UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

"Sistemas Dinámicos: Ecuaciones en Diferencias"

T E S I S

para obtener el Grado de

LICENCIADO EN CIENCIAS

área terminal en matemáticas

Presenta

Eduardo Sosa Pastrana

Directora de Tesis:

Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox

Sinodales:

Dr. Juan Pablo Díaz González

Dra. Liudmila Sabinina

Dr. Joaquín Escalona

Dra. Elisa Chinos

CUERNAVACA, MORELOS JUNIO 2024

Dedicatoria

Gracias a:

Mi madre, *Claudia, la mujer valiente y hermosa que, no solo me dio la vida sino que me enseño a vivirla con dignidad y orgullo. nta'avi ini'o nanayí ña'a luu Ntini'i nikuú tiayi'i shoo.*

Mis hermanas, *Caudia Yessenia, Diana Ivette, Thayli Aidde, Vianne Aylin y Danna Aylen, que me han acompañado a lo largo de mi vida y siempre me han dado la alegria y enseñanza de compartir.*

Mi novio, *Andrik, una de mis grandes motivaciones e inspiraciones de cada día en cada ámbito de mi vida y con quien comparto mi felicidad.*

Mi Asesora de tesis, *la Dra. Gabriela Hinojosa, por su paciencia a lo largo de todo este trayecto ya que sin ella nada de esto habría sido posible pues me iluminó en un momento en donde ya no encontraba salida alguna, además de que hizo todo lo posible para que yo concluyera este trabajo.*

Mi Asesor de tesis, *El Dr. Juan Pablo Díaz, igualmente por su paciencia infinita, sus sabias palabras, su motivación, su inconmensurable ayuda ya que también hizo todo lo posible para que yo concluyera este trabajo.*

La Dra. Larissa Sbitneva, *Una persona muy especial para mi por ver en mi lo que ni siquiera yo veía, y que me acompañó durante toda la carrera, con quien compartí muchísimas horas de estudio, actividades académicas, regaños y pizarrones rayados a más no poder.*

Mis Sinodales, *La Dra Liudmila Sabinina, El Dr. Joaquín Escalona, La Dra. Elisa Chinos, quienes también me acompañaron durante la carrera y de quienes recibí una enorme cantidad de incomparables saberes.*

Mis profesores de la carrera, *quienes me ayudaron cuando no entendia los temas y con quienes tuve que cursar las veces necesarias para entender la materia.*

Mi profesora, *Lucelí Sánchez, por quien todo esto comenzó.*

Mi amiga, *Chio una de las personas mas valiosas que me dejó la universidad, quien no me dejó rendirme en varias ocasiones a pesar de lo mucho que yo quería, quien me acompaño en todos los desvelos y tareas de equipo, mi compañera de estudio y de risas.*

Índice general

1. ESTUDIO GENERAL DE LA DINÁMICA DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS **8**

1.1. Introducción a las ecuaciones en diferencias 8

1.2. Orden de una ecuación en diferencias 10

1.3. Ecuaciones homogéneas 14

1.4. Ecuaciones en diferencias lineales 15

1.5. Ecuaciones en diferencias no lineales 18

1.6. Puntos fijos de equilibrio 20

1.7. Telarañas y diagramas fase 26

2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS **32**

2.1. Soluciones especiales 37

2.2. El método directo 43

2.3. Resolución de la ecuación homogénea 44

2.4. El método de coeficientes indeterminados 50

2.5. Métodos iterativos 54

2.6. Técnicas Numéricas 55

2.7. Estabilidad de las soluciones 56

3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS 63

3.1. Aplicaciones de las ecuaciones en diferencias de primer orden 65

3.1.1. Un Modelo Económico 71

3.1.2. Propagación anual de plantas 73

3.2. Relación de las ecuaciones en diferencias con las ecuaciones diferenciales 83

4. CONCLUSIONES 86

Bibliografía 88

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones en diferencias han desempeñado un papel crucial en el desarrollo de diversas áreas de las ciencias a lo largo de la historia. Estas ecuaciones describen cómo cambian las cantidades a lo largo del tiempo y son fundamentales para modelar y entender fenómenos que varían en función de iteraciones discretas o pasos de tiempo. La física, la ingeniería y las ciencias aplicadas, la economía, la biología y ecología, la teoría de números, las ciencias de la computación y programación son, por mencionar, algunas de las áreas más destacadas donde las ecuaciones en diferencias han sido de gran interés. Su importancia radica en que proporcionan herramientas poderosas para la comprensión y el modelado de sistemas dinámicos, y su uso se extiende desde la resolución de problemas cotidianos hasta el desarrollo de teorías y conceptos fundamentales en la ciencia y la tecnología.

Las ecuaciones en diferencias han existido a lo largo de la historia y han evolucionado a través del tiempo gracias a su versatilidad pues se encuentran rastros tempranos del uso de ecuaciones en diferencias en la antigua Mesopotamia, Egipto y Grecia. Los matemáticos babilónicos, egipcios y griegos estudiaron patrones numéricos y desarrollaron métodos para resolver problemas matemáticos que involucraban relaciones recurrentes.

La formalización de las ecuaciones en diferencias se atribuye en gran medida a los matemáticos del siglo XVII. Comenzando con Johannes Kepler y Pierre de Fermat quienes trabajaron en problemas relacionados con las sumas de cuadrados y cubos, lo que los llevó a desarrollar técnicas de diferenciación y aproximación, que son una forma temprana de ecuaciones en diferencias.

Isaac Newton fue uno de los principales contribuyentes al desarrollo de las ecuaciones en diferencias. En su obra "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica"(1687), presentó las leyes del movimiento que describen cómo cambian las cantidades físicas con respecto al tiempo y estableció las bases para la formulación de ecuaciones en diferencias en el contexto de la física.

A principios del siglo XVIII, Brook Taylor realizó contribuciones significativas al campo de las ecuaciones en diferencias con su trabajo en series de potencias y aproximaciones polinómicas, el cuál sentó las bases para el desarrollo posterior de la teoría de ecuaciones en diferencias.

Euler hizo numerosas contribuciones a las ecuaciones en diferencias y su solución. Desarrolló métodos sistemáticos para resolver ecuaciones en diferencias lineales y no lineales, y aplicó estos métodos en diversos campos de la matemática y la física.

Durante los siglos XIX y XX el estudio de las ecuaciones en diferencias se expandió y se aplicó en numerosas áreas, como la teoría de números, la física matemática, la teoría de sistemas dinámicos y la teoría de control, entre otras. El desarrollo de métodos numéricos y la computación también revolucionaron la forma en que se abordan y resuelven ecuaciones en diferencias.

A lo largo del siglo XX, las ecuaciones en diferencias se convirtieron en una herramienta esencial para estudiar sistemas dinámicos y fenómenos caóticos. Estos sistemas, que exhiben comportamientos complejos y sensibles a las condiciones iniciales, se modelan y analizan mediante ecuaciones en diferencias no lineales.

En el presente trabajo, en el capítulo 1 comenzamos con los conceptos y definiciones básicas, lo cual nos conduce por una breve pero importante introducción a algunas características generales que son necesarias para el estudio futuro de dichas ecuaciones en diferencias.

En el capitulo 2 se habla de algunos distintos métodos de solución, tipos de soluciones y comportamiento de estas soluciones pues cabe mencionar que estas ecuaciones cuentan con una gran variedad de soluciones para su estudio, además se muestran varios ejemplos de dichos métodos y soluciones.

En el capítulo 3 se ofrece una introducción a los modelos básicos de dinámica de poblaciones expresados con modelos de ecuaciones en diferencias, se analizan ya las aplicaciones de distintos tipos de ecuaciones y modelos que aplicamos a un contexto más conocido desarrollado en nuestra sociedad, en particular se analiza un modelo de propagación de plantas que es de nuestro interés ya que nos permite comprender y predecir cómo las plantas crecen y se dispersan en un entorno específico, lo cual es valioso para la planificación agrícola, la restauración de ecosistemas y la gestión de especies invasoras, también para determinar la mejor disposición de cultivos, la densidad de siembra y las prácticas de manejo que maximizan el rendimiento y minimizan los recursos utilizados y a su vez nos brinda una herramienta valiosa en la investigación científica para comprender los procesos subyacentes que afectan la propagación de plantas, como la dispersión de semillas, la competencia entre especies y los efectos del clima y el suelo.

En este trabajo se persiguen varios objetivos, tanto teóricos como prácticos, entre los cuales buscamos comprender los fenómenos discretos, predicción y el pronóstico de situaciones, optimización y toma de decisiones, diseño y análisis de algoritmos, simulación y experimentación numérica y desarrollo de habilidades matemáticas y computacionales.

Al considerar variables, parámetros, orden y condiciones iniciales, las ecuaciones en diferencias pueden capturar patrones y relaciones complejas en varios sistemas. Mediante métodos analíticos, iterativos y numéricos, estas ecuaciones se pueden resolver y utilizar para hacer predicciones u obtener información sobre fenómenos del mundo real. Comprender los conceptos básicos de las ecuaciones en diferencias puede ser una herramienta valiosa en muchos campos de estudio.

Capítulo 1

ESTUDIO GENERAL DE LA DINÁMICA DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

1.1. Introducción a las ecuaciones en diferencias

Los sistemas dinámicos se enfocan en el estudio de cómo una cantidad x, evoluciona a lo largo de períodos. Esta evolución sigue una regla o ecuación, y el objetivo es determinar su valor en cualquier momento dentro de un período de tiempo n específico, es decir, $x(n)$, x en función del tiempo n. Si el período de tiempo está compuesto por instantes discretos, estamos hablando de dinámica discreta. Las ecuaciones en diferencias (EDs) son herramientas útiles que nos ayudan a analizar estos modelos que requieren de expresiones que relacionan sucesiones matemáticas con valores discretos.

Una ecuación en diferencias de primer orden se puede expresar de la siguiente ma-

nera:

$$x_{n+1} = f(x_n, n) \tag{1.1}$$

en donde n es la variable independiente ya que representa los cambios que suceden desde un momento inicial a lo largo de cierto número de períodos, y x_n es la variable dependiente de n, y a su vez el valor de x_{n+1} es obtenido mediante una función f cuyos valores de entrada son x_n y ocasionalmente n. Cuando se da una condición inicial, es decir, se le asigna un valor a n, obtenemos una sucesión de valores en donde cada nuevo valor depende del valor anterior (o valores anteriores según sea el caso), y cada serie que se genera dependerá de el valor inicial que se le asigne a x_n, a estas sucesiones obtenidas se les conoce como *solución de la ecuación en diferencias*. Si se asume la continuidad de la función f, para construir una solución de una ecuación de orden n se precisan exactamente n condiciones iniciales $x_0, x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$. A las soluciones de las ecuaciones también las llamaremos órbitas. El orden puede verse entonces como en número mínimo de condiciones necesarias para poder construir una solución u órbita de la ecuación [5].

Por ejemplo:

$$x_{n+1} = x_n + 5 \tag{1.2}$$

es una ecuación en diferencias de primer orden y si tomamos $x_0 = 0$ obtenemos $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, entonces podemos observar que la EDs genera la sucesión de valores {0, 5, 10, ...}.

Otro ejemplo lo podemos encontrar en la sucesión de Fibonacci:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

es la órbita o solución de la ecuación en diferencias de orden dos:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \tag{1.3}$$

con condición inicial $x_0 = x_1 = 1$.

Otro ejemplo es el Método de Newton, el cual es un algoritmo ampliamente empleado para encontrar las raíces de una función. Se trata de un enfoque iterativo que emplea la derivada de la función para refinar la precisión de la estimación de la raíz en cada paso de la iteración y es dado por una ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}.$$

1.2. Orden de una ecuación en diferencias

Las ecuaciones en diferencias también pueden clasificarse según su orden, que está determinado por el mayor índice de la variable dependiente presente en la ecuación. La clasificación por orden de las ecuaciones en diferencias se divide en tres tipos principales:

Ecuaciones en diferencias de primer orden: Una ecuación en diferencias de primer orden solo involucra la variable dependiente en el paso de tiempo actual (n) y en el paso de tiempo anterior ($n - 1$).

Ecuaciones en diferencias de segundo orden: Una ecuación en diferencias de segundo orden involucra la variable dependiente en el paso de tiempo actual (n), en el paso de tiempo anterior $(n-1)$ y en el paso de tiempo dos pasos atrás $(n-2)$.

Ecuaciones en diferencias de orden superior: Las ecuaciones en diferencias de orden superior involucran la variable dependiente en el paso de tiempo actual (n), en el paso de tiempo anterior $(n-1)$ y en uno o más pasos de tiempo previos.

Un ejemplo de ecuación en diferencias de primer orden es el siguiente:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \tag{1.4}$$

Al resolver esta ecuación en diferencias lineal usando diferentes condiciones es posible observar que:

Sí $x_0 = 1$, entonces: $x_1 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{8}$ ... Entonces es fácil ver que: $x_n = \frac{1}{2^n}$, por lo que la solución es: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\}$ la progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y con término inicial 1.

Sí $x_0 = 0$, entonces: $x_1 = \frac{1}{2}x_0 = 0$ y así sucesivamente obtenemos la solución constante: $\{0, 0, 0, ...\}$.

Sí $x_0 = -1$, entonces: $x_1 = \frac{1}{2}x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{8}$ ... por lo que la solución es: $\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...\}$ la progresión geométrica de razón $-\frac{1}{2}$ y con término inicial -1.

Una ecuación en diferencias de segundo orden puede verse de la siguiente manera.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2 \tag{1.5}$$

En este caso necesitamos los dos valores anteriores para calcular cada nuevo valor, por ejemplo si $x_0 = 1$ y $x_1 = 4$, entonces $x_2 = 7$ y así sucesivamente con cada valor, obtenemos la sucesión $\{0, 1, 7, ...\}$.

Algunos ejemplos de EDs de segundo orden son los siguientes:

$x_{n+2} - 2x_{n+1} + y_n = 0$

$x_{n+2} = 2x_n^2 + 1$

$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n^2$

$x_{n+2} = (n+1)x_{n+1} + nx_n$

$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = -rx_{n+1}$

De manera más general una ecuación en diferencias de orden k puede expresarse como:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_n, n) \tag{1.6}$$

en donde f es una función dada y k es un número natural. Es así que (1.6) conforma un sistema dinámico discreto.

Decimos entonces que el orden de una ecuación en diferencias es el número mínimo de condiciones necesarias que permiten construir una solución de la ecuación, y para

calcularlo recurrimos a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación; es decir, $n+k-n=k$, con $k \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, considerando las siguientes ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + 5 \tag{1.7}$$

$$x_{n+3} - x_{n+1} = n - 1 \tag{1.8}$$

tenemos que (1.7) es de orden 1 puesto que $n+1-n=1$, es decir cada nuevo valor depende únicamente del valor anterior, mientras que (1.8) es de orden 2 ya que $(n+3)-(n+1) = n+3-n-1 = 2$.

Distinguimos entre una ecuación autónoma cuando el tiempo n no aparece explícitamente en la ecuación, y no autónoma cuando sí lo hace, por ejemplo:

$$x_{n+3} - x_{n+1} = n - 1 \tag{1.9}$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 6 \tag{1.10}$$

(1.9) es una ecuación en diferencias no autónoma y (1.10) es autónoma.

En ocasiones podemos encontrar ecuaciones de la forma:

$$x_{n+1} = x_{n-2} - x_{n-1} \tag{1.11}$$

en donde el término de menor orden es otro diferente a x_n, si bien ésto no presenta un problema, es más conveniente aplicar un cambio de variables para reescribirlas de modo

que el término de menor orden sea x_n, pues de esta manera será mas fácil manipularla, al aplicar un cambio de variable en (1.11), se reescribe de la siguiente manera:

$$x_{n+3} = x_n - x_{n+1}$$

Al igual que con las ecuaciones diferenciales, estamos interesados en un proceso de clasificación, ya que una vez que podamos clasificar ciertas ecuaciones en diferencias usando sus características, nos dará una mejor comprensión de que métodos y procedimientos de solución son los más adecuados para implementar.

1.3. Ecuaciones homogéneas

Las ecuaciones en diferencias pueden también clasificarse en homogéneas y no homogéneas, según la presencia o ausencia de un término no homogéneo en la ecuación.

Definición 1.1. *Una ecuación en diferencias es homogénea con respecto a la variable dependiente si permanece invariante bajo una transformación escalar de la variable dependiente.*

En otras palabras, reemplazar la variable dependiente con una constante arbitraria distinta de cero multiplicada por la variable dependiente no cambia la estructura de la ecuación en diferencias. Decimos que la ecuación en diferencias permanece invariante bajo esta transformación.

De lo contrario, se dice que la ecuación en diferencias no es homogénea con respecto a la variable dependiente.

Definición 1.2. *Considere la ecuacion en diferencias lineal de orden k*

$$a_n x_{k+n} + a_{n-1} x_{k+n-1} + a_{n-2} x_{k+n-2} + \cdots + a_1 x_{k+1} + a_0 x_k = f(k). \tag{1.12}$$

con $a_i \neq 0$ *e independientes de* x_k*,* k *la variable independiente discreta* $k = 0, 1, 2, ..., n$*,* y_k *la variable independiente y* $f(k)$ *alguna función de la variable* k*.*

Decimos que la ecuación es no homogénea respecto a la variable dependiente x_k *si* $f(k) \neq 0$*. En otras palabras, la secuencia* $\{F(k)\}$ *no es idénticamente cero y la ecuación en diferencias contiene términos que son funciones de la variable independiente discreta* k *únicamente, incluidas las constantes.*

Las soluciones de una ecuación en diferencias no homogénea consisten en la suma de una solución particular, que satisface la ecuación en sí misma, y la solución general de la ecuación homogénea asociada. La solución particular depende de la forma específica de $b(n)$, lo cual se estudiará más a fondo en el capitulo 2.

Esta clasificación es importante pues es útil al determinar el enfoque y las técnicas adecuadas para resolver las ecuaciones en diferencias.

1.4. Ecuaciones en diferencias lineales

Las ecuaciones en diferencias también se pueden clasificar según los coeficientes que multiplican a las diferentes potencias de la variable dependiente. Hay tres tipos principales de clasificación en función de los coeficientes: ecuaciones en diferencias lineales, ecuaciones en diferencias no lineales y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes.

La linealidad se refiere a una propiedad de las ecuaciones en diferencias en las cuales las variables involucradas se relacionan de manera lineal. Una ecuación en diferencias se considera lineal si satisface la siguiente propiedad:

Superposición: Una ecuación en diferencias es lineal si la suma de dos soluciones particulares también es una solución. Es decir, si $S_1(n)$ y $S_2(n)$ son soluciones de una ecuación en diferencias lineal, entonces cualquier combinación lineal de las dos, como $a \cdot S_1(n) + b \cdot S_2(n)$, también es una solución, donde a y b son constantes. A su vez cuenta con un caso particular llamado *Homogeneidad*, que se cumple si la multiplicación de una solución por una constante también es una solución. En otras palabras, si $S(n)$ es una solución de una ecuación en diferencias lineal, entonces cualquier múltiplo constante de $S(n)$, como $c \cdot S(n)$, también es una solución, donde c es una constante.

No obstante una definición más general de linealidad en las ecuaciones en diferencias sería la siguiente:

Definición 1.3. *Una ecuación en diferencias es lineal si la variable dependiente aparece como máximo una vez en cada término de la ecuación en diferencias.*

Igualmente se dice que una *ecuación en diferencias de primer orden* es *lineal* si puede escribirse de la forma:

$$x_{n+1} + a(n)x_n = b(n) \tag{1.13}$$

en donde $a(n)$ y $b(n)$ son funciones en la variable discreta n

Si la función $b(n) = 0$, entonces (1.13) se trata de una ecuación lineal en diferencias homogénea, en caso contrario decimos que es no homogénea. Además, si las funciones $a(n)$ y $b(n)$ son constantes, entonces estamos hablando de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes.

Las ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes son un subconjunto de las ecuaciones en diferencias lineales, en el cual todos los coeficientes que multiplican a las diferentes potencias de la variable dependiente son constantes.

Por ejemplo:

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + ... + a_{k-1}(n)x_{n+1} + a_k(n)x_n = b(n), \tag{1.14}$$

con $a \neq 0$, donde $a_1, \ldots a_{k-1}, a_k$ son coeficientes constantes y $b(n)$ es una sucesión dada.

Las ecuaciones en diferencias lineales son más fáciles de resolver ya que tienen métodos analíticos bien establecidos, como la transformada Z y la solución por factorización.

Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como:

$$a_1(n)x_{n+2} + a_2(n)x_{n+1} + a_3(n)x_n = b(n) \tag{1.15}$$

donde $a_i(n)$, con $i = 1, 2, 3$ y $b(n)$ son funciones en la variable discreta n. Si la función $b(n) = 0$, entonces (1.15) es una ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden. Además, si todas las funciones $a_i(n)$ son constantes, entonces (1.15) es una ecua-

ción en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Llamamos ecuación en diferencias lineal de orden n a toda expresión de la forma:

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + ... + a_{k-1}(n)x_{n+1} + a_k(n)x_n = b(n), \tag{1.16}$$

con $a_i \neq 0$.

Las EDs. lineales se pueden clasificar en:

- Homogéneas si $b(n) = 0$
- Completas si $b(n) \neq 0$
- De coeficientes constantes si $a_i(n) = a_i$ para cada i
- De coeficientes no constante si $a_i(t) \neq a_i$ para alguna i.

1.5. Ecuaciones en diferencias no lineales

En una ecuación en diferencias no lineal, al menos uno de los coeficientes que multiplican a las diferentes potencias de la variable dependiente no es constante. Por lo tanto, las ecuaciones no lineales no se pueden expresar de manera lineal en términos de las variables involucradas y generalmente tiene la forma:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}).$$

Algunos ejemplos de ecuaciones en diferencias no lineales son:

$$x_{n+1} = x_n^2$$
$$x_{n+1} = ax_n + bx_n^2$$

En general, las ecuaciones no lineales son más complicadas de estudiar que las lineales, pudiendo aparecer fenómenos que han dado lugar a la teoría del caos. Las ecuaciones en diferencias no lineales a menudo requieren métodos numéricos o técnicas de aproximación para su resolución. A diferencia de lo que ocurre en los modelos dinámicos discretos lineales, la función f que determina la ecuación en diferencias no es lineal. Como consecuencia de ésto, van a poder existir muchos puntos de equilibrio que van a estar caracterizados por la pendiente de la curva $f(x)$ [4].

De modo que los valores de x puedan ser calculados de forma recursiva a partir de valores conocidos. No se espera que se puedan encontrar fórmulas explícitas para las soluciones de estas ecuaciones, excepto en casos especiales. Sin embargo, hay varios ejemplos importantes de ecuaciones no lineales que pueden ser transformadas en ecuaciones lineales equivalentes mediante un cambio de variable dependiente [18].

Una clase de ecuaciones para las cuales este enfoque es exitoso es la ecuación de Riccati.

$$x_{n+1}x_n + p_n x_{n+1} + q_n x_n + r(n) = 0.$$

Algunos ejemplos de las ecuaciones en diferencias vistas a lo largo de estas secciones:

Ecuación en Diferencias Lineal Homogénea:

Ecuación: $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$

Solución: $x_n = 2^n$

Ecuación en Diferencias No Lineal Homogénea:

Ecuación: $x_n x_{n-1} + x_n - x_{n-1} = 0$

Solución: $x_n = \dfrac{c}{cn+1}$

Ecuación en Diferencias Lineal No Homogénea:

Ecuación: $x_n - 4x_{n-1} = n$

Solución: $x_n = 4^n - \frac{n+3}{3}$

Ecuación en Diferencias con Coeficientes Variables:

Ecuación: $x_n - nx_{n-1} = 0$

Solución: $x_n = n!$, donde $n!$ representa el factorial de n

Ecuación en Diferencias con Condiciones Iniciales:

Ecuación: $x_n - 2x_{n-1} = 0$, con $x_0 = 1$

Solución: $x_n = 2^n$, con $x_0 = 1$

1.6. Puntos fijos de equilibrio

Los puntos fijos de una ecuación en diferencias son aquellos valores para los cuales la solución de la ecuación se mantiene constante. En otras palabras, son los valores de la variable en los que no hay cambio en la sucesión generada por la ecuación.

Definición 1.4. *Un punto fijo de una función es un punto en el que un elemento del dominio coincide con él mismo en el rango. Formalmente, si consideramos una función real $f : A \to B$ definimos un punto fijo de esta función como un punto x_0 perteneciente al dominio de f tal que:*

$$f(x_0) = x_0$$

Al definir la solución de una ecuación en diferencias finitas, nos interesará estudiar el comportamiento de ésta alrededor de un punto en particular. Considerando una ecuación en diferencias finitas definida de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, diremos que P_e es un punto de equilibrio de esta ecuación si P_e es un punto fijo de f.

Es decir, P_e representa una solución que permanece constante a partir de algún valor de n. Particularmente, si consideremos la condición inicial $y_0 = P_e$, entonces, al estar la ecuación definida de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, tenemos que

$$x_1 = f(x_0) = f(P_e) = P_e.$$

Y procediendo de forma recursiva, podemos concluir que $x_n = P_e$. Al estado en que una sucesión permanece constante de esta forma se le conoce como **estado de equilibrio o estado estacionario**.

Gráficamente, un punto de equilibrio es la x-coordenada del punto donde la gráfica de f interseca la recta $y = x$ ([15]).

Existe una diferencia fundamental entre este tipo de equilibrios, obtenidos mediante

ecuaciones en diferencias y los obtenidos mediante una ecuación diferencial. Mientras en estas últimas los equilibrios son soluciones bien definidas de la ecuación, en los sistemas tratados en diferencias, una solución de la ecuación puede no representar un equilibrio de partida pero, tras un número finito de iteraciones, puede alcanzar un punto de equilibrio y, si es estable, permanecer en él y ello dependerá de las condiciones iniciales del problema, es decir del valor de x_0 ([1]).

En el contexto económico, por ejemplo, el término *"punto de equilibrio"*, a menudo se usa para describir el nivel en el que los ingresos y los costos son iguales, lo que resulta en un beneficio neto nulo. En este caso, el concepto se refiere a un equilibrio económico en el que no hay ganancias ni pérdidas.

Analicemos entonces el caso no lineal: Consideremos un sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$, Decimos que un número a es un *punto fijo o de equilibrio* si $x_n = a$ para todo n, es solución del sistema, es decir a es un punto fijo de si y solo si $f(a) = a$. Por ejemplo dada la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = 2x_n + 3$$

Para encontrar los puntos fijos, establecemos la ecuación igual a x_n :

$$x_n = 2x_n + 3$$

Restamos x_n en ambos lados:

$$0 = x_n + 3$$

Luego, restamos 3 en ambos lados:

$$-3 = x_n$$

Por lo tanto, el punto fijo de esta ecuación es -3. Esto significa que si comenzamos con un valor de x igual a -3, la sucesión generada por la ecuación se mantendrá constante en -3 en cada paso sucesivo.

Ejemplo 1.1. *Sea* $x_{n+1} = x_n^3$ *, donde* $f(x) = x^3$ *, para encontrar los puntos de equilibrio tenemos que resolver la siguiente ecuación:*

$$x = x^3$$

se tiene $x(x+1)(x-1) = 0$ *luego hay tres puntos de equilibrio* $-1, 0, 1$

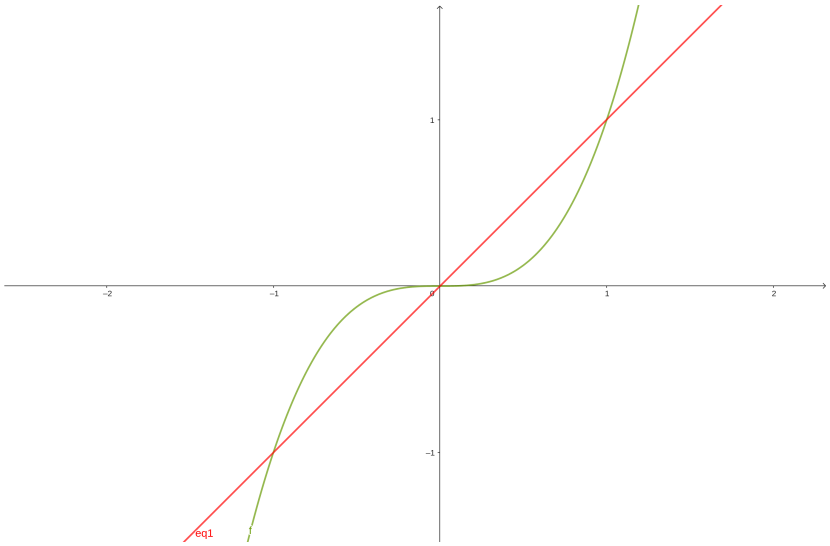

Figura 1.1: Gráfica de los puntos fijos de la EDs $x_{n+1} = x_n^3$

De manera más general se puede considerar el caso en donde f es lineal, o sea de la forma $f(x) = rx + b$, con $x \in \mathbb{R}$ y analicemos sus puntos de equilibrio cuando $|r| = 1$:

Cuando $r = 1$, la función es de la forma $f(x) = x + b$ y de aquí se desprenden dos casos:

i) si $b \neq 0$, entonces no hay puntos fijos.

ii) si $b = 0$, entonces todos los puntos son fijos.

Cuando $r = -1$, la función es de la forma $f(x) = -x + b$, sustituyendo $f(x) = x$, tenemos que $x = -x + b$ y despejando x llegamos a que $x = \frac{b}{2}$. En este caso $x = \frac{b}{2}$ es el único punto fijo, observemos también que:

$$f \circ f(x) = f(-x + b) = (x - b) + b = x$$

Lo cual quiere decir que todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ son periódicos de orden 2, con la excepción del punto $a = \frac{b}{2}$ pues es el único punto fijo.

Definición 1.5. *Un punto a sea periódico de orden 2 para un sistema dinámico quiere decir que dado:*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

si $a = f \circ f(a)$ *pero* $a \neq f(a)$.

Para la EDs lineal $f(x) = rx + b$ con $r \neq 1$ tenemos que al sustituir $x = f(x)$ y despejar x, obtenemos que el punto fijo es de la forma:

$$x = \frac{b}{1 - r}$$

También nos interesa saber que sucede con los puntos cercanos a los puntos de equilibrio de un sistema dinámico.

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$$

Se puede observar que $a = 0$ es un punto fijo y analizando los valores cercanos a 0, supongamos que $x_0 = 0{,}1$ entonces se tiene $x_1 = 0{,}19, x_2 = 0{,}3439, x_3 = 0{,}5695, ...$ entonces los puntos cercanos a 0 se alejan de él. Por otro lado, $a = 1$ es también un punto fijo, entonces podemos calcular algunos ejemplos y ver que los puntos cercanos a 1 se acercan cada vez mas. Por ejemplo, si $x_0 = 0{,}9, x_1 = 0{,}99, x_2 = 0{,}999, ...$

Definición 1.6. *Sea a un punto fijo del sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$, Se dice que a es estable o atractor si existe un numero $\epsilon > 0$ tal que si una solución $\{x_n\}$ satisface que $|x_0 - a| < \epsilon$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

El punto es repulsor o inestable si para todo $\epsilon > 0$ existe n tal que si $0 < |x_0 - a| < \epsilon$, entonces $\epsilon < |x_n - a|$.

Teorema 1.1. *Consideremos el sistema dinámico $x_{n+1} = rx_n$, entonces:*

a) Si $r = 1$, todos los puntos $a \in \mathbb{R}$ son de equilibrio y ninguno es atractor ni repulsor.

b) Si $r \neq 1$, el punto fijo es $a = 0$ y tenemos:

i) Si $|r| < 1$, entonces 0 es estable (atractor).

ii) si $|r| > 1$, entonces 0 es inestable (repulsor).

iii) Si $r = -1$, 0 no es atractor ni repulsor y todos los otros puntos son periódicos

de orden 2.

Teorema 1.2. *Consideremos el sistema dinámico:*

$$x_{n+1} = rx_n + b$$

con $b \neq 0$*, entonces:*

a) Si $r = 1$*, no hay puntos fijos. b) Si* $r \neq 1$*, el punto de equilibrio es:* $a = \dfrac{b}{1-r}$*, y tenemos que:*

i) Si $|r| < 1$*, a es estable o atractor)*

ii) si $|r| > 1$*, a es inestable o repulsor*

iii) Si $r = -1$*, 0 no es atractor ni repulsor y todos los otros puntos son periódicos de orden 2.*

1.7. Telarañas y diagramas fase

La estabilidad de los puntos fijos de la ecuación

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

con $n = 0, 1, \ldots$, puede estudiarse mediante un método gráfico conocido como diagrama de fases. Este consiste en dibujar la gráfica de la función $y = f(x)$ en el plano xy, junto con la recta $y = x$.

Notar que un punto fijo x_0 corresponde al punto de la diagonal del primer y tercer cuadrante (x_0, x_0), donde la gráfica de $y = f(x)$ intercepta a la recta $y = x$. El diagrama de fases muestra, junto con las gráficas anteriores, los pares

$$(x_0, 0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_2)$$

unidos mediante segmentos[13].

El *modelo de la telaraña*, también conocido como el *método de las iteraciones sucesivas*, es un enfoque utilizado para resolver ecuaciones en diferencias de manera aproximada, el cual es una herramienta especialmente útil a la hora de estudiar el comportamiento de estos esquemas iterativos, en particular cuando se trabaja con ecuaciones no lineales y se busca una solución numérica, así mismo nos permite conocer el comportamiento de las soluciones de una EDs si conocemos la gráfica de la función que define la ecuación.

Dicho método actúa de la siguiente manera:
Sea S_n una solución de (1.1) Supongamos que conocemos el valor inicial S_0 de la solución, y que tenemos representada la gráfica de la función f en el plano xy, es decir, el conjunto de puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $y = f(x)$. Entonces es posible hallar el siguiente término de la solución, $S_1 = f(S_0)$. Utilizando S_1 como el nuevo valor de S_0 y repitiendo el paso anterior es posible obtener $S_2 = f(S_1)$.

El procedimiento consiste en representar la bisectriz de los ejes $y = x$, también llamada *diagonal principal*, y actuar del siguiente modo:

1. Se levanta una línea vertical $y = s_0$ desde el punto $(s_0, 0)$ hasta que corta a la gráfica de f.

2. Desde ese punto de la gráfica, se traza una línea horizontal desde el punto hasta que corta a la diagonal principal $\{y = x\}$.

3. Se traza entonces una nueva línea vertical desde ese punto hasta que corta al eje OX.

4. El valor de la abscisa del punto obtenido es justamente S_1.

5. Reiterando este procedimiento se observa la evolución de una determinada solución.

A continuación se muestra la aplicación de dicho método para el análisis de una EDs lineal de primer orden.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un número fijo vamos a estudiar la función:

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

$f(x) = \lambda x$ es una función lineal. Esta ecuación admite la solución trivial $x_n = 0$. Sea x_0 la condición inicial, entonces:

$$x_1 = \lambda x_0, \qquad x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0, \qquad x_3 = \lambda x_2 = \lambda^3 x_0 \dots$$

$$x_n = \lambda^n x_0$$

Las soluciones $\{\lambda^n x_0\}$ con $n > 0$ son progresiones geométricas de razón λ y con termino inicial x_0. Discutimos las soluciones según los valores del parámetro λ.

Con $\lambda = 1$:

$x_n = x_0$ para todo $n \geq 1$ entonces toda solución es constante.

Con $\lambda = -1$:

$x_n = (-1)^n x_0$ por lo tanto obtenemos x_0 con n par y $-x_0$ con n impar, es decir, las soluciones son sucesiones alternadas:

$$\{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots\}$$

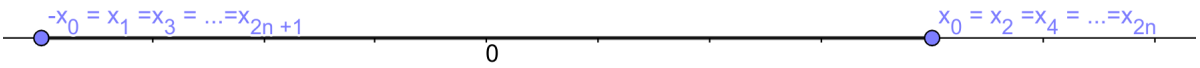

Figura 1.2: Soluciones alternadas para el caso $\lambda = -1$

Con $\lambda = 0$:

$x_n = 0$ cuando $n \geq 1$ por lo tanto la solución es $\{x_0, 0, 0, ...\}$.

También distinguimos entre otros casos:

i) $0 < \lambda < 1$

ii) $-1 < \lambda < 0$

iii) $\lambda > 1$

iv) $\lambda < -1$

Para **i)** $0 < \lambda < 1$

$$x_n = \lambda^n x_0 \text{ se aproxima a } 0, \text{ cada que } n \text{ se aproxima a } \infty$$

Si $x_0 > 0$, $x_n > 0$, con $n = 1, 2, \dots$

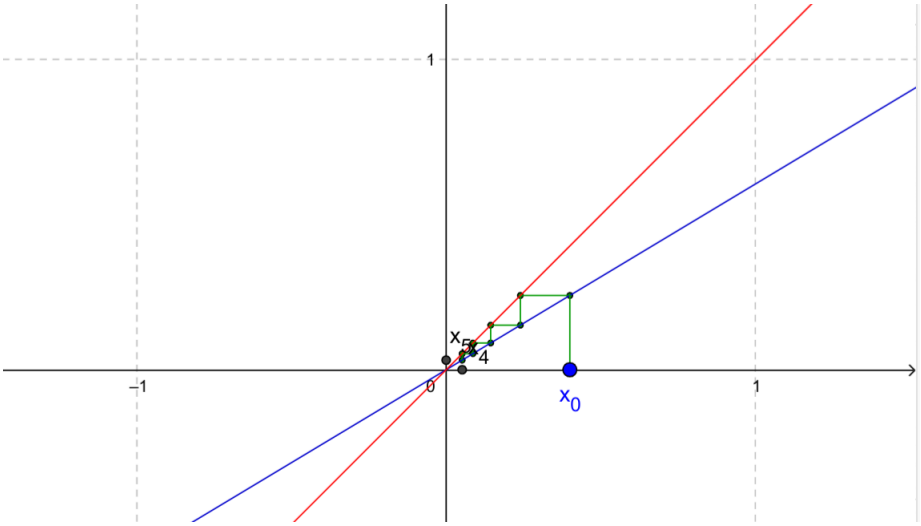

Figura 1.3: caso **i)** $0 < \lambda < 1$

Para **ii)** $-1 > \lambda > 0$

$$x_n = \lambda^n x_0 \text{ se aproxima a } 0, \text{ cada que } n \text{ se aproxima a } \infty$$

Como λ es negativo los signos de x_n y x_{n+1} son opuestos así que la soluciones van alternando el signo.

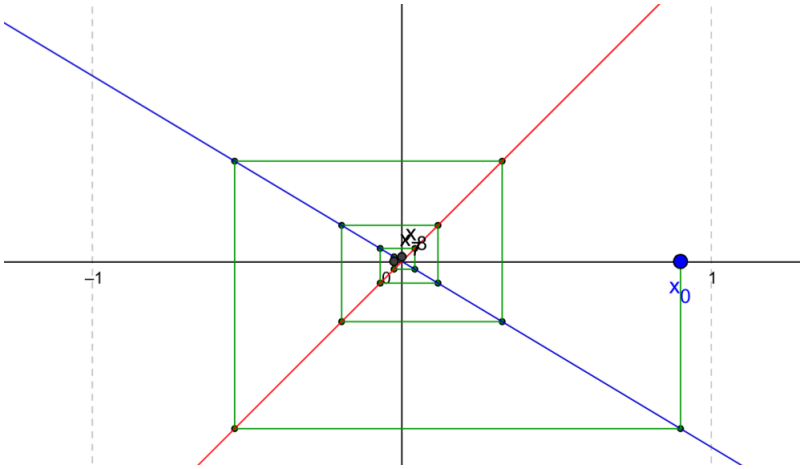

Figura 1.4: caso **ii)** $-1 > \lambda > 0$

Para **iii)**$\lambda > 1$

$$x_n = \lambda^n x_0, |x_n| \text{ crece a } \infty$$

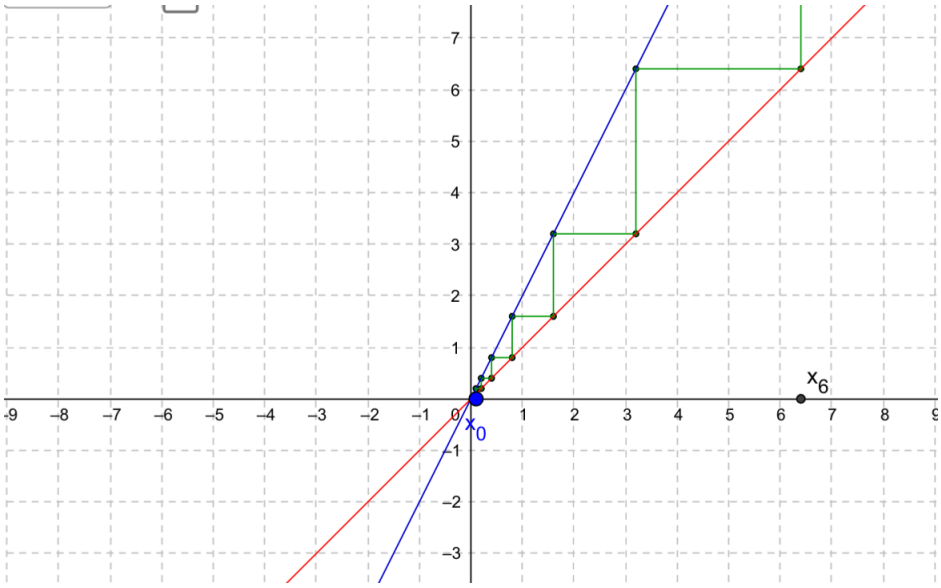

Figura 1.5: caso **iii)**$\lambda > 1$

Para **iv)** $\lambda < -1$

$$x_n = \lambda^n x_0, |x_n| \text{ crece a } \infty$$

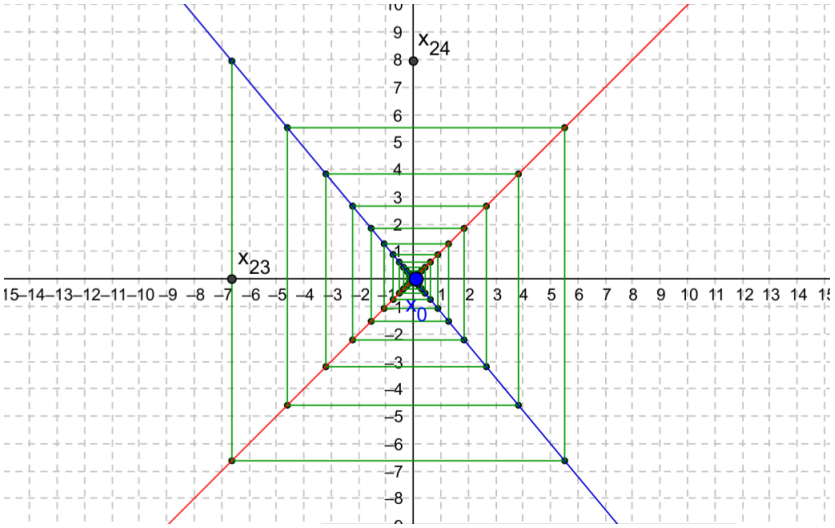

Figura 1.6: caso **iv)** $\lambda < -1$

Capítulo 2

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Una forma de resolver ecuaciones en diferencias es mediante métodos analíticos. Estos métodos implican encontrar una expresión de forma cerrada para la secuencia que satisfaga la ecuación dada. Existen varios métodos analíticos que se pueden utilizar para este propósito.

La sustitución directa es uno de los métodos analíticos más simples, implica introducir valores de la secuencia en la ecuación para obtener un sistema de ecuaciones lineales. Luego, este sistema se puede resolver para obtener una expresión de forma cerrada para la secuencia.

Como se mencionó anteriormente, una solución particular de una ecuación en diferencias como (1.1) será una sucesión $S = \{S_n\}_{n \in J}$ de valores que verifiquen que:

$$f(S_{n+k}, S_{n+k-1}, ..., S_n, n) = 0$$

para cada $n \in J$, en donde J es un conjunto de números naturales para el cual la función tiene sentido, además es necesario que:

$$(S_{n+k}, S_{n+k-1}, ..., S_n, n) \in dom(f)$$

lo cual ilustraremos utilizando el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. *Consideremos la ecuación de primer orden:*

$$x_{n+1} - 2x_n = 0 \tag{2.1}$$

observemos que si se le asigna un valor a x_n*, por ejemplo* $x_n = 3$*, obtenemos que* $x_{n+1} = 6$*,* $x_{n+2} = 12$*, etc, es decir obtenemos una sucesión* $\{3, 6, 12, \dots\}$ *generada por la ecuación* $x_n = 3 * 2^n$*. Para mostrar que* $x_n = 3 * 2^n$ *es una solución de* (2.1) *basta con sustituir* x_n *y* x_{n+1} *en la ecuación en diferencias, de aquí tenemos que:*

$$x_{n+1} = 3 * 2^{n+1}$$

y al sustituirla en (2.1) *tenemos:*

$$3 * 2^{n+1} - 2(3 * 2^n) = 0$$

$$3 * 2^n * 2 - 2 * 3 * 2^n = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto $x_n = 3 * 2^n$ *es una solución de* (2.1)*.*

Analizando el ejemplo pasado se puede deducir que $x_n = -4 * 2^n$, $x_n = \sqrt{5} * 2^n$, etc; también son candidatas a ser soluciones de (2.1), de una manera más general podemos decir que $x_n = c_1 * 2^n$ con alguna c_1 arbitraria es a quien llamaremos *solución general*, mientras que las demás soluciones generadas por ella, es decir cuando se le asigna un valor a c_1, serán llamadas *soluciones particulares.*

Centraremos ahora nuestro estudio en las EDs lineales homogéneas de grado k como (1.6) y enunciamos una serie de teoremas (obtenidos de [4]) que nos guían en la búsqueda de la solución general de este tipo de ecuaciones.

Teorema 2.1. ***(Existencia y unicidad)*** *Dada la ecuación* (1.6) *y dados n números reales* $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ *existe una única solución que verifica:*

$$y(0) = k_0, y(1) = k_1, \ldots, y(n-1) = k_{n-1}$$

Teorema 2.2. *Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también solución.*

Teorema 2.3. *Las soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n forman un espacio vectorial*

Teorema 2.4. *Dos soluciones* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *de las ecuaciones en diferencias de orden n son linealmente independientes si y solo sí los vectores de* $\mathbb{R}^n$ *que se forman con las condiciones iniciales*

$$y_1(0),\ y_1(1),\ \ldots,\ y_1(n-1)\ ;\ y_2(0),\ y_2(1),\ \ldots,\ y_2(n-1)$$

son linealmente independientes.

Teorema 2.5. *La dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n es n.*

Por lo tanto si tenemos que $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... , $y_n(t)$ son soluciones linealmente independientes de (1.6) y $y(t)$ es otra solución de la ecuación, existirán números reales c_1, c_2, ..., c_n tales que:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t).$$

Por tanto $y(t)$ será la solución general de (1.6). La determinación de las soluciones particulares se construirá obteniendo los valores de los parámetros bajo ciertas condiciones iniciales.

La solución general de un sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n, n)$ es una función con valores en los reales con dominio en $\{0, 1, 2, \dots\}$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Involucra a un parámetro $c \in \mathbb{R}$ y para cada valor de c tenemos una solución de la ecuación.

ii) La constante c queda determinada por la condición inicial, es decir por el valor x_0 y para cada condición inicial tenemos una solución así.

Las soluciones describen las órbitas de los puntos bajo el sistema dinámico en cuestión, en otras palabras, la solución con la condición inicial x_0 es la solución de puntos:

$$\{x_0, f(x_0), f \circ f(x_0), \dots, f \circ \cdots \circ f(x_0)\}$$

a la cual llamamos la *órbita* de x_0.

Determinar la solución general del sistema significa determinar todas las órbitas. Es frecuente encontrarse con que una ecuación en diferencias puede tener múltiples soluciones, lo cual puede complicar la identificación de una solución particular que sea de nuestro interés. Para resolver este problema, se utilizan condiciones iniciales, conocidas como problemas de valores iniciales (PVI), donde se especifican los valores de la magnitud en varios instantes consecutivos. Si la ecuación en diferencias está expresada de manera explícita, se puede asegurar que existe una única solución que cumple con dichas condiciones iniciales.

Es bastante común que las EDs tengan infinitas soluciones y para distinguir a una de ellas hay que agregar algunas condiciones adicionales. En concreto, dada una EDs de orden n, si precisamos cuál es el valor de la magnitud x en n instantes consecutivos, se formula el llamado problema de valores iniciales (PVI). En este caso, si la ecuación está en forma explícita, puede asegurarse que existe una única solución como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. *Dado el PVI*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ x_0 = 3, \end{cases}$$

Se tiene que $S_n = 2^n * 3$ *es la única solución ya que* $S_{n+1} = 3 * 2^{n+1} = 3 * 2 * 2^n = 2 * S_n$ *y esto es válido para todo* $n \in \mathbb{N}$. $S_0 = 3 * 2^0 = 3$.
Los primeros términos de esta solución son:

{3, 6, 12, 24, 48, 96, . . .}

2.1. Soluciones especiales

Las ecuaciones en diferencias pueden tener diferentes tipos de soluciones según sus características y propiedades Es importante destacar que el tipo de solución depende en gran medida de la naturaleza de la ecuación en diferencias y las condiciones iniciales o de frontera. Algunas ecuaciones pueden tener soluciones analíticas las cuales son posibles de expresar en términos de fórmulas cerradas, mientras que otras pueden requerir métodos numéricos para su análisis y aproximación[16]. A continuación se muestran algunas de las soluciones más comunes que podemos obtener al resolver una EDs.

Soluciones constantes

Una solución S_n es constante si es de la forma $S_n = p$, es decir $\{p, p, p, \dots\}$, en donde $p \in \mathbb{R}$. En este caso se dice que p es un punto fijo o punto de equilibrio.

Soluciones periódicas

Una solución S_n es periódica si existe un número $N \in \mathbb{N}$, $(N > 1)$ llamado período, tal que $S_{n+N} = S_n$ para cada $N \in \mathbb{N}$; además, no existe ningún otro número natural positivo menor que N que cumpla ésto. En este caso, dicha solución recibe el nombre de $N - ciclo$ o simplemente ciclo. En el caso en donde $N = 1$ obtenemos las soluciones constantes descritas en el párrafo anterior, que no se consideran ciclos.

Soluciones (estrictamente) monótonas

Una solución S_n es *creciente* si conserva el orden temporal, es decir, si dado cualquier par de números naturales n_1, n_2 tales que $n_1 \leq n_2$ se cumple que $S_{n_1} \leq S_{n_2}$ Por el contrario, decimos que es *decreciente* si $S_{n_2} \leq S_{n_1}$. Tanto las soluciones crecientes como las decrecientes se denominan soluciones monótonas. El término "estrictamente" se añade si las anteriores propiedades se cumplen para desigualdades estrictas. Como caso particular, los puntos fijos son soluciones monótonas, y son tanto crecientes como decrecientes, pero no son estrictamente monótonas.

Soluciones oscilantes

Una solución S_n es oscilante si dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ existen naturales n_1, n_2 mayores que n tales que $S_{n_2} \leq S_n \leq S_{n_1}$, o viceversa.

Soluciones acotadas

Una solución S_n es acotada si existe un número real $M \geq 0$ tal que $|S_n| \leq M$ para todo n natural. En particular, se dice que la solución es acotada inferiormente si existe un número real M tal que $M \leq S_n$, y se dice que es acotada superiormente si $S_n \leq M$, para cada n natural.

Por ejemplo, las soluciones de la EDs

$$x_{n+1} = -x_n \tag{2.2}$$

son de la forma $\{p, -p, p, -p, ...\}$ con $p \in \mathbb{R}$, y por lo tanto son acotadas. Además, toda solución creciente es acotada inferiormente, y toda solución decreciente es acotada superiormente.

Soluciones convergentes

Una solución S_n es convergente a un punto p si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que $|S_n - p| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. En tal caso se escribe $\lim_{n\to\infty} S_n = p$, ó simplemente $S_n \to p$.

Soluciones densas

Una solución acotada S_n es densa en un intervalo real $I \subset \mathbb{R}$ si su conjunto $\omega-limite$ contiene a I, es decir, si dados $p \in I, \epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ cualesquiera, existe un natural $n > n_0$ tal que $|S_n - p| < \epsilon$.

Ejemplo 2.3 (**Soluciones constantes y periódicas**).

La parábola logística de May. En 1976 el biólogo Robert May formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema aislado, diferente de la de Malthus. May tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de individuos. Con ello se llega a una ecuación de la forma

$$x_{n+1} = \alpha(x_n)x_n, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_n expresa la fracción de población existente en el período n con respecto al nivel máximo de población. May formuló la hipótesis de que $\alpha(x_n)$ debería decrecer linealmente cuando x_n creciera, hasta hacerse nulo cuando x_n tomara el valor 1. Es decir que $\alpha(x_n)$ fuera de la forma $\mu(1-x_n)$, llegando así a la ecuación de la parábola logística de May [6].

$$x_{n+1} = \mu(1-x_n)x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si consideramos el modelo no lineal $f(x) = 2.5x(1-x)$ y como valor inicial x_0 =0.8, podemos encontrar su órbita $\{0.8, 0.4, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, \ldots\}$, en consecuencia, x^* =0.6 es un punto de equilibrio estable. Podemos comprobarlo si dibujamos su diagrama de telaraña en donde además se observa que obtenemos una **solución constante**.

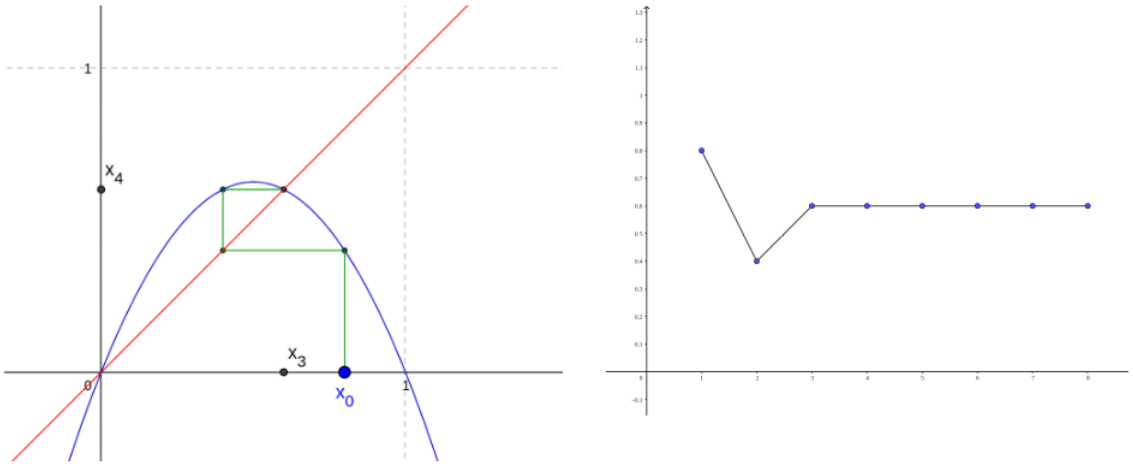

Figura 2.1: Diagrama de telaraña para $f(x) = 2.5x(1-x)$ y del punto fijo x^* =0.6

Ahora, consideramos el diagrama de telaraña para $f(x)$ =$3.3x(1-x)$ y x_0 =0.8. Los primeros 25 elementos de su órbita son: {0.8, 0.52799, 0.82241, 0.48196, 0.82392,

0.47873, 0.82350, 0.47963, 0.82363, 0.47936, 0.82359, 0.47944, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47946, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942 }.

Es decir, en este caso la solución tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a los valores $x_1^* \approx 0{,}4794270$ y $x_2^* \approx 0{,}823603$.

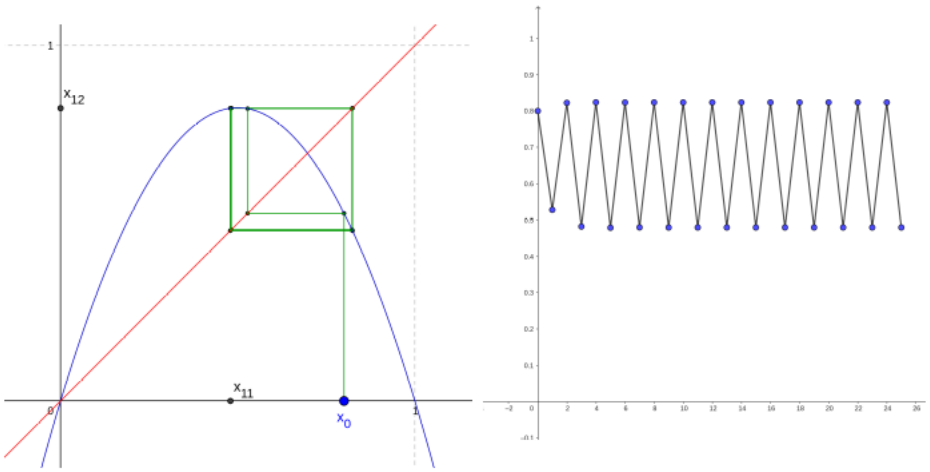

Figura 2.2: Diagrama de telaraña para $f(x) = 3.3x(1-x)$ y los puntos fijos $x_1^* \approx 0.4794270$ y $x_2^* \approx 0.823603$.

Ejemplo 2.4 (**Soluciones Monótonas**). *Dada las EDs*

$$x_{n+1} = 1.2x_n$$

Como el coeficiente es mayor que 1, la solución será monótonamente creciente a medida que n aumenta.

Dada la EDs

$$x_{n+1} = 0.8x_n$$

como el coeficiente es menor que -1, la solución será monótonamente decreciente a

medida que n aumenta y a su vez obtenemos una ***solución acotada*** *ya que la solución $x(n)$ convergerá hacia cero a medida que n aumenta.*

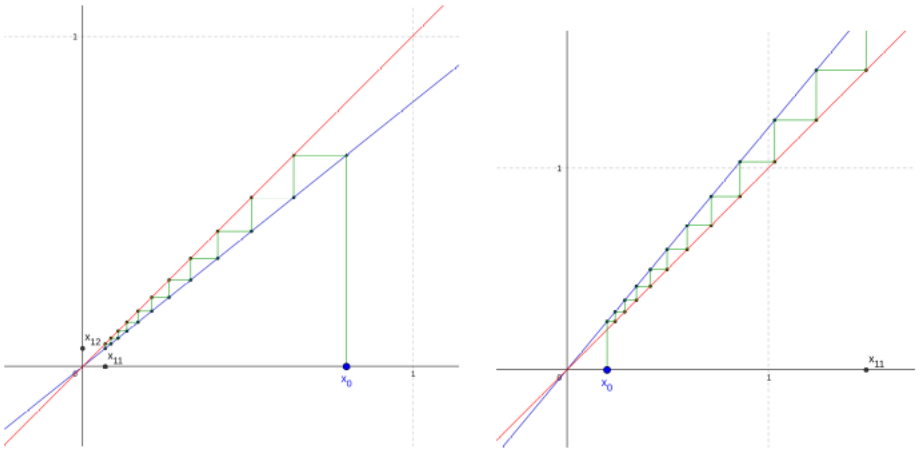

Figura 2.3: Diagrama de telaraña para

Ejemplo 2.5. *Las EDs de la forma $x_{n+1} = -ax_n$, con $a \in \mathbb{N}$ darán como resultado soluciones oscilantes.*

Dada la EDs

$$x_{n+1} = -2x_n$$

obtenemos soluciones oscilantes y no periódicas

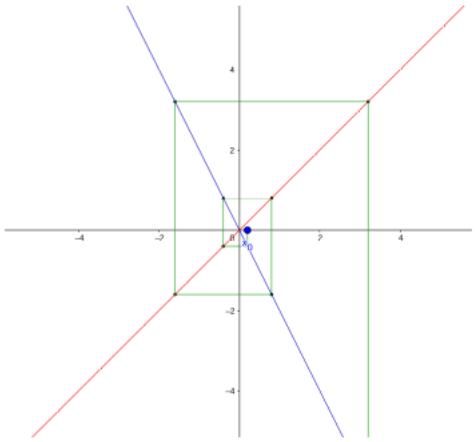

Figura 2.4: Diagrama de telaraña para

2.2. El método directo

Este método implica un enfoque de fuerza bruta. Dada alguna ecuación en diferencia con una condición inicial:

El primer paso consiste en generar la sucesión a partir de la ecuación en diferencias usando la condición inicial dada.

Después se busca un patrón emergente y se utiliza este patrón para escribir una posible solución, conocida como relación de recurrencia.

Ejemplo 2.6. *Al tratar de resolver la siguiente ecuación usando el método directo*

$$x_{n+1} = 2x_n \tag{2.3}$$

dado x_0 *entonces se puede encontrar una sucesión a partir de la EDs y la condición*

inicial.

Para $n = 0$*:*

$$x_1 = 2x_0$$

Para $n = 1$*:*

$$x_2 = 2x_1 = 2(2x_0) = 4x_0$$

Para $n = 2$*:*

$$x_3 = 2x_2 = 2(4x_0) = 8x_0$$

Para $n = 3$*:*

$$x_4 = 2x_3 = 2(8x_0) = 16x_0$$

$$\vdots$$

Podemos determinar un patrón en la secuencia, es decir la relación de recurrencia estará dada por

$$x_n = 2^{n+1}x_0.$$

2.3. Resolución de la ecuación homogénea

Las ecuaciones características son otro método analítico que se puede utilizar para resolver ecuaciones en diferencias. Este método implica encontrar las raíces de un polinomio característico asociado con la ecuación dada. La solución de la ecuación en diferencias se puede expresar como una combinación lineal de funciones exponenciales, donde los coeficientes están determinados por las condiciones iniciales.

Primero consideramos la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = ax_n \tag{2.4}$$

en donde a no depende de n. Como se observó anteriormente, dada alguna condición inicial $x(0) = x_0$, tenemos

$$x_n = x_0 a^n.$$

El parámetro que aparece en la ecuación de diferencias original, también es un parámetro en la solución y, del método anterior tenemos la aparición del término exponencial a^n en la solución. Este es un patrón común que surge en las soluciones de ecuaciones en diferencias lineales que tienen términos proporcionales a los términos que pertenecen a la sucesión. Usaremos ésto para construir soluciones a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Ahora consideremos la ecuación de diferencias lineal de segundo orden:

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \tag{2.5}$$

dónde a, b y c son constantes. Para resolver esta ecuación, se selecciona una solución de prueba adecuada de la forma $x_n = A\lambda^n$, donde λ es una constante aún por determinar. De este modo, $x_{n+1} = A\lambda^{n+1} = A\lambda\lambda^n$. La sustitución directa de la solución de prueba en (2.5) produce una ecuación algebraica:

$$A\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)\lambda^n = 0.$$

Dado que requerimos soluciones no triviales A, $\lambda^n \neq 0$ así que:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{2.6}$$

Llamamos a (2.6) la ecuación característica o ecuación auxiliar de la ecuación homogénea (2.5). Las raíces de (2.6) son:

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La naturaleza de las soluciones de (2.6) depende de los valores λ_1 y λ_2 y examinaremos cada uno por separado. En cada caso, se considerará el comportamiento del discriminante, para los casos que $b^2 - 4ac$ es positivo, negativo o cero.

Caso I: Raíces reales distintas $b^2 - 4ac > 0$

Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales y distintas así que (2.6) tiene dos soluciones distintas,

$$x_1(n) = \lambda_1^n \quad \text{y} \quad x_2(n) = \lambda_2^n.$$

Dado que (2.6) es de segundo orden, debe contener dos constantes arbitrarias. Además, (2.6) es lineal y homogénea, por lo que por el principio de superposición, cualquier combinación lineal de dos soluciones también es una solución. Por tanto, la solución

general de la ecuación característica es:

$$x_n = x_n^c = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

con c_1 y c_2 como constantes arbitrarias.

Caso II: Raíces reales repetidas $b^2 - 4ac = 0$

Las raíces de (2.6) coinciden y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{b}{2a}$ entonces existe una solución

$$x_1(n) = \lambda^n.$$

Dado que la ecuación en diferencias es de segundo orden y debe contener dos constantes arbitrarias, concluimos que debe existir una segunda solución $x_2(n)$. Para determinar esta segunda solución, considere una segunda solución de prueba $x_n = Bn\lambda^n$, que es similar, pero linealmente independiente de la primera solución de prueba. La sustitución directa de esta solución de prueba en (2.5) da como resultado:

$$aB(n+2)\lambda^{n+2} + bB(n+1)\lambda^{n+1} + cBn\lambda^n = 0,$$

y y factorizando términos:

$$0 = B\lambda^n \left(a(n+2)\lambda^n + b(n+1)\lambda + cn\right),$$
$$0 = B\lambda^n \left((a\lambda^2 + b\lambda + c)n + 2a\lambda^2 + b\lambda\right).$$

Sin embargo $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, entonces:

$$0 = 2a\lambda^2 + b\lambda.$$

Se sigue que o bien $\lambda = 0$ o bien $2a\lambda + b = 0$. Como requerimos soluciones no triviales, descartamos $\lambda = 0$ y en su lugar se toma $\lambda = -\frac{b}{2a}$, por lo tanto la solución será de la forma:

$$x_2(t) = n\lambda^n.$$

Ahora solo es necesario combinar x_1 y x_2 para formar la solución general:

$$x_n = x_n^c = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n,$$

$$x_n = x_n^c = (c_1 + c_2 k)\,\lambda^n$$

Con c_1 y c_2 como constantes arbitrarias.

Caso III: Raíces conjugadas complejas $b^2 - 4ac < 0$

En este caso λ_1 y λ_2 son raíces complejas conjugadas de la ecuación (2.6). Por lo tanto, tiene dos soluciones distintas: el par de raíces conjugadas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, donde $i = \sqrt{-1}$. Ahora podemos reescribir x_1 como:

$$x_1(n) = (\alpha + i\beta)^n,$$

y del mismo modo, reescribir x_2 como:

$$x_2(n) = (\alpha - i\beta)^n,$$

De nuevo, dado que (2.5) es de segundo orden, debe contener dos constantes arbitrarias. Además, por la linealidad y homogeneidad de (2.5), el principio de superposición implica que cualquier combinación lineal de estas dos soluciones es una solución. Por tanto, la solución general de (2.5) es:

$$x_n = x_n^c = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

con c_1 y c_2 como constantes arbitrarias.

Nos gustaría reescribir estas soluciones de una forma más natural, libres de los números complejos asociados con el discriminante negativo. Para ello se define:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Recordemos la identidad de Euler:

$$z_\pm = \alpha \pm i\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{\pm i\theta}, \tag{2.7}$$

con :

$$\theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}.$$

Reescribiendo la solución general usando la identidad de Euler se obtiene:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n \\ &= c_1\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{i\theta}\right)^n + c_2\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{-i\theta}\right)^n \\ &= \left(\alpha^2+\beta^2\right)^{\frac{n}{2}}\left(c_1e^{in\theta} + c_2e^{-in\theta}\right). \end{aligned}$$

con $R = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, entonces por la identidad de Euler,

$$x_n = R^n\left((c_1+c_2)\cos n\theta + i(c_1-c_2)\sin n\theta\right).$$

2.4. El método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados es una técnica utilizada para encontrar soluciones particulares de ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas,es análogo al método de coeficientes indeterminados que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas [11], es decir una EDs de la forma:

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + ... + a_{k-1}(n)x_{n+1} + a_k(n)x_n = b(n), \tag{2.8}$$

con $a \neq 0$, donde a_1, ..., a_{k-1}, a_k son coeficientes constantes y $b(n)$ es una secuencia dada.

Para utilizar el método, primero debemos encontrar la solución general de la ecuación en diferencias homogénea asociada. Luego, buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea que tenga la misma forma funcional que $b(n)$ pero con coefi-

cientes indeterminados. Los coeficientes indeterminados se determinan sustituyendo la solución particular en la ecuación no homogénea y comparando los términos semejantes.

Una vez que se encuentran los coeficientes indeterminados, la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea se obtiene sumando la solución general de la homogénea y la solución particular encontrada con los coeficientes indeterminados.

Es importante tener en cuenta que este método funciona mejor cuando $b(n)$ tiene una forma específica, como polinomios, exponenciales, funciones trigonométricas o combinaciones de ellas [6]. Los casos más usuales que suelen presentarse son los siguientes:

Si $b(n) = \alpha^n$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $\beta\alpha^n$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).

Si $b(n)$ es un polinomio de grado n, entonces ensayamos con un polinomio del mismo grado. Si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene grado de multiplicidad γ, probaremos con un polinomio de grado $n+\gamma$.

Si $b(n)$ es seno o coseno de αn, entonces tomaremos $\beta sen(\alpha n) + \gamma cos(\alpha n)$ y determinaremos los valores de las constantes β y γ.

Desarrollaremos este método en el siguiente ejemplo, que aunque es muy restrictivo, pues depende de la forma del término independiente, es bastante práctico.

Ejemplo 2.7. *Considere el sistema:*

$$5x_{n+2} - x_n = 3^n$$

Entonces, obtenemos la ecuación característica: $5\lambda^2 - 1 = 0$ *y resolviendo para* λ *tenemos que:* $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ *lo cual nos permite encontrar una solución general de la forma:*

$$x_n^g = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$$

Ahora, para poder encontrar la solución de la ecuación completa, se propone una solución particular de la forma: $x_n^p = \beta 3^n$ *y sustituyendo en la ecuación inicial tenemos:*

$$5\beta 3^{n+2} - \beta 3^n = 3^n$$

$$3^n \left(5\beta 3^2 - \beta\right) = 3^n$$

$$5\beta 3^2 - \beta = 1$$

$$45\beta - \beta = 1$$

$$\beta = \frac{1}{44}$$

Por lo tanto la solución buscada es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n + \frac{1}{44}3^n$$

Ejemplo 2.8. *Considere el siguiente sistema dinámico*

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3n^2 \tag{2.9}$$

La ecuación característica correspondiente a este sistema es: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ *y resolviendo para* λ *se tiene que* $\lambda_{1,2} = 2$*, es decir que se tienen raíces repetidas, por lo tanto la solución general(denotada por* x_n^g*) buscada es*

$$x_n^g = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

Al ser el término no homogéneo $b(n)$ *un polinomio de segundo grado y el 1 no es raíz del polinomio característico, probamos con una solución particular(denotada por* x_n^p*) del tipo:*

$$x_n^p = An^2 + Bn + C$$

Entonces:

$x_{n+1}^p = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

$x_{n+2}^p = a(n+2)^2 + b(n+2) + c$

y sustituyendo en la ecuación (2.9)*, obtenemos:*

$$A(n+2)^2 + B(n+2) + C - 4\left[A(n+1)^2 + B(n+1) + C\right] + 4\left[An^2 + Bn + C\right] = 3n^2$$

Al desarrollar y agrupar términos obtenemos:

$$An^2 - 4An + Bn - 2B + C = 3n^2$$

y reagrupando para obtener la forma de un polinomio de segundo orden tenemos:

$$An^2 + (-4A + B)n + (-2B + C) = 3n^2 + 0t + 0$$

por ende $A = 3$, $-4A + B = 0 \Rightarrow B = 4A = 12$ *y* $-2B + C = 0 \Rightarrow C = 2B = 24$
Por lo tanto la solución buscada es:

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + 3n^2 + 12n + 24.$$

2.5. Métodos iterativos

Los métodos iterativos son otra forma de resolver ecuaciones en diferencias. Estos métodos implican generar una secuencia de aproximaciones que convergen a la solución exacta. Existen varios métodos iterativos que se pueden utilizar para este propósito.

La iteración de punto fijo es uno de los métodos iterativos más simples. Implica comenzar con una suposición inicial para la solución y luego aplicar repetidamente una función a esta suposición hasta que la secuencia converja a la solución exacta.

El método de Newton es otro método iterativo que se puede utilizar para resolver ecuaciones en diferencias. Este método implica encontrar las raíces de una función apli-

cando repetidamente la derivada de la función a una estimación inicial.

El método de Gauss-Seidel es un método iterativo que se puede utilizar para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este método implica actualizar cada variable del sistema en función de los valores de las otras variables del sistema, hasta que la solución converja a la solución exacta.

2.6. Técnicas Numéricas

Las técnicas numéricas implican aproximar la solución utilizando métodos numéricos. Estos métodos son particularmente útiles para resolver ecuaciones en diferencias complejas o no lineales que no pueden resolverse analíticamente.

El método de Euler es uno de los métodos numéricos más simples. Implica aproximar la solución utilizando la pendiente de la recta tangente en cada punto de la secuencia.

El método de Runge-Kutta es un método numérico más preciso que se puede utilizar para resolver ecuaciones en diferencias. Este método implica calcular la pendiente en varios puntos intermedios de la secuencia y luego usar estas pendientes para obtener una aproximación más precisa de la solución.

El método de diferencias finitas es un método numérico que se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Este método implica aproximar las derivadas de la ecuación utilizando diferencias finitas y luego resolver el sistema resultante de

ecuaciones lineales.

Existen varios métodos diferentes que se pueden utilizar para resolver ecuaciones en diferencias, cada uno con sus propias fortalezas y debilidades. La elección del método depende del problema específico en cuestión y del nivel de precisión deseado.

2.7. Estabilidad de las soluciones

Anteriormente se dio un criterio para decidir si los puntos de equilibrio de una EDs lineal son atractores o repulsores, esto dependía básicamente de la pendiente de la recta $y = f(x)$, donde $f(x) = rx + b$ determina la ecuación en diferencias. Se demostró que el punto fijo es atractor cuando $|r| < 1$ y repulsor cuando $|r| > 1$. Al llevar dichos resultados a sistemas no lineales, la idea de utilizar el hecho de que la derivada de una función diferenciable f da una aproximación lineal de f localmente, y por lo tanto la estabilidad local de f se puede decidir por medio de su derivada [7].

Teorema 2.6. *Sea a un punto fijo del sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$, donde f es una función diferenciable de clase C^1 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces:*
i) a es atractor si $|f'(a)| < 1$
ii) a es repulsor si $|f'(a)| > 1$
pero aún no se puede concluir nada si $|f'(a)| = 1$

Ejemplo 2.9. *:Considere el sistema dinámico*

$$x_{n+1} = 2.4x_n - 0.14x_n^2$$

La función asociada es

$$f(x) = 2.4x - 0.14x^2$$

Los puntos fijos ocurren cuando:

$$x = 2.4x - 0.14x^2$$

es decir, cuando

$$x(1.4 - 0.14x) = 0$$

por lo tanto los puntos fijos son $x = 0$ *y* $x = 10$

La derivada de f *es:*

$$f^{'} = 2.4 - 2.8x$$

Así que

$$|f^{'}(0)| = 2.4 > 1$$

y

$$|f^{'}(10)| = 2.4 - 2.8 = -0.4$$

por lo tanto $x = 0$ *es repulsor y* $x = 10$ *es atractor.*

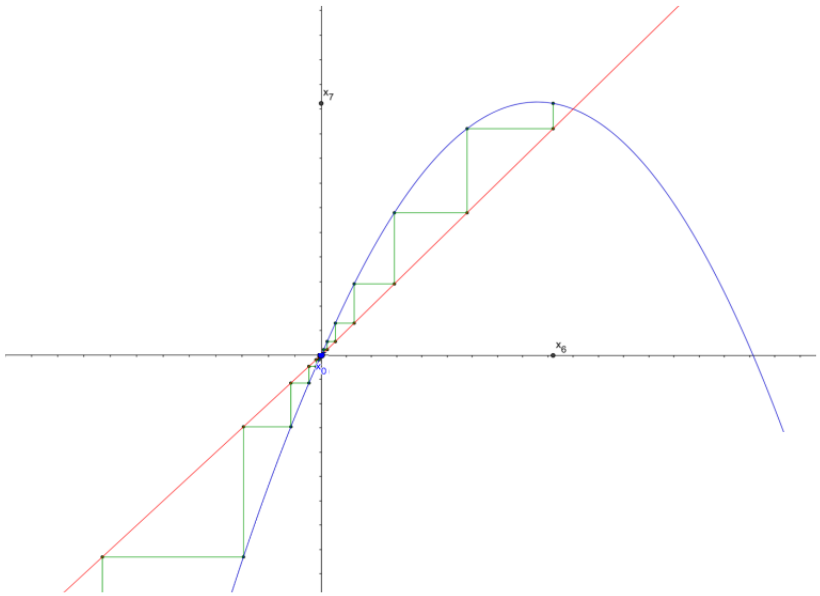

Figura 2.5: Gráfica de la telaraña correspondiente al ejemplo anterior

Ahora se estudiará que sucede con la estabilidad de las soluciones cuando la derivada es ± 1.

Caso I) La derivada es 1: Consideremos el sistema dinámico

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

y sea a un punto fijo, es decir, $f(a) = a$, tal que $f'(a) = 1$. Sea Γ la gráfica de f, entonces la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto a está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) = x - a$$

es decir $y = x$, así que Γ es tangente a la diagonal. consideremos ahora la segunda

derivada de f en a. La segunda derivada de una función mide la velocidad de cambio de la primera derivada, es decir, como varía la inclinación de la recta tangente a Γ. Hay tres posibilidades:

i) $f''(a) > 0$

ii) $f''(a) = 0$

iii) i) $f''(a) < 0$

Si $f''(a) > 0$ entonces $f'(x)$ es estrictamente creciente en a, en particular $f'(x) > 1$ en puntos cercanos a a por la derecha, y $0 < f'(x) < 1$ para puntos cercanos a a por la izquierda. Es decir que si x está cerca de a por la derecha, la pendiente de la recta tangente en x a la gráfica de f es mayor a la pendiente de la diagonal, mientras que si x está a la izquierda de a, entonces la tangente a Γ en x tiene pendiente menor que 1, se puede concluir entonces que Γ es una curva cóncava hacia arriba, por lo tanto, si x es un punto cercano a a, entonces $f(x)$ está arriba de la diagonal y por lo tanto $f(x) > x$. Repitiendo el argumento, obtenemos que $f_2(x) > f_1(x)$ y así sucesivamente. además para x cercana a a, la derivada de f es mayor que 0, así que f es creciente cerca de a. Por lo tanto si x es menor que a se tiene que $f(x) < f(a) = a$, $f_2(x) < f_2(a) = a$, etc. Así que para $x < a$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge a a, mientras que si $x > a$ los iterados de x se estarán alejando de a, así que a atrae por la izquierda y repele por la derecha, en este caso decimos que a es *semi-estable por la izquierda.*

Si $f''(a) < 0$ entonces f' es decreciente en a. Por lo tanto, si x es un punto cercano por la izquierda de a, entonces $f'(x) > 1$. En a la pendiente es 1, la tangente es la diagonal y a la derecha de a la pendiente es menor que 1. Así que la curva es cóncava hacia abajo. Esto implica que para toda x cerca de a se tiene que $f(x) < x$. Iterando

el proceso obtenemos

$$x > f(x_1) > f(x_2) > \dots$$

Por lo tanto si $x < a$, los puntos se alejan de a, es decir, que a repele por la izquierda, mientras que si $x > a$, entonces las iteraciones de x convergen a a, es decir que a atrae por la derecha. En este caso decimos que a es *semi-estable por la derecha.*

Si $f^{''}(a) = 0$ entonces a es un punto en donde la grafica Γ de f cambia su concavidad, supongase que $f^{'''}(a) \neq 0$ entonces hay dos posibilidades:
si $f^{'''}(a) > 0$ entonces $f^{''}$ es creciente en a, como $f^{''}(a) = 0$ entonces $f^{''}$ pasa de negativa a positiva en a.

Teorema 2.7. *Sea a un punto fijo del sistema dinámico*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

tal que $f^{'}(a) = 1$.

i) Si $f^{''}(a) > 0$, entonces a es semi-estable por abajo

ii) Si $f^{''}(a) < 0$, entonces a es semi-estable por arriba

iii) Si $f^{''}(a) = 0$ y $f^{'''}(a) < 0$, entonces es atractor débil

iv) Si $f^{''}(a) = 0$ y $f^{'''}(a) > 0$, entonces es repulsor débil

Teorema 2.8. *Sea a un punto fijo del sistema dinámico*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

tal que $f^{'}(a) = 1, f^{''}(a) = \dots f^{r-1}(a) = 0$ y $f^{r}(a) \neq 0$, con $r > 1$.

i) Si $f^r(a) > 0$ y r es par, entonces a es semi-estable por la izquierda.

ii) Si $f^r(a) > 0$ y r es impar, entonces a es repulsor.

iii) Si $f^r(a) < 0$ y r es par, entonces a es semi-estable por la derecha.

iv) Si $f^r(a) < 0$ y r es impar, a entonces es atractor.

Caso II) La derivada es -1:

Observemos qué sucede cuando $f^{'}(a) = -1$, en donde a es un punto fijo. La idea es construir el sistema dinámico

$$g(n) = f \circ f(n)$$

y demostrar el siguiente lema:

Lema 2.1. *El sistema dinámico generado por g satisface:*

i) Cada punto fijo de f es también un punto fijo de g.

ii) $g^{'}(a) = 1, g^{''}(a) = 0, g^{'''}(a) = -2f^{'''}(a) - 3\left[f^{''}(a)\right]^2$.

iii) Si a es atractor para g, entonces a es atractor para f, Si a es repulsor para g, entonces a es repulsor para f.

Por lo tanto la estabilidad de f en sus puntos fijos la podemos conocer a través de la estabilidad de g y para decidir la estabilidad de g se utiliza el teorema anterior.

Teorema 2.9. *Sea a un punto fijo de $f(x)$, función diferenciable tal que $f^{'}(a) = -1$. Sea $g(x) = f \circ f(x)$, entonces:*

$$g^{'''}(a) = -2f^{'''}(a) - 3\left[f^{''}(a)\right]^2$$

i) Si este número es negativo, a es atractor.

ii) Si este número es positivo, a es repulsor.

A lo largo de estos capítulos se han estudiado proposiciones básicas sobre los factores que determinan la estabilidad local y global de los sistemas dinámicos discretos en el contexto elemental de sistemas autónomos unidimensionales de primer orden. Estas proposiciones básicas proporcionarán los fundamentos conceptuales para la generalización del análisis para sistemas dinámicos multidimensionales, de orden superior, no autónomos y no lineales.

El análisis cualitativo del sistema dinámico se basa en el análisis de la solución explícita de este sistema. Sin embargo, una vez que se derivan las proposiciones básicas que caracterizan el comportamiento de este sistema dinámico, ya no se requiere una solución explícita para analizar el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico particular de esta clase[10].

Capítulo 3

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Las ecuaciones diferenciales resultan ser herramientas excelentes para modelar situaciones que implican cambios continuos. Sin embargo, cuando el cambio ocurre de forma incremental en lugar de continua, las ecuaciones diferenciales presentan ciertas limitaciones. En estos casos, recurrimos a las ecuaciones en diferencias, las cuales nos permiten modelar cambios discretos.

La importancia de las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias radica en el creciente estudio y simulación de modelos discretos en las diferentes disciplinas que modelan y estudian dichos sistemas como lo son la Ingeniería y la Economía, dado que este tipo de modelado es capaz de ajustarse de una manera más eficiente a la realidad. Por otra parte, es un área muy importante en otras ciencias como las Matemáticas, lo cual nos permite ver que tiene un extenso campo teórico como práctico[4].

En modelos discretos, las variables de estado cambian solo en un número contable de puntos en el tiempo. Estos puntos en el tiempo son aquellos en los que ocurre el cambio de estado. Por lo tanto, en modelado de tiempo discreto, existe una función de transición de estado que calcula el estado en el próximo instante de tiempo dado el estado actual y la entrada. Los cambios son realmente discretos en muchas situaciones que ocurren en intervalos de tiempo bien definidos. Además, en muchos casos, los datos suelen ser discretos en lugar de continuos. Por lo tanto, debido a las limitaciones de los datos disponibles, podemos estar obligados a trabajar con el modelo discreto, incluso si el modelo subyacente es continuo [14].

Ejemplos de situaciones que involucran cambios incrementales son las poblaciones de animales que se reproducen una vez al año, el interés compuesto calculado mensualmente, así como en modelos económicos y de enfermedades infecciosas.
A continuación se mencionan algunas áreas en donde las ecuaciones en diferencias tienen aplicaciones:

1) Relación entre el caos y la criptografía: Relacionar el Caos con la Criptografía es un área de investigación reciente. Por ejemplo, en 1998, Baptista probó que es posible cifrar un mensaje si se aprovechan las propiedades ergódicas del mapa logístico en una dimensión. En 2001, Dachselt y Schwarz demostraron que los sistemas caóticos discretos cumplen con los requerimientos necesarios para ser aplicados en algoritmos cifradores. También en 2001, Kocarev brindó un panorama general del campo de la Criptografía Caótica: las propiedades que exhiben los sistemas caóticos y su aplicación a algoritmos cifradores, criterios para la elección de un sistema caótico adecuado y los problemas que aún se deben estudiar y resolver.

2) Procesamiento de señales: En el procesamiento de señales, las ecuaciones en diferencias se utilizan para describir la evolución temporal de señales discretas, como las señales de audio o las imágenes digitales. Estas ecuaciones se utilizan en filtros digitales, compresión de datos y otras técnicas de procesamiento de señales[12].

3) Cadenas de Markov: Una cadena de Markov es un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados en cual la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior con unas probabilidades que están fijas.

3.1. Aplicaciones de las ecuaciones en diferencias de primer orden

Los modelos matemáticos pretenden ayudar a entender mejor los fenómenos que describen, desarrollando la intuición sobre el funcionamiento; llegando al punto de predecir lo que pasará bajo idénticas condiciones [3] , y a su vez, las ecuaciones en diferencias surgen como modelos matemáticos de fenómenos que evolucionan en el tiempo en momentos separados por intervalos de amplitud constante, por ejemplo el crecimiento de poblaciones de grupos de varias especies de mamíferos, que se aparean sólo en alguna estación del año, o las poblaciones de insectos, con etapas claramente diferenciadas en su ciclo de vida (huevos, larvas, pupas y adultos) [8]. A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 3.1. *Un pequeño pueblo tiene una población de 12 mil personas. Se conoce que la tasa de mortalidad anual corresponde a un 3 % de la población del año en curso y que cada año se reportan 720 nacimientos.*

a) *¿Cuál es la población al cabo de 5 años?*

b) *¿Cuál es la población a largo plazo?*

Solución: Sea P_n la población al final del año n.

Puede formularse la sig ecuación.

$$\begin{array}{c}\text{Población al}\\ \text{final del año}\end{array} = \left(\begin{array}{c}\text{población sobreviviente}\\ \text{del año anterior}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Nacimientos durante}\\ \text{el año anterior}\end{array}\right)$$

$$P_n = (P_{n-1} - 0.03P_{n-1}) + 720.$$

De donde se puede observar que $A = 0.97P_{n-1}$ y $B = 720$, por lo que

$$P_n = A^n(P_0 - P^*) = (0{,}97)^n(-12000) + 24000 \tag{3.1}$$

con $P^* = \dfrac{B}{1-A} = \dfrac{720}{1-0{,}97} = 24000.$

Para responder el inciso *a)* evaluamos (3.1) en $n = 5$ y obtenemos:

$$P_5 = (0.97)^5(-12000) + 24000 = 13695$$

Para responder el inciso *b)* calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}[(0.97)^n(-12000) + 24000] = 24000$$

Es decir que la población a lago plazo será de 24000 personas. A continuación se muestra

una gráfica de el crecimiento de la población, la cual nos indica que a partir de cierta cantidad de años la población comenzará a mantenerse constante en 24000 habitantes.

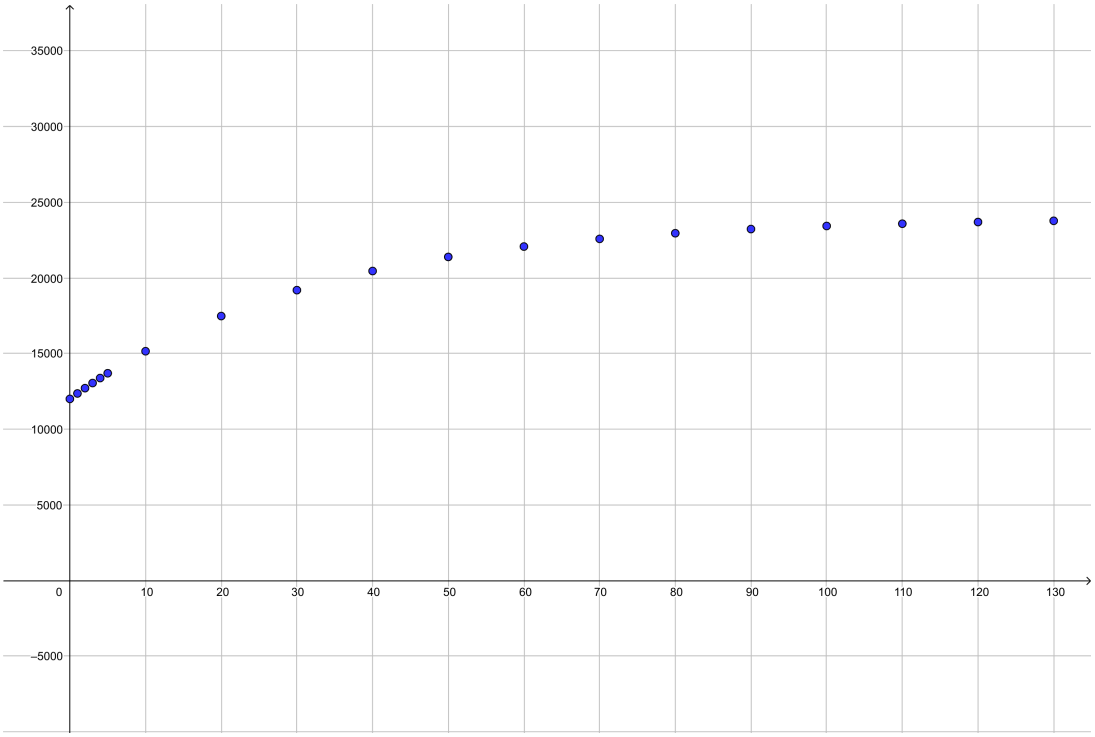

Figura 3.1: Gráfica del crecimiento de la población durante los próximos años

Ejemplo 3.2. *Un sector de una población perteneciente a una comunidad padece una enfermedad degenerativa. Se conoce que cada año aparecen 1000 nuevos casos de la enfermedad y la mitad de los casos existentes son sanados. Al final del año 2019 se reportaban 1200 casos de la enfermedad. Determine el número de casos esperados al final de cada año sucesivo hasta el año 2026.*

Solución: Sea y_n el numero de enfermos que se tiene en el año n. Puede formularse la ecuación en diferencias siguiente:

$$\begin{pmatrix} \text{Número de enfermos} \\ \text{del año actual} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \text{Número de enfermos} \\ \text{del año anterior} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Nuevos} \\ \text{contagios} \end{array} \right)$$

Para el año 2019 se reportaron 1200 casos así que la condición inicial asociada será $y_0 = 1200$.

Evaluando obtenemos:

$$y_1 = 0.5y_0 + 1000 = 1600$$
$$y_2 = 0.5y_1 + 1000 = 1800$$
$$y_3 = 0.5y_2 + 1000 = 1900$$
$$y_4 = 0.5y_3 + 1000 = 1950$$
$$y_5 = 0.5y_4 + 1000 = 1975$$
$$y_6 = 0.5y_5 + 1000 = 1987.5$$
$$y_7 = 0.5y_6 + 1000 = 1993.75$$

La siguiente tabla muestra la cantidad de personas enfermas correspondientes a cada año:

Año	Personas enfermas
2019	1200
2020	1600
2021	1800
2022	1900
2023	1950
2024	1975
2025	1988
2026	1994

Ejemplo 3.3. *En un modelo económico: Y representa el ingreso, C el consumo, I la inversión y S el ahorro.*

Se conoce que:

- *a. El consumo en el período n es cuatro veces la suma del mismo período más uno.*
- *b. La primera diferencia del ingreso en el período $n-1$ es la suma del consumo, la inversión y el ahorro en el período n.*
- *c. El ahorro en el período n es el ingreso del período anterior.*
- *d. Tres veces la inversión en el período es el ingreso de ese período.*
- *e. $Y_1 = 2$.*

1. Determine y resuelva la ecuación en diferencias para el ingreso.
2. Estudie el comportamiento de la ecuación.

Sea:

Y_n: Ingreso durante el período n.

C_n: Consumo durante el período n.

I_n: Inversión durante el período n.

S_n:Ahorro durante el período n.

Para a:

$$C_n = 4(Y_n + 1)$$

Para b:

$$\Delta(Y_{n-1}) = C_n + I_n + S_n$$

Para c:

$$S_n = Y_{n-1}$$

Para d:

$$3 + I_n = Y_n$$

Para e:

$$Y_1 = 2$$

como:

$$Y_n - Y_{n-1} = C_n + I_n + S_n$$

Sustituyendo podemos deducir que:

$$Y_{n-1} - Y_n = 4(Y_n + 1) + \frac{1}{3}Y_n + Y_{n-1},$$

y simplificando la ecuación obtenemos:

$$Y_n = -\frac{3}{5}Y_{n-1} - \frac{6}{5}.$$

La ecuación ya tiene una forma lineal con $A = -\frac{3}{5}$ y $B = -\frac{6}{5}$.

Al determinar la condición inicial obtenemos que:

$$Y_1 = -\frac{3}{5}Y_0 - \frac{6}{5}$$

por lo tanto:

$$Y_0 = -\frac{16}{3}$$

Para **a)**:

La solución viene dada por:

$$Y_n = A^n(Y_0 - Y^*)Y^* = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \left[-\frac{16}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right)\right] + \left(\frac{3}{4}\right)$$

Para **b)**:

Como $A = -\frac{3}{5}$ es negativo y menor que uno, entonces la solución será oscilatoria y amortiguada.

Como $Y_n = -\frac{3}{4}$ tenemos una convergencia y al calcular las cotas obtenemos que $m = -\frac{16}{3}$ y $M = 2$. $Y^* = \frac{3}{4}$ es el valor de equilibrio y como la solución converge es estable.

3.1.1. Un Modelo Económico

A continuación se muestra un ejemplo de un modelo financiero en el cual se aplican ecuaciones en diferencias de primer orden lineales para resolver el problema [2].

Sea A_t el valor de un activo en el momento t; si r es la tasa de interés efectiva en un período de tiempo y representa la rentabilidad del activo, entonces $A_t + rA_t = A_{t+1}$ es el valor del activo un período de tiempo después, es decir $A_{t+1} = A_t(1+r)$. La solución de esta ecuación en diferencia de primer orden conduce a que el valor del activo en

cualquier momento t es

$$A_t = A_0(1+r)^t.$$

Con A_0 la cantidad del activo en el momento inicial.

Ejemplo 3.4. *Supongamos que se deposita una cantidad A_0 de dinero en un CDT. que paga 10 % efectivo anual (EA.) durante 3 meses, entonces a los tres meses la cantidad de dinero es:*

$$A_{1/4} = A_0(1+0,1)^{1/4}.$$

Si el dinero se queda seis meses entonces habrá:

$$A_{1/2} = A_0(1+0,1)^{1/2}.$$

La cantidad inicial de dinero para una determinada cantidad de dinero al final de un período de tiempo t se calcula despejando a_0, así:

$$A_1(1-r)^{-t} = A_0.$$

De manera equivalente, como la valoración del dinero es mensual y la tasa de interés es anual, entonces se requiere hallar la tasa de interés efectiva mensual equivalente con el 10 % E.A. Para esto $(1+r)^{12} = (1+0,1)^1$, es decir, r es una tasa de interés que produce en doce meses la misma rentabilidad que 10 % en un año. Así, la tasa de interés E.M. aproximadamente equivalente al 10 % es $r = 0.79741\,\%$.

$$A_3 = A_0(1,0079741)^3.$$

3.1.2. Propagación anual de plantas

El material de esta sección proviene de Edelstein-Keshet de [9].

Las plantas anualmente producen semillas al final del verano. Las plantas con flores se marchitan y mueren, dejando a su progenie en forma latente de semillas que deben sobrevivir un invierno para dar lugar a una nueva generación.

La primavera siguiente germina una determinada fracción de estas semillas. Algunas semillas pueden permanecer inactivas durante un año o más antes de revivir. Otras podrían perderse debido a la depredación, las enfermedades o el clima. Pero para que las plantas sobrevivan como especie, es necesario renovar una población suficientemente grande de año en año.

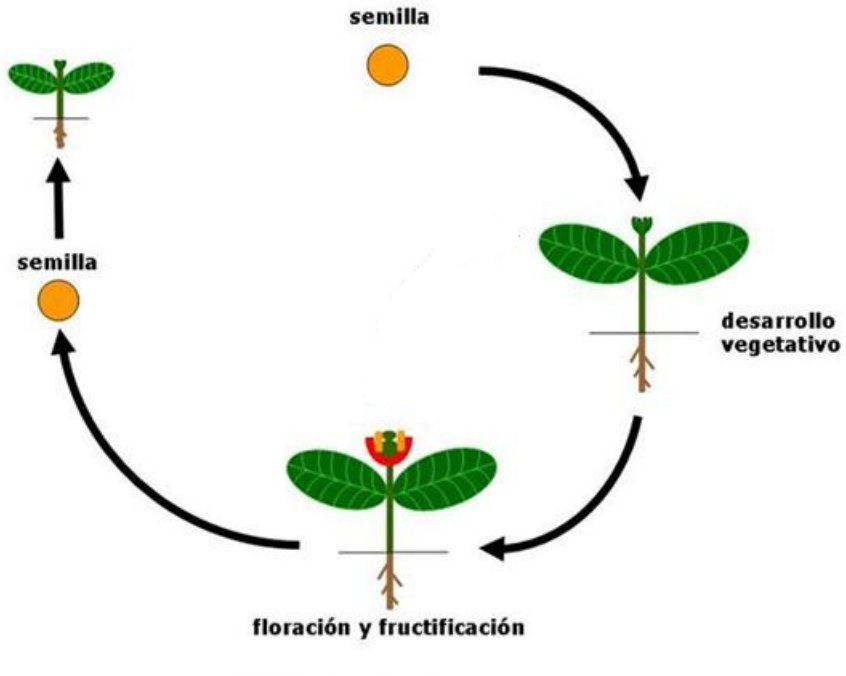

Figura 3.2: Ciclo de vida de una planta

En esta sección se formula un modelo para describir la propagación de plantas anualmente. Lo que complica un poco el problema es el hecho de que las plantas anualanualmente producen semillas que pueden permanecer inactivas durante varios años antes de germinar. Por lo tanto, el problema requiere que hagamos un seguimiento sistemático tanto de la población de plantas como de las reservas de semillas de distintas edades en un banco de semillas.

Planteamiento del problema

Las plantas producen semillas al final de su temporada de crecimiento (digamos en agosto), después de lo cual mueren. Una fracción de estas semillas sobrevive al invierno y algunas germinan al comienzo de la temporada (digamos en mayo), dando lugar a la nueva generación de plantas. La fracción que germina depende de la edad de las semillas.

Primero recopilamos todos los parámetros y constantes especificados en el problema. A continuación definimos las variables. En esa etapa resultará útil consultar un esquema aproximado como el de la Figura 3.2.

Parámetros:

γ = Número de semillas producidas por planta en agosto,

α = Fracción de semillas de un año que germinan en mayo,

β = Fracción de semillas de dos año que germinan en mayo,

σ = Fracción de semillas que sobreviven al invierno.

Si $p(n)$ denota el número de plantas en la generación n, entonces:

$$p(n) = \begin{pmatrix} \text{Plantas de} \\ \text{semillas de un año} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{plantas de} \\ \text{semillas de dos años} \end{pmatrix}$$

$$p(n) = \alpha s_1(n) + \beta s_2(n), \tag{3.2}$$

donde $s_1(n)$ y $s_2(n)$ son respectivamente el número de semillas de uno y dos años en abril antes de la germinación, observe que el número de semillas se puede escribir como:

$$\text{Semillas restantes } = \begin{pmatrix} \text{fracción no} \\ \text{germinada} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \text{semillas totales} \\ \text{generadas en abril} \end{pmatrix}$$

Esto da lugar a dos ecuaciones:

$$\tilde{s}_1(n) = (1-\alpha)s_1(n) \tag{3.3}$$

$$\tilde{s}_2(n) = (1-\alpha)s_2(n) \tag{3.4}$$

Donde $\tilde{s}_1(n)$ y $\tilde{s}_2(n)$ son respectivamente el numero de semillas restantes en Mayo, después de que algunas hayan germinado, nuevas semillas s_0 son producidas en agosto con una razón γ por planta y se denota por la ecuación:

$$s_0 = \gamma p(n) \tag{3.5}$$

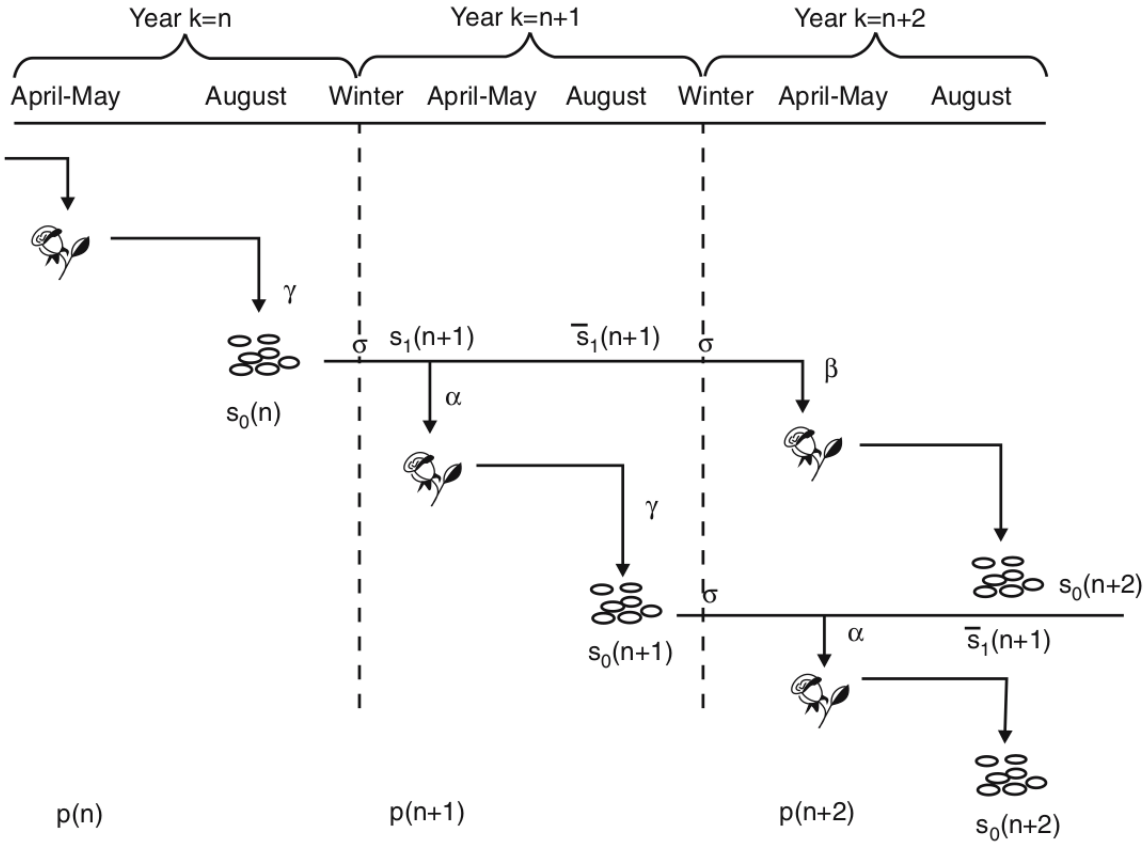

Figura 3.3: Diagrama modelo propagación anual de plantas, obtenido de [9]

Después del invierno, las semillas generadas $s_0(n)$ en la generación n, tendrán un año de edad en la generación $n+1$ y una fracción $\sigma s_0(n)$ de ellas sobrevivirá, entonces:

$$s_1(n+1) = \sigma s_0(n),$$

y de la ecuación (3.5) tenemos:

$$s_1(n+1) = \sigma\gamma p(n), \tag{3.6}$$

similarmente:

$$s_2(n+1) = \sigma \tilde{s}_1(n), \tag{3.7}$$

y usando la ecuación (3.3):

$$s_2(n+1) = \sigma(1-\alpha)s_1(n), \tag{3.8}$$

$$s_2(n+1) = \sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1). \tag{3.9}$$

Sustituyendo las expresiones de $s_1(n+1)$ y $s_2(n+1)$ de las ecuaciones (3.6) y (3.9) en la fórmula (3.2) obtenemos:

$$p(n+1) = \alpha\gamma\sigma p(n) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n-1). \tag{3.10}$$

o también:

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n). \tag{3.11}$$

cuya ecuación característica esta dada por:

$$\lambda^2 - \alpha\gamma\sigma\lambda - \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha) = 0$$

con las raíces características:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right]$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right]$$

Observe que λ_1 y λ_2 son raíces reales, ya que $1-\alpha > 0$. Además, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$. Para asegurar la propagación, es decir, $p(n)$ aumenta indefinidamente cuando n se aproxima a ∞ necesitamos tener $\lambda_1 > 1$. No vamos a hacer lo mismo con λ_2, ya que es negativo y conduce a una oscilación no deseada en el tamaño de la población de plantas. Por eso

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right] > 1$$

o

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\sqrt{1+\frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}} > 1-\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}$$

Elevando ambos lados al cuadrado y simplificando los términos:

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma+\beta\sigma^2(1-\alpha)} \tag{3.12}$$

Si $\beta = 0$, es decir, si ninguna semilla de dos años germina en mayo, entonces la condición (3.12) se convierte en:

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma} \tag{3.13}$$

La condición (3.13) dice que la propagación de plantas ocurre si el producto de la fracción de semillas producidas por planta en agosto, la fracción de semillas de un año que germinan en mayo y la fracción de semillas que sobreviven a un invierno determinado excede 1.

Prosiguiendo con la investigación del comportamiento de las soluciones de la ecuación (3.10). La cuestión central que debería resolver el modelo es cuántas semillas debería producir una planta determinada para asegurar la supervivencia de la especie. Exploraremos esta cuestión en la siguiente serie de pasos.

Para simplificar la notación, sea $a = \alpha\sigma\gamma$ y $b = \beta\sigma^2(1-a)\gamma$

Entonces la ecuación (3.10) queda reescrita de la siguiente manera:

$$p_{n+1} - ap_n - bp_n = 0,$$

a la cual corresponde la ecuación característica:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

y los eigenvalores están dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})$$

$$= \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}(1 \pm \sqrt{1+\delta}),$$

donde:

$$\delta = \frac{4\beta(1-a)}{\gamma\alpha^2},$$

es una cantidad positiva cuando $\alpha < 1$.

Hemos llegado a una expresión bastante engorrosa para los valores propios. La siguiente aproximación nos dará una estimación de sus magnitudes. Inicialmente consideraremos un caso especial. Supongamos que pocas semillas de dos años germinan en comparación con las semillas de un año.

Entonces β/α es muy pequeño, lo que hace que δ sea pequeño cercano a 1. Esto significa que, como mínimo, el valor propio positivo λ, tiene una magnitud:

$$\lambda_1 \approx \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}(1+\sqrt{1}) = 2\frac{\alpha\sigma\gamma}{2} = \alpha\sigma\gamma.$$

Entonces para asegurar la propagación de plantas necesitamos las siguientes condiciones:

$$\lambda_1 > 1, \qquad \alpha\sigma\gamma > 1, \qquad \gamma > \frac{1}{\sigma\alpha} \tag{3.14}$$

Por este razonamiento podemos concluir que la población crecerá si el número de semillas por planta es mayor que $\frac{1}{\sigma\alpha}$. Para darle algún significado biológico a la ecuación (3.14), observamos que la cantidad $\alpha\sigma\gamma$ representa el número de semillas producidas por una planta determinada que realmente sobreviven y germinan al año siguiente. La aproximación $\beta = 0$ significa que la planta madre sólo puede tener la seguridad de reemplazarse a sí misma si da lugar a al menos una de esas semillas germinadas. La ecuación (3.14) proporciona una condición fuerte para el éxito de la planta donde la latencia no influye. Si β no es despreciablemente pequeño, habrá una probabilidad finita de tener descendencia en el segundo año y, por tanto, la condición para el crecimiento de la población será menos estricta. Se puede demostrar que en general $\lambda_1 > 1$ si:

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}, \tag{3.15}$$

Cuando $\beta = 0$ esta condición se reduce a la condición (3.14).

Como paso final en la exploración del problema de propagación de plantas, se escribió un programa de computadora simple en python.

[15]:
```
gen=20

alpha= 0.5
beta = 0.25
gamma= 2
sigma= 0.8

plantas1 = 100
plantas2 = 0
n_sem = 0
sem_1 = 0
sem_2 = 0
print("Generacion, Plantas,     Nuevas semillas,     Semillas de un año,    ␣
 ↪Semillas de 2 años")

for i in range(20):
    plantasN = alpha * gamma * sigma * plantas1  +  beta * gamma * sigma**2 *␣
 ↪(1 - alpha) * plantas2
    sem_2 =  (1-alpha) * sigma**2  * n_sem
    n_sem = plantas1 * gamma
    sem_1 = n_sem * sigma

    print(i+1, ",",round(plantasN,2), "," ,round(n_sem,2), "," ,round(sem_1,2),␣
 ↪"," ,round(sem_2,2))

    plantas2 = plantas1
    plantas1 = plantasN
    #print("_____________________________")
```

Figura 3.4: Programa escrito en python para el análisis de propagación de plantas(primer caso).

Las dos ejecuciones de muestra derivadas de este programa siguen la población durante 20 generaciones comenzando con 100 plantas y sin semillas. En el primer caso

$\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.2$, $\sigma = 0.8$, $\beta = 0.25$ y la población disminuye.

Generación	Plantas	Nuevas semillas	Semillas de un año	Semillas de 2 años
1	80	200	160	0
2	80	160	128	64
3	76.8	160	128	51.2
4	74.24	153.6	122.88	51.2
5	71.68	148.48	118.78	49.15
6	69.22	143.36	114.69	47.51
7	66.85	138.44	110.76	45.88
8	64.55	133.69	106.95	44.3
9	62.34	129.11	103.28	42.78
10	60.2	124.68	99.74	41.31
11	58.13	120.4	96.32	39.9
12	56.14	116.27	93.01	38.53
13	54.21	112.28	89.82	37.21
14	52.35	108.42	86.74	35.93
15	50.56	104.7	83.76	34.7
16	48.82	101.11	80.89	33.51
17	47.15	97.64	78.11	32.36
18	45.53	94.29	75.43	31.25
19	43.97	91.05	72.84	30.17
20	42.46	87.93	70.34	29.14

Figura 3.5: Resultados obtenidos por el programa en el primer caso

En el segundo caso, α y β se han cambiado a $\alpha = 0.6$, $\beta = 03.$ y es posible observar que el número de plantas aumenta de año en año.

Generación	Plantas	Nuevas semillas	Semillas de un año	Semillas de 2 años
1	96	200	160	0
2	107.52	192	153.6	51.2
3	117.96	215.04	172.03	49.15
4	129.76	235.93	188.74	55.05
5	142.69	259.52	207.62	60.4
6	156.91	285.38	228.3	66.44
7	172.55	313.83	251.06	73.06
8	189.75	345.11	276.09	80.34
9	208.67	379.51	303.61	88.35
10	229.47	417.34	333.87	97.15
11	252.34	458.94	367.15	106.84
12	277.49	504.68	403.75	117.49
13	305.15	554.99	443.99	129.2
14	335.57	610.31	488.25	142.08
15	369.02	671.14	536.91	156.24
16	405.8	738.04	590.43	171.81
17	446.25	811.6	649.28	188.94
18	490.73	892.5	714	207.77
19	539.65	981.46	785.17	228.48
20	593.44	1079.29	863.44	251.25

Figura 3.6: Resultados obtenidos por el programa en el segundo caso

La condición general (3.15) se ilustra mediante las simulaciones por computadora ya que, al calcular los valores de las expresiones $1/\alpha\sigma$ y $1/(\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha))$ obtenemos (a) 2.5 y 2.32 en la primera simulación y, (b) 2.08 y 1.80 en el segundo. Desde $\gamma = 2.0$ en ambos casos, observamos que la latencia jugó un papel esencial en el éxito de la planta en la simulación b.

3.2. Relación de las ecuaciones en diferencias con las ecuaciones diferenciales

Como se ha mencionado a lo largo de este proyecto, las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales son dos tipos de ecuaciones utilizadas en matemáticas y ciencias aplicadas para describir cómo cambian las cantidades en función de otras cantidades y aunque son conceptos distintos, hay una relación estrecha entre ellas.

La principal diferencia entre las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales radica en cómo describen los cambios en las cantidades. Las ecuaciones en diferencias se utilizan para describir cómo una cantidad cambia de un valor a otro a lo largo de intervalos discretos, generalmente en el tiempo discreto, mientras que las ecuaciones diferenciales se utilizan para describir cómo una cantidad cambia en función de su tasa de cambio en un punto dado, generalmente en el tiempo continuo.

Sin embargo, a pesar de estas diferencias, las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales están relacionadas en varios aspectos:

Discretización: Las ecuaciones diferenciales continuas pueden aproximarse mediante ecuaciones en diferencias discretas mediante un proceso de discretización. Esto implica convertir la variable independiente (como el tiempo) en un conjunto discreto de puntos y aproximar las derivadas por diferencias finitas. Esto permite modelar fenómenos continuos en sistemas discretos. Una ecuación diferencial se puede discretizar haciendo aproximaciones numéricas, utilizando distintos métodos numéricos cómo es el método de Euler. Los puntos de equilibrio para la ecuación diferencia y su ecuación en diferencia correspondiente tienen que ser los mismos[17].

Soluciones: Algunas ecuaciones en diferencias pueden tener soluciones que se asemejan a las soluciones de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, una ecuación en diferencias de primer orden puede tener una solución que se asemeje a una solución de una ecuación diferencial de primer orden.

Análisis matemático: Ambos tipos de ecuaciones utilizan herramientas y técnicas matemáticas similares, como la teoría de la recursión, la teoría de la función generatriz y la teoría de la transformada de Z, para el análisis y la resolución de ecuaciones.

Aplicaciones: Tanto las ecuaciones en diferencias como las ecuaciones diferenciales tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, como la física, la economía, la biología, la informática y la ingeniería de sistemas. Por ejemplo, las ecuaciones en diferencias pueden utilizarse para modelar poblaciones, mientras que las ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para modelar el comportamiento

de sistemas físicos como circuitos eléctricos o sistemas de control.

En conclusión, aunque las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales son conceptos distintos, están relacionados en varios aspectos y se utilizan en diferentes contextos para describir cómo cambian las variables o modelos en función de otros. Ambos tipos de ecuaciones son herramientas importantes en el estudio de sistemas dinámicos y tienen aplicaciones en una amplia gama de disciplinas científicas y técnicas.

En algunos casos, puede ser conveniente convertir una ecuación en diferencias en una ecuación diferencial o viceversa. Esto se puede hacer utilizando varias técnicas, como la conversión entre tiempo discreto y continuo, o la aproximación de variables continuas mediante pasos discretos. Se debe tener cuidado al convertir entre los dos tipos de ecuaciones, ya que se puede perder parte de la información en el proceso.

Al elegir entre una ecuación en diferencias y una ecuación diferencial, es importante considerar los detalles del problema. Las ecuaciones en diferencias pueden ser más apropiadas para sistemas discretos con pasos de tiempo fijos, mientras que las ecuaciones diferenciales pueden ser más apropiadas para sistemas continuos. Además, la complejidad de la ecuación y la disponibilidad de soluciones analíticas o numéricas también pueden ser factores a considerar.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Si bien durante todo el trabajo se persiguió el objetivo que en un principio se planteó, el cual fue demostrar que las ecuaciones en diferencias pueden ser herramientas básicas pero bastante poderosas, esto mediante la simulación y evaluación de un modelo matemático dinámico para predecir el crecimiento de una planta, también se concluyeron otros aspectos interesantes que propone el modelo estudiado en la sección *Propagación anual de plantas.*

A pesar de que el modelo estudiado arroja resultados parciales es posible concluir que para situar este modelo lineal en el contexto adecuado, deberíamos añadir varias observaciones enriquecedoras dado que se hicieron varias suposiciones que simplifican el trabajo. Entre ellas, se supuso que las plantas no interfieren con el éxito de las demás, que las tasas de germinación y supervivencia son constantes durante muchas generaciones y que todos los miembros de la población de plantas son idénticos. Varios investigadores han examinado el problema de la dispersión y la latencia de semillas para modelos más realistas en los que se consideran otros factores como la dependencia de la

densidad, la variabilidad ambiental y las distribuciones no uniformes de las plantas, sin embargo, en este caso se representó adecuadamente el comportamiento del rendimiento de la supervivencia de las plantas para las condiciones estudiadas pues si bien fue un experimento en condiciones simuladas y adaptadas apropósito a favor nuestro ésto deja abierta la posibilidad de una futura exploración practica con especies más complejas en otro tipo de condiciones, sentando ya las bases generales para su estudio, el cual con una modelación matemática de cultivos posibilite elegir diferentes entornos de simulación y examinar la evolución de varias variables a lo largo del tiempo para estimar, prever y optimizar el crecimiento de dicho cultivo.

Desmostando así que las ecuaciones en diferencias son esenciales para la comprensión y el análisis de fenómenos dinámicos discretos en una amplia variedad de campos y que su capacidad para modelar y prever el comportamiento de sistemas reales las hace indispensables tanto en la teoría como en la práctica.

Bibliografía

[1] Pérez A. y Gutiérrez J. «Ecuaciones en diferencias. Planteamiento general.» En: *Vivat Academia. Revista de Comunicación* (2003).

[2] Casas D. *Elementos de ecuaciones diferenciales y en diferencia*. 1.ª ed. Universidad La Salle, 2012.

[3] Juárez G. y Navarro S. «Las ecuaciones en diferencias en los modelos matemáticos discretos». En: *Aportes científicos en PHYMATH* (2011).

[4] Fernández J. «Ecuaciones y sistemas en diferencias. aplicaciones de la dinámica de poblaciones». En: (2018).

[5] Casanova J. «Ecuaciones en diferencias». 2022.

[6] Navas J. «sistemas dinamicos ecuaciones diferencias». 2018.

[7] Seade J. *Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos*. Escuela venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, 2002.

[8] Cervantes L. *Modelización matemática Principios y aplicaciones*. 1.ª ed. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2015.

[9] Segel L. *Mathematical models in biology (Leah Edelstein-Keshet)*. 1988.

[10] Galor O. «Introduction to Stability Analysis of Discrete Dynamical Systems». 2003.

[11] García P. y De la Lanza C. *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias*. 1.ª ed. Limusa, 1984.

[12] Mahía R. *Formulación y solución de ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes en el contexto del anaálisis de series temporales*. Universidad Autónoma, Instituto de Predicción Económica Laurence R. Klein, (1998).

[13] Martínez R. «Matemáticas Avanzadas: Cápitulo 2, Ecuaciones en diferencias I». 2014.

[14] Banerjee S. *Mathematical modeling, Models, Analysis and Applications*. CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.

[15] Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations*. Third. Springer, 2005.

[16] Bolós V. «Matemáticas para los Modelos Dinámicos». 2021.

[17] Wbeimar V. «Aplicaciones del teorema de Liapunov para sistemas de ecuaciones en diferencias». En: (2015).

[18] Kelley W. y Petterson A. *Diference Equations, An Introducction with Applications*. 2.ª ed. Harcourt Academic Press, 2001.

VOTOS DE APROBATORIOS

SECRETARIA EJECUTIVA
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

P R E S E N T E

Por medio del presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó el C. **SOSA PASTRANA EDUARDO** con número de matrícula **20164008724** cuyo título es:

"Sistemas Dinámicos: Ecuaciones en Diferencias"

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS ÁREA TERMINAL EN MATEMATICAS**

Cuernavaca, Mor a 25 de junio de 2024

Atentamente
Por una humanidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DRA. LIUDMILA LVOVNA SABININA	**(PRESIDENTE)**
DR. JOAQUÍN ESCALONA SEGURA	**(SECRETARIO)**
DRA. GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX	**(VOCAL)**
DR. JUAN PABLO DÍAZ GONZÁLEZ	**(SUPLENTE)**
DRA. MARÍA ELISA CHINOS OLIVAN	**(SUPLENTE)**

MIE/VRRC/eae

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

JOAQUIN ESCALONA SEGURA | Fecha:2024-06-25 12:55:43 | FIRMANTE

KJb/IzXXSf6Kdoap/OxPqEOBnCRvDEBRdGxDsfAJ5DnAeNhdh1YVtZyyh8+vhpJ7YncbHnCoO9PZ/TV4SG4UJZIM2dC/8hbySqZ6sHKOCnPht0RhQlKDEJ0Wjo8aWZ/ITKA0+KKlbMrllzFP3tQ1anIYa29Wy+OVotrOi47uYlvsFyB0FP1DzbappbvWqCsyTVYcWNOcTGbh26lbrSdUkS9N3hEj4dofO3FZUaUwMBTniHxGWF1h1GS66cCL63Ce/tlcpDEtKSpzAU1ojnba0rHF4u3MQHnLSbVb+EvoUbClkseqT8+IH77MhfkhlbmzkvcBbVWdtT0/FQKjNFwfaQ==

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2024-06-25 13:04:33 | FIRMANTE

vrV4Wgo5LC+zXmGoEiQChGxgW9KILOKaKZOtaG5zKL+qwmmpspCqRThjO1yEZ4oNPZa83YbZLrCt2Pdn1RoFsm5RnnhBX5RdEOUhCPVi7As3aTyAxB0m+PPekMoC2pJxsm9BR+GRVqhQ+RsV2bUwJ5xSrv8qmmum6S4942dqF1cWYzV+Qwv3YJt+T7TyTvybRSlVwKk85CIrCkfR+kIdiPh9pl3yRckLOHDVWfxQ4taAcGULbzXUFLD0clJwbJuPENfve3PejSQUY7QXbj1IyO1mCDAEsggUJGQvOKW7wqZWtJWcytVEC1MzxmujEp3525gKK2lrbg0XoPONea3/vA==

JUAN PABLO DIAZ GONZALEZ | Fecha:2024-06-25 14:19:05 | FIRMANTE

fENczaryn/T7hmSbK0daz6toS+Fw+ladpnliRLi7qW6kvbxBLxfszFOxOcafc4h/HrKHkTTKDJBuvSMOOb/l9LWSDov/dnxF1lTRZyU8c3RgEo8SRw38xvc6aMVxcd5+ysV4TWghyzKO4eB/UWB2ZiNz9dFALQIwe+04gHadkJxjth69oJxCJngCXo8pHDZTkZeH/FzOOdXmwAxWB25PXObNd8W1U63AcB1pFx53pUvDDo84d/iAc6HKe5rPpNxEMgZF0sIDImuWBsokJgrpv4c+TVpf0fB4hwnIKlubAjnQYtYSq1cySTKXR3YvpRIxAKmpzhiMv9KVKpbMkdml1A==

MARIA ELISA CHINOS OLIVAN | Fecha:2024-06-25 16:53:56 | FIRMANTE

Ll5dJ7Yjz+4e8FRNCYnEyDjO6l+0Es3ccIBottAvLyjz+TrxIUsD8503NAiyik6AVKY7TUMSfBuRVHXQJKVcAFSr1nw/VlkgFk2TNvtk1dLcEZDRzuVdEExmj8gpYDRxd6jVbeU+SXnJ60M8fYUTASIy5PG/U6vlrHMOG+Kq4RPLmodbPlY3l/VUztcn7cbTIX52DYBcECewH7zh66sw7Q6Ajtv135LTj8+j2+Zp4BQara5s3rHhI/EnMVKh/AY1BsVtqsVrGwYrZ4ziWkAqpDDUNureznc+0HTEaJO+63rNvQ4U6y11mx/kMlqoOxZF1kEYfpOr6U9bp2dUpVpoQ==

LIUDMILA LVOVNA SABININA | Fecha:2024-06-26 17:59:19 | FIRMANTE

oUqAkypWztnxYmnpn11M9EI5Ky9LttGPyYHcCqPOyuIPCOH+F6yvBnjSToCP3AshBmw4LHdohXGhAOqb9Pwu2375VLw+TyxJwa3Qlp2y5I8lwLyJ55R1xBC8zt5+mgBaiQq0DOYJSnBCf11GZu6rGDo8XcL8z3JCQcYor62MCka07xsy2a56g8EI0TTqnb3ZIRZmgBG9922TbrAhw6XozHyLw8dQB/SYkIcksBiSCJXm/MrNWpwDxa6p9yffwGBdephwolWLtvAH8b0eGtNg0XIwV9f1XNHQkocRMaspzF65JkG3hNP11ueRXuwpbZx0rqA/QhW2vF6DkjBHMhaMGQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:

JFbEkOi97

https://efirma.uaem.mx/noRepudio/WSEV5LbRr9powDu0GBvxzQazZwd941P3