} + 4b_2 A_{0024}^{(2)} - 4b_4 A_{0004}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.89})$$

$$\frac{d}{ds} A_{0302}^{(2)} + A_{1202}^{(2)} - A_{1202}^{(1)} + A_{1202}^{(0)} + 4b_1 A_{0402}^{(1)} + A_{0311}^{(2)} - A_{0311}^{(1)} + A_{0311}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.90})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0104}^{(2)} + A_{1004}^{(2)} - A_{1004}^{(1)} + A_{1004}^{(0)} + 2b_1A_{0204}^{(1)} + A_{0113}^{(2)} - A_{0113}^{(1)} + A_{0113}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.91})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2400}^{(2)} + 3A_{3300}^{(2)} - 3A_{3300}^{(1)} + 3A_{3300}^{(0)} + 5b_1A_{2500}^{(1)} - 5b_2A_{1500}^{(2)} - 5b_1^2A_{1500}^{(2)} - 5b_3A_{0500}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.92})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0420}^{(2)} + A_{1320}^{(2)} - A_{1320}^{(1)} + A_{1320}^{(0)} + 5b_1A_{0520}^{(1)} + 5b_3A_{0500}^{(2)} + b_2A_{0411}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.93})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{1311}^{(2)} + 2A_{2211}^{(2)} - 2A_{2211}^{(1)} + 2A_{2211}^{(0)} + 4b_1A_{1411}^{(1)} + 2A_{1320}^{(2)} - 2A_{1320}^{(1)} + 2A_{1320}^{(0)} + 2b_2A_{1302}^{(2)} \\ - 4b_2A_{0411}^{(2)} - 4b_1^2A_{0411}^{(2)} + 4b_3A_{0302}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2202}^{(2)} + 3A_{3102}^{(2)} - 3A_{3102}^{(1)} + 3A_{3102}^{(0)} + 3b_1A_{2302}^{(1)} + A_{2211}^{(2)} - A_{2211}^{(1)} + A_{2211}^{(0)} - 3b_2A_{1302}^{(2)} - 3b_1^2A_{1302}^{(2)} - 3b_3A_{0302}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.95})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0222}^{(2)} + A_{1122}^{(2)} - A_{1122}^{(1)} + A_{1122}^{(0)} + 3b_1A_{0322}^{(1)} + 3b_3A_{0302}^{(2)} + 3A_{0231}^{(2)} - 3A_{0231}^{(1)} + 3A_{0231}^{(0)} + 3b_2A_{0213}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.96})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}A_{1113}^{(2)} + 2A_{2013}^{(2)} - 2A_{2013}^{(1)} + 2A_{2013}^{(0)} + 2b_1A_{1213}^{(1)} + 2A_{1122}^{(2)} - 2A_{1122}^{(1)} + 2A_{1122}^{(0)} + 4b_2A_{1104}^{(2)} \\ - 2b_2A_{0213}^{(2)} - 2b_1^2A_{0213}^{(2)} + 8b_3A_{0104}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

$$\frac{d}{ds}A_{2004}^{(2)} + b_1A_{2104}^{(1)} + A_{2013}^{(2)} - A_{2013}^{(1)} + A_{2013}^{(0)} - b_2A_{1104}^{(2)} - b_1^2A_{1104}^{(2)} - b_3A_{0104}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.98})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0004}^{(2)} + b_1A_{0104}^{(1)} + A_{0013}^{(2)} - A_{0013}^{(1)} + A_{0013}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.99})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0024}^{(2)} + b_1A_{0124}^{(1)} + b_3A_{0104}^{(2)} + 3A_{0033}^{(2)} - 3A_{0033}^{(1)} + 3A_{0033}^{(0)} + 5b_2A_{0015}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.100})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1500}^{(2)} + 2A_{2400}^{(2)} - 2A_{2400}^{(1)} + 2A_{2400}^{(0)} + 6b_1A_{1600}^{(1)} - 6b_2A_{0600}^{(2)} - 6b_1^2A_{0600}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.101})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0411}^{(2)} + A_{1311}^{(2)} - A_{1311}^{(1)} + A_{1311}^{(0)} + 5b_1A_{0511}^{(1)} + 2A_{0420}^{(2)} - 2A_{0420}^{(1)} + 2A_{0420}^{(0)} + 2b_2A_{0402}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.102})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1302}^{(2)} + 2A_{2202}^{(2)} - 2A_{2202}^{(1)} + 2A_{2202}^{(0)} + 4b_1A_{1402}^{(1)} + A_{1311}^{(2)} - A_{1311}^{(1)} + A_{1311}^{(0)} - 4b_2A_{0402}^{(2)} - 4b_1^2A_{0402}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.103})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0213}^{(2)} + A_{1113}^{(2)} - A_{1113}^{(1)} + A_{1113}^{(0)} + 3b_1A_{0313}^{(1)} + 2A_{0222}^{(2)} - 2A_{0222}^{(1)} + 2A_{0222}^{(0)} + 4b_2A_{0204}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.104})$$

$$\frac{d}{ds}A_{1104}^{(2)} + 2A_{2004}^{(2)} - 2A_{2004}^{(1)} + 2A_{2004}^{(0)} + 2b_1A_{1204}^{(1)} + A_{1113}^{(2)} - A_{1113}^{(1)} + A_{1113}^{(0)} - 2b_2A_{0204}^{(2)} - 2b_1^2A_{0204}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.105})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0015}^{(2)} + b_1A_{0115}^{(1)} + 2A_{0024}^{(2)} - 2A_{0024}^{(1)} + 2A_{0024}^{(0)} + 6b_2A_{0006}^{(2)} = 0 \quad (\text{B.106})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0600}^{(2)} + A_{1500}^{(2)} - A_{1500}^{(1)} + A_{1500}^{(0)} + 7b_1A_{0700}^{(1)} = 0 \quad (\text{B.107})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0402}^{(2)} + A_{1302}^{(2)} - A_{1302}^{(1)} + A_{1302}^{(0)} + 5b_1A_{0502}^{(1)} + A_{0411}^{(2)} - A_{0411}^{(1)} + A_{0411}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.108})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0204}^{(2)} + A_{1104}^{(2)} - A_{1104}^{(1)} + A_{1104}^{(0)} + 3b_1A_{0304}^{(1)} + A_{0213}^{(2)} - A_{0213}^{(1)} + A_{0213}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.109})$$

$$\frac{d}{ds}A_{0006}^{(2)} + b_1A_{0106}^{(1)} + A_{0015}^{(2)} - A_{0015}^{(1)} + A_{0015}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.110})$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas



Cuernavaca, Mor., a 29 de mayo de 2026

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: Estudio de las contribuciones cromáticas δ^2 a la dinámica no lineal en sincrotrones usando cuasi-invariantes polinomiales que presenta el L. en C. Harim Josafat Villarreal Miranda (10021457), para obtener el título de Maestro en Ciencias.

Dirección de tesis: Dr. Armando Antillón Díaz

Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN
Dr. Rolando Pérez Álvarez CInC - UAEM	APROBADO
Dra. Paola Vanessa Olguín Rodríguez CInC - UAEM	APROBADO
Dr. Guillermo Guadalupe Hinojosa Aguirre ICF - UNAM	APROBADO
Dr. Joaquín Escalona Segura CInC - UAEM	APROBADO
Dra. Ruth Estephania Gonzalez Narvaez CInC - UAEM	APROBADO





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento con firma electrónica UAEM, soportada por el certificado vigente a la fecha de su elaboración y con efectos plenos de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS PUBLICADOS en el ÓRGANO INFORMATIVO UNIVERSITARIO "ADOLFO MENÉNDEZ SAMARÁ" número 117 de fecha 20 de abril de 2021.

Sello electrónico

ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2026-05-29 12:55:16 | FIRMANTE

VZufA47NcbNdtKlJQ2laQC3JOC8c/jb+ur0r8BaAcJBwJENvnLq0za62y+I9N0nVI82AiejR+PAMfJaOeCz8uu/Slk/djJXQASLO4ka/xMAL2JCpuzhGiZCeN1n/OwGMmxgLEVYt9Ufs
NeMTEPtVsbKghWyhgJdHGPVLajrWs+hufYerfu1/hlbrDULjaBnieAF0kgWTKYQS66fKSITk/v+Dz51qUUa3TDTOV8u6IUNDolx12jAKLM2UF3zsQ0SaD60f6eRDrKqMafpqTbcB
TYKgF1z4X9EPxvjnlKf2bphq1OY7pWXbrwh1++d+KMik5P4x7XHBP3o0DrV6DwwrQ==

RUTH ESTEPHANIA GONZALEZ NARVAEZ | Fecha:2026-05-29 14:32:23 | FIRMANTE

Aq7sHBWTLaLQ5xdJcMFfzFntLP7mXjPwAUAKPbT/JGECRn85m2ijUNgeq2jv315LRyMHcCWwZWBCFbZZIPth/mQ6dDGPOvJGHLeID7SJ0s8wqcbXn4VuGtdWpls2JXM5mo
UfJiZMGWiWLSMcNWN0M7qM42w9aAFPJRktoAZyKZ6pfV/X9B5lao+JndJxs/r84CD9B1r1QmMvNWEvYY138uGJ7B3hSkrUVmwj1NRw+e/ap4Qd0wc5hqWdLwj4Saa6+o3cl9
PDgmetD0uq6MCxwS3n0UJclQHcb7qrKOPUdpirS6dh2ddCGs2H5IKnDZ65KJnEaoi0z4L4ob9fgjBA==

GUILLERMO GUADALUPE HINOJOSA AGUIRRE | Fecha:2026-05-29 14:54:15 | FIRMANTE

J9/rSXed2QYznXoC3mrJUUBaU1o8maMroqCftSze0uTWInHmVoC8sMKgl68ZT7wpSeuTetusSWczBTzONZ/qK30+2LI0dJW0aGpkoXtDyJCROY8R5KQPViM0f4G3t8iCcc7hG
HukynYAf9B6+V966utiytN3UUQMLnO4cwlabrTxfpXwCX3PAb74PmzC2F4nqJSFrk+vNRkPz07Q7C3oNyxgq1pU/+1339RGdtMZzqJrYife+5sLJWFREMiRVuKWMCPHvJY5eh
a5S9RmE64yeGuo81DXpieNP8akT9BBG8VzT7duZbosJRuuAaL+gzceTaowUANfGjkOGKk74gvQ==

PAOLA VANESSA OLGUIN RODRIGUEZ | Fecha:2026-05-29 18:02:18 | FIRMANTE

mz+V/9pPw2rk/V7NHnC7twapKSWnSPzoo6j6hIDUyuVqm2fx3VClaxKjmA5xIH0GdRW/qhbY4vdKm7CHAxu9aYlly6MwwZrolqEQaCeQURJcczu99vNfWa8627wFognIA1CiCUII
CFe3I3NFSBQyGjRgd2s7HpXKQ9kWTi2t9pxZARBEyRDAPtq7LdLdl92sSP7/ko+brwKQL1jbcEOL1ktGndqUS7072J06hdiHEFloExdGiXnTWNhk65Mu3NRpOtShGDHTq++/u
qlwa0n1LEP0uDUiBmrysGCGdtl1mdxVIVd/lhdR95ZWadZY9mMiof9IGYrVr+ID+IPPa==

JOAQUIN ESCALONA SEGURA | Fecha:2026-05-29 19:04:37 | FIRMANTE

bdNp2yei0YDUlx4QJbE1NK+kgE3+pls+OaLUB08Ge5ArbCboBIV8URuoq90A+4zo4luxrfQw8TucgIXowNVEy0lw7AuWKTmWciwZeF/DE1nObVtqwEhw+EX6mWwjYEdQ4Uai2a
GEuRGI4NOUendRXRgQPJ9B8FENq3u3ob9cl01v/amXu9K6V4ACLNZJxHJbMfiJTVCPdJqe3OODuhE15hIGRvEAV1GEXkmXKjaU/jHQ/5cGQJQGs/m9LppihW8lw7OAjBvIHT
MdRpJtQnNE8SrWepbKs+CUSbkW47OZ31hzKIJ74oiDEYYSpP+8fwa7kSodyafEbw+Gwx7JxKN+OA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



Fk2KH5iJ1

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/0dYnIHfZfrR1L6JkBkZ7FkOWW28kzPXh>

