UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

“PROBLEMA DE FRONTERA DE HASEMAN CON COEFICIENTES CUASICONTINUOS A TROZOS”

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO

DE:

DOCTORADO EN CIENCIAS

PRESENTA:

JENNYFFER ROSALES MENDEZ

DIRECTOR: YURIY KARLOVYCH

CUERNAVACA, MORELOS JUNIO, 2024

Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Agradecimientos

Doy mi más sincero agradecimiento a mi madre Maria Juana Méndez Tapia, por haberme apoyado, pero sobre todo por la confianza que me ha brindado a lo largo de mis estudios y por siempre motivarme a superarme cada día. Quiero también agradecer a mis hermanos: Laura Berenice, Ramsés y Ramiro Miguel, por estar siempre a mi lado apoyándome incondicionalmente, así como a mis sobrinos que me han dado muchos momentos de alegría y entusiasmo.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Yuriy Karlovych por darme la oportunidad de trabajar con él, por todo lo que he aprendido en sus clases y asesoría desde la licenciatura hasta el doctorado. Es una experiencia que me ha servido mucho en mi formación y que siempre me será de utilidad. A mis sinodales Dr. Gennadiy Burlak, a la Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox, al Dr. Rogelio Valdez Delgado, Dr. Slaviša Djordjević, al Dr. Daniel Rivera y al Dr. Ronald Richard Jimnez Mungua les agradezco las aportaciones que hicieron a este trabajo. A CONACyT por el apoyo para poder realizar mis estudios de posgrado. Así como le agradezco muy especialmente al Dr. Salvador Pérez Esteva y a la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas (UCIM) de la Universidad Nacional Autónoma de México que a lo largo de mis estudios de maestría y doctorado me brindaron un espacio en donde desarrollar mis actividades académicas de investigación y proyecto de tesis. Reconozco además la solidaridad de la UCIM y su apoyo incondicional por tomarme en cuenta para la realización de múltiples actividades de apropiación social del conocimiento; esta apoyo me ha permitido crecer como divulgadora científica por lo cual me encuentro en deuda con ustedes y les ofrezco mi más sincera gratitud.

De igual manera, con gran cariño agradezco al la Dra. Masuma Atakishiyeva, al Dr. Federico Vázquez Hurtado y a la Dra. Larissa Sbitneva que fueron de las figuras más importantes a lo largo de estos años y por todo el conocimiento transmitido.

A mis amigos que sin duda fueron una parte importante de esta aventura ya que siempre estuvieron a mi lado para compartir tanto buenos como malos momentos durante toda mi etapa de preparación profesional. En especial a Benjamn Ocampo Arteaga, Donaji Damar Ochoa Retana, Isaac Laguna Ocampo, Benita Turijan Clara, Alejandra Ramírez Mendoza, María Magdalena Casas Saucedo, Iván Alejandro Gómez Marmolejo, Quetzali Salazar Aguilar, Lucinda Serna Herrera, Erick Alexander Rojas García, Lizbeth Abigail Torres Salas, Mitzi Jacqueline Hernández Martínez, Luis Ángel Millán Chico, Haide Mondragón, Adriana Chimalpopoca, Daniel Stiven Posada Buriticá, Ulises Manrique Zapata Vargas, Olimpia Artemisa Casas Favela, Miroslava Mosso Rojas e Itzel Rojas.

Por último quiero agradecer con todo mi amor y cariño a Roberto Arturo Heredia Ortega por ser una parte importante de todo este proceso para poder concluir este trabajo, por esas palabras para motivarme a superar todos los obstáculos que se me han presentado y sobre todo por ese apoyo y paciencia para poder llegar a la presentación de este trabajo, gracias por siempre inspirarme ♡.

Introducción

Este trabajo está dedicado al estudio de la propiedad de Fredholm de problemas de valor en la frontera con corrimientos y datos cuasicontinuos, aplicando la teoría de operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos.

El problema de valor en la frontera de Haseman está estrechamente relacionado con el problema de valor en la frontera clásico de Riemann [15].

El problema de valor en la frontera de Riemann lo llamaremos también como el problema de Riemann-Hilbert o el problema de Hilbert. Esto consiste en encontrar una función analítica $\Phi(z)$, representada por la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau$ sobre una curva suave, cerrada y orientada Γ, en todo el plano complejo excepto en los puntos que están dados por la curva Γ, con $\varphi \in L^p(\Gamma)$, que satisfacen la condición de frontera

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad \text{para} \quad t \in \Gamma, \tag{0.0.1}$$

donde $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ son valores límite de la función desconocida $\Phi(z)$ en $t \in \Gamma$ por la izquierda y por la derecha respectivamente , definidas de la siguiente manera

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau \tag{0.0.2}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau \tag{0.0.3}$$

donde (0.0.2) y (0.0.3) son conocidas como fórmulas de Sokhotski-Plemelj (ver [10]) y $G(t)$ continua en Γ, $g(t) \in L^p(\Gamma)$ son funciones dadas.

La primera investigación del problema de Riemann (0.0.1) se llevó a cabo por Hilbert en 1904. Usando ciertas restricciones adicionales el problema (0.0.1) fue reducido por D. Hilbert a una ecuación integral de Fredholm. Después de esto (aparentemente por iniciativa de Hilbert) en 1907 Haseman llevó a cabo una investigación análoga del problema de valor en la frontera

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma,$$

donde $\Phi^{\pm}(t)$ son valores límite de la función analítica $\Phi(z)$ en $t \in \Gamma$, $\alpha(t)$ es un difeomorfismo (corrimiento) que preserva la orientación en la curva cerrada Γ sobre si mismo.

Después el problema de valor en la frontera de Haseman bajo diferentes condiciones en sus datos, fue estudiado por C. Haseman, D. A. Kveselava, L. I. Chibrikova, G. F. Mandzhavidze y B. V. Khvedelidze, I. B. Simonenko, y Yu. I. Karlovich en equipo con V. G. Kravchenko, A. V. Aizenshtat y G. S. Litvinchuk (ver los libros [35], [36],[37], los artículos [28], [29], así como la bibliografía en ellos). Este problema surge en la teoría anisotrópica de elasticidad y en adhesión de superficies de curvatura positiva. Algunos ejemplos y aplicaciones se abordan en el capítulo 1.

Dado $p \in (1, \infty)$, una curva estrellada $\Gamma = \cup_{k=1}^{N} \Gamma_k$ y un corrimiento $\alpha : \Gamma \to \Gamma$, estudiaremos de manera más avanzada el problema de valor en la frontera de Haseman. Encontrando una función Φ analítica en $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, representada por la integral de tipo Cauchy sobre Γ con una densidad $\varphi \in L^p(\Gamma)$ y que satisface la condición de frontera

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{para t} \in \Gamma, \tag{0.0.4}$$

donde $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ son valores de frontera angulares de Φ en Γ de la izquierda y de la derecha, respectivamente; $G \in QC(\Gamma)$, $g \in L^p(\Gamma)$, $\alpha' \in QC(\Gamma)$. Los conceptos del corrimiento α, curva estrellada Γ y el conjunto $QC(\Gamma)$ de funciones cuasicontinuas están definidas mas adelante en la sección 3.1.

Sea $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach X, y sea $\mathcal{K}(X)$ el ideal de todos lo operadores compactos en $\mathcal{B}(X)$. Un operador $A \in \mathcal{B}(X)$ se dice que es Fredholm si su imagen es cerrada y los espacios $ker A$ y $ker A^*$ formados por los núcleos del operador A y de su operador adjunto A^* son de dimensión finita. Y en tal caso $Ind\ A = \dim ker - \dim ker\ A^*$ se refiere al índice de A.

Sea $P_{\pm} := 2^{-1}(I \pm S_\Gamma)$, donde I es el operador identidad y S_Γ es el operador integral singular de Cauchy dado para cada $t \in \Gamma$ por

$$(S_\Gamma f)(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t,\varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \Gamma(t, \varepsilon) := \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}. \tag{0.0.5}$$

Entonces S_Γ es acotado en el espacio $L^p(\Gamma)$ (ver [10], [16]). Aplicando la integral de tipo Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau}{\tau - t} d\tau \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma)$$

con una densidad $\varphi \in L^p(\Gamma)$ y las fórmulas de Sokhotski-Plemelj escritas en la forma $\Phi^+ = P_+\varphi$ y $\Phi^- = -P_-\varphi$, reducimos el problema de valor en la frontera de Haseman

(0.0.4) a la ecuación integral singular equivalente $(V_\alpha P_+ + GP_-)\varphi = g$ con corrimiento α, donde $V_\alpha : f \mapsto f \circ \alpha$ es un operador de corrimiento acotado en el espacio $L^p(\Gamma)$. Por lo tanto, asociamos con el problema de valor en la frontera (0.0.4) el equivalente operador integral

$$T = V_\alpha P_+ + GP_- \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma)). \tag{0.0.6}$$

El estudio del operador (0.0.6) esta basado en la teoría de los operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos no regulares. Esta teoría fue aplicada a los operadores integrales no locales (0.0.6) con corrimientos α en [27] y [28] (para aplicaciones de operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos infinitamente diferenciales a operadores integrales singulares ver [38, 39, 10]). El artículo [29] está dedicado al estudio del operador (0.0.6) relacionado al problema de Haseman (0.0.4) en una curva estrellada Γ compuesta por espirales logarítmicas bajo más débil que en [28] condiciones en datos lentamente oscilatorios: la derivada del corrimiento α' y el coeficiente G. La fórmula del índice para el operador (0.0.6) en [29] usa el índice de Cauchy generalizado para funciones semiperiódicas invertibles (ver[31]).

En el presente trabajo estudiamos por un lado el problema de valor en la frontera de Haseman (0.0.4) con un coeficiente cuasicontinuo G y un corrimiento cuasicontinuo α en una curva estrellada Γ. Aplicando los recientes resultados de [30] en operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos, establecemos un criterio de Fredholm así como una fórmula del índice para el operador T relacionado a el problema de Haseman (0.0.4), esencialmente reduciendo la suavidad de G y α' de $SO(\Gamma)$ en [29] a $QC(\Gamma)$. El álgebra C^* $SO(\Gamma)$ consiste de todas las funciones continuas y acotadas en $\Gamma = \overline{\Gamma} \setminus \{0, \infty\}$, donde $\overline{\Gamma}$ es la cerradura de Γ. Para obtener $\operatorname{Ind} T$, usamos la definición de Sarason [43] del índice de Cauchy para funciones invertibles cuasicontinuas por partes.

El Capítulo 1 está dedicado al estudio clásico en los libros de G. S. Litvinchak [38], [39] del problema de frontera de Haseman con datos Hölder suaves que incluye la representacin integral y la solución del problema de salto del problema de frontera de Haseman, el teorema de la adhesión conforme y la reducción del problema de Haseman al problema famoso de Riemann. Este capítulo también contiene los fundamentos de la teoría general de flexiones infinitesimales de superficie y un problema de tipo Haseman que aparece en el estudio de los problemas de pegamiento de superficies de curvatura positiva y de la rígidez de superficies seccionales (ver el libro [45] de I.N. Vekua). Entonces el capítulo 1 contiene el historial del problema de Haseman, que incluye aplicaciones del problema de frontera de Haseman.

En el Capítulo 2 introducimos las clases de funciones lentamente oscilatorias y cuasicontinuas, hacemos uso de [25, 26, 27, 30], consideramos la acotación de los operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos acotados medibles y cuasicontinuos $V(\mathbb{R})$-valuados en $\mathbb{R}_+$, donde $V(\mathbb{R})$ es el álgebra de Banach de funciones absolutamente continuas de variación total acotada en $\mathbb{R}$, en los espacios $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ con medida invariante $d\mu(\varrho) = d\varrho/\varrho$. También se considera la compacidad de conmutadores de operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos $V(\mathbb{R})$-valuados y cuasicontinuos en $\mathbb{R}_+$, se presenta el cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra de Banach de operadores pseudodiferenciales de Mellin considerados y un críterio de Fredholm para tales operadores en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de la propiedad de Fredholm y del índice para el operador integral singular con corrimiento T asociado al problema de frontera de Haseman (0.0.4) con datos cuasicontinuos. Los resultados correspondientes son presentados en tres teoremas importantes (Teoremas 3.2.1-3.2.3). En este capítulo fueron también investigadas propiedades de los corrimientos cuasicontinuos. Después, con la aplicación de operadores pseudodiferenciales de Mellin fue estudiado el álgebra de Banach $\mathfrak{B}_p$ de operadores integrales singulares modificados. El estudio del operador T fue reducido al estudio de operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos matriciales.

Las demostraciones de los Teoremas 3.2.1-3.2.3 sobre la propiedad de Fredholm y el índice del operador T en el espacio $L^p(\Gamma)$ sobre la curva estrellada Γ están presentadas en el Capítulo 4. En este capítulo también está probado un criterio de Fredholm generalizado del operador T en el espacio $L^p(\Gamma)$ sobre la curva Γ compuesta por arcos suaves y orientados que tienen un conjunto finito de nodos. Los resultados de los Capítulos 3 y 4 se publicaron en el artículo [33] en el año 2022.

Posteriormente en el Capítulo 5 se estudia la invertibilidad de los operadores funcionales binomiales $A = aI - bV_\alpha$ en los espacios de Lebesgue $L^p(\Gamma)$ sobre la curva estrellada Γ, así como la forma general de los operadores integrales singulares con corrimientos. Usando esto, fue elaborado un criterio condicional de Fredholm para el operador integral singular con corrimientos

$$Y = A_+P_+ + A_-P_-$$

con los operadores funcionales $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ y datos cuasicontinuos (ver el Teorema 5.1.2). Para $p = 2$, aplicando representaciones de álgebras C^* obtenidas con el uso de medidas espectrales y el método de trayectorias locales, en el Capítulo 5 fue establecido un criterio de Fredholm para el operador Y en el espacio $L^2(\Gamma)$ (Ver el Teorema 5.1.3.

Entonces, el Teorema 5.1.3 da la condición necesaria de la invertibilidad de operadores funcionales $A_\pm$ complementando el Teorema 5.1.2.

Los resultados del Capítulo 5 fueron publicados como un capítulo del libro [34] de Springer en el año 2023.

Índice general

Capítulo 1

Problema de frontera de Haseman y sus aplicaciones

.

En este capítulo veremos brevemente como son las soluciones para el Problema de Haseman para el caso en que los datos son continuos, el cual es parte del estudio en la tesis [41] sobre la base del libro de G.S. Litvinchuk [37]. También mostraremos aplicaciones del problema de frontera de Haseman a los problemas de pegamiento y rígidez de superficies seccionales del libro de I.N. Vekua [45].

1.1. Representación integral y solución al problema de valor en la frontera de Haseman, usando el problema de salto

Las afirmaciones de esta sección se pueden consultar en [37, sección 7.1]

La curva simple orientada Γ (abierta o cerrada) se llama curva de Lyapunov si la siguiente condición se cumple: la tangente de Γ en cada punto t existe y forma con el eje real un ángulo $\Theta(t)$ que satisface la condición

$$|\Theta(t_1) - \Theta(t_2)| < A|t_1 - t_2|^{\mu}, A > 0, 0 < \mu \leqslant 1.$$

Sea $H_\mu(\Gamma)$ es el espacio lineal que consiste de funciones $f:\Gamma\to\mathbb{C}$ tales que existe una constante finita M y una constante $\mu\in(0,1]$ tales que para todos $t_1,\ t_2\in\Gamma$ se cumple la condición de Hölder

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leq M|t_1-t_2|^\mu.$$

Sea Γ una curva de Lyapunov cerrada simple que divide el plano complejo extendido $\mathbb{C}$ en dos componentes conexas D^+ y D^- tal que $0\in D^+$ y $\infty\in D^-$. Consideraremos el problema de valor en la frontera de Hasemann. Consideremos una función analítica en $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ con salto en la curva Γ satisfaciendo la condición de frontera en Γ

$$\Phi^+(\alpha(t))=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\qquad t\in\Gamma, \tag{1.1.1}$$

donde $G,\ g\ \in H_\mu(\Gamma)$ son funciones dadas, $G(t)\neq 0$ en Γ, y $\alpha(t)$ es un difeomorfismo en Γ que preserva la orientación en Γ, $\alpha'(t)\neq 0$ en Γ, Φ^+ es analítica en D^+ y Φ^- es analítica en D^-, a $\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$ le llamaremos analítica por trozos. Para comenzar a estudiar el problema (1.1.1) consideraremos el problema homogéneo mas simple

$$\Phi^+(\alpha(t))=\Phi^-(t),\qquad t\in\Gamma, \tag{1.1.2}$$

el cual llamamos como el problema de salto.

Lema 1.1.1. *El problema de salto* (1.1.2) *con la condición adicional* $\Phi^-(\infty)=0$ *no tiene soluciones distintas de las triviales.*

Demostración. De acuerdo con las propiedades $\Phi^+(t)=(P_+\Phi^+)(t)$, $\Phi^-(t)=(P_-\Phi^-)(t)$ y $P_+P_-=P_-P_+=0$ de las proyecciones $P_+=(I+S_\Gamma)/2$ y $P_-=(I-S_\Gamma)/2$, donde S_Γ está definida en (0.0.5) se obtienen las ecuaciones para las funciones $\Phi^\pm(t)$

$$(P_-\Phi^+)(t)=\frac{1}{2}\Phi^+(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-t}d\tau=0, \tag{1.1.3}$$

$$(P_+\Phi^-)(t)=\frac{1}{2}\Phi^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \tag{1.1.4}$$

donde $t,\tau\in\Gamma$, $\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$ es una solución del problema (1.1.2). Haciendo la sustitución $t\mapsto\alpha(t)$ y $\tau\mapsto\alpha(\tau)$ en (1.1.3), obtenemos

$$\frac{1}{2}\Phi^+(\alpha(t))-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\Phi^+(\alpha(\tau))d\tau=0, \tag{1.1.5}$$

usando la condición de contorno (1.1.2) en (1.1.5) se tiene

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\alpha'(t)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\Phi^-(\tau)d\tau=0. \tag{1.1.6}$$

Añadiendo (1.1.4) en (1.1.6), se llega a la ecuación integral

$$\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\Phi^-(\tau)d\tau = 0 \tag{1.1.7}$$

la cual es una ecuación canónica de Fredholm, es decir, $(I + K)\Phi^- = 0$, donde I es el operador identidad y K es un operador compacto. Por lo tanto, por la teoría de Fredholm, la ecuación (1.1.7) tiene un número finito de soluciones linealmente independientes (ver [13], [17], [18] y [41]). Ya que los valores de frontera de soluciones del problema (1.1.2) satisfacen a la ecuación (1.1.7), se cumple que el problema de salto (1.1.2) también tiene un número finito de soluciones linealmente independientes. Está claro que si la solución es constante para el problema de valor en la frontera (1.1.2), en virtud de que asumimos $\Phi^-(\infty) = 0$, la constante es igual a cero. Ahora si suponemos que la función es analítica por tozos $\{\Phi_*^+(z), \Phi_*^-(z)\}$, no es igual a alguna constante, es una solución al problema (1.1.2). Originando que la $k-$esima potencia (k es un número natural) de la identidad $\Phi_*^+(\alpha(t)) = \Phi_*^-(t)$, da

$$\{\Phi_*^+(\alpha(t))\}^k \equiv \{\Phi_*^-(t)\}^k, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Esto implica junto con toda solución $\{\Phi_*^+(z), \Phi_*^-(z)\}$ cada función analítica por trozos $\{(\Phi_*^+(z))^k, (\Phi_*^-(z))^k\}$, donde k es un número natural es también una solución para el problema (1.1.2). Todas las soluciones son linealmente independientes y obtendremos un conjunto infinito numerable de soluciones linealmente independientes. Pero esto contradice la conclusión obtenida previamente de que el problema (1.1.2) que tiene un conjunto finito de soluciones linealmente independientes. □

Lema 1.1.2. *La ecuación integral homogénea canónica de Fredholm*

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) := \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)\varphi(\tau)d\tau = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1.1.8}$$

no tiene soluciones distintas de las triviales.

Demostración. Sea $\varphi(t)$ una solución de la ecuación integral (1.1.8), y consideremos las integrales de tipo Cauchy

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in D^-,$$

donde $\alpha_{-1}(t)$ es la función inversa de $\alpha(t)$. Notemos que $\Phi^-(\infty) = 0$. Usando las fórmulas de Sokhotski-Plemelj (0.0.2), (0.0.3), obtenemos

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) = \Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1.1.9}$$

Ya que $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación (1.1.8), de (1.1.9) tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z} d\tau \equiv 0, \qquad\qquad & z \in D^+, \\ \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \equiv 0, \qquad\qquad & z \in D^-. \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Ahora, para las ecuaciones (1.1.10) y las fórmulas de Sokhotski-Plemelj (0.0.2), (0.0.3),, concluimos que la función $\varphi(\alpha_{-1}(t))$ es el valor de contorno de la función $\Psi^-(z)$ analítica en el dominio D^-, que desaparece en $z = \infty$ y $\varphi(t)$ es el valor de contorno de la función $\Psi^+(z)$ analítica en D^+, i.e.

$$\varphi(\alpha_{-1}(t)) = \Psi^-(t), \qquad \varphi(t) = \Psi^+(t), \qquad \Psi^-(\infty) = 0. \tag{1.1.11}$$

Para (1.1.11) obtenemos el problema con valor en la frontera

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(\alpha(t)), \qquad \Psi^-(\infty) = 0. \tag{1.1.12}$$

Aplicando el Lema 1.1.1, obtenemos

$$\Psi^+(z) \equiv \Psi^-(z) \equiv 0, \qquad \varphi(t) \equiv 0.$$

$\square$

Definición 1.1.1. *Un operador $A \in \mathcal{B}(X)$ se dice que es Fredholm si su imagen es cerrada y los espacios $ker A$ y $ker A^*$ formados por los núcleos del operador A y de su operador adjunto A^* son de dimensión finita. Y en tal caso $Ind\ A = \dim ker - \dim ker\ A$*

Usando la alternativa de Fredholm que dice lo siguiente:

Definición 1.1.2. *La alternativa de Fredholm. Para la ecuación $Ax = y$ con un operador de Fredholm A, una de las siguientes alternativas se cumplen.*

a) La ecuación homogénea $Ax = 0$ no tiene soluciones linealmente independientes ($\alpha(A) = 0$) y entonces la ecuación $Ax = y$ es incondicionalmente y unívocamente soluble.

b) La ecuación homogénea $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales, y para la solubilidad de las ecuaciones $Ax = y$ es necesario y suficiente que las $\alpha(A)$ $(= \alpha(A^*))$ condiciones de solvencia $u(y) = 0$ ocurran para todos $u \in \ker A^*$.

Concluimos que la correspondiente ecuación no homogénea $\mathcal{L}\varphi = f$ es incondicionalmente soluble y tiene una única solución.

Ahora podemos deducir la representación integral especial para una función analítica por trozos.

Teorema 1.1.1. *(Representación integral para una función analítica por trozos) Sea $\alpha(t)$ un difeomorfismo que preserva la orientación en la curva de Lyapunov cerrada Γ definida en la formulación del problema (1.1.1) sobre si mismo de tal manera que $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$ y $\alpha'(t) \neq 0$, con la función inversa $\alpha_{-1}(t)$. Para cualquier función $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ analítica por trozos en el plano complejo $\mathbb{C}$ con salto en la curva Γ, que desaparece en el punto $z = \infty$, es decir, $\Phi^-(\infty) = 0$, y teniendo en Γ los valores de contorno $\Phi^+(t),\ \Phi^-(t) \in H_\mu(\Gamma)$ tal que las siguientes representaciones se siguen,*

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^+, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in D^-, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

donde $\varphi \in H_\mu(\Gamma)$.

Demostración. Evaluando, de acuerdo con las fórmulas de Sokhotski- Plemelj, los valores de contorno $\Phi^+(\alpha(t))$ y $\Phi^-(t)$ de las integrales de tipo Cauchy (1.1.13), obtenemos la ecuación integral de Fredholm

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) = \Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t), \quad t \in \Gamma \tag{1.1.14}$$

donde el operador integral $\mathcal{L}$ está definido en (1.1.8). Se sigue por el Lema 1.1.2 y de la alternativa de Fredholm que la ecuación integral (1.1.14) es incondicionalmente soluble y tiene una única solución $\varphi(t)$. $\square$

Teorema 1.1.2. *(Solución del problema de salto del valor en la frontera de Haseman) La única función analítica por trozos que desaparece en infinito, la cual es solución del problema de valor en la frontera*

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = g(t) \tag{1.1.15}$$

con $g(t) \in H_\mu(\Gamma)$ está dada por las fórmulas

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau, \qquad \Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{1.1.16}$$

donde $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación integral de Fredholm

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)\varphi(\tau)d\tau = g(t) \tag{1.1.17}$$

la cual es incondicionalmente y unívocamente soluble.

Demostración. El Teorema 1.1.1 nos dice que la única solución del problema con valor en la frontera (1.1.15) es representado de la forma (1.1.16). Calculando los valores en la frontera $\Phi^+(\alpha(t))$ y $\Phi^-(t)$ de las integrales de tipo Cauchy (1.1.16) y después sustituiremos los valores en la condición de frontera (1.1.15), llegamos a la ecuación (1.1.17) para la cual la densidad $\varphi(t)$ de la representación de la integral (1.1.16) es representada unívocamente e incondicionalmente por la función $g(t) \in H_\mu(\Gamma)$. □

Usando la solución del problema de salto

$$\Upsilon^+(\alpha(t)) - \Upsilon^-(t) = \ln G(t), \quad t \in \Gamma,$$

es posible estudiar la pregunta completa de la solubilidad del problema homogéneo de valor en la frontera de Haseman

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) \tag{1.1.18}$$

para el caso $\{\arg G(t)\}_\Gamma = 0$, donde $G(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Este resultado nos permitirá demostrar eventualmente el Teorema de adhesión conforme.

Teorema 1.1.3. *(Solución del problema homogéneo con valor en la frontera de Haseman con índice de Cauchy cero en sus coeficientes) El problema homogéneo con valor en la frontera de Haseman* (1.1.18) *con* $\{\arg G(t)\}_\Gamma = 0$ *tiene una única solución no trivial en las clases de funciones analíticas por trozos que satisfacen la condición* $\Phi^-(\infty) = 1$ *y el problema no tiene soluciones distintas de las triviales que desaparezcan en infinito.*

Demostración. Consideremos el problema con valor en la frontera (1.1.18) y supongamos que $\kappa = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma = 0$. Buscamos una solución al problema (1.1.18) que satisfaga la condición $\Phi^-(\infty) = 1$. Desde $\kappa = 0$ evaluando en logaritmo ambas partes de (1.1.18) nos da el problema de salto con valor en la frontera de Haseman:

$$\Upsilon^+(\alpha(t)) - \Upsilon^-(t) = \ln G(t) \tag{1.1.19}$$

donde $\Upsilon^+(z) = \ln \Phi^+(z)$, $\Upsilon^-(z) = \ln \Phi^-(z)$. En virtud de que la condición $\Phi^-(\infty) = 1$, consideremos le problema con valor en la frontera (1.1.19) en las clases de funciones analíticas por trozos que satisfacen la condición $\ln \Phi^-(\infty) = \Upsilon^-(\infty) = 0$. Consecuentemente, por el Teorema 1.1.2, tenemos que existe una única solución

$$\{\Phi^+(z) = e^{\Upsilon^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = e^{\Upsilon^-(z)}\}$$

del problema con valor en la frontera (1.1.18) que satisface la condición $\Phi^-(\infty) = 1$. La solución general del problema (1.1.18), en las clases de funciones analíticas por trozos acotadas en infinito, toman la forma

$$\{ce^{\Upsilon^+(z)}, ce^{\Upsilon^-(z)}\},$$

donde c es una constante compleja arbitraria. Si imponemos la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 0$, con $c = 0$ y, por tanto, el problema con valor en la frontera (1.1.18) sólo tiene la solución trivial en las clases de funciones analíticas por trozos que desaparecen en infinito. □

1.2. El teorema de la adhesión conforme y la reducción del problema de Haseman al problema de Riemann

En esta sección se mostrará que los dominios D^+ y D^-, definidos por la curva de Lyapunov cerrada y simple Γ, se pueden transformar mediante una aplicación conforme en dominios Δ^+ y Δ^- respectivamente. Se puede pensar que los dominios Δ^+ y Δ^- están definidos mediante una curva de Lyapunov Γ' simple y cerrada, que divide a $\mathbb{C}$ en dos dominios conexos, que es la imagen bajo la transformación conforme de la curva original Γ. Los dominios Δ^+ y Δ^- son tales que las imágenes de los puntos $\alpha(t) \in \Gamma$ (por medio de la transformación $D^+ \to \Delta^+$) y de los puntos $t \in \Gamma$ (por medio de la transformación $D^- \to \Delta^-$) se pegan en el mismo punto en el nuevo contorno Γ'. Usando estas transformaciones y la sustitución de variables, podemos eliminar el corrimiento $\alpha(t)$ en la condición de frontera en Γ del problema de Haseman (1.1.1), transformadolo a un problema de Riemann en Γ'.

Ahora denotemos por $\omega^+(z)$ y $\omega^-(z)$ a las funciones que realizan el mapeo conforme $D^+ \to \Delta^+$ y $D^- \to \Delta^-$, respectivamente. El requisito de la concurrencia de las imágenes de los puntos $\alpha(t)$ y t significa que los valores límites sobre Γ de las funciones $\omega^+(z)$ y $\omega^-(z)$ satisfacen la condición de adhesión

$$\omega^+(\alpha(t)) = \omega^-(t). \tag{1.2.1}$$

La función $\omega^-(z)$ tiene necesariamente un polo en el dominio D^-, ya que si este no es el caso, por el Lema 1.1.1 ocurriría que $\omega^-(z) \equiv \textit{const}$ en D^- y por lo que no obtenemos un mapeo con la propiedad necesaria. Ya que la transformación $\omega^-(z) : D^- \to \Delta^-$ tiene que ser uno a uno, este polo es simple. Por lo tanto finalmente tenemos a $\omega^-(z)$ de la forma

$$\omega^-(z) = z + \tilde{\omega}^-(z), \tag{1.2.2}$$

donde $\tilde{\omega}^-(z)$ es una función analítica en D^- que desaparece en infinito. Teniendo en cuenta la ecuación (1.2.2), se puede ver que el problema con valor en la frontera (1.2.1) es equivalente al problema de salto de Haseman

$$\omega^+(\alpha(t)) - \tilde{\omega}^-(t) = t, \qquad t \in \Gamma, \tag{1.2.3}$$

el cual debe ser resuelto a fin de encontrar una función analítica por trozos $\{\omega^+(z), \tilde{\omega}^-(z)\}$ que desaparece en infinito. De acuerdo con el Teorema 1.1.2, el problema de valor en la frontera (1.2.3) tiene una única solución la cual es representada por (1.1.16), donde $\varphi(t)$ satisface la ecuación $\mathcal{L}\varphi = t$. Así, las funciones de adhesión $\omega^+(z)$ y $\omega^-(z)$ están determinadas únicamente por (1.2.1) y (1.2.2). Ahora transformaremos el problema de Haseman (1.1.1) en Γ al problema de Riemann en Γ'. Sea $t = \omega^-_{-1}(w)$ la función inversa a $w = \omega^-(t)$, i.e.

$$\omega^-(\omega^-_{-1}(w)) \equiv w, \quad w \in \Gamma', \qquad\qquad \omega^-_{-1}(\omega^-(t)) \equiv t, \quad t \in \Gamma.$$

Reemplazando t por $\omega^-_{-1}(w)$ en la condición de frontera (1.2.1), obtenemos

$$\omega^+\{\alpha(\omega^-_{-1}(w))\} \equiv w. \tag{1.2.4}$$

Ahora introducimos la función analítica por trozos $\{\Phi_1^+, \Phi_1^-\}$ por

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+[\omega^+(z)], \qquad \Phi^-(z) = \Phi_1^-[\omega^-(z)]. \tag{1.2.5}$$

Entonces la condición de frontera de Haseman (1.1.1) tiene la forma

$$\Phi_1^+\{\omega^+(\alpha(t))\} = G(t)\Phi_1^-(\omega^-(t)) + g(t), \qquad t \in \Gamma.$$

Haciendo la sustitución $t = \omega^-_{-1}(w)$, i.e. pasamos del contorno Γ al contorno Γ', obtenemos

$$\Phi_1^+\{\omega^+[\alpha(\omega^-_{-1}(w))]\} = G(\omega^-_{-1}(w))\Phi_1^-(w) + g(\omega^-_{-1}(w)), \qquad w \in \Gamma'.$$

Usando la identidad (1.2.4), obtenemos el problema de Riemann con valor en la frontera en el nuevo contorno Γ'

$$\Phi_1^+(w) = G(\omega^-_{-1}(w))\Phi_1^-(w) + g(\omega^-_{-1}(w)), \qquad w \in \Gamma'. \tag{1.2.6}$$

Por lo que queda probar que las transformaciones $\omega^+ : D^+ \to \Delta^+$ y $\omega^- : D^- \to \Delta^-$ satisfacen las condiciones enlistadas arriba.

Teorema 1.2.1. *(Adhesión conforme) Las funciones $\omega^+(z)$ y $\omega^-(z)$, las cuales son soluciones del problema con valor en la frontera* (1.2.1) *en la clase* (1.2.2)*, transforman uno a uno los dominios D^+ y D^- en los dominios Δ^+ y Δ^- respectivamente. Los dominios Δ^+ y Δ^- están acotados por los contornos Γ'_+ y Γ'_- respectivamente, y estos dominios Δ^+ y Δ^- no se intersectan y son divididos por la curva común de Lyapunov $\Gamma'_+ = \Gamma'_- = \Gamma'$ complementando entre sí hasta el plano complejo extendido $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. La prueba de este teorema será dividida por los siguientes cinco pasos:

1. Primero probaremos que las fronteras de los dominios Δ^+ y Δ^- coinciden, i.e. $\Gamma'_+ = \Gamma'_-$. Sea $w \in \Gamma'_+$. Entonces existe un punto $t \in \Gamma$ tal que $\omega^+(t) = w$. En virtud de la ecuación $\omega^+(t) = \omega^-(\alpha_{-1}(t))$, obtenemos que $\omega^+(\alpha_{-1}(t)) = w$ y, consecuentemente, $w \in \Gamma'_-$. Por lo que, $\Gamma'_+ \subset \Gamma'_-$; la inclusión inversa $\Gamma'_- \subset \Gamma'_+$ es probada de manera análoga. Por lo tanto $\Gamma'_+ = \Gamma'_- = \Gamma'$.

2. Probaremos que los valores límites $\omega^+(t)$ y $\omega^-(t)$ de la solución del problema de valor en la frontera (1.2.1) tiene derivaciones con respecto a t perteneciente a la clase $H_\mu(\Gamma)$. Para mostrar ésto, consideramos el problema de Haseman

$$\alpha'(t)\gamma^+(\alpha(t)) = \gamma^-(t). \tag{1.2.7}$$

Vamos a resolver el problema (1.2.7), y vamos a llegar a la solución del problema inicial (1.2.1) integrando la solución del problema (1.2.7) con la condición adicional $\gamma^-(\infty) = 1$. En vista de la fórmula $\frac{1}{2\pi}\{\arg\, \alpha'_+(t)\}_\Gamma = 0$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{1}{\alpha'(t)}\right\}_\Gamma = 0.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.1.3, el problema con valor en la frontera (1.2.7) tiene una única solución analítica por trozos que satisface la condición $\gamma^-(\infty) = 1$. La solución $\{\gamma^+(z), \gamma^-(z)\}$ podemos expresarla en términos de la integrales de tipo Cauchy con densidades en $H_\mu(\Gamma)$. Consecuentemente, $\gamma^\pm(t) \in H_\mu(\Gamma)$ (ó $\gamma^\pm(t) \in H_{1-\epsilon}(\Gamma)$ si $\mu = 1$). Ahora consideremos la función

$$\omega_0(z) = \left\{ \int_{\alpha(t_o)}^z \gamma(t)dt,\ z \in D^+;\ \int_{t_0}^z \gamma(z)dz,\ z \in D^- \right\},$$

donde t_0 es un punto arbitrario en el contorno Γ. La función $\omega_0(z)$ satisface la condición de frontera $\omega_0^+(\alpha(t)) = \omega_0^-(t)$. De hecho

$$\omega_0^+(\alpha(t)) = \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} \gamma^+(t)dt = \int_{t_0}^t \gamma^+(\alpha(u))\alpha'(u)du = \int_{t_0}^t \gamma^-(u)du = \omega_0^-(t).$$

Además, el desarrollo de la función $\omega_0^-(z)$ en una vecindad alrededor de infinito, tiene la forma

$$\omega_0^-(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ... \tag{1.2.8}$$

Ciertamente, integrando la ecuación (1.2.8) en Γ y usando el Teorema integral de Cauchy, obtenemos

$$-2\pi i \mathrm{Res}\gamma^-(z)|_{z=\infty} = \int_\Gamma \gamma^-(t)dt = \int_\Gamma \alpha'(t)\gamma^+(\alpha(t))dt = \int_\Gamma \gamma^+(\xi)d\xi = 0.$$

Por lo tanto $\mathrm{Res}\gamma^-(z)|_{z=\infty} = 0$ y el desarrollo de $\gamma(z)$ en infinito tiene la forma

$$\gamma^-(z) = 1 + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + ...,$$

y así la fórmula (1.2.8) es válida. Sea $W^{\pm}(z) = \omega^{\pm}(z) - \omega_0^{\pm}(z)$, donde $\omega_0^{\pm}(z)$ es una solución del problema con valor en la frontera (1.2.1) de la clase de funciones que satisfacen (1.2.2). Entonces las funciones $W^{\pm}(z)$ satisfacen la condición de frontera

$$W^{+}(\alpha(t)) = W^{-}(t)$$

siendo $W^{-}(z)$ acotada en infinito. De acuerdo con el Lema 1.1.1, tenemos que $W^{\pm}(z) \equiv const$, i.e. $\omega^{\pm}(z) = \omega_0^{\pm}(z) + const$. Derivando las ecuaciones, obtenemos

$$\frac{d\omega^{\pm}(t)}{dt} = \gamma^{\pm}(t), \qquad t \in \Gamma.$$

Por lo tanto $\frac{d\omega^{\pm}(t)}{dt} \in H_{\mu}(\Gamma)$.

3. Ahora probaremos que si $t_1,\ t_2 \in \Gamma$ y $t_1 \neq t_2$, entonces $\omega^{-}(t_1) \neq \omega^{-}(t_2)$. En otras palabras, el contorno Γ' es una curva de Jordan simple que divide el plano complejo $\mathbb{C}$ en los dominios Δ^{+} y Δ^{-}. Supongamos lo contrario, i.e. que $\omega^{-}(t_1) = \omega^{-}(t_2) = \omega_0$ para $t_1 \neq t_2$, e introducimos las funciones $\omega_1^{\pm}(z) = \omega^{\pm}(z) - \omega_0$.

   Las funciones $\omega_1^{\pm}(z)$ satisfacen la condición de frontera (1.2.1), entonces

$$\omega_1^{-}(t_1) = \omega_1^{-}(t_2) = \omega_1^{+}(\alpha(t_1)) = \omega_1^{+}(\alpha(t_2)) = 0. \tag{1.2.9}$$

   Reescribimos la condición de frontera (1.2.1) en la forma

$$\frac{[\alpha(t) - \alpha(t_1)][\alpha(t) - \alpha(t_2)]}{(t - t_1)(t - t_2)} \cdot \frac{\omega_1^{+}(\alpha(t))}{[\alpha(t) - \alpha(t_1)][\alpha(t) - \alpha(t_2)]} = \frac{\omega_1^{-}(t)}{(t - t_1)(t - t_2)}$$

   y se fija

$$\omega_2^{+}(z) = \frac{\omega_1^{+}(z)}{[z - \alpha(t_1)][z - \alpha(t_2)]}, \qquad \omega_2^{-}(z) = \frac{\omega_1^{-}(z)}{(z - t_1)(z - t_2)}.$$

   Ya que las condiciones (1.2.9) se cumplen, de acuerdo con lo que se había probado en el caso 2, $\frac{d\omega^{\pm}(t)}{dt} \in H_{\mu}(\Gamma)$, obtenemos que $\omega_2^{\pm}(t) \in H_{\mu}(\Gamma)$. Ademas $\omega_2^{-}(\infty) = 0$ y la condición de contorno

$$\omega_2^{+}(\alpha(t)) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{[\alpha(t) - \alpha(t_1)][\alpha(t) - \alpha(t_2)]}\omega_2^{-}(t) \tag{1.2.10}$$

   ocurren. Además el índice de Cauchy del coeficiente del problema de Haseman (1.2.10) es igual a cero. De hecho, si el punto t se mueve a lo largo de Γ en dirección positiva desde el punto t_i en el mismo punto t_i, entonces los argumentos del numerador y denominador de las fracciones $\frac{\alpha(t)-\alpha(t_i)}{t-t_i}$, $i = 1, 2$, ambas incrementan en π. Por lo tanto el incremento de los argumentos de las fracciones ya mencionadas son igual a cero.

Además $\omega_2^-(\infty) = 0$. En vista del Teorema 1.1.3, el problema homogéneo (1.2.10) sólo tiene la solución trivial $\omega^{\pm}(z) \equiv 0$. Por lo tanto $\omega^{\pm}(z) = w = const$. Sin embargo, esta igualdad no es posible ya que la función $\omega^-(z)$ tiene un polo en infinito. Por lo que tenemos una contradicción. Consecuentemente,

$$\omega^-(t_1) \neq \omega^-(t_2),\ \ si\ t_1,\ t_2 \in \Gamma\ con\ t_1 \neq t_2.$$

4. Ahora, la correspondencia uno a uno de los dominio $D^+ \to \Delta^+$ y $D^- \to \Delta^-$ se siguen directamente del conocido principio de correspondencia de frontera de los mapeos conformes. De acuerdo con el principio mencionado es suficiente establecer que la correspondencia uno a uno es válida para las curvas frontera, pero esto fue justo lo que hicimos en el paso 3.

5. Resta establecer que la curva Γ' pertenece a la clase de las curvas de Lyapunov. Denotamos por s y σ el arco de la abscisa de los puntos $t \in \Gamma$ y $w \in \Gamma'$ correspondiendo una a la otra. Obviamente

$$\sigma = \sigma(s) = \int_{s_0}^{s} |w_t'(t(s))| ds.$$

Esto implica que la función $\sigma(s)$ incrementa monótonamente y que existe la función inversa monótonamente creciente $s = s(\sigma)$. Además

$$|\sigma_2 - \sigma_1| = |\sigma(s_2) - \sigma(s_1)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} |w_t'(t(s))| ds \right| \geq m|s_2 - s_1|,$$

donde $m = \min\{|w_t'(t(s))| :\ s \in [s_1, s_2]\}$. Nótese que $m \neq 0$ ya que la solución del problema (1.2.8) no desaparece en ningún punto en Γ. Por lo tanto

$$|s(\sigma_2) - s(\sigma_1)| \leq \frac{1}{m} |\sigma_2 - \sigma_2|. \tag{1.2.11}$$

Pero esto significa que la función $s(\sigma)$ satisface la condición de Hölder con exponente $\mu = 1$. Ahora consideramos la derivada $w_\sigma' = \frac{dw(t(s(\sigma)))}{d\sigma}$. Obtenemos que

$$w_\sigma' = \frac{dw(t)}{dt} \cdot \frac{dt(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = t'(s) \frac{w'(t)}{|w'(t)|} = t'(s) e^{i\ \arg\ w'(t)}. \tag{1.2.12}$$

El segundo factor en el miembro derecho de la fórmula (1.2.12) satisface la condición de Hölder. De hecho de acuerdo a la ecuación (1.2.11), la función $s(\sigma)$ es una función de Hölder que toma valores reales. La función $t(s)$ tiene una derivada acotada y, consecuentemente, la función $t(s(\sigma))$ satisface una condición de Hölder. Finalmente $w'(t) \in H_\mu(\Gamma)$ tal como fue probado arriba. Ya que el contorno Γ es una curva de Lyapunov, la función $t'(s(\sigma))$ también pertenece a la clase de Hölder. Así la derivada w_σ' satisface una condición de Hölder respecto a σ, y esto significa que Γ' pertenece a la clase de las curvas de Lyapunov.

□

El Teorema 1.2.1 da un soporte completo al razonamiento acerca de la reducción del problema de Haseman (1.1.1) al problema de Riemann (1.2.6). Usando el siguiente teorema

Teorema 1.2.2. *El número l de soluciones linealmente independientes y el número ρ de condiciones de solubilidad linealmente independientes del problema de valor de frontera de Riemann $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$, $t \in \Gamma$, para un par de funciones ésta dada por*

$$l = max\ (0, \kappa), \qquad \rho = max\ (0, -\kappa),$$

donde $\kappa = \frac{1}{2\pi}\{arg\ G(t)\}_\Gamma$. Las soluciones y las condiciones de solubilidad del problema $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ están expresadas en forma explícita (por medio de las integrales de tipo Cauchy) por las fórmulas

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)\Psi^\pm(z) + X^\pm(z)P_{\kappa-1}(z)$$

donde la función analítica por trozos $X(z)$ es definida como

$$X^+(z) = e^{\Upsilon^+(z)} \quad y \quad X^-(z) = z^{-\kappa}e^{\Upsilon^-(z)} \quad en\ D^+\ y\ D^-,\ respectivamente,$$

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln[\tau^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau - z}d\tau, \qquad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad (z \in \dot{\mathbb{C}} \setminus \Gamma).$$

$P_{\kappa-1}(z)$ es un polinomio de orden $\kappa - 1$ y $\int_\Gamma \frac{g(t)}{X^+(t)}t^{k-1}dt = 0$ para $k = 1, 2, ..., -\kappa$.

Obtenemos el siguiente resultado acerca de la solubilidad del problema de valor de frontera de Haseman.

Teorema 1.2.3. *El número l de soluciones linealmente independientes del problema homogéneo de Haseman en la clase de funciones analíticas por trozos que desaparece en el infinito esta dado por $l = max\ (0, \kappa)$, y el número de condiciones de solubilidad linealmente independientes del correspondiente problema de Haseman no homogéneo es dado por $\rho = max\ (0, -\kappa)$ donde $\kappa = \frac{1}{2\pi}\{arg\ G(t)\}_\Gamma$.*

Como se observa de las soluciones, éstas pueden ser obtenidas en forma explícitas si los mapeos conformes $\omega^+ : D^+ \to \Delta^+$ y $\omega^- : D^- \to \Delta^-$ son conocidos. Se sigue de los argumentos precedentes que el problema de construir ω^+ y ω^- son equivalentes, en algún sentido a resolver una ecuación canónica de Fredholm. Por lo tanto ninguno de los métodos (el método de la ecuación integral o el método de la adhesión conforme) tiene ventaja uno sobre otro en el problema de resolver efectivamente el problema de Haseman. El problema de Haseman es soluble en una forma explícita si la ecuación integral de Fredholm $\mathcal{L}\varphi = t$ admite tal solución.

1.3. Fundamentos de la teoría general de las flexiones infinitesimales de superficie

Sea S una superficie regular seccional, es decir, compuesta por pedazos pegados de diferentes superficies, de clase C^m representada en forma vectorial por la ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2).$$

Consideremos ahora la familia de superficies S_ε, representada por la ecuación de la forma

$$\mathbf{r}_\varepsilon(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \mathbf{U}(x^1, x^2),$$

donde ε es un parametro numérico arbitrario y $\mathbf{U}(x^1, x^2)$ es una función vectorial continuamente diferenciable de un punto de la superficie. Se dicen que las superficies S_ε son flexiones infinitesimales de la superficie S si la diferencia entre los cuadrados de sus elementos lineales son una cantidad de orden ε^2, i.e.

$$ds_\varepsilon^2 - ds^2 = O(\varepsilon^2). \tag{1.3.1}$$

Ya que

$$ds^2 = d\mathbf{r}d\mathbf{r}, \quad ds_\varepsilon^2 = d\mathbf{r}d\mathbf{r} + 2\varepsilon d\mathbf{r}d\mathbf{U} + \varepsilon^2 d\mathbf{U}d\mathbf{U},$$

para que (1.3.1) es cierto, es necesario y suficiente que

$$d\mathbf{r}d\mathbf{U} = 0. \tag{1.3.2}$$

La ecuación (1.3.2) implica que

$$d\mathbf{U} = \mathbf{V} \times d\mathbf{r} \tag{1.3.3}$$

donde $\mathbf{V}$ es una función vectorial. El vector $\mathbf{V}$ se llama vector de rotación.

La última ecuación es llamada“la ecuación de flexión inifinitesimal”de la superficie S, y el vector $\mathbf{U}$ que satisface esta ecuación es llamada “el vector de desplazamiento de flexión infinitesimal”. Tal un campo vectorial en S puede ser brevemente llamado el “campo de desplazamiento”. En virtud de (1.3.1) tenemos

$$ds_\varepsilon = ds\left[1 + \varepsilon^2\left(\frac{d\mathbf{U}}{ds}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{1.3.4}$$

es decir,

$$ds_\varepsilon - ds = O(\varepsilon^2) \geq 0. \tag{1.3.5}$$

Por lo que tenemos lo siguiente.

Teorema 1.3.1. *Como un resultado de una flexión infinitesimal de la superficie cada elemento de ella toma un incremento no negativo de segundo orden de pequeñez, es decir,* $O(\varepsilon^2)$.

En lo que sigue consideraremos siempre solo deformaciones continuas de una superficie, es decir, suponemos que el vector de desplazamiento $\mathbf{U}$ es una función continua de un punto de una superficie.

Por una verificación directa encontramos que la ecuacin (1.3.2) siempre tiene soluciones de la forma

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{C}, \tag{1.3.6}$$

donde $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{C}$ son vectores arbitrarios. El campo vectorial (1.3.6) se llama "flexiones triviales" o "campo trivial de desplazamientos".

El problema básico de la teoría de la flexión infinitesimal de superficies consiste en la determinación de campos de desplazamiento no triviales que satisfacen la ecuación (1.3.2).

Sea S una superficie de la clase C^m.

El cuadrado del elemento lineal, es decir, la primera forma fundamental cuadrática de la superficie S, tiene la forma

$$I = ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.3.7}$$

donde

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \ \text{ para } \ \alpha, \beta = 1, 2, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \tag{1.3.8}$$

y $\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}$.

Considere la segunda forma fundamental cuadrática de la superficie S,

$$II = b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.3.9}$$

donde

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{n}\mathbf{r}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \tag{1.3.10}$$

La curvatura principal de la superficie está dada por

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \tag{1.3.11}$$

Sea L una línea en la superficie S. A lo largo de L consideremos la tripleta natural $\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{b}$, donde $\mathbf{s}$, $\mathbf{m}$ y $\mathbf{b}$ es, respectivamente, el vector tangente unitario, el vector unitario de la normal principal y el vector binormal unitario. Por eso

$$\mathbf{s} \times \mathbf{m} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{m} \times \mathbf{b} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{s} = \mathbf{m}. \tag{1.3.12}$$

Descomponiendo el vector de desplazamiento $\mathbf{U}$ con respecto a la tripleta natural $\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{b}$, obtenemos

$$\mathbf{U} = u_s\mathbf{s} + u_m\mathbf{m} + u_b\mathbf{b}. \tag{1.3.13}$$

Diferenciando a lo largo de esta ecuación con respecto a los arcos de la curva L y haciendo uso de las fórmulas Serret-Frenet

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = k\mathbf{m}, \quad \frac{d\mathbf{m}}{ds} = -k\mathbf{s} + \chi\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{m}, \tag{1.3.14}$$

donde k es la curvatura y χ la torsión de la curva L, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \Big(\frac{du_s}{ds} - ku_m\Big)\mathbf{s} + \Big(\frac{du_m}{ds} + ku_s - \chi u_b\Big)\mathbf{m} + \Big(\frac{du_b}{ds} + \chi u_m\Big)\mathbf{b}. \tag{1.3.15}$$

Por otro lado, de la ecuación (1.3.3) sigue que

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \mathbf{V} \times \mathbf{s} = (v_s\mathbf{s} + v_m\mathbf{m} + v_b\mathbf{b}) \times \mathbf{s} = v_b\mathbf{m}v_m\mathbf{b}, \tag{1.3.16}$$

donde v_s, v_m, v_b son las proyecciones del vector de rotación $\mathbf{V}$ sobre los vectores unitarios de la tripleta natural.

Considerando los dos vectores unitarios mutuamente perpendiculares que son tangentes a la superficie

$$\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}, \quad \mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{1.3.17}$$

y teniendo en cuenta las relaciones

$$\mathbf{l} \times \mathbf{s} = \mathbf{n}, \quad d\mathbf{U} = \mathbf{V} \times d\mathbf{r}, \tag{1.3.18}$$

tenemos

$$\delta\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{U}}{ds} = \mathbf{V} \times \mathbf{s}, \quad \delta\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{U}}{dl} = \mathbf{V} \times \mathbf{l}, \tag{1.3.19}$$

$$\delta\mathbf{n} = \delta\mathbf{l} \times \mathbf{s} + \mathbf{l} \times \delta\mathbf{s} = \mathbf{V} \times \mathbf{n}, \tag{1.3.20}$$

donde $\delta\mathbf{s}, \delta\mathbf{l}, \delta\mathbf{n}$ son variaciones de los vectores $\mathbf{s}, \mathbf{l}, \mathbf{n}$, respectivamente.

Si $J[y]$ es un funcional con la función $y = y(x)$ como argumento, y hay un pequeño cambio en su argumento de y a $y + h$, donde $h = h(x)$ es una función en el mismo espacio funcional que y, entonces el cambio correspondiente en el funcional es $\Delta J[h] = J[y + h] - J[y]$. La función h se llama la variación de la función y. El funcional $J[y]$ se dice que es diferenciable si $\Delta J[h] = \varphi[h] + \varepsilon\|h\|$, donde $\varphi[h]$ es un funcional lineal, $\|h\|$ es la norma de h, y $\varepsilon \to 0$ como $\|h\| \to 0$. El funcional lineal $\varphi[h]$ se llama de primera variación de $J[y]$ y se denota por $\delta J[h] = \varphi[h]$.

Sea L la línea de contacto de dos superficies S^+ y S^-. A lo largo de L consideremos además la tripleta natural $\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{b}$ y dos tripletas más $-\mathbf{s}, \mathbf{n}^+, \mathbf{l}^+$ y $\mathbf{s}, \mathbf{n}^-, \mathbf{l}^-$ conectadas con las superficies S^+ y S^-. Podemos asumir que esas tripletas tienen la misma orientación que la tripleta natural $\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{b}$.

Investigando las flexiones infinitesimales de la superficie regular $S = S^+ + S^-$, tenemos en vista de la continuidad de la deformación

$$\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^- \quad (en\ L), \tag{1.3.21}$$

donde $\mathbf{U}^+$ y $\mathbf{U}^-$ son los vectores de desplazamientos de flexiones de las superficies S^+ y S^-, respectivamente. Diferenciando la relación de (1.3.21) con respecto al arco de la curva L y tomando en cuenta que $d\mathbf{U} = \mathbf{V} \times d\mathbf{r}$ tenemos

$$\mathbf{V}^+ \times \mathbf{s} = \mathbf{V}^- \times \mathbf{s}, \quad i.e. \quad \mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^- = \mu\mathbf{s}, \tag{1.3.22}$$

donde μ es una función de la curva L. Diferenciando la relación de (1.3.22) una vez más con respecto al arco s, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{V}^+}{ds} - \frac{d\mathbf{V}^-}{ds} = -k\mu\mathbf{m} - \frac{d\mu}{ds}\mathbf{s},$$

o bien, usando [45, Capítulo 5, fórmula (7.49)],

$$\delta k_s^+ \mathbf{l}^+ + \delta\tau_s^+ \mathbf{s} - \delta k_s^- \mathbf{l}^- - \delta\tau_s^- \mathbf{s} = -k\mu\mathbf{m} - \frac{d\mu}{ds}\mathbf{s}, \tag{1.3.23}$$

donde k_s^+, k_s^-, τ_s^+, τ_s^- son las curvaturas normales y las torsiones geodésicas de las superficies S^+ y S^- a través de la curva L, respectivamente. Ya que $\mathbf{l}^\pm = -\mathbf{m}\sin\theta^\pm + \mathbf{b}\cos\theta^\pm$

(ver [45, Captulo 5, fórmula (7.31)], este vector de relación es equivalente a las siguientes tres relaciones escalares:

$$\delta k_s^+ \cos\theta^+ - \delta k_s^- \cos\theta^- = 0,$$

$$\delta k_s^+ \sin\theta^+ - \delta k_s^- \sin\theta^- = k\mu, \tag{1.3.24}$$

$$\delta\tau_s^+ - \delta\tau_s^- = -\frac{d\mu}{ds},$$

donde $\theta^\pm \in [-\pi, \pi]$ son los ángulos entre vector de normal principal $\mathbf{m}$ de la curva L y los vectores normales $\mathbf{n}^\pm$ para las superficies $S^\pm$, respectivamente.

De acuerdo con las fórmulas

$$(1)\ \delta k = \delta k_s \cos\theta, \quad (2)\ k\delta\theta = -\delta k_s \sin\theta, \tag{1.3.25}$$

(ver [45, Capítulo 5, fórmula (7.43)]), la segunda de las relaciones anteriores implica que

$$\mu = \frac{\sin\theta^+}{k}\delta k_s^+ - \frac{\sin\theta^-}{k}\delta k_s^- \equiv \delta\theta^- - \delta\theta^+, \tag{1.3.26}$$

es decir,

$$\mu = \delta\vartheta, \quad \textit{donde} \quad \vartheta = \theta^- - \theta^+. \tag{1.3.27}$$

Se puede ver que ϑ es igual al ángulo suplementario de π, el cuál es el ángulo entre las superficies S^+ y S^-, es decir, es igual al ángulo formado por sus normales $\mathbf{n}^+$ y $\mathbf{n}^- : \cos\vartheta = \mathbf{n}^+\mathbf{n}^-$.

Por lo tanto, en la linea de contacto el vector de rotación tiene una discontinuidad

$$\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^- = -\delta\vartheta\mathbf{s}, \tag{1.3.28}$$

donde $\delta\vartheta$ es la variación del ángulo de contacto.

Haciendo uso de las relaciones (1.3.24) tenemos

$$\mu = \delta\vartheta = -\frac{\sin\vartheta}{k_s^+}\delta k_s^- \equiv -\frac{\sin\vartheta}{k_s^-}\delta k_s^+ \tag{1.3.29}$$

o bien

$$\delta\vartheta = -\frac{k\sin\vartheta}{k_s^+ k_s^-}\delta k. \tag{1.3.30}$$

La relación (1.3.27) puede también derivar lo siguiente:

$$\delta\mathbf{m} = \mathbf{V}^+ \times \mathbf{m} - \delta\theta^+\mathbf{b}, \quad \delta\mathbf{m} = \mathbf{V}^- \times \mathbf{m} - \delta\theta^-\mathbf{b}.$$

De donde

$$(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) \times \mathbf{m} - \delta(\theta^+ - \theta^-)\mathbf{b} = 0,$$

o

$$\delta(\theta^- - \theta^+) \equiv \delta\vartheta = \mathbf{bm}(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) \equiv -\mu\mathbf{bms} = \mu$$

Esto fué probado. De (1.3.24) y en vista de (1.3.27) tenemos

$$\begin{aligned} \delta k_s^+ \cos\theta^+ - \delta k_s^- \cos\theta^- &= 0, \\ \delta\tau_s^+ - \delta\tau_s^- + \frac{d\delta\vartheta}{ds} &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.31}$$

Esas relaciones podemos llamarlas "las condiciones de conjunción a través de la linea de contacto".

Las fórmulas (1.3.31) se pueden derivar también de la siguiente manera. Ya que la curva L pertenece a ambas superficies S^+ y S^- y la deformación que es continua podemos escribirla como

$$\begin{aligned} \delta k &= \delta k_s^+ \cos\theta^+ = \delta k_s^- \cos\theta^-, \\ \delta\chi &= \delta\tau_s^+ - \frac{d\delta\theta^+}{ds} = \delta\tau_s^- - \frac{d\delta\theta^-}{ds}. \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Estas relaciones implican (1.3.31) si tomamos en cuenta que $\delta\vartheta = \delta\theta^- - \delta\theta^+$.

1.4. El problema H

En investigaciones de campos de flexión de superficies regulares seccionadas es necesario tomar en cuenta no solo las condiciones de acotamiento en la frontera de la superficie, pero también las condiciones de conjunción en las líneas de contacto. Estas circunstancias complican significativamente el problema. En esta sección se muestra que incluso en los casos mas simples se enfrentan con problemas matemáticos que se han investigado muy poco.

Sea S^+ y S^- secciones de los ovaloides los cuales están conectados y juntos construyen un una cerradura, pero en general una superficie no convexa. Ahora elegimos en S^+ y S^- las redes conjugadas isométricas de líneas las cuales homeomorficamente mapean esas superficies en los dominios G^+ y G^- del plano z, teniendo en común la frontera Γ la cual es una curva suave cerrada simple; G^- es un dominio infinito. Se puede ver que esas redes siempre existen. En este caso el contorno de contacto L es doblemente mapeado homeomorficamente en la curva Γ, y a cada punto M de la curva L tiene correspondencia en Γ en general dos puntos distintos t y $\nu(t)$ donde $\nu(t)$ es la función que establece el mapeo de homeomorfismo de la curva Γ en si misma.

Si los dominios G^+ y G^- no son fijos de antemano, podemos introducir en toda la superficie suave seccionalmente cerrada el sistema de coordenadas conjugadas-isometricas en común, por medio de cual la superficie $S^+ + S^-$ es mapeada homeomorficamente en el plano entero z.

Podría ser soportada la idea de que en ambas superficies las coordenadas conjugadas isometricamente son presentadas en tal camino que las ecuaciones para las funciones complejas de desplazamiento y flexión tienen la forma

$$\partial_{\overline{z}} w + Aw + B\overline{w} = 0 \quad (en\ G^+ + G^-) \tag{1.4.1}$$

$$\partial_{\overline{z}} \widehat{w}' - A\widehat{w}' - \overline{B}\overline{\widehat{w}'} = 0 \quad (en\ G^+ + G^-) \tag{1.4.2}$$

respectivamente.

La función compleja de desplazamiento es definida por la fórmula

$$w = 2\mathbf{U}\mathbf{r}_{\overline{z}} \tag{1.4.3}$$

y satisface la ecuación (1.4.1), donde por [45, Capítulo 5, fórmula (3.64)] y por [45, Capítulo 2, fórmula (6.66)],

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \ln \sqrt{a\sqrt{K}}, \\ B &= -\frac{a\sqrt{K}}{2a^+} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Big(\frac{a^-}{a\sqrt{K}} \Big) \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

y por [45, Capítulo 2, fórmulas (6.55)]

$$a^+ = 4\mathbf{r}_z \mathbf{r}_{\overline{z}}, \quad a^- = 4\mathbf{r}_{\overline{z}} \mathbf{r}_{\overline{z}}, \quad a = \frac{1}{4}\big((a^+)^2 - |a^-|^2\big).$$

Si el dominio G es simplemente conexo, entonces la función compleja de flexión $\widehat{w}'$ es la función analítica generalizada que satisface la ecuación (1.4.2) conjugada a la ecuación (1.4.1) para la función compleja de desplazamiento.

En el caso bajo la consideración la condición de la conjunción (1.3.31) o la condición equivalente (1.3.28) puede también ser escrita de la forma compleja, haciendo uso de la función de flexión compleja $\widehat{w}'$ la cual satisface la ecuación (1.4.2).

Definiendo la función

$$U'(z) = \sqrt{a\sqrt{K}}\widehat{w}'(z), \tag{1.4.5}$$

donde K es la curvatura principal definida por (1.3.11) y a es dada por (1.3.8), transformamos la ecuación (1.4.2) a la forma

$$\partial_{\overline{z}} U' - \overline{BU}' = 0. \tag{1.4.6}$$

En vista de (1.4.5) tenemos (ver [45, Capítulo 5, fórmula (6.44)]) que

$$\frac{dV}{ds} = \frac{2}{\sqrt{a\sqrt{K}}} Im\{U'(z)\frac{dz}{ds}\mathbf{r}_{\overline{z}}\}, \tag{1.4.7}$$

donde

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}, \quad \mathbf{r}_{\overline{z}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}).$$

Diferenciando a través de la relación (1.3.28) con respecto a el arco de la curva L obtenemos

$$\frac{d\mathbf{V}^+}{ds} - \frac{d\mathbf{V}^-}{ds} = -k\mathbf{m}\delta\vartheta - \frac{d\delta\vartheta}{ds}\mathbf{s}. \tag{1.4.8}$$

Con la ayuda de la formula (1.4.7) esta condición puede ser escrita de la siguiente manera:

$$2Im\left\{\frac{U'^+(t)}{\sqrt{a^+\sqrt{K^+}}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^+(\partial_{\overline{t}}\mathbf{r})^+ - \frac{U'^-(t)}{\sqrt{a^-\sqrt{K^-}}}\left(\frac{dz}{ds}\right)^-(\partial_{\overline{z}}\mathbf{r})^-\right\}$$

$$= -k\mathbf{m}\delta\vartheta - \frac{d\delta\vartheta}{ds}\mathbf{s}, \quad z \in \Gamma, \tag{1.4.9}$$

donde t y z son puntos de la curva Γ conectada por la relación $t = \nu(z)$. En general, en lo que sigue las cantidades suministradas por los signos “ $+$ ” y “ $-$ ” se refiere a los puntos $t = \nu(z)$ y z en Γ, respectivamente. Además, hay que tener en cuenta que el lado derecho de la relación (1.4.9) es tomado en el punto z. Además, U'^+ y U'^- son soluciones de la ecuación (1.4.6) en G^+ y G^-, y son continuas en $G^+ + \Gamma$ y $G^- + \Gamma$, respectivamente. Además, en infinito la siguiente condición se puede satisfacer

$$U'^-(z) = O(|z|^{-4}). \tag{1.4.10}$$

Multiplicando a lo largo de las relaciones escalares (1.4.9) por el vector complejo $(\partial_t \mathbf{n})^+$ y tomando en cuenta que

$$(1)\ \partial_t \mathbf{n}\partial_{\overline{t}}\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{aK}, \quad (2)\ \partial_t \mathbf{n}\partial_t \mathbf{r} = 0, \tag{1.4.11}$$

obtenemos en Γ la relación

$$U'^{+}[\nu(z)] = \beta_1 U'^{-}(z) + \beta_2 \overline{U'^{-}(z)} + \beta_3 \delta\vartheta + \beta_4 \frac{d\delta\vartheta}{ds}, \tag{1.4.12}$$

donde β_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ están dados por las funciones de los puntos en la curva Γ representada por la siguiente formula (ver [45, Capítulo 5, fórmulas (8.16a)]):

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{2(\partial_t \mathbf{n})^{+}(\partial_{\overline{z}}\mathbf{r})^{-}}{\sqrt[4]{K^{+}}\sqrt{a^{-}\sqrt{K^{-}}}}\frac{dz}{dt}, \quad t = \nu(z),\\
\beta_2 &= \frac{2(\partial_t \mathbf{n})^{+}(\partial_{\overline{z}}\mathbf{r})^{-}}{\sqrt[4]{K^{+}}\sqrt{a^{-}\sqrt{K^{-}}}}\frac{d\overline{z}}{d\overline{t}}, \quad t = \nu(z),\\
\beta_3 &= -\frac{2ik}{\sqrt[4]{K^{+}}}\frac{ds}{dt}\mathbf{m}(\partial_z \mathbf{n})^{+},\\
\beta_4 &= -\frac{2i}{\sqrt[4]{K^{+}}}\frac{ds}{dt}s(\partial_z \mathbf{n})^{+}, \quad t = \nu(z).
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Si ahora consideramos las fórmulas (1.3.29) y [45, Capítulo 5, fórmulas (7.50)], obtenemos para $\delta\vartheta$ la siguiente expresión:

$$\delta\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{k_s^{+}\sqrt[4]{K^{-}}} Re\left\{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 U'^{-}(z)\right\} \quad (en\ \Gamma). \tag{1.4.14}$$

Ahora tomando en cuenta la relación de lado izquierdo (1.4.12) llegamos a la relación

$$U'^{+}[\nu(z)] = \beta_1^{*} U'^{-}(z) + \beta_2^{*}\overline{U'^{-}(z)} + \beta_3^{*} Re\left\{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \frac{dU'^{-}(z)}{ds}\right\}, \tag{1.4.15}$$

en Γ. Aquí por [45, Capítulo 5, fórmulas (8.17)-(8.18)]) tenemos

$$\begin{aligned}
\beta_1^{*} &= \beta_1 + \beta_3 \frac{\sin\vartheta}{2k_s^{+}\sqrt[4]{K^{-}}}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\beta_4^{*}\frac{d}{ds}\left[\frac{\sin\vartheta}{k_s^{+}\sqrt[4]{K^{-}}}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right],\\
\beta_2^{*} &= \beta_2 + \beta_3 \frac{\sin\vartheta}{2k_s^{+}\sqrt[4]{K^{-}}}\left(\frac{d\overline{z}}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\beta_4^{*}\frac{d}{ds}\left[\frac{\sin\vartheta}{k_s^{+}\sqrt[4]{K^{-}}}\left(\frac{d\overline{z}}{ds}\right)^2\right],\\
\beta_3^{*} &= \beta_4 \frac{\sin\vartheta}{k_s^{+}\sqrt[4]{K^{-}}}
\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Así, el problema de rígidez de la superficie cerrada arreglado en las dos secciones de ovaloides guías al problema de determinación de una función $U'(z)$ la cual en G^{+} y G^{-} satisface la ecuación (1.4.6), es continua en $G^{+} + \Gamma$ y $G^{-} + \Gamma$, mientras en la curva Γ la relación (1.4.15) y en infinito la condición (1.4.10) se satisfacen. Este problema en el futuro lo llamaremos **H**. Se puede observar que este problema se reduce a un problema análogo para funciones analíticas si las superficies S^+ y S^- son secciones de superficies algebraicas convexas de segundo orden, ya que entonces $B \equiv 0$. Entonces, es de interés investigar el problema **H** primero en las clases de funciones analíticas. La investigación para este caso, además del interés geométrico, merece atención también desde el punto de vista del problema de frontera de Haseman.

Ya estaba indicado, en general, podemos limitarnos al caso en el cual $\nu(t) = t$. Esto ocurre si en la superficie $S^+ + S^-$ (en general no convexo) se introduce una red isométrica conjugada común de rectas, tal que las rectas cruzan la recta de contacto continuamente pero sus tangentes y el ángulo coordenado sufren dscontinuidades. Si el problema **H** tiene solamente solución trivial $U' \equiv 0$, esto significa que la superficie cerrada $S^+ + S^-$ es rígida. Si ahora la solución no trivial para el problema **H** existe, puede tener solamente un número finito de de soluciones linealmente independientes. Este resultado implica que cada superficie del tipo indicado anteriormente se puede convertir en una superficie rígida sometiéndola a algunos números (finitos) de restricciones adicionales puntuales. Sin embargo, es posible indicar algunas clases de superficies que son rígidas sin condiciones adicionales.

Ahora examinaremos el caso en el cuál la línea de contacto coincide con la línea de tangencia de las superficies S^+ y S^-. En este caso $\sin\vartheta \equiv 0$ y la formula (1.4.16) muestra que la condición (1.4.15) toma la forma

$$U'^+[\nu(z)] = \beta_1 U'^-(z) + \beta_2 \overline{U'^-(z)}, \quad z \in \Gamma. \tag{1.4.17}$$

Una investigación de la solubilidad de este problema puede reducirse al problema análogo en la clase de funciones analíticas. De hecho, la solución requerida puede ser representada de la forma

$$\begin{cases} U'^+(z) = \Phi^+(z)e^{\omega^+(z)} & \text{si} \quad z \in G^+, \\ U'^-(z) = \Phi^-(z)e^{\omega^-(z)} & \text{si} \quad z \in G^-, \end{cases} \tag{1.4.18}$$

donde Φ^+ y Φ^- son funciones holomorfas en G^+ y G^-, respectivamente, y ω^+ y ω^- son funciones de la clase $C_\alpha(E)$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$, $p > 2$. Además Φ^+ es continua en $G^+ + \Gamma$ y Φ^- es continua en $G^- + \Gamma$ y en infinito satisface la condición

$$\Phi^-(z) = 0(|z|^{-4}). \tag{1.4.19}$$

Introduciendo las expresiones (1.4.18) en (1.4.17) obtenemos

$$\Phi^+[\nu(z)] = \alpha_1(z)\Phi^-(z) + \alpha_2(z)\overline{\Phi^-(z)}, \quad z \in \Gamma, \tag{1.4.20}$$

donde

$$\alpha_1 = \beta_1 e^{\omega^-(z) - \omega^+(\nu(z))}, \quad \alpha_2 = \beta_2 e^{\overline{\omega^-(z)} - \overline{\omega^+(\nu(z))}}. \tag{1.4.21}$$

El problema (1.4.20) cuando $\nu(z) = z$ fué investigado por N. P. Vekua, para un sistema de funciones analíticas. Sus resultados implican que el problema tiene solo un número finito de soluciones linealmente independientes de orden finito en infinito. (En nuestro caso, el orden es de $k = -4$). El problema (1.4.20) para $a_2 \equiv 0$ pero $\nu(z) \neq z$ fué investigado por D.A. Kveselava. Se ve de (1.4.21) y (1.4.13) que este caso ocurre cuando

$$\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right)^{+}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right)^{-} = 0 \quad para \quad t = \nu(z). \tag{1.4.22}$$

Por lo visto en (1.4.11) esta relación se cumple por tangencia de segundo orden. Se ve de manera simple que la condición (1.4.22) es invariante con respecto al cambio del sistema de coordenadas de la superficie. En este caso, el estudio del problema puede ser completado.

De hecho, la relación (1.4.20) toma ahora la forma

$$\Phi^{+}[\nu(z)] = \alpha_1(z)\Phi^{-}(z). \tag{1.4.23}$$

Más aún, con ayuda de las formulas (1.4.21) y (1.4.13) se encuentra que $\alpha_1(z)$ no desaparece en ninguna parte de Γ y el índice $\varkappa = 0$. Estas condiciones ocurren en dos casos, es decir: (1) si $S^{+} + S^{-}$ es un ovaloide y (2) si $S^{+} + S^{-}$ es concava en la misma dirección. De acuedo con el teorema de Kveselava todas las soluciones del problema (1.4.23) teniendo en los polos del infinito de orden finito son dados por las formulas

$$\begin{aligned} \Phi^{+}(z) &= X(z)\Phi_1(z), & z \in G^{+}, \\ \Phi^{-}(z) &= X(z)\Phi_2(z) + X(z)P(z), & z \in G^{-}, \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

donde $P(z)$ es un polinomio en z, Φ_1 y Φ_2 son funciones holomorfas en G^{+} y G^{-}, respectivamente, y son determinadas univocamente por el polinomio dado $P(z)$; también $\Phi_2(\infty) = 0$ y $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv 0$ cuando $P(z) \equiv 0$. Finalmente $X(z)$ es también llamada como la solución canónica del problema, que no desaparece en ningún lugar del plano excepto en el punto infinito donde la siguiente expansión se satisface:

$$X(z) = z^{-\varkappa}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots\right), \qquad a_0 \neq 0.$$

Ya que en nuestro caso $\varkappa = 0$, y en vista de (1.4.24) para la solución del problema que satisface en infinito la condición (1.4.19) donde tenemos $P(z) \equiv 0$. Reciprocamente, $\Phi^{+} \equiv \Phi^{-} \equiv 0$. Esto completa la demostración.

En el caso de tangencia simple la condición (1.4.22) no se satisface. Sin embargo α_1 y α_2 cumplen la desigualdad

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| \quad (en\ \Gamma)$$

A pesar de eso, se sigue para los resultados de B. Bojarski que también en este caso el problema no tiene solución. Entonces, se establece que una superficie cerrada compuesta por dos secciones de ovaloides distintas es rígida si la línea de contacto es la línea tangencial.

1.5. El problema de rígidez de superficies seccionales

El método dado en la Sección 1.4 también puede ser aplicado al problema de rígidez de superficies cerradas compuestas por un número finito de secciones de ovaloides $S_0, S_1, ..., S_m$. Para definidad supongamos que S_0 es una superficie m-conexa, i.e. S_0 es un ovaloide con las aberturas $L_1, ..., L_m$ contactadas con superficies convexas simplemente conexas $S_1, ..., S_m$, respectivamente. Por una adecuada elección de coordenadas conjugadas isometricamente podemos mapear homeormoficamente la superficie S_0 en el dominio G_0 acotadas por curvas cerradas simples $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$, las curvas $\Gamma_2, ..., \Gamma_m$ están situadas dentro de Γ_1. Subsecuentemente, por una apropiada selección de redes conjugadas isometricamente de líneas en $S_1, ..., S_m$ estas superfies pueden ser mapeadas homeomorficamente en un dominio infinito G_1 acotado por la curva Γ_1, y los dominios $G_2, ..., G_m$ acotados por $\Gamma_2, ..., \Gamma_m$, respectivamente. En este caso, para cada línea de contacto L_j la cuál suponemos que es suficientemente suave, es mapeada homeomorficamente de dos distintas maneras en la curva Γ_j y a cada punto M de la curva L_j corresponden en Γ_j dos puntos z y $t = \nu_j(z)$ donde $\nu_j(z)$ es la función establecida or el mapeo homeomorfico de Γ en si mismo. Escribiendo las condiciones de conjunción (1.3.28) en la forma compleja obtenemos la condición de frontera de la forma

$$U_j'[\mathrm{v}_j(z)] = \beta_{1j}^* U_0'(z) + \beta_{2j}^* \overline{U_0'(z)} + \beta_{3,j}^* Re\left[\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \frac{dU_0'(z)}{ds}\right], \tag{1.5.1}$$

$$(z \in \Gamma_j;\ j = 1, 2, ..., m)$$

donde β_{ij}^* son funciones totalmente definidas del punto del contorno $\Gamma = \Gamma_1 + ... + \Gamma_m$, las cuales están dadas por las fórmulas de la forma (1.4.16), U_j' satisfacen la ecuación (1.4.6) en el dominio G_j y es continua en $G_j + \Gamma_j$ $(j = 0, 1, ..., m)$; en infinito U_1' está sujeta a la condición (1.4.10). El problema (1.5.1) es fácilmente reducible a una ecuación integral singular equivalente. Entonces, puede ser probado que el problema puede tener solamente un número finito de soluciones linealmente independientes. Por lo tanto, superficies seccionales regulares (no convexas) compuestos en la forma indicada anteriormente, puede tener solo un conjunto finito de flexiones infinitesimales. Por lo tanto, tales superficies pueden ser convertidas en superficies rígidas a someterlas a un número finito de restricciones puntuales, por ejemplo, mediante una sujeción rígida de un número finito de puntos de la superficie.

Si todas las líneas de contacto son líneas tangenciales de las condiciones de frontera (1.5.1) se simplifica y toma la forma

$$U_j'[\nu_j(z)] = \beta_{1j} U_0'(z) + \beta_{2j} \overline{U_0'(z)}, \quad z \in \Gamma_j \tag{1.5.2}$$

$$(j = 1, ..., m).$$

Una investigación de la solubilidad del problema también se puede obtener del caso de funciones analíticas. Si es posible descubrir que el problema (1.5.2) que no tiene soluciones no triviales, satisface la condición (1.4.10), este resultado es equivalente a la rígidez de una superficie cerrada compuesta en la forma indicada arriba a lo largo de las líneas de tangencia, de un número finito de superficies convexas.

El problema de rígidez de superficies cerradas compuestas, de manera arbitraria, de un número finito de secciones de superficies regulares convexas conduce a un más complicado problema de valor en la frontera para funciones analíticas generalizadas. Más investigaciones sobre este tema son por lo tanto de gran importancia.

Consideraremos casos en los que como consecuencia del pegamiento de las superficies surgen restricciones que aseguran la rígidez de al menos una de las superficies de contacto. Diremos que las superficies S^+ y S^- están rígidamente pegadas a lo largo de L si bajo una flexión infinitesimal de la superficie la variación del ángulo de contacto se desvanece, es decir,

$$\delta\vartheta = \delta\theta^- - \delta\theta^+ = 0 \qquad (a\ lo\ largo\ de\ L). \tag{1.5.3}$$

Asumimos que en cada punto de la curva L tenemos o bien $k_s^+ \neq 0$ o $k_s^- \neq 0$. Por ejemplo, si una de las superficies S^+ o S^- es de curvatura principal positiva, la condición de arriba siempre se satisface. Si esta condición se satisface, la curva L es llamada "la curva de pegamiento normal". Si en un punto de la curva la condición $k_s^+ = k_s^- = 0$ ocurre, este punto se dice que es un punto singular de la curva de pegamiento L. Si la curva L contiene solo puntos singulares, esta curva se llama la línea de pegamiento singular. En cada punto singular la línea es tangente a las direcciones asintóticas de las superficies S^+, S^-. A partir de ahora, asumiremos que la curva L es una línea de pegamiento normal.

Puesto que de acuerdo con (1.3.29)

$$k_s^+\delta\vartheta = -\sin\vartheta\delta k_s^-, \quad k_s^-\delta\vartheta = -\sin\vartheta\delta k_s^+, \tag{1.5.4}$$

la relación (1.5.3) se cumple si una de las siguientes condiciones se satisface:

$$(1) \quad \sin\vartheta = 0 \qquad (a\ lo\ largo\ de\ L),$$

$$(2) \quad k_s^+ \neq 0, \quad \delta k_s^- = 0, \quad o \quad k_s^- \neq 0, \quad \delta k_s^+ = 0.$$

Reciprocamente, si $\sin\vartheta \neq 0$, la condición (1.5.3), en vista de (1.5.4) y (1.3.31), siempre implican las condiciones

$$\delta k_s^+ = 0, \quad \delta k_s^- = 0, \quad \delta\tau_s^+ = \delta\tau_s^-, \quad (a\ lo\ largo\ de\ L), \tag{1.5.5}$$

es decir,

$$d\mathbf{V}^+ = d\mathbf{V}^- \equiv \delta\tau_s \mathbf{s} ds \quad (a\ lo\ largo\ de\ L). \tag{1.5.6}$$

Si las superficies S^+ y S^- son tangentes a lo largo de la curva L, entonces $\mathbf{n}^+ = \pm\mathbf{n}^-$ (en L) y pues $\sin\vartheta = 0$, es decir, $\delta\vartheta = 0$ a lo largo de L.

Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1. *La línea tangente de superficies es la línea de pegamiento rígido, es decir, bajo flexiones infinitesimales arbitrarias de esas superficies las líneas tangentes se preservan.*

En otras palabras la tangencia (a lo largo de la curva) de superficies se preserva bajo flexiones infinitesimales. Esto es adecuado al hecho que S^+ y S^- tienen en común banda con la base L y reciprocamente bajo flexiones infinitesimales una rotación de un área elemental de la banda puede ser considerada como común para S^+ y S^-. Ya que, en el caso bajo consideración (las superficies son tangentes) $\cos\theta^+ = \pm\cos\theta^-$, en las líneas tangentes de las dos superficies las cuales no son líneas asintóticas o sus envolventes, las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\delta k_s^+ = \pm\delta k_s^-, \quad \delta\tau_s^+ = \delta\tau_s^- \quad (a\ lo\ largo\ de\ L). \tag{1.5.7}$$

Capítulo 2

Operadores pseudodiferenciales de Mellin

2.1. Funciones cuasicontinuas y lentamente oscilatorias

2.1.1. El álgebra C^* $SO(\mathbb{R}_+)$ de funciones lentamente oscilatorias en $\mathbb{R}_+$

Sea $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ y sea $SO(\mathbb{R}_+)$ la subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ que consiste de todas las funciones $a \in C(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ que oscilan lentamente en 0 e ∞, es decir (ver, e.g., [43]), satisface para algún (equivalentemente, para todo) $\lambda > 1$ la condición

$$\lim_{r \to s} \max\{|a(x) - a(y)| : x, y \in [r, \lambda r]\} = 0 \quad \textit{para } s \in \{0, \infty\}.$$

Dada un álgebra C^* conmutativa con unidad $\mathcal{A}$, denotamos por $M(\mathcal{A})$ el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$. Sea $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$. Identificando los puntos $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ con los funcionales de evaluación $\delta_x(f) = f(x)$, obtenemos $M(C(\overline{\mathbb{R}}_+)) = \overline{\mathbb{R}}_+$. Entonces

$$M(SO(\mathbb{R}_+)) = \mathbb{R}_+ \cup \Delta, \quad \Delta := M_0(SO(\mathbb{R}_+)) \cap M_\infty(SO(\mathbb{R}_+)),$$

donde $M_s(SO(\mathbb{R}_+)) = \{\xi \in M(SO(\mathbb{R}_+)) : \xi|_{C(\overline{\mathbb{R}}_+)} = s\}$ son fibras del conjunto $M(SO(\mathbb{R}_+))$ sobre los puntos $s \in \{0, \infty\}$. Por [[22], sección 2.1], las fibras $M_0(SO(\mathbb{R}_+))$ y $M_\infty(SO(\mathbb{R}_+))$ son espacios Hausdorff compactos conexos.

2.1.2. Funciones BMO y VMO

Sea $\mathcal{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$, donde $\mathbb{T}$ es la circunferencia unitaria. Dada una función integrable localmente $f \in L^1_{loc}(\mathcal{L})$, y un intervalo finito $I \subset \mathcal{L}$ de la medida de longitud de Lebesgue $|I| = \int_I dm$, sea

$$I(f) := |I|^{-1} \int_I f(t) dm(t)$$

denota el promedio integral de f sobre I. El conjunto de funciones $f \in L^1_{loc}(\mathcal{L})$ para el cual

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|I| \leq \delta} |I|^{-1} \int_I |f(t) - I(f)| dm(t) = 0$$

es el subespaco cerrado $VMO(\mathcal{L})$ de *Vanishing mean oscillations functions* en el espacio de Banach $BMO(\mathcal{L})$ (ver, e.g., [[16],[42]). Sea $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, considerando el homeomorfismo

$$\gamma : \mathbb{T} \to \dot{\mathbb{R}}, \qquad \gamma(t) = i(1+t)/(1-t), \tag{2.1.1}$$

por [16], $f \in BMO(\mathbb{R})$ si y sólo si $f \circ \gamma \in BMO(\mathbb{T})$. Por el contrario,

$$VMO := \{f \circ \gamma^{-1} : f \in VMO(\mathbb{T})\} \tag{2.1.2}$$

es un subespacio propio de $VMO(\mathbb{R})$ estando la clausura de $C(\dot{\mathbb{R}})$ en $BMO(\mathbb{R})$ [16].

2.1.3. El álgebra C^* QC de funciones cuasicontinuas en $\mathbb{T}$

Sea H^∞ la subálgebra cerrada de $L^\infty(\mathbb{T})$ que consiste de todas las funciones que son límites no-tangenciales en $\mathbb{T}$, de funciones analíticas acotadas en el disco unitario abierto $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y sea $C := C(\mathbb{T})$. Por [42] y [43], el álgebra C^* $QC := QC(\mathbb{T})$ de funciones cuasicontinuas en $\mathbb{T}$ está definida por

$$QC := (H^\infty + C) \cap (\overline{H^\infty} + C) = VMO(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}). \tag{2.1.3}$$

Ya que $C \subset QC$, el espacio ideal maximal de QC es de la forma

$$M(QC) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} M_t(QC), \qquad M_t(QC) := \{\xi \in M(QC) : \xi|_C = t\}, \tag{2.1.4}$$

donde $M_t(QC)$ son fibras de $M(QC)$ sobre los puntos $t \in \mathbb{T}$.

Para $t \in \mathbb{T}$, sea $M_t^0(QC)$ el conjunto de funcionales en $M_t(QC)$ que se encuentra dentro de la topología débil estrella cerradura en QC^* del conjunto $\{\delta_{\lambda,t} : \lambda \in (1,\infty)\}$, donde para $t = e^{i\theta}$,

$$\delta_{\lambda,t} : QC \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\theta-\pi/\lambda}^{\theta+\pi/\lambda} f(e^{ix})dx \quad \textit{para todo } (\lambda, t) \in (1,\infty) \times \mathbb{T};$$

$$M_t^{\pm}(QC) := \{\xi \in M_t(QC) : \xi(f) = 0 \textit{ si } f \in QC \textit{ y } \limsup_{z \to t^{\pm}} |f(z)| = 0\}.$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$, se sigue de [[43], Lema 8] (ver también [[13], Sección 3.3]) que

$$M_t^+(QC) \cap M_t^-(QC) = M_t^0(QC), \quad M_t^+(QC) \cup M_t^-(QC) = M_t(QC).$$

Por lo tanto, la fibra $M_t(QC)$ se divide en tres conjuntos disjuntos:

$$M_t^0(QC), \quad M_t^+(QC) \setminus M_t^0(QC), \quad M_t^-(QC) \setminus M_t^0(QC).$$

Con respecto a las funciones en $L^\infty(\mathbb{T})$ mientras armónicamente se extienden en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$, deducimos de [[43], p. 821] que la restricción g_t de una función $f \in QC$ al radio $[0,t)$, donde $t \in \mathbb{T}$, es una función continua acotada en $[0,t)$ que oscila lentamente en el punto t, es decir, $g_t \in SO[0,t)$. Por [[43], p. 823], cada función en $SO[0,t)$ tiene una extensión continua al espacio compacto $[0,t) \cup M_t^0(QC)$, lo cual puede ser identificado con la fibra $M_t(SO[0,t))$. Más aún, por [[43], p. 823], para cada $t \in \mathbb{T}$ el álgebra restringida $QC|_{M_t^0(QC)}$ es isomorfo al álgebra cociente $SO[0,t)/C_0[0,t)$, donde $C_0[0,t)$ denota el espacio de funciones continuas en $[0,t)$ que tienden a cero en el punto t.

Sea $PQC := alg(QC, PC)$ el subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ generada por las álgebras C^* QC y PC, donde $PC := PC(\mathbb{T})$ consiste de todas las funciones cuasicontinuas a trozos en $\mathbb{T}$, es decir, las funciones tienen límites unilaterales finitas en cada punto $t \in \mathbb{T}$. Las funciones en PQC son denominadas como las funciones cuasicontinuas a trozos.

2.1.4. Funciones cuasicontinuas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_+$

Sean VMO dadas por (2.1.2) y $QC(\mathbb{R})$ el álgebra C^* de funciones cuasicontinuas en $\mathbb{R}$ que están definidas de manera similar a (2.1.3) por

$$QC(\mathbb{R}) := (H^\infty(\mathbb{R}) + C(\dot{\mathbb{R}})) \cap (\overline{H^\infty(\mathbb{R})} + C(\dot{\mathbb{R}})) = VMO \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Como $M(C(\dot{\mathbb{R}})) = \dot{\mathbb{R}}$, se sigue de (2.1.4) que $M(QC(\mathbb{R})) = \bigcup_{x \in \dot{\mathbb{R}}} M_x(QC(\mathbb{R}))$,

$$M_x(QC(\mathbb{R})) := \{\xi \in M(QC(\mathbb{R})) : \ \xi|_{C(\dot{\mathbb{R}})} = x\}.$$

Aplicando el homeomorfismo $\gamma : \mathbb{T} \to \dot{\mathbb{R}}$ dado por (2.1.1), concluimos que $a \circ \gamma \in QC$ si y sólo si $a \in QC(\mathbb{R})$. Por lo tanto, se puede asociar las fibras $M_x(QC(\mathbb{R}))$ y $M_t(QC)$ como sigue: $\xi \in M_x(QC(\mathbb{R}))$ para $x \in \dot{\mathbb{R}}$ si y sólo si el funcional $\widetilde{\xi}$ definido por $\widetilde{\xi}(a \circ \gamma) = \xi(a)$ para cada $a \in QC(\mathbb{R})$ pertenece a $M_t(QC)$ para $t = \gamma^{-1}(x) \in \mathbb{T}$. Similarmente, definimos los conjuntos $M_x^{\pm}(QC(\mathbb{R}))$ y $M_x^0(QC(\mathbb{R}))$ para cada $x \in \dot{\mathbb{R}}$.

Sea $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$. El álgebra C^* de funciones cuasicontinuas en $\mathbb{R}_+$ está definida por

$$QC(\mathbb{R}_+) := QC(\mathbb{R})|_{\overline{\mathbb{R}}_+} := VMO|_{\mathbb{R}_+} \cap L^\infty(\mathbb{R}_+).$$

El espacio ideal maximal $M(QC(\mathbb{R}_+))$ puede ser identificado con el conjunto

$$M(QC(\mathbb{R}_+)) = M_0^+(QC(\mathbb{R})) \cup \Big(\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+} M_x(QC(\mathbb{R})) \Big) \cup M_\infty^-(QC(\mathbb{R})), \tag{2.1.5}$$

donde $M_\infty^-(QC(\mathbb{R}))$ significa $M_\infty^-(QC(\dot{\mathbb{R}}))$.

2.2. Operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos

Sea $V(\mathbb{R})$ el álgebra de Banach de todas las funciones absolutamente continuas a de variación total acotada $V(a)$ en $\mathbb{R}$, dotadas con la norma

$$\|a\|_V := \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + V(a), \quad V(a) = \int_{\mathbb{R}} |a'(x)| dx.$$

Siguiendo [26, 27], sea $L^\infty(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ el conjunto de todas las funciones $\mathfrak{a} : \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ tales que $\widehat{a} : r \mapsto \mathfrak{a}(r, \cdot)$ es una función valuada en $V(\mathbb{R})$ medible acotada en $\mathbb{R}_+$. Por lo tanto, $\mathfrak{a}(\cdot, x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ por cada $x \in \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$, y la función

$$r \mapsto \big\|\mathfrak{a}(r, \cdot)\big\|_V := \max_{x \in \overline{\mathbb{R}}} |\mathfrak{a}(r, x)| + \int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}(r, x) \Big| dx$$

pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Tenga en cuenta que los límites $\mathfrak{a}(r, \pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} \mathfrak{a}(r, x)$ existen en casi todos los x en $\mathbb{R}_+$. Claramente, $L^\infty(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ es un álgebra de Banach con la norma

$$\big\|\mathfrak{a}\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))} := \operatorname*{ess\,sup}_{r \in \mathbb{R}_+} \big\|\mathfrak{a}(r, \cdot)\big\|_V,$$

donde ess sup denota el supremo esencial (ver[26]).

Como usualmente, sea $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en $\mathbb{R}_+$. Sea $d\mu(\varrho) = d\varrho/\varrho$ la medida invariante (normalizada) en $\mathbb{R}_+$. Las siguientes acotaciones resultan para los operadores pseudodiferenciales de Mellin obtenidas en [27, Theorem 9.1] junto con [26, Theorem 3.1].

Teorema 2.2.1. *Si $\mathfrak{a} \in L^\infty(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, entonces el operador pseudodiferencial de Mellin* $\mathrm{Op}(\mathfrak{a})$*, definido para funciones $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ por la integral iterada*

$$\big[\operatorname{Op}(\mathfrak{a})f\big](r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{a}(r,x)\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{ix} f(\varrho)\,\frac{d\varrho}{\varrho} \quad \textit{for} \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{2.2.1}$$

se extiende a un operador lineal acotado en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ y allí es un número $C_p \in (0,\infty)$ que depende sólo de p tal que

$$\|\operatorname{Op}(\mathfrak{a})\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+,d\mu))} \le C_p \|\mathfrak{a}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,V(\mathbb{R}))}.$$

Sea $L^\infty(\mathbb{T}, V(\mathbb{R}))$ el conjunto de todas las funciones $\mathfrak{b} : \mathbb{T}\times\overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ tal que $t \mapsto \mathfrak{b}(t,\cdot)$ es una función medible acotada $V(\mathbb{R})$-valuada en $\mathbb{T}$. Decimos que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{T}, V(\mathbb{R}))$ es una función cuasicontinua con valor en $V(\mathbb{R})$ en $\mathbb{T}$, $\mathfrak{b} \in QC(\mathbb{T}, V(\mathbb{R}))$, si

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|I|\le\delta}\frac{1}{|I|}\int_I \left\|\mathfrak{b}(t,\cdot) - \frac{1}{|I|}\int_I \mathfrak{b}(\tau,\cdot)dm(\tau)\right\|_V dm(t) = 0,$$

donde $m(\cdot)$ es la medida de longitud de Lebesgue en $\mathbb{T}$.

Una función $\mathfrak{a} \in L^\infty(\mathbb{R}, V(\mathbb{R}))$ se refiere como una función $V(\mathbb{R})$-valuada cuasicontinua en $\mathbb{R}$, $\mathfrak{a} \in QC(\mathbb{R}, V(\mathbb{R}))$, si la función $\mathfrak{b}$ definida por $\mathfrak{b}(t,\cdot) = \mathfrak{a}(\gamma(t),\cdot)$ para $t \in \mathbb{T}$, donde γ está dado por (2.1.5), pertenece a $QC(\mathbb{T}, V(\mathbb{R}))$. Sea $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ el conjunto de restricciones de funciones $\mathfrak{a} \in QC(\mathbb{R}, V(\mathbb{R}))$ a $\mathbb{R}_+$ con respecto a la primera variable. Entonces $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ es una subálgebra de Banach de $L^\infty(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$.

Dados $\mathfrak{a} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ y $h \in \mathbb{R}$, sea $\mathfrak{a}^h(r,x) := \mathfrak{a}(r, x+h)$ para casi todo $r \in \mathbb{R}_+$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ el subálgebra de Banach de $L^\infty(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ que consta de todas las funciones $\mathfrak{a} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ que cumplen las dos condiciones:

$$\lim_{|h|\to 0}\operatorname*{ess\,sup}_{r\in\mathbb{R}_+}\big\|\mathfrak{a}(r,\cdot) - \mathfrak{a}^h(r,\cdot)\big\|_V = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\lim_{M\to\infty}\operatorname*{ess\,sup}_{r\in\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]} |\partial_x \mathfrak{a}(r,x)|\,dx = 0. \tag{2.2.3}$$

Siguiendo [25], para $p \in (1,\infty)$, consideramos el álgebra de Banach $\mathfrak{D}_p \subset \widetilde{\mathcal{B}}_p := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ generada por operadores pseudodiferenciales de Mellin $\mathrm{Op}(\mathfrak{a})$, de la forma

(2.2.1) con símbolos $V(\mathbb{R})$-valuados cuasicontinuos $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. Notemos que el álgebra $\mathfrak{D}_p$ contiene operadores que no son operadores pseudodiferenciales de Mellin $\mathrm{Op}(\mathfrak{a})$ con símbolos $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, pero son límites de sucesiones de operadores $\mathrm{Op}(\mathfrak{a}_n)$ con símbolos $\mathfrak{a}_n \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$.

Teorema 2.2.2. *[25, Teorema 5.3] Para cada $p \in (1, \infty)$ y para todos los operadores $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}_p$, el conmutador $[D_1, D_2]$ es un operador compacto en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$.*

Para probar este teorema se usan relaciones de operadores psudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos y operadores integrales singulares con coeficientes cuasicontinuos.

El ideal $\widetilde{\mathcal{K}}_p := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ de operadores compactos está contenido en el álgebra de Banach $\mathfrak{D}_p$ (ver [25, Section 5]). Por lo tanto, el álgebra de Banach cociente $\mathfrak{D}_p^\pi := \mathfrak{D}_p/\widetilde{\mathcal{K}}_p$ es conmutativa, y $\mathfrak{D}_p^\pi \subset \widetilde{\mathcal{B}}_p^\pi := \widetilde{\mathcal{B}}_p/\widetilde{\mathcal{K}}_p$, $\widetilde{\mathcal{B}}_p^\pi$ es llamada el álgebra de Calkin.

Sea $B(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ el álgebra de todas las funciones acotadas de valores complejos en el conjunto compacto $\mathfrak{M} \subset M(QC(\mathbb{R}_+)) \times \overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} &:= \mathfrak{M}_{+\infty} \cup \mathfrak{M}_{-\infty} \cup \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty, \\
\mathfrak{M}_{\pm\infty} &= \left[M_0^+(QC(\mathbb{R})) \cup \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} M_t(QC(\mathbb{R})) \right) \cup M_\infty^-(QC(\mathbb{R})) \right] \times \{\pm\infty\}, \\
\mathfrak{M}_0 &= \left[M_0^+(QC(\mathbb{R})) \setminus \widetilde{M}_0^+(QC(\mathbb{R})) \right] \times \mathbb{R} = M_0^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}, \\
\mathfrak{M}_\infty &= \left[M_\infty^-(QC(\mathbb{R})) \setminus \widetilde{M}_\infty^-(QC(\mathbb{R})) \right] \times \mathbb{R} = M_\infty^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Se define el símbolo de Fredholm $\mathcal{D}$ del operador $D := \mathrm{Op}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{D}_p$ con símbolo cuasicontinuo $V(\mathbb{R})$-valuado $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ por

$$\mathcal{D}(\xi, x) := \mathfrak{a}(\xi, x) \quad \text{para todo} \quad (\xi, x) \in \mathfrak{M}, \tag{2.2.5}$$

donde $\mathfrak{a}(\xi, \pm\infty)$ son los valores de las transformadas de Gelfand de la funciones $\mathfrak{a}(\cdot, \pm\infty)$ en el espacio ideal maximal $M(QC(\mathbb{R}_+))$ (la transformada de Gelfand es un homomorfismo de elementos de álgebras de Banach conmutativas vía funciones continuas complejas sobre espacios de ideales maximales). Y por [25] se definen los valores $\mathfrak{a}(\xi, x)$ para cada $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R})) \cup M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$ y cada $x \in \overline{\mathbb{R}}$ en la forma

$$\mathfrak{a}(\xi, x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} \mathfrak{a}(\gamma(t), x) dm(t)$$

para la función $\mathfrak{a}(\gamma(\cdot), \cdot) \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{T}_-, V(\mathbb{R}))$, $\mathbb{T}_- := \{z \in \mathbb{T} : \operatorname{Im} z < 0\}$, y una sucesión de arcos $I_n \subset \mathbb{T}$ es tal que sus centros t_n tienden a -1 o 1 si, respectivamente, $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$ o $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$, y $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$.

Una subálgebra con unidad cerrada $\mathcal{A}$ de un álgebra de Banach con unidad $\mathcal{B}$ con la misma unidad se llama *inverso cerrado* en $\mathcal{B}$, si para cada $A \in \mathcal{A}$ sus espectros en las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ coinciden (ver, por ejemplo, [12, pg. 3]). Por lo tanto, si $A \in \mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{B}$, entonces A es invertible en $\mathcal{A}$.

El cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{D}_p$ y el Criterio de Fredholm para los operadores $D \in \mathfrak{D}_p$ en términos de sus símbolos de Fredholm se dan de la siguiente manera.

Teorema 2.2.3. *[25, Teorema 5.4] Para $p \in (1, \infty)$, el mapeo $D \mapsto \mathcal{D}(\cdot, \cdot)$ dado por* (2.2.5) *sobre los generadores del álgebra de Banach $\mathfrak{D}_p$ que son operadores pseudodiferenciales de Mellin* $\mathrm{Op}(\mathfrak{a})$ *con símbolos $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, se extiende a un Banach álgebra homomorfismo $\Phi_p : \mathfrak{D}_p \to \Phi_p(\mathfrak{D}_p)$, donde $\Phi_p(\mathfrak{D}_p)$ es una subálgebra del álgebra $B(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$,* $\ker \Phi_p \supset \widetilde{\mathcal{K}}_p$*, y* $\ker \Phi_p = \widetilde{\mathcal{K}}_p$ *para $p = 2$. El álgebra cociente de Banach $\mathfrak{D}_p^\pi$ es conmutativo e inverso cerrado en el álgebra de Calkin $\widetilde{\mathcal{B}}_p^\pi$, y su espacio ideal maximal es homeomorfo a $\mathfrak{M}$. Un operador $D \in \mathfrak{D}_p$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ si y solo si la transformada de Gelfand $D^\pi \mapsto \mathcal{D}(\cdot, \cdot)$ es invertible sobre $\mathfrak{M}$, lo que significa que*

$$\mathcal{D}(\xi, x) \neq 0 \quad \textit{for all} \quad (\xi, x) \in \mathfrak{M}. \tag{2.2.6}$$

El criterio de compacidad para los operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ tiene la siguiente forma.

Teorema 2.2.4. *[25, Teorema 5.5] Para $p \in (1, \infty)$, el operador pseudodiferencial de Mellin* $\mathrm{Op}(\mathfrak{a})$ *con símbolo $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ es un operador compacto en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ si y solo si*

$$\mathfrak{a}(\xi, x) = 0 \quad \textit{for all} \quad (\xi, x) \in \mathfrak{M}. \tag{2.2.7}$$

Capítulo 3

El problema de frontera de Haseman con coeficientes y corrimientos cuasicontinuos

3.1. Datos cuasicontiuos del operador T

Curva estrellada. La curva estrellada Γ está definida por la fórmula

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k, \quad \Gamma_k := e^{i\beta_k}\overline{\mathbb{R}}_+ \quad (k = 1, 2, ..., N), \tag{3.1.1}$$

donde los rayos Γ_k son orientados, o bien de 0 a ∞, o de ∞ a 0, y

$$0 \leq \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_N < 2\pi. \tag{3.1.2}$$

Con cada rayo Γ_k asociamos el número

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \;\;1 & \text{si} \quad 0 \; \textit{es el punto inicial de} \; \Gamma_k, \\ -1 & \text{si} \quad 0 \; \textit{es el punto final de} \; \Gamma_k. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Funciones cuasicontinuas en Γ.

$QC(\Gamma)$ define el conjunto de todas las funciones cuasicontinuas $b : \Gamma \to \mathbb{C}$, lo que significa que existen funciones $b_k \in QC(\mathbb{R}_+)$ tal que $b(e^{i\beta_k}r) = b_k(r)$ para $r \in \mathbb{R}_+$, y todo $k = 1, 2, ..., N$.

Similarmente, decimos que $b \in SO(\Gamma)$ si $b_k \in SO(\mathbb{R}_+)$ para todo $k = 1, 2, ..., N$.

Corrimientos cuasicontinuos

Sea α un homeomorfismo que preserva la orientación de cada rayo Γ_k $(k = 1, 2, ..., N)$ sobre el mismo, que posee la propiedad

$$\ln|\alpha'| \in L^\infty(\Gamma). \tag{3.1.4}$$

Entonces el operador de corrimiento $V_\alpha : f \mapsto f \circ \alpha$ y su inverso V_α^{-1} son acotados en los espacios $L^p(\Gamma)$, $p \in (1, \infty)$. Llamaremos α como el corrimiento cuasicontinuo en Γ si

$$\alpha(e^{i\beta_k} r) = e^{i\beta_k} r e^{\omega_k} \quad \textit{para } r \in \mathbb{R}_+ \textit{ y } k = 1, 2, ..., N, \tag{3.1.5}$$

donde ω_k y $\phi_k : r \mapsto r\omega_k'(r)$ son funciones con valores reales en $QC(\mathbb{R}_+)$. Si α es un corrimiento cuasicontinuo, entonces se sigue de (3.1.4) y (3.1.5) que

$$\alpha'(e^{i\beta_k} r) = (1 + r\omega_k'(r))e^{\omega_k(r)} \quad \textit{para } r \in \mathbb{R}_+ \textit{ y todo } k, \tag{3.1.6}$$

$$\operatorname{ess}\inf_{r \in \mathbb{R}_+} (1 + r\omega_k'(r)) > 0 \quad \textit{para todo } k = 1, 2, ..., N.$$

Por (3.1.6), $\alpha' \in QC(\Gamma)$. Definimos las funciones con valores reales $\omega, c_\alpha \in QC(\Gamma)$ por

$$\omega(t) := \ln[\alpha(t)/t], \quad c_\alpha(t) := e^{\omega(t)/p} \quad \textit{para } t \in \Gamma. \tag{3.1.7}$$

3.2. Propiedad de Fredholm y el índice del operador T

Haciendo uso de la interrelaciones de los operadores integrales singulares con coeficientes cuasicontinuos y los operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos establecidos en [30], y aplicando una reducción a tales operadores, obtenemos los resultados principales de la tesis.

Definamos los conjuntos

$$\widetilde{\Delta} := M_0(QC(\mathbb{R})) \cup M_\infty(QC(\mathbb{R})), \quad \Delta^0 := M_0^0(QC(\mathbb{R})) \cup M_\infty^0(QC(\mathbb{R})), \tag{3.2.1}$$

$$\mathfrak{M}_0 := M_0^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}, \qquad \mathfrak{M}_\infty := M_\infty^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}. \tag{3.2.2}$$

Teorema 3.2.1. *Sea* $p \in (1, \infty)$, $G \in QC(\Gamma)$ *y sea* Γ *una curva estrellada y* $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ *un corrimiento que satisface las condiciones de la Subsección 3.1. Entonces el operador* $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ *es Fredholm en el espacio* $L^p(\Gamma)$ *si, y sólo si una de las dos siguientes condiciones equivalentes se satisface:*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} |G(t)| > 0 \text{ y } \det \mathfrak{T}(\xi, x) \neq 0 \text{ para todo } (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty, \tag{3.2.3}$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} |G(t)| > 0 \text{ y } \varphi_p(\eta(\xi), \lambda(\xi)) \notin \mathbb{Z} \quad \text{para todo } \xi \in \Delta^0, \tag{3.2.4}$$

donde $\det \mathfrak{T}(\xi, x)$ *está definida para todo* $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$ *por*

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{T}(\xi, x) := & \Big(\prod_{\varepsilon_k = 1} e^{i\omega_k(\xi)(x+i/p)} \Big) \Big(\prod_{\varepsilon_k=-1} G_k(\xi) \Big) \mathcal{P}_+(x) \\ & + \Big(\prod_{\varepsilon_k = -1} e^{i\omega_k(\xi)(x+i/p)} \Big) \Big(\prod_{\varepsilon_k=1} G_k(\xi) \Big) \mathcal{P}_-(x), \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\mathcal{P}_\pm(x) := 2^{-1}[1 \pm \coth(\pi(x + i/p))] \qquad \text{para todo } x \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{3.2.6}$$

$$\varphi_p(\eta, \lambda) := \Big(\frac{\eta}{2\pi p} + \frac{\ln|\lambda|}{2\pi} \Big) \frac{\eta}{2\pi} + \frac{1}{p} - \frac{\arg \lambda}{2\pi}, \tag{3.2.7}$$

$$\eta(\xi) := \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \omega_k(\xi), \qquad \lambda(\xi) := \sum_{k=1}^{N} G_k^{\varepsilon_k}(\xi) \qquad \text{para } \xi \in \Delta^0. \tag{3.2.8}$$

Ocupando la definición de Sarason [43] del índice de Cauchy de una función invertible $f \in PQC$, para la cual la extensión armónica F de f (ver [13]) al disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ está acotada lejos de 0 en el anillo $1 - \varepsilon < |z| < 1$, para un suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$. Entonces el índice de Cauchy $\operatorname{ind} f$ está definido como *winding number* de la función $F_r : t \mapsto F(rt)$ en $\mathbb{T}$ para algún $r \in (1 - \varepsilon, 1)$:

$$\operatorname{ind} f := \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \{\arg F_r(t)\}_{t\in\mathbb{T}}, \tag{3.2.9}$$

donde $\{\arg F_r(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ denota el incremento del argumento de $F_r(t)$ para $t \in \mathbb{T}$.

Con α definida en la sección 3.1, podemos asociar el homeomorfismo que preserva la orientación $\widetilde{\alpha} : \Gamma \to \Gamma$ tal que $\ln|\widetilde{\alpha}'| \in L^\infty(\Gamma)$, $\widetilde{\alpha}' \in SO(\Gamma)$, la función con valores reales $\widetilde{\omega} : t \mapsto \ln(\widetilde{\alpha}(t)/t)$ está en $SO(\Gamma)$, las funciones $\widetilde{\omega}_k : r \mapsto \widetilde{\omega}(e^{i\beta_k} r)$ y $\widetilde{\phi}_k : r \mapsto r\widetilde{\omega}_k'(r)$ pertenecen a $SO(\mathbb{R}_+)$, y

$$\widetilde{\omega}_k(\xi) = \omega_k(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \in \Delta^0 \text{ y todo } k = 1, 2, ..., N. \tag{3.2.10}$$

Entonces el operador $V_{\widetilde{\alpha}} : f \mapsto f \circ \widetilde{\alpha}$ es acotado en los espacios $L^p(\Gamma)$, $p \in (1, \infty)$.

Teorema 3.2.2. *Sea* $p \in (1,\infty)$, α *y* Γ *satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.1,* $\widetilde{\alpha} : \Gamma \to \Gamma$, $t \mapsto te^{\widetilde{\omega}(t)}$ *es un corrimiento asociado con* α, *las funciones* $\omega \in QC(\Gamma)$ *dadas por (3.1.7) y* $\widetilde{\omega} \in SO(\Gamma)$ *satisfacen (3.2.10), y las funciones* $G^{\pm 1} \in QC(\Gamma)$ *y* $\widetilde{G}^{\pm 1} \in SO(\Gamma)$ *son tales que*

$$\widetilde{G}_k^{\pm 1}(\xi) = G_k^{\pm 1}(\xi) \qquad \textit{para todo } \xi \in \Delta^0 \textit{ y todo } k = 1, 2, ..., N, \tag{3.2.11}$$

entonces los operadores $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ *y* $\widetilde{T} := V_{\widetilde{\alpha}} P_+ + \widetilde{G} P_-$ *son Fredholm en el espacio* $L^p(\Gamma)$ *solo simultáneamente, y en el caso de la propiedad de Fredholm*

$$\mathrm{Ind} T = \mathrm{Ind} \widetilde{T} + \mathrm{ind}(\widehat{G}_\alpha \circ \gamma), \tag{3.2.12}$$

donde γ *está dado por (2.1.1), la función* $\widehat{G}_\alpha \in QC(\mathbb{R})$ *está definida por*

$$\widehat{G}_\alpha(x) := \begin{cases} \prod_{k=1}^{N} (e^{\omega_k/p} G_k)^{\varepsilon_k}(x) & si \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ \prod_{k=1}^{N} (e^{\widetilde{\omega}_k/p} \widetilde{G}_k)^{\varepsilon_k}(-x) & si \quad x \in \mathbb{R}_-, \end{cases} \tag{3.2.13}$$

y $\mathrm{ind}(\widehat{G}_\alpha \circ \gamma)$ *es el índice de Cauchy de la función invertible* $\widehat{G}_\alpha \circ \gamma \in QC$.

Teorema 3.2.3. *Si se satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.1 y 3.2.2 y el operador* $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ *es Fredholm en el espacio* $L^p(\Gamma)$ *con* $p \in (1,\infty)$, *entonces también lo es el operador* $\widetilde{T} := V_{\widetilde{\alpha}} P_+ + \widetilde{G} P_-$ *y*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind} T = \lim_{m\to\infty} \Big(& \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_k}{2\pi} \{\arg \widetilde{G}_k(r)\}_{r \in [m^{-1}, m]} + \frac{\arg \widetilde{\lambda}(m^{-1})}{2\pi} - \frac{\arg \widetilde{\lambda}(m)}{2\pi} \\ & + E(\varphi_p(\widetilde{\eta}(m^{-1}), \widetilde{\lambda}(m^{-1}))) - E((\varphi_p(\widetilde{\eta}(m), \widetilde{\lambda}(m))) \Big) + \mathrm{ind}(\widehat{G}_\alpha \circ \gamma), \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

donde $\{\arg \widetilde{G}_k(r)\}_{r \in [m^{-1}, m]}$ *es el incremento del* $\arg \widetilde{G}_k(r)$ *para* $r \in [m^{-1}, m]$,

$$\widetilde{\eta}(r) := \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \widetilde{\omega}_k(r), \quad \widetilde{\lambda}(r) := \prod_{k=1}^{N} \widetilde{G}_k^{\varepsilon_k}(r) \quad \textit{para } r \in \mathbb{R}_+, \tag{3.2.15}$$

y $E(x)$ *es la parte entera del numero* x.

3.3. Propiedades de los corrimientos cuasicontinuos

Análogamente con [20], decimos que un homeomorfismo que preserva su orientación $\alpha : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sobre el mismo es un corrimiento cuasicontinuo en $\mathbb{R}_+$ si $\ln \alpha' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ y $\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$. Denotamos por $QCS(\mathbb{R}_+)$ al conjunto de tales corrimientos.

Los resultados de esta sección generalizan los resultados correspondientes del artículo [20], donde $\alpha' \in SO(\mathbb{R}_+)$ esta sustituida por $\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$ que requieren técnicas mas avanzadas.

El siguiente teorema generaliza [[20], Lema 2.2] con $\alpha' \in SO(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 3.3.1. *Un homeomorfismo $\alpha : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, que preserva la orientación, pertenece a $QCS(\mathbb{R}_+)$ si $\alpha(r) = re^{\omega(r)}$ para $r \in \mathbb{R}_+$, donde las funciones con valores reales ω y $\phi : r \mapsto r\omega'(r)$ pertenecen a $QC(\mathbb{R}_+)$ y*

$$\operatorname{ess\,ínf}_{r\in\mathbb{R}_+}(1 + r\omega'(r)) > 0. \tag{3.3.1}$$

Si un homeomorfismo $\alpha : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, que preserva la orientación, pertenece a $QCS(\mathbb{R}_+)$ y satisface la condición de la continuidad absoluta, entonces $\alpha(r) = re^{\omega(r)}$ para $r \in \mathbb{R}_+$, donde las funciones con valores reales ω y $\phi : r \mapsto r\omega'(r)$ pertenecen a $QC(\mathbb{R}_+)$ y

$$\operatorname{ess\,ínf}_{r\in\mathbb{R}_+}(1 + r\omega'(r)) > 0. \tag{3.3.2}$$

Demostración. NECESIDAD: Sea $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$. Entonces $\ln \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ y por tanto

$$0 < m_\alpha := ess \inf_{r\in\mathbb{R}_+} \alpha'(r) \le ess \sup_{r\in\mathbb{R}_+} \alpha'(r) =: M_\alpha < \infty, \tag{3.3.3}$$

$\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$, y $\alpha(0) = 0,\ \alpha(\infty) = \infty$. Como $\alpha(0) = 0$ y α es absolutamente continua, se puede deducir que

$$\psi(r)(r) := \frac{\alpha(r)}{r} = \frac{1}{r}\int_0^r \alpha'(x)dx = \int_0^1 \alpha'(rx)dx, \tag{3.3.4}$$

lo cual implica debido a (3.3.3) y (3.3.4) que $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Ya que $\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$ o , equivalentemente, $\alpha' \circ \gamma \in QC(\mathbb{T}_-)$, donde $\gamma : \mathbb{T} \to \dot{\mathbb{R}}$ está dada por (2.1.1) y $\mathbb{T}_- := \{t \in \mathbb{T} : Imt < 0\}$, ésto sigue que para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existe un $\delta > 0$ tal que para todos los arcos $I \subset \mathbb{T}_-$ de medida $|I| \le \delta$,

$$\frac{1}{|I|}\int_I \left|\alpha'[\gamma(t)] - \frac{1}{|I|}\int_I \alpha'[\gamma(\tau)]dm(\tau)\right| dm(t) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.3.5}$$

Para $x \in (0,1]$, sea $I_x = \{\gamma^{-1}[\gamma(t)x] : t \in I\} \subset \mathbb{T}_-$. La medida del arco I_x está determinado por

$$|I_x| = \int_I |f_x'(t)|dm(t), \quad f_x(t) := \gamma^{-1}[\gamma(t)x] = \frac{(x+1)t + (x-1)}{(x-1)t + (x+1)}. \tag{3.3.6}$$

Dado $\varepsilon \in (0,1)$, tomamos a $v_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{4\,\text{máx}\{||\alpha'||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}, 1\}} \in (0,1)$. Se sigue que

$$|f_x'(t)| = \frac{4x}{|(x-1)t + (x+1)|^2} = \frac{2x}{x^2(1 + Re\ t) + (1 - Re\ t)} \le \frac{1}{x},$$

Lo cual implica para $|I| \leq \delta_\varepsilon := \delta v_\varepsilon$ por lo visto en (3.3.6) que

$$|I_x| \leq x^{-1}|I| \leq \delta \quad para\ todo\ x \in [v_\varepsilon, 1]. \tag{3.3.7}$$

Entonces, para todos los arcos $I \subset \mathbb{T}$ con $|I| \leq \delta_\varepsilon$, inferimos de (3.3.4) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|I|}\int_I \Big|\psi[\gamma(t)] - \frac{1}{|I|}\int_I \psi[\gamma(\tau)]dm(\tau)\Big|dm(t) \\
&= \frac{1}{|I|}\int_I \Big|\int_0^1 \alpha'[\gamma(t)x]dx - \frac{1}{|I|}\int_I\int_0^1 \alpha'[\gamma(\tau)x]dxdm(\tau)\Big|dm(t) \\
&= \frac{1}{|I|}\int_I \Big|\frac{1}{|I}\int_I\int_0^1 (\alpha'[\gamma(t)x] - \alpha'[\gamma(\tau)x])dxdm(\tau)\Big|dm(t) \\
&\leq \frac{1}{|I|^2}\int_{I\times I}\Big(\int_0^{v_\varepsilon} + \int_{v_\varepsilon}^1\Big)|\alpha'[\gamma(t)x] - \alpha'[\gamma(\tau)x]|dxdm(t)dm(\tau) \\
&\leq 2v_\varepsilon||\alpha'||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} + \int_{v_\varepsilon}^1 \Big(\frac{I}{|I_x|^2}\int_{I_x\times I_x} |\alpha'[\gamma(t)] - \alpha'[\gamma(\tau)]|dm(t)dm(\tau)\Big)dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\int_{v_\varepsilon}^1 \frac{1}{|I_x|}\int_{I_x}\Big|\alpha'[\gamma(t)] - \frac{1}{|I_x|}\int_{I_x}\alpha'[\gamma(\tau)]dm(\tau)\Big|dm(t)dx.
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Ya que $|I_x| \leq \delta$ para $x \in [v_\varepsilon, 1]$ por (3.3.7), deducimos de (3.3.8) y (3.3.5) que

$$\sup_{|I|\leq\delta_\varepsilon} \frac{1}{|I|}\int_I \Big|\psi[\gamma(t)] - \frac{|}{|I|}\int_I \psi[\gamma(\tau)]dm(\tau)\Big|dm(t) < \varepsilon,$$

lo cual significa que $\psi \in QC(\mathbb{R}_+)$ junto con α'. Puesto que $QC(\mathbb{R}_+)$ es un álgebra C^*, podemos deducir de (3.3.4) que la función $\omega(r) = \ln[\alpha(r)/r]$ támbien está en $QC(\mathbb{R}_+)$. Por lo tanto $\alpha(r) = re^{\omega(r)}$. Finalmente, puesto que $\alpha',\ e^\omega \in QC(\mathbb{R}_+)$, se sigue de (3.3.3) y de la igualdad

$$\alpha'(r) = (1 + r\omega'(r))e^{\omega(r)} \tag{3.3.9}$$

que la función $\phi : r \mapsto r\omega'(r)$ también pertenece a $QC(\mathbb{R}_+)$ y (3.3.2) se cumple.

SUFICIENCIA: Sea α un homeomorfismo de $\mathbb{R}_+$ en el mismo que preserva la orientación, con los puntos fijos 0 y ∞; y sea $\alpha(r) = re^{\omega(r)}$, donde las funciones ω y ϕ están en $QC(\mathbb{R}_+)$ y (3.3.2) se satisface. Ya que

$$0 < ess \inf_{r\in\mathbb{R}_+} e^{\omega(r)} \leq ess \sup_{r\in\mathbb{R}_+} e^{\omega(r)} < \infty,$$

inferimos de (3.3.2) y (3.3.9) que $\ln\alpha' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Además, como las funciones e^ω y ϕ están en $QC(\mathbb{R}_+)$, esto se sigue de (3.3.9) que α' pertenece a $QC(\mathbb{R}_+)$. Así, $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$.

$\square$

Lema 3.3.1. *[[30], Lema 6.3] Si $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$ y $\widehat{\alpha} := \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma$, entonces $\ln|\widehat{\alpha}'| \in L^\infty(\mathbb{T}_-)$ y $\widehat{\alpha}' \in QC(\mathbb{T}_-)$.*

Se demostrara la siguiente generalización de [[11], Proposición 2.5] y [[20], Lemas 2.2-2.3].

Teorema 3.3.2. *Si $b \in QC(\mathbb{R}_+)$ y $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$, entonces las funciones $b \circ \alpha$ y $b - b \circ \alpha$ pertenecen a $QC(\mathbb{R}_+)$ y $b(\xi) - (b \circ \alpha)(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \widetilde{\Delta}$.*

Demostración. Es claro que $b \in QC(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si $b \circ \gamma \in QC(\mathbb{T}_-)$. Análogamente, $b \circ \alpha \in QC(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si $b \circ \alpha \circ \gamma \in QC(\mathbb{T}_-)$. Pero $b \circ \alpha \circ \gamma = (b \circ \gamma) \circ \widehat{\alpha}$, donde $\widehat{\alpha} = \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma$ y, por el Lema 3.3.1, $\ln|\widehat{\alpha}'| \in L^\infty(\mathbb{T}_-)$ y $\widehat{\alpha}' \in QC(\mathbb{T}_-)$. Por lo tanto, inferimos de [[30], Teorema 2.2] que las funciones $b \circ \alpha \circ \gamma$ y $(b - b \circ \alpha) \circ \gamma$ pertenecen a $QC(\mathbb{T}_-)$, lo cual implica que las funciones b y $b \circ \alpha$ están en $QC(\mathbb{R}_+)$. La biyección γ manda los puntos fijos -1 y 1 del corrimiento $\widehat{\alpha} : \mathbb{T}_- \to \mathbb{T}_-$ a los puntos fijos 0 y ∞ del corrimiento $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, respectivamente. Identificando los funcionales $\xi \in M(QC(\mathbb{R}))$ y $\widetilde{\xi} \in M(QC)$ por la regla de $b(\xi) = (b \circ \gamma)(\widetilde{\xi})$ para $b \in QC(\mathbb{R})$, inferimos de [[30], Teorema 2.3] que

$$b(\xi) - (b \circ \alpha)(\xi) = (b \circ \gamma)(\widetilde{\xi}) - (b \circ \alpha \circ \gamma)(\widetilde{\xi}) = 0$$

para todo $\xi \in \widetilde{\Delta}$, lo cuál completa la demostración. $\square$

Los siguientes resultados generalizan [[20], Lema 2.4].

Teorema 3.3.3. *Si $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$, entonces su inverso $\beta = \alpha^{-1}$ está en $QCS(\mathbb{R}_+)$.*

Demostración. Ya que $\ln \alpha' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ y $\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$, se infiere de la igualdad $\beta'(r) = \frac{1}{\alpha'(\beta(r))}$ para el homeomorfismo $\beta : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que $\ln \beta' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Puesto que $\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$ y α' está separada de cero, se sigue que $\beta' \circ \alpha = 1/\alpha' \in QC(\mathbb{R}_+)$. Entonces $\beta' \circ \alpha \circ \gamma \in QC(\mathbb{T}_-)$. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para todos los arcos $I \subset \mathbb{T}_-$ de medida $|I| \leq \delta$,

$$\frac{1}{|I|}\int_I \left|(\beta' \circ \alpha)[\gamma(t)] - \frac{1}{|I|}\int_I (\beta' \circ \alpha)[\gamma(\tau)]dm(\tau)\right| dm(t) < \frac{\varepsilon}{C_0}, \tag{3.3.10}$$

donde $C_0 := 2||\widehat{\alpha}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)}||\widehat{\beta}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)}$, y $\widehat{\beta} = \gamma^{-1} \circ \beta \circ \gamma$ es la función inversa de $\widehat{\alpha}$. Ya que $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \widehat{\alpha}$, (3.3.10) implica la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{|I|}\int_{\widehat{\alpha}(I)} \left|\beta'[\gamma(t)] - \frac{1}{|I|}\int_{\widehat{\alpha}(I)} \beta'[\gamma(\tau)]|\widehat{\beta}'(\tau)|dm(\tau)\right| |\widehat{\beta}'(t)|dm(t) < \frac{\varepsilon}{C_0} \tag{3.3.11}$$

para todo $I \subset \mathbb{T}_-$ con $|I| \le \delta$.

Ahora consideremos todos los arcos $\widehat{\alpha}(I) \subset \mathbb{T}_-$ tal que $|\widehat{\alpha}(I)| \le \delta/||\widehat{\beta}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)}$. En este caso $|I| = |(\widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha})(I)| \le ||\widehat{\beta}'||_{l^\infty(\mathbb{T}_-)}|\widehat{\alpha}(I)| \le \delta$. Tomando tales arcos $\widehat{\alpha}(I) \subset \mathbb{T}_-$, inferimos en base a la igualdad $\gamma \circ \widehat{\alpha} = \alpha \circ \gamma$ que

$$\frac{1}{|\widehat{\alpha}(I)|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\left|\beta'[\gamma(t)] - \frac{1}{|\widehat{\alpha}(I)|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\beta'[\gamma(\tau)]dm(\tau)\right|dm(t)$$

$$\le \frac{1}{|\widehat{\alpha}(I)|^2}\int_{\widehat{\alpha}(I)\times\widehat{\alpha}(I)}|\beta'[\gamma(t)] - \beta'[\gamma(\tau)]|dm(\tau)dm(t)$$

$$\le \frac{2}{|\widehat{\alpha}(I)|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\left|\beta'[\gamma(t)] - \frac{1}{|I|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\beta'[\gamma(\sigma)]|\widehat{\beta}'(\sigma)|dm(\sigma)\right|dm(t)$$

$$\le \frac{\widetilde{C}_0}{|I|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\left|\beta'[\gamma(t)] - \frac{1}{|I|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\beta'[\gamma(\tau)]|\widehat{\beta}'(\tau)|dm(\tau)\right||\widehat{\beta}'(t)|dm(t) \tag{3.3.12}$$

donde

$$\widetilde{C}_0 := 2||\widehat{\alpha}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)}\frac{|I|}{|\widehat{\alpha}(I)|} \le 2||\widehat{\alpha}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)}||\widehat{\beta}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)} = C_0. \tag{3.3.13}$$

Aplicando (3.3.11) para $I \subset \mathbb{T}_-$ con $|I| \le \delta$, deducimos de (3.3.12) y (3.3.13) que, para todos los arcos $\widehat{\alpha}(I) \subset \mathbb{T}_-$ tales que $|\widehat{\alpha}(I)| < \delta/||\widehat{\beta}'||_{L^\infty(\mathbb{T}_-)}$,

$$\frac{1}{|\widehat{\alpha}(I)|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\left|\beta'[\gamma(t)] - \frac{1}{|\widehat{\alpha}(I)|}\int_{\widehat{\alpha}(I)}\beta'[\gamma(\tau)]dm(\tau)\right|dm(t) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\beta' \in QC(\mathbb{R}_+)$ junto con α', y por lo tanto $\beta \in QCS(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Las siguientes afirmaciones son generalizaciones de [[22]. Lema 2.6].

Lema 3.3.2. *Si $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$ y $\beta = \alpha^{-1}$, entonces las funciones*

$$\omega(r) := \ln[\alpha(r)/r], \quad \breve{\omega}(r) := \ln[\beta(r)/r], \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{3.3.14}$$

pertenecen a $QC(\mathbb{R}_+)$, $\breve{\omega}(r) = -\omega[\beta(r)]$ para $r \in \mathbb{R}_+$ y

$$\omega(\xi) = -\breve{\omega}(\xi) \quad \textit{para todo } \xi \in \widetilde{\Delta}. \tag{3.3.15}$$

Demostración. Por el Teorema 3.3.3, $\beta \in QCS(\mathbb{R}_+)$. Por el Teorema 3.3.1, $\alpha(r) = re^{\omega(r)}$ y $\beta(r) = re^{\breve{\omega}(r)}$ para $r \in \mathbb{R}_+$, donde $\omega, \breve{\omega} \in QC(\mathbb{R}_+)$, dados por (3.3.14). Entonces

$$\breve{\omega}(r) = \ln[\beta(r)/r] = -\ln[r/\beta(r)] = -\ln[(\alpha \circ \beta)(r)/\beta(r)] = -\omega[\beta(r)]$$

para $r \in \mathbb{R}_+$. Por lo tanto, deducimos del Teorema 3.3.2 que $\omega \circ \beta \in QC(\mathbb{R}_+)$ y $\omega(\xi) + \breve{\omega}(\xi) = \omega(\xi) - \omega[\beta(\xi)] = 0$ para todo $\xi \in \widetilde{\Delta}$, las cuales dan (3.3.15).

□

Lema 3.3.3. *Si $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$, entonces $\omega \in SO(\mathbb{R}_+)$, $\phi \in QC(\mathbb{R}_+)$ y $\phi(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \Delta^0$.*

Demostración. Junto con el corrimiento $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$, definimos el corrimiento $\zeta \in QCS(\mathbb{R}_+)$ por $\zeta(r) = 1/(\alpha(1/r)) = re^{-\omega(1/r)}$ para $r \in \mathbb{R}_+$. Puesto que $\alpha(0) = \zeta(0) = 0$ y $\alpha', \zeta' \in QC(\mathbb{R}_+)$, se sigue de las igualdades

$$e^{\omega(r)} = \frac{\alpha(r)}{r} = \frac{1}{r}\int_0^r \alpha'(x)dx, \quad e^{-\omega(1/r)} = \frac{\zeta(r)}{r} = \frac{1}{r}\int_0^r \zeta'(x)dx \tag{3.3.16}$$

y [[43], Lema 4] que las funciones e^{ω} y $r \mapsto e^{-\omega(1/r)}$ son continuas en $\mathbb{R}_+$ y lentamente oscilatoria en 0, lo cual significa que $e^{\omega} \in SO(\mathbb{R}_+) \subset QC(\mathbb{R}_+)$. Entonces $\omega \in SO(\mathbb{R}_+)$ también. Por lo tanto, $\phi = \alpha' e^{-\omega} - 1 \in QC(\mathbb{R}_+)$ junto con α'. Para cada $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}_+))$ hay una sucesión de puntos $r_n \in \mathbb{R}_+$ tales que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ y, en vista de (3.3.16),

$$\alpha'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n}\int_0^{r_n} \alpha'(x)dx = \lim_{n\to\infty} e^{\omega(r_n)} = e^{\omega(\xi)}.$$

Entonces deducimos de (3.3.9) que $\phi(\xi) = 0$ para todo $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$. Ya que

$$\alpha'(r) = \zeta'(1/r)\frac{(1/r)^2}{(\zeta(1/r))^2} = \zeta'(1/r)e^{2\omega(r)} \quad \textit{para } r \in \mathbb{R}_+,$$

podemos relacionar los puntos $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$ y $\eta_\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$ por la regla $\alpha'(\xi)e^{-2\omega(\xi)} = \zeta'(\eta_\xi)$. Entonces para $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$ y $\eta_\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$ hay una sucesión $\{r_n\}$ en $\mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ y, en vista de (3.3.16),

$$\zeta'(\eta_\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/r_n)}\int_0^{1/r_n} \zeta'(x)dx = \lim_{n\to\infty} e^{-\omega(r_n)} = e^{-\omega(\xi)}. \tag{3.3.17}$$

Por lo tanto, (3.3.17) implica que $\alpha'(\xi) = \zeta'(\eta_\xi)e^{2\omega(\xi)} = e^{\omega(\xi)}$ para todo $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$. Entonces, en visto de (3.3.9), $\phi(\xi) = 0$ para cada $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$ lo es también. □

3.4. El álgebra de Banach $\mathfrak{B}_p$ de operadores integrales singulares modificados

Dado $p \in (1, \infty)$ y $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}(L^p_N(\mathbb{R}_+))$, y $\mathcal{K}_p := \mathcal{K}(L^p_N(\mathbb{R}_+))$ (ver la introducción para $X = L^p_N(\mathbb{R}_+)$), donde $L^p_N(\mathbb{R}_+)$ es el espacio de Banach de funciones vectoriales $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ con entradas $\varphi_k \in L^p(\mathbb{R}_+)$ y la norma $||\varphi|| = \big(\sum_{k=1}^N ||\varphi||^p_{L^p(\mathbb{R}_+)}\big)^{1/p}$. Consideremos el álgebra de Banach

$$\mathfrak{A}_p := alg\{aI, S_{\mathbb{R}_+} : \ a \in [QC(\mathbb{R}_+)]_{N\times N} \subset \mathcal{B}_p \tag{3.4.1}$$

generada por todos los operadores de multiplicación aI por funciones matriciales $N \times N$ a con entradas en $QC(\mathbb{R}_+)$ y por el operador integral singular de Cauchy $S_{\mathbb{R}_+}$ dado por (0.0.5) con $\mathbb{R}_+$ en lugar de Γ. Como es bien conocido (ver, e.g., la prueba de [[40], Teorema 4.1.5]), $\mathcal{K}_p \subset \mathfrak{A}_p$ para cada $p \in (1, \infty)$. Para $\beta \in \mathbb{C}$ con $Re\beta \in (0, 2\pi)$, tomamos los operadores $R_\beta \in \mathcal{B}_p$ definidas por

$$(R_\beta f)(r) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(\varrho)}{\varrho - e^{i\beta} r} d\varrho, \quad r \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4.2}$$

El operador R_β pertenece al álgebra de Banach $alg\{I, S_{\mathbb{R}_+}\} \subset \mathcal{B}_p$ generada por los operadores I y $S_{\mathbb{R}_+}$ (ver, e.g., [[40], Sección 4.2]). Sea G el conjunto de todos los corrimientos $\alpha \in QCS(\mathbb{R}_+)$ que preservan la orientación .

Sea $\mathfrak{B}_p$ denota el álgebra de Banach generada por todos los operadores de la forma

$$Q = a_+ P^+_{\mathbb{R}_+} + a_- P^-_{\mathbb{R}_+} + cV_\alpha R_\beta \in \mathcal{B}_p, \tag{3.4.3}$$

donde $a_\pm, c \in [QC(\mathbb{R}_+)]_{N\times N}, \beta \in \mathbb{C}$ con $Re\beta \in (0, 2\pi)$, $P^\pm_{\mathbb{R}_+} := 2^{-1}(I \pm S_{\mathbb{R}_+})$, R_β está dada por (3.4.2), y V_α es el operador de corrimiento definido por $V_\alpha f = f \circ \alpha$, donde $\alpha \in G$. El álgebra de Banach $\mathfrak{B}_p$ contiene propiamiente al algebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ dada por (3.4.1). Como $\mathcal{K}_p \subset \mathfrak{B}_p$, podemos definir $\mathfrak{B}^\pi_p = \mathfrak{B}_p/\mathcal{K}_p$.

Consideremos el isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned} \Upsilon : L^p_N(\mathbb{R}_+) \to L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad (\Upsilon f)(r) = r^{1/p} f(r) \ (r \in \mathbb{R}_+), \\ \Psi_0 : \mathcal{B}(L^p_N(\mathbb{R}_+)) \to \mathcal{B}(L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)), \quad A \mapsto \Upsilon A \Upsilon^{-1}. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Por [[30], Sección 6] y (2.2.1), la imagen Ψ_0 del operador (3.4.3) tiene la forma

$$\Psi_0(Q) = \mathrm{Op}(\mathfrak{q}), \tag{3.4.5}$$

donde la función matricial $\mathfrak{q} \in [QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))]_{N\times N}$ está dada por

$$\mathfrak{q}(r,x) = a_+(r)\mathcal{P}_+(x) + a_-(r)\mathcal{P}_-(x) - c(r)e^{i\omega(r)(x+i/p)}\mathcal{R}_\beta(x) \tag{3.4.6}$$

para $(r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}$, las funciones $\mathcal{P}_\pm$ están definidas por (3.2.6), ω está dada por $\omega(r) = \ln[\alpha(r)/r]$ para $r \in \mathbb{R}_+$, y

$$\mathcal{R}_\beta(x) := e^{(\pi-\beta)(x+ip)}/\sinh(\pi(x+i/p)) \quad \textit{para todo } x \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{3.4.7}$$

Por (3.4.5), para todos los generadores Q del álgebra de Banach $\mathfrak{B}_p$ que están dados por (3.4.3), los operadores $\Psi_0(\mathcal{Q})$ son operadores pseudodiferenciales de Mellin $\mathrm{Op}(\mathfrak{q})$ (ver en la fórmula 2.2.1 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$) con símbolos matriciales cuasicontinuos (3.4.6). Sin embargo, el operador $\Psi(A)$ para todo $A \in \mathfrak{B}_p$ no son operadores pseudodiferenciales de Mellin con tales símbolos. Si $N = 1$, entonces el álgebra de Banach $\mathfrak{B}_p^\pi$ es conmutativa (ver [[30], Teorema 6.4]). Por [[30], Teorema 7.1], su espacio ideal maximal es de la forma

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+} := \mathfrak{M}_{+\infty} \cup \mathfrak{M}_{-\infty} \cup \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty, \tag{3.4.8}$$

donde los conjuntos $\mathfrak{M}_0$ y $\mathfrak{M}_\infty$ están dados por (3.2.2) y

$$\mathfrak{M}_{\pm\infty} := M(QC(\mathbb{R}_+)) \times \{\pm\infty\}, \tag{3.4.9}$$

respectivamente, con $M(QC(\mathbb{R}_+))$ dado por (2.1.5).

Sea $Q^\pi := Q + \mathcal{K}_p$. Si $N = 1$, entonces se sigue de [[30], Teorema 7.1] que el mapeo $Q^\pi \mapsto \mathcal{Q}(\cdot,\cdot)$ dado por los generadores del álgebra de Banach $\mathfrak{B}_p^\pi$ por

$$\mathcal{Q}(\xi,x) = a_+(\xi)\mathcal{P}_+(x) + a_-(\xi)\mathcal{P}_-(x) + c(\xi)e^{i\omega(\xi)(x+i/p)}\mathcal{R}_\beta(x) \tag{3.4.10}$$

y (3.4.7) para todo $(\xi,x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, que se extiende a la transformada de Gelfand

$$\mathfrak{B}_p^\pi \to C(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}), \quad A^\pi \to \mathcal{A}(\cdot,\cdot), \tag{3.4.11}$$

y por tanto la siguiente desigualdad se cumple:

$$\max\{|\mathcal{A}(\xi,x)| : (\xi,x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}\} \leq \inf_{K\in\mathcal{K}_p} ||A+K||_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))}.$$

Si $N \in \mathbb{N}$, entonces llamamos a $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ el símbolo de Fredholm de un operador $A \in \mathfrak{B}_p$. Por [[30], Teorema 6.4], las entradas del matricial operador Q conmutan a dentro de operadores compactos. Entonces podemos definir únicamente *det* Q a dentro de operadores compactos. Por [[13], Teorema 1.14], el operador Q es Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si *det* Q es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$. Por lo tanto, se infiere del siguiente criterio de Fredholm de [[30], Teorema 7.1].

Teorema 3.4.1. *Si $p \in (1,\infty)$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces un operador $A \in \mathfrak{B}_p$ es Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si el símbolo de Fredholm (3.4.11) de A es invertible, ésto es,*

$$det\mathcal{A}(\xi,x) \neq 0 \quad \textit{para todo } (\xi,x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}. \tag{3.4.12}$$

3.5. Aplicaciones de los operadores pseudodiferenciales de Mellin

Sea $1 < p < \infty$ y sea $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$ es la curva estrellada definida por (3.1.1) y (3.1.2), y sea $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ satisface las condiciones de la Sección 3.1. Combinando [[29], Lema 4.1] y [[30], Corolario 3.3], tenemos lo siguiente.

Lema 3.5.1. *Si $p \in (1, \infty)$, $\beta \in \mathbb{C}$ y $Re\ \beta \in (-\pi, \pi)$, y $\omega \in QC(\mathbb{R}_+)$, entonces las siguientes funciones pertenecen al álgebra de Banach $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$:*

$$\mathfrak{s}_p(r,x) := s_p(x) := \coth(\pi(x+i/p)), \qquad (r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}},$$

$$\mathfrak{h}_{p,\beta}(r,x) := h_{p,\beta}(x) := \frac{\exp(\beta(x+i/p))}{\sinh(\pi(x+i/p))}, \qquad (r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}, \tag{3.5.1}$$

$$\mathfrak{v}_{\alpha,\beta}(r,x) := e^{i\omega(r)(x+i/p)} \frac{\exp(\beta(x+i/p))}{\sinh(\pi(x+i/p))}, \quad (r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}. \tag{3.5.2}$$

Junto con (3.4.4), consideremos los isomorfismos

$$\Phi : L^p(\Gamma) \to L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu), \qquad (\Phi f)(r) = \{r^{1/p} f(e^{i\beta_k} r)\}_{k=1}^{N} \ (r \in \mathbb{R}_+),$$

$$\Psi : \mathcal{B}(L^p(\Gamma)) \to \mathcal{B}(L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)), \quad A \to \Phi A \Phi^{-1}. \tag{3.5.3}$$

Por (3.1.4), los operadores de corrimiento $V_\alpha^{\pm 1}$ están acotados en el espacio $L^p(\Gamma)$. Entonces

$$\Psi(V_\alpha) = diag\{c_k^{-1} V_{\alpha_j}\}_{j=1}^{N},\ V_{\alpha_k} f = f \circ \alpha_k,\ c_k(r) := e^{-\omega_k(r)/p} \quad (r \in \mathbb{R}_+), \tag{3.5.4}$$

donde $\alpha_k : r \mapsto r e^{\omega_k(r)}$ están en $QCS(\mathbb{R}_+)$, $V_{\alpha_k} \in \mathcal{B}(L^P(\mathbb{R}_+, d\mu))$ y por (3.1.7),

$$c_\alpha(e^{i\beta_k} r) = c_k(r) = e^{\omega_k(r)/p} \quad \textit{para } r \in \mathbb{R}_+ \textit{ y todo } k = 1, 2, ..., N. \tag{3.5.5}$$

Tomando en cuenta los Lemas 3.3.3 y 3.5.1, obtenemos las siguientes dos Ψ-imágenes de [[29], Teorema 5.3, 5.6].

Teorema 3.5.1. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$ una curva estrellada dada por (3.1.1) y (3.1.2). Entonces*

$$\Psi(S_\Gamma) = [Op(\varepsilon_k \mathfrak{g}_{j,k})]_{j,k=1}^{N}, \qquad \mathfrak{g}_{j,k}(r,x) := g_{j,k}(x) \textit{ para } (r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}, \tag{3.5.6}$$

donde $\varepsilon_k := 1$ *si* 0 *es el punto inicial de* Γ_k, $\varepsilon_k := -1$ *si 0 es el punto final de* Γ_k, *las funciones* $g_{j,k}$ *están dadas para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y todo* $k, j = 1, 2, ..., N$ *por*

$$g_{j,k}(x) := \begin{cases} \coth(\pi(x + i/p)) & si \quad j = k, \\ \frac{exp(\theta_{j,k}(x+i/p))}{\sinh(\pi(x+i/p))} & si \quad j \neq k, \end{cases} \tag{3.5.7}$$

$$\theta_{j,k} := \pi \ sgn(j-k) - (\beta_j - \beta_k) \in (-\pi, \pi), \tag{3.5.8}$$

y $g_{j,k} \in V(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}_{j,k} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ *para todo* $j, k = 1, 2, ..., N$.

Teorema 3.5.2. *Sea* $1 < p < \infty$ *y sea* $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$ *la curva estrellada y un corrimiento cuasicontinuo* $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ *satisface las condiciones de la Sección 3.1, entonces*

$$[\Psi(V_\alpha S_\Gamma)]_{j,k} = \varepsilon_k Op(\mathfrak{v}_{j,k}), \quad para\ todo\ j, k = 1, 2, ..., N\ (j \neq k),$$

donde las funciones $\mathfrak{v}_{j,k} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ *están dadas por* $(r, x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}$ *por*

$$\mathfrak{v}_{j,k}(r, x) := e^{i\omega_j(r)(x+i/p)} \frac{exp(\theta_{j,k}(x + i/p))}{\sinh(\pi(x + i/p))} \tag{3.5.9}$$

con $\theta_{j,k}$ *definidas por (3.5.8), y* ε_k *dados por (3.1.3).*

Por lo tanto, las Ψ-imágenes de S_Γ y el conmutador $[V_\alpha, S_\Gamma]$ son operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos matriciales.

Lema 3.5.2. *Si* $A \in \mathfrak{B}_p$ *y* $\Psi(A) = \mathrm{Op}(\mathfrak{a})$ *donde* $\mathfrak{a} \in [QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))]_{N\times N}$, $\mathfrak{a}(\xi, x)$ *desaparece para todo* $(\xi, x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, *y* $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ *está dado por (3.4.8), entonces* $A \in \mathcal{K}_p$.

Demostración. Ya que $\mathfrak{a}(\xi, x) = 0_{N\times N}$ para todo $(\xi, x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, donde $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ es el espacio ideal maximal del álgebra $\mathfrak{B}_p^\pi$ para $N = 1$, se sigue de [[13], Teorema 1.35(d)] para $p = 2$ que $||\,\mathrm{Op}(\mathfrak{a}) + \mathcal{K}(L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu))|| = 0$, de donde $A \in \mathcal{K}_2$. Pero el operador $A = \Psi^{-1}[\mathrm{Op}(\mathfrak{a})]$ está acotado en todos los espacios $L^p(\Gamma)$ para $p \in (1, \infty)$. Por analogía con [[32], Lema 4.5], entonces concluimos que $A \in \mathcal{K}_p$ para todo $p \in (1, \infty)$.

□

Para $j, k = 1, 2, \ldots, N$, obtenemos $[\Psi(S_\Gamma)]_{k,k} = \varepsilon_k \widetilde{S}$ y $[\Psi(S_\Gamma)]_{j,k} = \varepsilon_k \widetilde{R}_{j,k}$ si $j \neq k$, donde los operadores $\widetilde{S}, \widetilde{R}_{j,k} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ están dados para $r \in \mathbb{R}_+$ por

$$(\widetilde{S}f)(r) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(r/\varrho)^{1/p} f(\varrho)}{\varrho - r} d\varrho, \quad (\widetilde{R}_{j,k}f)(r) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(r/\varrho)^{1/p} f(\varrho)}{\varrho - e^{i(\beta_j - \beta_k)r}} d\varrho. \tag{3.5.10}$$

Aplicando (3.4.4), deducimos lo siguiente de [[30], Teorema 6.4].

Lema 3.5.3. *Si $p \in (1,\infty)$, $c \in QC(\mathbb{R}_+)$ y $V_{\alpha_k}, \widetilde{R}_{j,k} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ están dados por (3.5.4) y (3.5.10), entonces para todo $j,k = 1,2,...,N$ con $j \neq k$ y todo $A \in \{\widetilde{S}, \widetilde{R}_{j,k}\}$, los conmutadores $[cI, A]$ y $[V_{\alpha_k}, A]$ son operadores compactos en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, mientras que los operadores $\widetilde{S}, \widetilde{R}_{j,k}$ conmutan por parejas.*

A continuación, la relación $A \simeq B$ significa que $A - B$ es un operador compacto. Modificando la prueba de [[29], Lema 6.1] al caso de corrimientos cuasicontinuos, establecemos lo siguiente.

Lema 3.5.4. *Bajo las condiciones del Teorema 3.5.2, para todo $j,k = 1,2,...,N$,*

$$V_{\alpha_j}^{\epsilon_j} \widetilde{R}_{j,k} V_{\alpha_k}^{\epsilon_k} \simeq \mathrm{Op}(\mathfrak{d}_j^{\epsilon_j} \mathfrak{h}_{p,\theta_{j,k}} \mathfrak{d}_k^{\epsilon_k}), \tag{3.5.11}$$

donde $\epsilon_j, \epsilon_k \in \{-1,0,1\}$, $\mathfrak{h}_{p,\beta}$ y $\theta_{j,k}$ están dados por (3.5.1) y (3.5.8),

$$\mathfrak{d}_k(r,x) := e^{i\omega_k(r)x}, \quad \text{para } (r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{3.5.12}$$

y las funciones $\mathfrak{d}_j^{\epsilon_j} \mathfrak{h}_{p,\theta_{j,k}} \mathfrak{d}_k^{\epsilon_k}$ pertenecen a $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$.

Demostración. Sea $j,k = 1,2,...,N$ y $k \neq j$. Probaremos el teorema para $\epsilon_j, \epsilon_k \in \{-1,1\}$ (los otros casos se tratan de manera análoga). Por los Teoremas 3.3.1 y 3.3.3 los corrimientos inversos $\alpha_k^{-1}(r) = \beta_k(r)$ son de la forma $re^{\breve{\omega}_k(r)}$, donde $\breve{\omega}_k(r) = -\omega_r(\beta_k(r))$ por el Lema 3.3.2. Por lo tanto, para $r \in \mathbb{R}_+$, tenemos

$$\alpha_k^{\epsilon_k}(r) = re^{\widehat{\omega}_k(r)}, \quad \widehat{\omega}_k := \omega_k \text{ si } \epsilon_k = 1, \ \widehat{\omega}_k := \breve{\omega}_k \text{ si } \epsilon_k = -1. \tag{3.5.13}$$

Por el Lema 3.5.3 obtenemos

$$V_{\alpha_j}^{\epsilon_j} \widetilde{R}_{j,k} V_{\alpha_k}^{\epsilon_k} \simeq V_{\alpha_j}^{\epsilon_j} V_{\alpha_k}^{\epsilon_k} \widetilde{R}_{j,k} = V_{\alpha_j,k} \widetilde{R}_{j,k}, \tag{3.5.14}$$

donde para $r \in \mathbb{R}_+$, en vista de (3.5.13),

$$\alpha_{j,k}(r) := (\alpha_k^{\epsilon_k} \circ \alpha_j^{\epsilon_j})(r) = re^{\omega_{j,k}(r)}, \quad \omega_{j,k}(r) := \widehat{\omega}_j(r) + \widehat{\omega}_k(re^{\widehat{\omega}_j(r)}). \tag{3.5.15}$$

Del Teorema 3.5.2 se sigue que

$$V_{\alpha_{j,k}} \widetilde{R}_{j,k} = \mathrm{Op}(\widehat{\mathfrak{v}}_{j,k}), \tag{3.5.16}$$

donde las funciones $\widehat{\mathfrak{v}}_{j,k} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ (cf. (3.5.2) y (3.5.9)) están dadas por

$$\widehat{\mathfrak{v}}_{j,k}(r,x) := e^{i\omega_{j,k}(r)x} \frac{\exp(\theta_{j,k}(x+i/p))}{\sinh(\pi(x+i/p))} = \mathfrak{d}_{j,k}(r,x) h_{p,\theta_{j,k}}(x) \tag{3.5.17}$$

para $(r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}$ y, por (3.5.12) y (3.5.15),

$$\mathfrak{d}_{j,k}(r,x) := e^{i\omega_{j,k}(r)x} = \exp(ix[\widehat{\omega}_j(r) + \widehat{\omega}_k(re^{\widehat{\omega}_j(r)})]). \tag{3.5.18}$$

Puesto que $V_{\alpha_j}^{\epsilon_j} \widetilde{R}_{j,k} V_{\alpha_k}^{\epsilon_k} = \mathrm{Op}(\mathfrak{d}_{j,k} h_{p,\theta_{j,k}})$ en vista de (3.5.14) y (3.5.16)-(3.5.8), resta probar que para todo $j \neq k$ los operadores pseudodiferenciales de Mellin

$$\mathrm{Op}(\mathfrak{d}_{j,k} h_{p,\theta_{j,k}}) - \mathrm{Op}(\mathfrak{d}_j^{\epsilon_j} \mathfrak{h}_{p,\theta_{j,k}} \mathfrak{d}_k^{\epsilon_k}), \tag{3.5.19}$$

donde $\mathfrak{d}_j^{\epsilon_j} \mathfrak{h}_{p,\theta_{j,k}} \mathfrak{d}_k^{\epsilon_k} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, son compactos en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Para todo $\xi \in \widetilde{\Delta}$, se sigue de (3.5.13) y Teorema 3.3.2 que

$$(\omega_k \circ \beta_k)(\xi) = \omega_k(\xi), \quad \widehat{\omega}_k(\xi) = \epsilon_k \omega_k(\xi), \quad (\widehat{\omega}_k \circ \alpha_j^{\epsilon_j})(\xi) = \widehat{\omega}_k(\xi) = \epsilon_k \omega_k(\xi),$$

para $k, j = 1, 2, ..., N$, lo cual implica en visto con (3.5.13) y (3.5.15) que

$$\omega_{j,k}(\xi) = \widehat{\omega}_j(\xi) + (\widehat{\omega}_k \circ \alpha_j^{\epsilon_j})(\xi) = \epsilon_j \omega_j(\xi) + \epsilon_k \omega_k(\xi) \quad \textit{para todo } \xi \in \widetilde{\Delta}. \tag{3.5.20}$$

Junto con la función $\widehat{\mathfrak{v}}_{j,k} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$, consideremos otra función $\widetilde{\mathfrak{v}}_{j,k} \in QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ dada para $(r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\widetilde{\mathfrak{v}}_{j,k}(r,x) := e^{i(\epsilon_j \omega_j(r) + \epsilon_k \omega_k(r))x} \frac{\exp(\theta_{j,k}(x + i/p))}{\sinh(\pi(x + i/p))} = \mathfrak{d}_j^{\epsilon_j}(r,x) \mathfrak{h}_{p,\theta_{j,k}}(x) \mathfrak{d}_k^{\epsilon_k}(r,x). \tag{3.5.21}$$

Por la prueba de [[30], Teorema 6.6], inferimos de (3.5.17), (3.5.20), (3.5.21) que

$$\mathrm{Op}(\mathfrak{d}_{j,k} h_{p,\theta_{j,k}}) = \mathrm{Op}(\widehat{\mathfrak{v}}_{j,k}) \simeq \mathrm{Op}(\mathfrak{d}_j^{\epsilon_j} \mathfrak{h}_{p,\theta_{j,k}} d_k^{\epsilon_k}),$$

lo cual nos da la compacidad del operador (3.5.19) y prueba (3.5.11).

□

Consideramos los operadores pseudodiferenciales de Mellin

$$\begin{aligned} \Psi(T_- T_+) &= I + \Psi[((c_\alpha V_\alpha)^{-1} - I)(P_+ P_- - P_-(c_\alpha V_\alpha) P_+)], \\ \Psi(T_+ T_-) &= I + \Psi[((c_\alpha V_\alpha) - I)(P_+ P_- - P_-(c_\alpha V_\alpha)^{-1} P_+)], \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

donde $T_\pm = (c_\alpha V_\alpha)^{\pm 1} P_+ + P_-$ y $c_\alpha = e^{\omega/p}$.

Se sigue de (3.5.4), (3.5.5), (3.5.22), los Teoremas 3.5.1, 3.5.2 y el Lema 3.5.4 que

$$\Psi(T_- T_+) \simeq \mathrm{Op}(A_{\alpha^{-1}} A_\alpha), \quad \Psi(T_+ T_-) \simeq \mathrm{Op}(A_\alpha A_{\alpha^{-1}}),$$

$$A_\alpha := \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_-, \quad A_{\alpha^{-1}} := \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_-, \tag{3.5.23}$$

$$\mathfrak{D}_\alpha(r,x) := \operatorname{diag}\{\partial_k(r,x)\}_{k=1}^N = \operatorname{diag}\{e^{i\omega_k(r)x}\}_{k=1}^N, \tag{3.5.24}$$

$$\mathfrak{P}_\pm(r,x) := 2^{-1}(I_N \pm [\varepsilon_k \mathfrak{g}_{j,k}(r,x)]_{j,k=1}^N), \tag{3.5.25}$$

y $\mathfrak{g}_{j,k}$ está definido por (3.5.6)- (3.5.7). Ya que $\omega_k \in SO(\mathbb{R}_+)$ para todo $k = 1, 2, ..., N$ por el Lema 3.3.3, concluimos que [[29], Teorema 6.2] sigue siendo cierto para los corrimientos cuasicontinuos $\alpha^{\pm 1}$, lo cual nos da lo siguiente.

Teorema 3.5.3. *Si $p \in (1,\infty)$, Γ y α satisfacen las condiciones de la Sección 3.1 y la función $c_\alpha \in QC(\Gamma)$ está dada por (3.1.7), entonces los operadores $T_\pm := (c_\alpha V_\alpha)^{\pm 1} P_+ + P_-$ son Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ e $\operatorname{Ind} T_\pm = 0$.*

Las demostraciones de los teoremas se harán en capítulos más adelante.

Capítulo 4

La teoría de Fredholm para el operador T

4.1. Propiedades de Fredholm para el operador $T = V_\alpha P_+ + GP_-$

En está sección estableceremos un criterio de Fredholm para el operador $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ en el espacio $L^p(\Gamma)$ bajo las condiciones de la sección 3.1.

Teorema 4.1.1. *Si $G \in QC(\Gamma)$ y las condiciones del Teorema 3.5.2 se satisfacen, entonces el operador $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y sólo si las condiciones (3.2.3) se cumplen.*

Demostración. Ajustando $G_\alpha := c_\alpha G$, donde $c_\alpha \in QC(\Gamma)$ está dada por (3.1.7), obtenemos

$$TT_- = (V_\alpha P_+ + GP_-)((c_\alpha V_\alpha)^{-1}P_+ + P_-) = c_\alpha^{-1}N_\alpha, \tag{4.1.1}$$

$$N_\alpha = P_+ + G_\alpha P_- + (G_\alpha I - (c_\alpha V_\alpha))(P_-(c_\alpha V_\alpha)^{-1}P_+ - P_+P_-). \tag{4.1.2}$$

Introduciendo la función matricial diagonal $\mathfrak{G} \in [QC(\mathbb{R}_+)]_{N\times N}$ por

$$\mathfrak{G}_\alpha(r) := \operatorname{diag}\{e^{\omega_k(r)/p}G_k(r)\}_{k=1}^N, \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1.3}$$

deducimos de (3.5.3), (4.1.2), Teorema 3.5.2 y el Lema 3.5.4 que

$$\Psi(N_\alpha) \simeq \operatorname{Op}(\mathfrak{N}_\alpha), \tag{4.1.4}$$

$$\mathfrak{N}_\alpha := \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{P}_- + (\mathfrak{G}_\alpha - \mathfrak{D}_\alpha)(\mathfrak{P}_- \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \mathfrak{P}_+ - \mathfrak{P}_+ \mathfrak{P}_-), \tag{4.1.5}$$

donde las funciones matriciales $\mathfrak{D}_\alpha$ y $\mathfrak{P}_\pm$ están dadas por (3.5.24) y (3.5.25), y las entradas de la función matricial $\mathfrak{N}_\alpha$ están en $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. Ya que el operador T_- es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ en vista del Teorema 3.5.3, se sigue de (4.1.1) y (4.1.4) que el operador T es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y sólo si el operador pseudodiferencial de Mellin $\mathrm{Op}(\mathfrak{N}_\alpha)$ es Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Como las entradas de la función matricial $\mathfrak{N}_\alpha$ pertenecen a $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ y por lo tanto los correspondientes operadores pseudodiferenciales de Mellin conmutan dentro de operadores compactos en vista de [[30], Teorema 6.4], deducimos que el operador $\mathrm{Op}(\mathfrak{N}_\alpha)$ es Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)$ si y sólo si el operador $\mathrm{Op}(\det \mathfrak{N}_\alpha)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, lo cual es equivalente, por [[30], Teorema 7.1], a las desigualdades

$$\det \mathfrak{N}_\alpha(\xi, x) \neq 0 \quad \textit{para todo } (\xi, x) \in \mathfrak{M}_{-\infty} \cup \mathfrak{M}_{+\infty}, \tag{4.1.6}$$

$$\det \mathfrak{N}_\alpha(\xi, x) \neq 0 \quad \textit{para todo } (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty, \tag{4.1.7}$$

donde $\mathfrak{M}_0$ y $\mathfrak{M}_\infty$, están definidas por (3.2.2) y $\mathfrak{M}_{\pm\infty}$ están dadas por (3.4.9). Por lo tanto, nos resta probar que las condiciones (4.1.6)-(4.1.7) para $\mathfrak{N}_\alpha$ dada por (4.1.5) son equivalentes a ambas condiciones (3.2.3). Puesto que las funciones matriciales $\mathfrak{N}_\alpha(r, \pm\infty)$ son diagonales, podemos deducir de (4.1.3), (4.1.5) y (3.2.5) que

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{N}_\alpha(r, \pm\infty) &= \det(\mathfrak{P}_+(r, \pm\infty) + \mathfrak{G}_\alpha(r, \pm\infty)\mathfrak{P}_-(r, \pm\infty)) \\ &= \prod_{\varepsilon_k = \mp 1} (e^{\omega_k(r)/p} G_k(r)) \textit{ para } r \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Por eso (4.1.6) se satisface si y sólo si la primera condición en (3.2.3) se satisface. Por otro lado, (3.5.23) y (4.1.1) implican que

$$\mathfrak{N}_\alpha = (\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{P}_-) A_{\alpha^{-1}} = \mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{T} A_{\alpha^{-1}}, \quad \mathfrak{T} := \mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{G} \mathfrak{P}_-, \tag{4.1.8}$$

donde $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{P}_\pm$ y $\mathfrak{G}_\alpha$ están dadas por (3.5.24), (3.5.25) y (4.1.3), respectivamente, y

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\alpha(r) := diag\{e^{\omega_k(r)/p}\}_{k=1}^N, \quad \mathfrak{G}(r) := diag\{G_k(r)\}_{k=1}^N \ (r \in \mathbb{R}_+), \\ \mathfrak{V}_\alpha(r, x) := diag\{e^{i\omega_k(r)(x + i/p)}\}_{k=1}^N \quad \textit{para } (r, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Las condiciones (4.1.6)-(4.1.7) y (3.2.2) implican la propiedad

$$\text{ínf}\{|\det \mathfrak{N}_\alpha(\xi, x)| : \ (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty\} > 0, \tag{4.1.10}$$

mientras (4.1.10) implica (4.1.7). Por (4.1.8), para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$,

$$\det \mathfrak{N}_\alpha(\xi, x) = \det \mathfrak{C}_\alpha(\xi) \det \mathfrak{T}(\xi, x) \det A_{\alpha^{-1}}(\xi, x), \tag{4.1.11}$$

donde $\det \mathfrak{T}(\xi, x)$ equivale a (3.2.5) de manera similar a [[29],(7.2)], $\det \mathfrak{C}_\alpha = \prod_{k=1}^{n} e^{\omega_k/p}$ por (4.1.9), y $\det A_{\alpha^{-1}} = (\prod_{\varepsilon_k=1} \mathfrak{d}_k^{-1})\mathcal{P}_+ + (\prod_{\varepsilon_k=-1} \mathfrak{d}_k^{-1})\mathcal{P}_-$ por (3.2.5). Ya que $\det \mathfrak{C}_\alpha$ y $\det A_{\alpha^{-1}}$ están separadas de cero, se sigue de (4.1.11) que (4.1.10) es equivalente a la propiedad

$$\inf\{|\det \mathfrak{T}(\xi, x)| : \ (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty\} > 0. \tag{4.1.12}$$

Finalmente, (3.2.3) es equivalente a (4.1.12) combinada con la primera condición en (3.2.3), lo cuál completa la prueba.

□

Lema 4.1.1. *Si $p \in (1, \infty)$, $G \in QC(\Gamma)$ y $G_k(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \Delta^0$ y todo $k = 1, 2, ..., N$, entonces la segunda condición en (3.2.3) se cumple si y sólo si*

$$\varphi_p(\eta(\xi), \lambda(\xi)) \notin \mathbb{Z} \quad \textit{para todo } \xi \in \Delta^0, \tag{4.1.13}$$

donde Δ^0 y las funciones φ_p, η, λ están dadas por (3.2.1) y (3.2.7), (3.2.8).

Demostración. Si $G_k(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \Delta^0$ y todo $k = 1, 2, ..., N$, entonces por (3.2.5), $\det \mathfrak{T}(\xi, x) \neq 0$ para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$ si y sólo si

$$\Big(\prod_{k=1}^{N} e^{i\varepsilon_k \omega_k(\xi)(x+i/p)} G_k^{-\varepsilon_k}(\xi)\Big)\mathcal{P}_+(x) + P_-(x) \neq 0 \tag{4.1.14}$$

para todos $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$. Aplicando (3.2.8), vemos de las identidades

$$\mathcal{P}_\pm(x) = [\pm exp(\pi(x + i/p))]/[2\sinh(\pi(x + i/p))], \quad x \in \mathbb{R},$$

que (4.1.14) es equivalente a la condición

$$e^{i\eta(\xi)(x+i/p) - \ln|\lambda(\xi)| - i \arg \lambda(\xi)} e^{2\pi(x+i/p)} \neq 1 \quad \textit{para todo } (\xi, x) \in \Delta^0 \times \mathbb{R}. \tag{4.1.15}$$

La condición (4.1.15) se satisface si y sólo si para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ el sistema

$$\begin{cases} -\eta(\xi)/p - \ln|\lambda(\xi)| + 2\pi x = 0 \\ \eta(\xi)x - \arg \lambda(\xi) + 2\pi/p = 2\pi k \end{cases}$$

no tiene soluciones $(\xi, x) \in \Delta^0 \times \mathbb{R}$. Pero esto es equivalente (4.1.13).

□

El Teorema 4.1.1 y el Lema 4.1.1 implican el siguiente resultado.

Corolario 4.1.1. *Si $G \in QC(\Gamma)$ y las condiciones del Teorema 3.5.2 se cumplen, entonces el operador $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y solo si las condiciones (3.2.4) se satisfacen.*

Combinando el Teorema 4.1.1 y el Corolario 4.1.1, obtenemos el Teorema 3.2.1

4.2. Indice del operador $T = V_\alpha P_+ + GP_-$

4.2.1. Los índices de Cauchy

Sea f invertible en PQC, F la extensión armónica de f al disco unitario $\mathbb{D}$ y sea $P_{\mathbb{T}}^+ := 2^{-1}(I + S_{\mathbb{T}})$. Por [[43], Teorema 1], el operador de Toeplitz $T_f = P_{\mathbb{T}}^+ f P_{\mathbb{T}}^+$ es Fredholm en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ si y sólo si la función armónica F, es separada de 0 en el anillo $1-\varepsilon < |z| < 1$ para un suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, se sigue de [[43], Teorema 2] y (3.2.9) para el operador de Fredholm T_f que

$$\mathrm{Ind} T_f = -\mathrm{ind} f = -\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\{\arg F(rt)\}_{t\in\mathbb{T}}. \tag{4.2.1}$$

Siguiendo [43], para alguna función invertible $f \in QC(\mathbb{R}_+)$ y algún $r \in (0,1)$, construimos una función $\widetilde{f}_r \in SO(\mathbb{R}_+) \subset QC(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$f(\xi) = \widetilde{f}_r(\xi) \quad \textit{para todo } \xi \in \Delta^0. \tag{4.2.2}$$

Primero, tomamos una función $\widehat{f} \in QC(\mathbb{R})$ dada por $\widehat{f}(x) := f(|x|)$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\widehat{f}$ es invertible en $QC(\mathbb{R})$. Aplicando el homeomorfismo $\gamma : \mathbb{T} \to \dot{\mathbb{R}}$ dado por (2.1.1), deducimos que $\widehat{f}\circ\gamma$ es invertible en QC. Por lo que el operador de Toeplitz con símbolo $\widehat{f}\circ\gamma$ es Fredholm en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T})$. Sea

$$F(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{t}z|^2}(\widehat{f}\circ\gamma)(t)dm(t) \quad (z \in \mathbb{D})$$

la extensión armónica de la función $\widehat{f}\circ\gamma \in QC$ al disco unitario abierto $\mathbb{D}$. Como es conocido (ver, e.g., [[14], Sección 1.2, Corolario 2]), $(\widehat{f}\circ\gamma)(t) = \lim_{r\to 1^-} F(rt)$ para casi todo $t \in \mathbb{T}$. Por [[43], p.821, Corolario], las funciones $g_{\pm 1}$, definidas por $g_{\pm 1}(x) := F(\pm x)$ para $x \in [0,1)$, pertenece a $SO[0,1)$, esto es, $g_{\pm 1}$ son funciones continuas acotadas en $[0,1)$ que oscilan lentamente en 1, lo cual significa que para algún (equivalentemente, arbitrario) $\eta \in (0,1)$,

$$\lim_{\delta\to 1} \sup\{|g_{\pm 1}(x) - g_{\pm 1}(y)| : \ x, y \in [1-\delta, 1-\eta\delta]\} = 0.$$

Más aún, se sigue de [[43], p. 823] que

$$g_{\pm 1}(\xi) = (\widehat{f}\circ\gamma)(\xi) \quad \textit{para todo } \xi \in M^0_{\pm 1}(QC). \tag{4.2.3}$$

Para $\varepsilon \in (0,1)$ y $r = 1-\varepsilon$, consideramos la función $F_r \in C(\mathbb{T})$ dada por $F_r(z) = F(rz)$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Para $t = e^{i\theta}$ con $\theta \in (-\pi, 0)$, definimos

$$g^{(r)}(t) := \begin{cases} g_{-1}(1-\theta-\pi) & \text{si} \quad \theta \in (-\pi, -\pi+\varepsilon], \\ F_r(exp(i\frac{\pi(\theta+\varepsilon)}{\pi-2\varepsilon})) & \text{si} \quad \theta \in [-\pi+\varepsilon, -\varepsilon], \\ g_1(1+\theta) & \text{si} \quad \theta \in [-\varepsilon, 0), \end{cases} \tag{4.2.4}$$

donde $g_{-1}(1-\theta-\pi)0F(\pi+\theta-1)$ y $g_1(1+\theta) = F(1+\theta)$. La función $g^{(r)}$ es continua en $\mathbb{T}_- \setminus \{\pm 1\} = \gamma^{-1}(\mathbb{R}_+)$ y oscila lentamente en ± 1. Por lo tanto, por [[32], Lema 2.1], las funciones $\widetilde{f}_r$, están dadas por

$$\widetilde{f}_r(x) = (g^{(r)} \circ \gamma^{-1})(x) \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}_+, \tag{4.2.5}$$

están en $SO(\mathbb{R}_+)$ para cada $r \in (0,1)$. Podemos ver, por construcción, que (4.2.2) se satisface. Más aún, por [[43], Teorema 1], la función $\widetilde{f}_r$ dada por (4.2.3)- (4.2.5) es invertible en $SO(\mathbb{R}_+)$ para todo $r \in (0,1)$ cerca de 1.

4.2.2. Demostración del Teorema 3.2.2

Si $G \in QC(\Gamma)$ es invertible en $QC(\Gamma)$, entonces para cada $G_k \in QC(\mathbb{R}_+)$ ($k = 1,2,...,N$) existen funciones $\widetilde{G}_k \in SO(\mathbb{R}_+)$ invertibles en $SO(\mathbb{R}_+)$ y que satisfacen (3.2.11) (ver subsección 4.2.1). Por el Lema 3.3.3, $\omega_k \in SO(\mathbb{R}_+)$, pero $\phi_k : r \mapsto r\omega_k'(r)$ están en $QC(\mathbb{R}_+)$. Define las funciones $\widetilde{\omega}_k \in SO(\mathbb{R}_+)$ por

$$\widetilde{\omega}_k(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \omega_k(x)dx, \quad k = 1,2,...,N.$$

Entonces $\widetilde{\phi}_k(r) := r\,\widetilde{\omega}_k'(r) = -\,\widetilde{\omega}_k(r) + \omega_k(r)$ para $r \in \mathbb{R}_+$, donde $\widetilde{\phi}_k \in SO(\mathbb{R}_+)$. Por [[22], Lema 2.2], $\lim_{r\to s} r\,\widetilde{\omega}_k'(r) = 0$ para $s \in \{0, \infty\}$, y por lo tanto (3.2.10) se cumple. Junto con V_α, definimos el operador de corrimiento $V_{\widetilde{\alpha}}$, donde $\widetilde{\alpha}(e^{i\beta_k}r) = e^{i\beta_k}re^{\widetilde{\omega}_k(r)}$ para $r \in \mathbb{R}_+$ y $k = 1,2,...,N$; $\omega_k - \widetilde{\omega}_k \in SO(\mathbb{R}_+)$, mientras que $\phi_k - \widetilde{\phi}_k \in QC(\mathbb{R}_+)$, $(\phi_k - \widetilde{\phi}_k)|_{\Delta^0} = 0$, pero $(\phi_k - \widetilde{\phi}_k)|_{\widetilde{\Delta}}$ puede diferir de 0.

Con la función c_α dada por (3.1.7), asociamos la función $c_{\widetilde{\alpha}} \in SO(\Gamma)$ tal que $c_{\widetilde{\alpha}}(e^{i\beta_k}r) = \widetilde{c}_k(r) = e^{\widetilde{\omega}_k(r)/p}$ para $r \in \mathbb{R}_+$ y todo $k = 1,2,...,N$, y $\widetilde{c}_k \in SO(\mathbb{R}_+)$. Por lo tanto, a la función $G_\alpha = c_\alpha G$ que es invertible en $QC(\Gamma)$, relacionamos la función $\widetilde{G}_\alpha := c_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{G}$ invertible en $SO(\Gamma)$, donde $(\widetilde{G}_\alpha)_k = \widetilde{c}_k\widetilde{G}_k \in SO(\mathbb{R}_+)$ para $k = 1,2,...,N$ y, por (3.2.10) y (3.2.11),

$$(\widetilde{G}_\alpha)_k(\xi) = (G_\alpha)_k(\xi) \quad \textit{para todo } \xi \in \Delta^0 \textit{ y todo } k = 1,2,...,N. \tag{4.2.6}$$

Dado $p \in (1,\infty)$ y $G_\alpha, \widetilde{G}_\alpha$ que satisfacen (4.2.6), consideremos los operadores

$$T = V_\alpha P_+ + GP_-, \quad \widetilde{T} := V_{\widetilde{\alpha}} P_+ + \widetilde{G} P_-, \quad T_0 := P_+ + (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1}) P_-, \tag{4.2.7}$$

donde, por el Teorema 4.1.1, los operadores T y $\widetilde{T}$ son Fredholm en $L^p(\Gamma)$. Tomando $\alpha(t) = t$ para todo $t \in \Gamma$, deducimos de (3.2.5) y (3.2.11) que

$$\det \mathfrak{T}_0(\xi, x) = \begin{cases} \prod_{\varepsilon_k=-1} (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1})_k(\xi) & \text{si} \quad (\xi, x) \in \mathfrak{M}_{+\infty}, \\ \prod_{\varepsilon_k=1} (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1})_k(\xi) & \text{si} \quad (\xi, x) \in \mathfrak{M}_{-\infty}, \\ 1 & \text{si} \quad (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Por lo tanto, por el Teorema 4.1.1, el operador T_0 es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$. Aplicando (4.2.7), obtenemos

$$\begin{aligned} T_0(P_+ + G_\alpha P_-) &= P_+ + \widetilde{G}_\alpha P_- + (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1} - 1) P_+ (1 - G_\alpha) P_- \\ &\simeq P_+ + \widetilde{G}_\alpha P_- \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

por que $A := (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1} - 1) P_+ (1 - G_\alpha) P_-$ es un operador compacto en el espacio $L^p(\Gamma)$. En efecto, por el Teorema 3.5.1 y (4.2.6), el símbolo $\mathfrak{a} \in [QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))]_{N\times N}$ del operador pseudodiferencial de Mellin $\mathrm{Op}(\mathfrak{a}) = \Psi(A)$ desaparece para todo $(\xi, x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, y por lo tanto $\mathrm{Op}(\mathfrak{a})$ es un operador compacto en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)$ por el Lema 3.5.2. Similarmente, pasando a los operadores pseudodiferenciales de Mellin, deducimos de (4.2.6), Teorema 3.5.2 y el Lema 3.5.2 que

$$\begin{aligned} &(P_+ + (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1}) P_-)(G_\alpha I - (c_\alpha V_\alpha))(P_-(c_\alpha V_\alpha)^{-1} P_+ - P_+ P_-) \\ &\simeq (\widetilde{G}_\alpha I - (c_{\widetilde{\alpha}} V_{\widetilde{\alpha}}))(P_-(c_{\widetilde{\alpha}} V_{\widetilde{\alpha}})^{-1} P_+ - P_+ P_-). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Por (4.1.1) y el Teorema 3.5.3, $\mathrm{Ind} T = \mathrm{Ind} N_\alpha$, donde N_α está dado por (4.1.2). Se sigue de (4.1.2) y (4.2.7), (4.2.9), (4.2.10) que

$$T_0 N_\alpha \simeq N_{\widetilde{\alpha}} := P_+ + \widetilde{G}_\alpha P_- + (\widetilde{G}_\alpha I - (c_{\widetilde{\alpha}} V_{\widetilde{\alpha}}))(P_-(c_{\widetilde{\alpha}} V_{\widetilde{\alpha}})^{-1} P_+ - P_+ P_-),$$

donde el operador $N_{\widetilde{\alpha}}$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$. Por otro lado, por analogía con (4.1.1) y (4.1.2), obtenemos

$$N_{\widetilde{\alpha}} = c_{\widetilde{\alpha}} (V_{\widetilde{\alpha}} P_+ + \widetilde{G} P_-)((c_{\widetilde{\alpha}} V_{\widetilde{\alpha}})^{-1} P_+ + P_-) = c_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{T} \widetilde{T}_-, \tag{4.2.11}$$

donde $\widetilde{T}$ está dada por (4.2.7) y el operador $\widetilde{T}_- := (c_{\widetilde{\alpha}} V_{\widetilde{\alpha}})^{-1} P_+ + P_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ y tiene índice cero por el Teorema 3.5.3. Ya que $T_0 N_\alpha \simeq N_{\widetilde{\alpha}}$, deducimos de (4.2.11) y el Teorema 3.5.3 que

$$\mathrm{Ind} T_0 + \mathrm{Ind} N_\alpha = \mathrm{Ind} N_{\widetilde{\alpha}} = \mathrm{Ind} \widetilde{T}. \tag{4.2.12}$$

Ya que $\mathrm{Ind}T = \mathrm{Ind}N_\alpha$, deducimos de (4.2.12) que

$$\mathrm{Ind}\widetilde{T} = \mathrm{Ind}T + \mathrm{Ind}T_0. \tag{4.2.13}$$

Junto con T_0, consideremos el operador $T_1 := \mathcal{G}P^+_{\mathbb{R}_+} + P^-_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$, donde $\mathcal{G} := \prod_{k=1}^N (G_\alpha \widetilde{G}_\alpha^{-1})_k^{\varepsilon_k}$. Por el Teorema 3.4.1, se sigue de (3.4.3), (3.4.10), (3.4.12) y la igualdad de la forma (4.2.8) para T_1 que el operador T_1 es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$. Por (4.2.8), también tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}T_0 &= \mathrm{IndOp}(\mathfrak{T}_0) = \mathrm{IndOp}(\det \mathfrak{T}_0)\\ &= \mathrm{IndOp}\Big(\Big(\prod_{k=1}^N (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1})_k^{-\varepsilon_k}\Big)\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-\Big)\\ &= \mathrm{Ind}\Big(\Big(\prod_{k=1}^N (\widetilde{G}_\alpha G_\alpha^{-1})_k^{-\varepsilon_k}\Big)\mathcal{P}^+_{\mathbb{R}_+} + \mathcal{P}^-_{\mathbb{R}_+}\Big) = \mathrm{Ind}T_1.\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Sea $\widehat{\mathcal{G}}(x) := \mathcal{G}(x)$ para $x \in \mathbb{R}_+$ y $\widehat{\mathcal{G}}(x) := 1$ para $x \in \mathbb{R}_-$. Entonces $\widehat{\mathcal{G}} \in QC(\mathbb{R})$ por [[43], Lema 2], los operadores $T_1 = \mathcal{G}P^+_{\mathbb{R}_+} + P^-_{\mathbb{R}_+}$ y $T_2 := \widehat{\mathcal{G}}P^+_{\mathbb{R}} + P^-_{\mathbb{R}}$ son Fredholm en los espacios $L^p(\mathbb{R}_+)$ y $L^p(\mathbb{R})$, respectivamente, y Ind $T_1 =$ Ind T_2. Sea $\widetilde{G}_0(x) := \prod_{k=1}^N (\widetilde{G}_\alpha)_k^{\varepsilon_k}(|x|)$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\widetilde{G}_0 \in QC(\mathbb{R})$. De acuerdo con (3.2.13), introducimos el operador $\widehat{T} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$ con $\widehat{G}_\alpha \in QC(\mathbb{R})$ por

$$\widehat{T} := \widehat{G}_\alpha P^+_{\mathbb{R}} + P^-_{\mathbb{R}}, \quad \widehat{G}_\alpha(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^N (G_\alpha)_k^{\varepsilon_k}(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \\ \prod_{k=1}^N (G_\alpha)_k^{\varepsilon_k}(-x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_-. \end{cases} \tag{4.2.15}$$

Ya que $\widehat{T}T_3 \simeq \widetilde{G}_0 T_2$ donde el operador $T_3 := P^+_{\mathbb{R}} + \widetilde{G}_0 P^-_{\mathbb{R}}$ es Fredholm del índice cero en el espacio $L^p(\mathbb{R})$, se sigue que el operador $\widehat{T}$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R})$ junto con T_2 y $\mathrm{Ind}\widehat{T} = \mathrm{Ind}T_2$. Por lo tanto, por (4.2.14),

$$\mathrm{Ind}T_0 = \mathrm{Ind}T_1 = \mathrm{Ind}T_2 = \mathrm{Ind}\widehat{T}. \tag{4.2.16}$$

Ya que los operadores T_0 y $\widehat{T}$ son Fredholm en todos los espacios $L^p(\mathbb{R})$ para $p \in (1, \infty)$, deducimos de [[44], Teorema 3] que sus índices coinciden para todo $p \in (1, \infty)$. En particular, para $p = 2$ y γ dada por (2.1.1), se sigue que $U_\gamma \widehat{T} U_\gamma^{-1} = (\widehat{G}_\alpha \circ \gamma)P^+_{\mathbb{T}} + P^-_{\mathbb{T}}$, donde $(U_\gamma \varphi)(t) = (1-t)^{-1}(\varphi \circ \gamma)(t)$ para $t \in \mathbb{T}$. Aplicando (4.2.15), el operador de Toeplitz $T_{\widehat{G}_\alpha \circ \gamma}$ con símbolo $\widehat{G}_\alpha \circ \gamma$, y (4.2.1), deducimos que

$$\mathrm{Ind}\widehat{T} = \mathrm{Ind}((\widehat{G}_\alpha \circ \gamma)P^+_{\mathbb{T}} + P^-_{\mathbb{T}}) = \mathrm{Ind}T_{\widehat{G}_\alpha \circ \gamma} = -\mathrm{ind}(\widehat{G}_\alpha \circ \gamma). \tag{4.2.17}$$

Combinando (4.2.16) y (4.2.17), concluimos que $\mathrm{Ind}T_0 = -\mathrm{ind}(\widehat{G}_\alpha \circ \gamma)$, lo cuál junto con (4.2.13) nos da (3.2.12) y prueba el Teorema 3.2.2.

4.2.3. Demostración del Teorema 3.2.3

Ya que el operador $\widetilde{T}$ está dado por (4.2.7) y tiene datos lentamente oscilatorios, deducimos la siguiente fórmula del índice para el operador $\widetilde{T}$ de [[29], Teorema 8.2] con $\delta = 0$.

Teorema 4.2.1. *Si las condiciones del Teorema 3.2.2 se satisfacen, y las funciones $\widetilde{G}_k$ y $\widetilde{\omega}_k$ están en $SO(\mathbb{R}_+)$ para $k = 1, 2, ..., N$, y el operador $\widetilde{T} = V_{\widetilde{\alpha}}P_+ + \widetilde{G}P_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$, entonces ess $\inf_{t\in\Gamma} |\widetilde{G}(t)| > 0$, $\varphi_p(\eta(\xi), \lambda(\xi)) \notin \mathbb{Z}$ para todo $\xi \in \Delta^0$, y*

$$\mathrm{Ind}\widetilde{T} = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon_k}{2\pi} \{\arg \widetilde{G}_k(r)\}_{r\in[m^{-1},m]} + \frac{\arg \widetilde{\lambda}(m^{-1})}{2\pi} - \frac{\arg \widetilde{\lambda}(m)}{2\pi}$$

$$+E(\varphi_p(\widetilde{\eta}(m^{-1}), \widetilde{\lambda}(m^{-1}))) - E(\varphi_p(\widetilde{\eta}(m), \widetilde{\lambda}(m)))\Big),$$

donde las funciones φ_p y $\widetilde{\eta}, \widetilde{\lambda}$ están dadas por (3.2.7) y (3.2.15), respectivamente, y $E(x)$ es la parte entera de un $x \in \mathbb{R}$.

Combinando el Teorema 4.2.1 sobre el índice del operador $\widetilde{T}$ y el Teorema 3.2.2, obtenemos (3.2.14) y completamos la demostración del Teorema 3.2.3.

4.3. Criterio de Fredholm generalizado

Consideremos una curva compuesta $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde Γ_k son arcos suaves, orientados, acotados y no acotados, con interiores distintos en pares, y con puntos finales en el conjunto finito Y de nodos que incluyen a ∞. También suponemos que los arcos Γ_k no forman cúspides en los nodos $t \in Y$ y en cada arco de Γ_k tienen diferentes puntos finales. Aplicando los resultados de los operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos, la teoría de Fredholm es construida para el problema con valor en la frontera de Haseman $\Phi^+ \circ \alpha = G\Phi^- + g$ en el conjunto de espacios de Lebesgue, donde $\Phi^\pm$ son valores de frontera angulares en Γ de la función analítica desconocida Φ, G y g son funciones dadas en Γ, y α es un homeomorfismo de cada arco Γ_k en si mismo que preserva la orientación de arcos. Además teniendo que el coeficiente G y la derivada del corrimiento α' son funciones cuasicontinuas en cada arco Γ_k, el criterio de Fredholm se establece para el equivalente operador integral singular con corrimiento $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ en el espacio $L^p(\Gamma)$, si la función $g_k := g \circ \beta_k$ $g \in QC(\Gamma_k)$ donde los operadores $P_\pm = 2^{-1}(I \pm S_\Gamma)$ son relacionados con el operador singular integral de Cauchy S_Γ, y el operador de corrimeinto V_α está dado por $V_\alpha f = f \circ \alpha$.

Un arco de longitud finita lo llamaremos arco acotado. Si la longitud de un arco es infinita, lo llamaremos como un arco no acotado.

Para cada arco acotado y orientado Γ_k de longitud l_k, tomamos un difeomorfismo que preserva la orientación $\beta_k : [0, l_k] \to \Gamma_k$, y decimos que una función g de valores complejos es cuasicontinua en el arco Γ_k, $g \in QC(\Gamma_k)$, si la función $g_k := g \circ \beta_k$ es cuasicontinua en el segmento $L_k := [0, l_k] \subset \mathbb{R}$, $g_k \in QC(L_k)$, donde $QC(L_k) := QC(\mathbb{R})|_{L_k}$. Para cada arco no acotado orientado Γ_k con puntos finales $\tau_k \in \mathbb{C}$ y $\tau_k' = \infty$, tomamos un difeomorfismo $\beta_k : \mathbb{R}_+ \to \Gamma_k$ tal que $\beta_k(0) = \tau_k$ y $\beta_k(\infty) = \tau_k' = \infty$, y decimos que una función con valores complejos g es cuasicontinua en el arco Γ_k, $g \in QC(\Gamma_k)$, si la función $g_k := g \circ \beta_k$ es cuasicontinua en el semieje positivo $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, $g_k \in QC(\mathbb{R}_+)$, donde $QC(\mathbb{R}_+) := QC(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$. Una función $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ es llamada cuasicontinua en Γ, $g \in QC(\Gamma)$, si $g \in QC(\Gamma_k)$ para cada $k = 1, ..., m$.

Para cada nodo $t \in Y$, sea γ_t la unión de todos los arcos Γ_k con puntos finales t para $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Por lo tanto, $\gamma_t = \cup_{k \in N_t} l_k$, donde el conjunto $N_t \subset \{1, 2, ..., m\}$ contiene $m(t)$ elementos. Para cada $t \in Y$, sea $k_{1,t}, k_{2,t}, ..., k_{m(t),t}$ los números de arcos γ_k con puntos finales t que son enumerados en sentido contrario a las manecillas del reloj si t es un nodo finito, y en sentido de las manecillas del reloj si $t = \infty$. Para cada $t \in Y$ y cada $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$, ponemos

$$\varepsilon_{k_{s,t}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \; es \; el \; punto \; inicial \; de \; \Gamma_{k_{s,t}}, \\ -1 & \text{si} \quad t \; es \; el \; punto \; final \; de \; \Gamma_{k_{s,t}}. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Para cada $k = 1, 2, ..., m$ sea $\mathcal{L}_k = L_k$ si Γ_k es un arco finito, y sea $\mathcal{L}_k := \mathbb{R}_+$ si Γ_k es un arco acotado. El homeomorfismo α de cada arco Γ_k en si mismo que preserva la orientación, posee la propiedad de

$$\ln|\alpha'| \in L^\infty(\Gamma_k). \tag{4.3.2}$$

Entonces el operador de corrimiento $V_\alpha : f \mapsto f \circ \alpha$ y su inverso V_α^{-1} están acotados en el espacio $L^p(\Gamma)$, $p \in (1, \infty)$. Llamaremos tal α un corrimiento cuasicontinuo en Γ si para cada $k = 1, 2, ..., m$, la derivada $\widetilde{\alpha}_k'$ del homeomorfismo

$$\widetilde{\alpha}_k := \beta_k^{-1} \circ \alpha \circ \beta_k \tag{4.3.3}$$

del conjunto $\mathcal{L}_k$ sobre si mismo es una función cuasicontinua en $\mathcal{L}_k$, es decir, $\widetilde{\alpha}_k^{-1} \in QC(\mathcal{L}_k)$. Si $\mathcal{L}_k = \mathbb{R}_+$ para algún $k = 1, 2, .., m$, entonces se sigue de [[36], Teorema 4.1] que las funciones

$$\omega_k(r) = \ln[\widetilde{\alpha}_k(r)/r], \quad \phi_k(r) : r \mapsto r\omega_k'(r) \tag{4.3.4}$$

pertenecen al conjunto $QC(\mathbb{R}_+)$. Si $\mathcal{L}_k = L_k = [0, l_k]$ para algún $k = 1, 2, ..., m$, entonces la función

$$\psi_k(r) := \widetilde{\alpha}_k(r)/r = \frac{1}{r}\int_0^r \widetilde{\alpha}'_k(x)dx, \quad r \in [0, l_k], \tag{4.3.5}$$

es continua en $(0, l_k]$ y lentamente oscilatoria en 0. Esto implica que la función

$$\omega_k := \ln \psi_k \tag{4.3.6}$$

es también continua en L_k y lentamente osciltoria en 0. Ya que $\psi_k = e^{\omega_k}$ por (4.3.6), se sigue de (4.3.5) que $\widetilde{\alpha}_k(r) = re^{\omega_k}$, y por lo tanto

$$\widetilde{\alpha}'_k(r) = (1 + r\omega'_k(r))e^{\omega_k(r)}.$$

Por lo tanto la función $\phi_k : r \mapsto 1 + r\omega'_k(r)$ pertenece a $QC(L_k)$.

Por otro lado, para $\mathcal{L}_k = L_k = [0, l_k]$ la función

$$\widetilde{\psi}'_k(r) = \frac{\widetilde{\alpha}_k(l_k) - \widetilde{\alpha}_k(r)}{l_k - r} = \frac{1}{l_k - r}\int_r^{l_k} \widetilde{\alpha}'_k(x)dx \tag{4.3.7}$$

es continua en $[0, l_k)$ y lentamente oscilatoria en el punto l_k. Por lo tanto, la función

$$\widetilde{\omega}_k(r) := \ln \widetilde{\psi}_k(l_k - r) \tag{4.3.8}$$

es lentamente oscilatoria en el punto 0. Para cada $t \in Y$ y cada $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$, introducimos para $r \in \mathcal{L}_{k_{s,t}}$ la función

$$\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(r) = \begin{cases} \widetilde{\omega}_{k_{s,t}}(r) & \text{si} \quad \mathcal{L}_{k_{s,t}} = [0, l_{k_{s,t}}] \ y \ \beta_{k_{s,t}}(t) = l_{k_{s,t}}, \\ \omega_{k_{s,t}}(r) & \text{si} \quad \mathcal{L}_{k_{s,t}} = [0, l_{k_{s,t}}] \ y \ \beta_{k_{s,t}}(t) = 0 \ o \ \mathcal{L}_{k_{s,t}} = \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Sea $t \in Y$ un punto finito. Para cada arco acotado o no acotado $\Gamma_{k_{s,t}}$ para $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$ con punto inicial t, ponemos $\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi) = \omega_{k_{s,t}}(\xi)$ para cada $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$. Si $t \in Y \setminus \{\infty\}$ es un punto final de un arco acotado o no acotado $\Gamma_{k_{s,t}}$ para $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$, entonces ponemos $\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi) = \widetilde{\omega}_{k_{s,t}}(\xi)$ para cada $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$. Si $t = \infty \in Y$, entonces para cada arco no acotado $\Gamma_{k_{s,t}}$, para $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$ con puntos iniciales o finales t, ponemos $\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi) = \omega_{k_{s,t}}(\xi)$ para cada $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$. Similarmente, para cada $t \in Y$ y cada $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$, introducimos para $r \in \mathcal{L}_{k_{s,t}}$ la función

$$G_{k_{s,t}}(r) = \begin{cases} (G \circ \beta_{k_{s,t}} \circ h_{k_{s,t}})(r) & \text{si} \quad \mathcal{L}_{k_{s,t}} = [0, l_{k_{s,t}}] \ y \ \beta_{k_{s,t}}(t) = l_{k_{s,t}}, \\ (G \circ \beta_{k_{s,t}})(r) & \text{si} \quad \mathcal{L}_{k_{s,t}} = [0, l_{k_{s,t}}] \ y \ \beta_{k_{s,t}}(t) = 0 \ o \ \mathcal{L}_{k_{s,t}} = \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{4.3.10}$$

Entonces, si $t \in Y$ es un punto finito, para cada arco acotado o no acotado $\Gamma_{k_{s,t}}$ con $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$ y con punto inicial t, ponemos $G_{k_{s,t}}(\xi) = (G \circ \beta_{k_{s,t}})(\xi)$ para cada

$\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$. Si $t \in Y \setminus \{\infty\}$ es un punto final de un arco acotado o no acotado $\Gamma_{k_{s,t}}$ para $s \in \{1, 2, .., m(t)\}$, entonces para cada $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}))$ ponemos

$$G_{k_{s,t}}(\xi) = \begin{cases} (G \circ \beta_{k_{s,t}} \circ h_{k_{s,t}})(\xi) & \text{si} \quad \mathcal{L}_k = [0, l_k], \\ (G \circ \beta_{k_{s,t}})(\xi) & \text{si} \quad \mathcal{L}_k = \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{4.3.11}$$

donde $h_k(r) = l_k - r$ para $\mathcal{L}_k = L_k$. Si $t = \infty \in Y$, entonces para cada arco no acotado $\Gamma_{k_{s,t}}$, con $s \in \{1, 2, ..., m(t)\}$ que comienza o termina en el punto t, ponemos $G_{k_{s,t}}(\xi) = (G \circ \beta_{k_{s,t}})(\xi)$ para cada $\xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R}))$. Ahora definimos los siguientes conjuntos

$$\mathfrak{M}_t := \begin{cases} M_0^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R} & \text{si} \quad t \in Y \setminus \{\infty\} \\ M_\infty^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R} & \text{si} \quad t = \infty \in Y, \end{cases} \tag{4.3.12}$$

y

$$M_t^0 := \begin{cases} M_0^0(QC(\mathbb{R})) & \text{si} \quad t \in Y \setminus \{\infty\} \\ M_\infty^0(QC(\mathbb{R})) & \text{si} \quad t = \infty \in Y. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

Para cada $t \in Y$, cada punto $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_t$ y cada $\xi \in M_t^0$, definimos los valores

$$\mathfrak{T}_t(\xi, x) := \begin{cases} \Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=1} e^{i\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi)(x+i/p)}\Big)\Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=-1} G_{k_{s,t}}(\xi)\Big)\mathcal{P}_+(x) + \\ \quad \Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=-1} e^{i\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi)(x+i/p)}\Big)\Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=1} G_{k_{s,t}}(\xi)\Big)\mathcal{P}_-(x) & si\ t \in Y \setminus \{\infty\} \\ \Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=-1} e^{i\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi)(x+i/p)}\Big)\Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=1} G_{k_{s,t}}(\xi)\Big)\mathcal{P}_+(x) + \\ \quad \Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=1} e^{i\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi)(x+i/p)}\Big)\Big(\prod_{\varepsilon_{k_{s,t}}=-1} G_{k_{s,t}}(\xi)\Big)\mathcal{P}_-(x) & si\ t = \infty \in Y, \end{cases} \tag{4.3.14}$$

$$\mathcal{P}_\pm(x) := 2^{-1}[1 \pm \coth(\pi + i/p))] \quad \textit{para todo } x \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{4.3.15}$$

$$\varphi_p(\eta, \lambda) := \Big(\frac{\eta}{2\pi p} + \frac{\ln|\lambda|}{2\pi}\Big)\frac{\eta}{2\pi} + \frac{1}{p} - \frac{arg\lambda}{2\pi}, \tag{4.3.16}$$

$$\eta_t(\xi) := \begin{cases} \sum_{s=1}^{m(t)} \varepsilon_{k_{s,t}}\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi) & \text{si} \quad t \in Y \setminus \{\infty\},\ \xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R})), \\ -\sum_{s=1}^{m(t)} \varepsilon_{k_{s,t}}\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(\xi) & \text{si} \quad t = \infty \in Y,\ \xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R})), \end{cases} \tag{4.3.17}$$

$$\lambda_t(\xi) := \begin{cases} \prod_{s=1}^{m(t)} G_{k_{s,t}}^{\varepsilon_{k_{s,t}}}(\xi) & \text{si} \quad t \in Y \setminus \{\infty\},\ \xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R})), \\ \prod_{s=1}^{m(t)} G_{k_{s,t}}^{-\varepsilon_{k_{s,t}}}(\xi) & \text{si} \quad t = \infty \in Y,\ \xi \in M_\infty^0(QC(\mathbb{R})). \end{cases} \tag{4.3.18}$$

Obtenemos el siguiente criterio de Fredholm para el problema de frontera de Haseman con datos cuasicontinuos $G \in QC(\Gamma)$ y $\alpha' \in QC(\Gamma)$ en una curva compuesta Γ.

Teorema 4.3.1. *Sea $p \in (1,\infty)$, $G \in QC(\Gamma)$, $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde Γ_k son arcos suaves acotados o no acotados con interiores distintos a pares y con puntos finales en un conjunto finito Y de nodos que pueden incluir a ∞, y sea $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ un homeomorfismo que preserva la orientación de cada arco Γ_k, tal que (4.3.2) se satisface y tal que $\widetilde{\alpha}'_k \in QC(\mathcal{L}_k)$ para el corrimiento $\widetilde{\alpha}_k$ dado por (4.3.3). Entonces el operador $T = V_\alpha P_+ + GP_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y sólo si uno de las siguientes condiciones equivalentes se satisfacen:*

$$ess \inf_{t\in\Gamma} |G(t)| > 0 \quad y\ \mathfrak{T}_t(\xi,x) \neq 0 \ para\ todo\ t \in Y\ y\ todo\ (\xi,x) \in \mathfrak{M}_t, \tag{4.3.19}$$

$$ess \inf_{t\in\Gamma} |G(t)| > 0 \quad y\ \varphi_p(\eta_t(\xi),\lambda_t(\xi)) \notin \mathbb{Z}\ para\ todo\ t \in Y\ y\ todo\ (\xi,x) \in M_t^0, \tag{4.3.20}$$

donde $\mathfrak{T}_t(\xi,x)$ está definida para todo $(\xi,x) \in \mathfrak{M}_t$ por (4.3.14) con $\mathcal{P}_\pm(x)$, $\widehat{\omega}_{k_{s,t}}(r)$, $G_{k_{s,t}}(r)$ y $\varepsilon_{k_{s,t}}$ dados por (4.3.15), (4.3.9), (4.3.10) y (4.3.1), respectivamente, y $\varphi_p(\eta_t(\xi),\lambda_t(\xi))$ está definida por (4.3.16) con $\eta_t(\xi)$ y $\lambda_t(\xi)$ dados por (4.3.17) y (4.3.18), respectivamente.

Capítulo 5

Operadores integrales singulares con coeficientes y corrimientos cuasicontinuos

5.1. Invertibilidad de operadores funcionales binomiales y estudio de operadores integrales singulares con corrimientos

Dado $p \in (1, \infty)$, la curva estrellada Γ y un corrimiento $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ que satisfacen las condiciones de la Sección 3.1, consideremos el operador funcional binomial

$$A = aI - bV_\alpha \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma)), \tag{5.1.1}$$

donde $a, b \in QC(\Gamma)$, α es un corrimiento cuasicontinuo definido en la Sección 3.1, I es el operador identidad, y V_α es el operador de corrimiento dado por $V_\alpha f = f \circ \alpha$.

Teorema 5.1.1. *Si $p \in (1, \infty)$, $a, b \in QC(\Gamma)$, una curva estrellada $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$ y un corrimiento cuasicontinuo α satisfacen las condiciones de la Sección 3.1 , y α tiene solamente dos puntos fijos 0 y ∞, entonces el operador funcional $A = aI - bV_\alpha$ es invertible en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y sólo si para cada $k = 1, 2, \dots, N$ una de las siguientes dos condiciones alternativas se satisface:*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{r \in \mathbb{R}_+} |a_k(r)| > 0 \quad \textit{and} \quad \max_{\eta \in \widetilde{\Delta}} \left(|b_k(\eta)| |\alpha_k'(\eta)|^{-1/p} / |a_k(\eta)| \right) < 1, \tag{5.1.2}$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{r \in \mathbb{R}_+} |b_k(r)| > 0 \quad \textit{and} \quad \max_{\eta \in \widetilde{\Delta}} \left(|a_k(\eta)| |\alpha_k'(\eta)|^{1/p} / |b_k(\eta)| \right) < 1, \tag{5.1.3}$$

donde $a_k(r) := a(e^{i\beta_k}r)$, $b_k(r) := b(e^{i\beta_k}r)$ *y* $\alpha_k(r) := e^{-i\beta_k}\alpha(e^{i\beta_k}r)$ *para* $r \in \mathbb{R}_+$ *y* $k = 1, 2, \ldots, N$, *y*

$$\widetilde{\Delta} := M_0^+(QC(\mathbb{R})) \cup M_\infty^-(QC(\mathbb{R})). \tag{5.1.4}$$

Haciendo uso de las interrelaciones del operador singular integral con coeficientes cuasicontinuos y operadores pseudodiferenciales de Mellin con símbolos cuasicontinuos establecidos en [30] y aplicando una reducción de tales operadores, obtenemos el criterio de Fredholm para el operador

$$Y = (a_+I - b_+V_\alpha)P_+ + (a_-I - b_-V_\alpha)P_- \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma)), \tag{5.1.5}$$

con coeficientes cuasicontinuos

$a_\pm, b_\pm \in QC(\Gamma)$ y el corrimiento cuasicontinuo α.

Ahora definiremos los conjuntos

$$\Delta^0 := M_0^0(QC(\mathbb{R})) \cup M_\infty^0(QC(\mathbb{R})), \tag{5.1.6}$$

$$\mathfrak{M}_0 := M_0^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{M}_\infty := M_\infty^0(QC(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}. \tag{5.1.7}$$

Entonces el siguiente condicional criterio de Fredholm para el operador Y es valido.

Teorema 5.1.2. *Sea* $p \in (1, \infty)$, $a_\pm, b_\pm \in QC(\Gamma)$ *y sea una curva estrellada* Γ *y un corrimiento* $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ *satisfacen las condiciones de la Sección 3.1, donde* α *tiene sólamente dos puntos fijos* 0 *y* ∞. *Si los operadores funcionales* $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ *son invertibles en el espacio* $L^p(\Gamma)$, *entonces el operador* $Y = A_+P_+ + A_-P_-$ *es Fredholm en el espacio* $L^p(\Gamma)$ *si y sólo si*

$$\begin{aligned}\det \mathcal{Y}(\xi, x) := &\Big(\prod\nolimits_{\varepsilon_k=1} \mathcal{A}_{+,k}(\xi, x)\Big)\Big(\prod\nolimits_{\varepsilon_k=-1} \mathcal{A}_{-,k}(\xi, x)\Big)\mathcal{P}_+(x) \\ &+ \Big(\prod\nolimits_{\varepsilon_k=-1} \mathcal{A}_{+,k}(\xi, x)\Big)\Big(\prod\nolimits_{\varepsilon_k=1} \mathcal{A}_{-,k}(\xi, x)\Big)\mathcal{P}_-(x) \neq 0\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$, *donde*

$$\mathcal{P}_\pm(x) := \frac{1}{2}\big[1 \pm \coth(\pi(x + i/p))\big] \quad \textit{para } x \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{5.1.9}$$

$$\mathcal{A}_{\pm,k}(\xi, x) := a_{\pm,k}(\xi) - b_{\pm,k}(\xi)e^{i\omega_k(\xi)(x+i/p)} \quad \textit{para } (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty, \tag{5.1.10}$$

$a_{\pm,k}(r) := a_\pm(e^{i\beta_k}r)$, $b_{\pm,k}(r) := b_\pm(e^{i\beta_k}r)$, $\omega_k(r) := \ln[\alpha_k(r)/r]$ *para* $r \in \mathbb{R}_+$, *y los corrimientos* $\alpha_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *están definidos en el Teorema 5.1.1.*

Teorema 5.1.2 nos da suficientes condiciones de Fredholm para el operador Y en el espacio $L^p(\Gamma)$ que consisten en el criterio de invertibilidad para los operadores funcionales binomiales $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ en el espacio $L^p(\Gamma)$, los cuales se definen en el Teorema 5.1.1, y el cumplimiento de (5.1.8). Para obtener el criterio completo de Fredholm para el operador Y, queda por demostrar la invertibilidad de los operadores $A_\pm$ en el espacio $L^p(\Gamma)$ para el operador de Fredholm Y. Para $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$ esta pregunta está abierta.

Si $p = 2$, entonces obtenemos el siguiente criterio de Fredholm para el operador Y aplicando C^*-álgebra representaciones relacionadas con las de [8, Section 4], obtenido mediante el uso de medidas espectrales y el método de trayectorias locales [23, 4] relacionados con C^*-álgebras asociadas con sistemas dinámicos C^* (see, e.g., [2, 3]).

Teorema 5.1.3. *Sean $p = 2$, $a_\pm, b_\pm \in QC(\Gamma)$, la curva estrellada Γ y el corrimiento $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ satisfacen las condiciones de la Sección 3.1 donde α tiene solo dos puntos fijos 0 y ∞. Entonces el operador $Y = A_+P_+ + A_-P_-$ es Fredholm en el espacio $L^2(\Gamma)$ si y sólo si los operadores funcionales $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ son invertibles en el espacio $L^2(\Gamma)$ y* (5.1.8) *se cumple para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$, donde $p = 2$ in* (5.1.9) *y* (5.1.10).

5.2. Invertibilidad de operadores funcionales

Esta sección está dedicada a la demostración del Teorema 5.1.1.

Demostración. El operador $A = aI - bV_\alpha$ es invertible en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y sólo si para cada $k = 1, 2, ..., N$, los operadores $A_k := a_k I - b_k V_{\alpha_k}$ son invertibles en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$. Reescribiendo los operadores A_k en la forma

$$A_k = a_k I - \widehat{b}_k U_{\alpha_k}, \tag{5.2.1}$$

donde $\widehat{b}_k := b_k(\alpha_k')^{-1/p}$ y $U_{\alpha_k} = (\alpha_k')^{1/p} V_{\alpha_k}$ son operadores isométricos, deducimos de [[19], Teorema 3] que cada operador A_k es invertible en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{R}_+)$. Para cada $k = 1, 2, ..., N$, consideremos el grupo cíclico $\{\alpha_k^n : n \in \mathbb{Z}\}$ que actúa topológicamente libremente (ver, e.g., [7]) en el espacio ideal maximal $M(QC(\mathbb{R}_+))$ definido por (2.1.5). Sea V el operador unitario en el espacio $l^2 := l^2(\mathbb{Z})$ dado por $(Vf)(n) = f(n+1)$ para todo $f \in l^2$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. Para cada $\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R})) := \cup_{t \in \mathbb{R}_+} M_t(QC(\mathbb{R}))$, definimos los operadores discretos

$$(A_k)_\xi = a_{k,\xi} I - b_{k,\xi} V \in \mathcal{B}(l^2), \tag{5.2.2}$$

donde las funciones $a_{k,\xi}, b_{k,\xi} \in l^\infty$ están dadas por

$$a_{\kappa,\xi}(\eta) = (a_k \circ \alpha_k^n)(\xi), \quad b_{\kappa,\xi}(\eta) = (\widehat{b}_k \circ \alpha_k^n)(\xi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por [[7], Teorema 5.2], el operador A_k dado por (5.2.1) es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si para cada $\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))$, el operador $(A_k)_\xi$ dado por (5.2.2) es invertible en el espacio l^2 y

$$\sup\{||(A_k)_\xi^{-1}||_{\mathcal{B}(l^2)} : \ \xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))\} < \infty.$$

Por [[19], Teorema 17], para cada $\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))$, el operador $(A_k)_\xi$ es inverible en el espacio l^2 si y sólo si una de las siguientes condiciones de cumple:

$$\begin{aligned} &(i) \ \inf_{n\in\mathbb{Z}} |a_{k,\xi}(n)| > 0, \quad r((b_{k,\xi}/a_{k,\xi})V) < 1; \\ &(ii) \ \inf_{n\in\mathbb{Z}} |b_{k,\xi}(n)| > 0, \quad r((a_{k,\xi}/b_{k,\xi})V^{-1}) < 1; \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

donde $r(A)$ es el radio espectral de un operador $A \in \mathcal{B}(l^2)$. Sea A_k de la forma (5.2.1) invertible en el espacio $l^2(\mathbb{R}_+)$. Entonces [[7], Teorema 5.2 (iii)] implica que los operadores $(A_k)_\eta = a_k(\eta)I - \widehat{b}_k(\eta)V$ son invertibles en el espacio l^2 para cada $\eta \in \widetilde{\Delta}$, lo cual implica que $|a_k(\eta)| \neq |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in \widetilde{\Delta}$. Por lo tanto, o bien $|a_k(\eta)| > |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in M_0^+(QC(\mathbb{R}))$, o $|a_k(\eta)| < |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in M_0^+(QC(\mathbb{R}))$. La misma propiedad es valida para todo $\eta \in M_\infty^-(QC(\mathbb{R}))$.

En realidad, afirmamos que esto ocurre, si o bien $|a_k(\eta)| > |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in \widetilde{\Delta}$, o $|a_k(\eta)| < |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in \widetilde{\Delta}$. En efecto, si 0 es un punto repulsor de α_k y ∞ es el punto atractor de α_k, y $|a_k(\eta)| > |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in M_0^+(QC(\mathbb{R}))$ y $|a_k(\eta)| < |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in M_\infty^-(QC(\mathbb{R}))$, entonces para cada $\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))$ hay un $n_\xi \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{n>n_\xi} |b_{k,\xi}(n)| > 0$, $\inf_{n<-n_\xi} |a_{k,\xi}(n)| > 0$ y

$$|a_{k,\xi}(n)|/|b_{k,\xi}(n)| \leq \max_{\eta\in M_\infty^-(QC(\mathbb{R}))} \{|a_k(\eta)|/|\widehat{b}_k(\eta)|\} < 1 \ \textit{para todo} \ n > n_\xi,$$

$$|b_{k,\xi}(n)|/|a_{k,\xi}(n)| \leq \max_{\eta\in M_0^+(QC(\mathbb{R}))} \{|\widehat{b}_k(\eta)|/|a_k(\eta)|\} < 1 \ \textit{para todo} \ n < -n_\xi.$$

Ya que A_k es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{R}_+)$, entonces para cada $\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))$ se puede alcanzar que la propiedad $a_{k,\xi}(n)b_{k,\xi}(n) \neq 0$ para todo $n \in \{-n_\xi, ..., n_\xi\}$, por una pequeña perturbación de coeficientes $a_k, b_k \in QC(\mathbb{R}_+)$ que preservan la invertibilidad del operador $(A_k)_\xi$ en el espacio l^2. Por [[19], Proposición 14], la función

$$f(n) = \begin{cases} \prod_{s=n}^{-1}[b_{k,\xi}(s)/a_{k,\xi}(s)] & \text{si} \quad -n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{si} \quad n = 0, \\ \prod_{s=1}^{n}[a_{k,\xi}(s-1)/b_{k,\xi}(s-1)] & \text{si} \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

pertenecen a $\ker(A_k)_\xi \subset l^2$, lo cual contradice la invertibilidad de A_k en $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Si 0 es el punto atractor de α_k y ∞ es el punto repulsor de α_k, y $|a_k(\eta)| < |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in M_0^+(QC(\mathbb{R}))$ y $|a_k(\eta)| > |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in M_\infty^-(QC(\mathbb{R}))$, entonces nuevamente el operador A_k no es invertible en $L^2(\mathbb{R}_+)$. Otros dos casos de desigualdades diferentes en 0 y ∞ contradicen la invertibilidad del operador adjunto A_k^* en el espacio $L^2(\mathbb{R}_+)$, lo cual demuestra la afirmación mencionada arriba.

Por lo tanto, para la invertibilidad del operador A_k, solo uno de los casos (i) o (ii) se puede realizar para todo $\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))$ en (5.2.3). Entonces, o bien

$$\min_{\xi \in M(QC(\mathbb{R}_+))} |a_k(\xi)| > 0, \qquad \sup_{\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))} r\Big(\frac{b_{k,\xi}}{a_{k,\xi}} V\Big) = \max_{\eta \in \widetilde{\Delta}} \frac{|\widehat{b}_k(\eta)|}{a_k(\eta)} < 1 \tag{5.2.4}$$

si $|a_k(\eta)| > |\widehat{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in \widetilde{\Delta}$, o bien

$$\min_{\xi \in M(QC(\mathbb{R}_+))} |\widehat{b}_k(\xi)| > 0, \qquad \sup_{\xi \in M_{\mathbb{R}_+}(QC(\mathbb{R}))} r\Big(\frac{a_{k,\xi}}{b_{k,\xi}} V^{-1}\Big) = \max_{\eta \in \widetilde{\Delta}} \frac{|a_k(\eta)|}{\widehat{b}_k(\eta)} < 1 \tag{5.2.5}$$

si $|a_k(\eta)| < |\widetilde{b}_k(\eta)|$ para todo $\eta \in \widetilde{\Delta}$, lo cuál demuestra la necesidad de las condiciones (5.1.2) y (5.1.3). Combinando (5.2.3), (5.2.4) y (5.2.5) obtenemos la suficiencia de las condiciones (5.1.2) y (5.1.3).

$\square$

Si las condiciones del Teorema 5.1.1 se satisfacen y para $k = 1, 2, ..., N$ el operador $A_k = a_k I - b_k V_{\alpha_k}$ es invertible en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$, entonces

$$A_k^{-1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} ((b_k/a_k) V_{\alpha_k})^n a_k^{-1} I & \text{si} \quad (5{,}1{,}2) \textit{ se cumple} \\ -V_{\alpha_k}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((a_k/b_k) V_{\alpha_k}^{-1})^n b_k^{-1} I & \text{si} \quad (5{,}1{,}3) \textit{ se cumple.} \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Escribimos $a_k \gg b_k$ si (5.1.2) se satisface en (5.2.6), y $b_k \gg a_k$ si (5.1.3) se cumple.

5.3. Demostración del Teorema 5.1.2

Ya que los operadores $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ son invertibles en el espacio $L^p(\Gamma)$ y los operadores $A_{\pm,k} = a_{\pm,k} I - b_{\pm,k} V_{\alpha_k}$ son invertibles en $L^p(\mathbb{R}_+)$ para todo $k = 1, 2, ..., N$, deducimos del Teorema 5.1.1 y (5.1.10) que

$$\mathcal{A}_{\pm,k}(\xi, x) \neq 0 \textit{ para todo } (\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty \textit{ y todo } k = 1, 2, ..., N.$$

Tomando los operadores de corrimiento $V_{\gamma_\pm} \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ con corrimientos $\gamma_\pm : \Gamma \to \Gamma$ dados por

$$\gamma_\pm(e^{i\beta_k} r) = e^{i\beta_k} \gamma_{\pm,k}(r), \quad \gamma_{\pm,k}(r) = \begin{cases} r & \text{si} \quad a_{\pm,k} \gg b_{\pm,k}, \\ \alpha_k^{-1}(r) & \text{si} \quad b_{\pm,k} \gg a_{\pm,k}, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

para $r \in \mathbb{R}_+$ y todo $k = 1, 2, ..., N$. Sea $c_{\gamma_\pm}(e^{i\beta_k} r) = c_{\gamma_\pm,k}(r) = (\gamma_{\pm,k}(r)/r)^{1/p}$ para $r \in \mathbb{R}_+$ y todo $k = 1, 2, ..., N$ por (3.5.5). El Teorema 3.5.3 implica que el operador $Y_0 := (c_{\gamma_+} V_{\gamma_+})P_+ + (c_{\gamma_-} V_{\gamma_-})P_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$. En efecto, el operador $c_{\gamma_-} V_{\gamma_-}$ es invertible en el espacio $L^p(\Gamma)$, entonces $Y_0 = (c_{\gamma_-} V_{\gamma_-})(c_{\widetilde{\gamma}} V_{\widetilde{\gamma}} P_+ + P_-)$, donde $\widetilde{\gamma} = \gamma_+ \circ \gamma_-^{-1} : \Gamma \to \Gamma$, $c_{\widetilde{\gamma}} := (\widetilde{\gamma}(t)/t)^{1/p}$ para $t \in \Gamma$, y por eso el operador $(\widetilde{c_{\widetilde{\gamma}}} V_{\widetilde{\gamma}})P_+ + P_-$ es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ por el Teorema 3.5.3. Similarmente el operador $\widehat{Y_0} := (c_{\gamma_+} V_{\gamma_+})^{-1} P_+ + (c_{\gamma_-} V_{\gamma_-})^{-1} P_-$ es también Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$. Entonces el operador pseudodiferencial de Mellin $\Psi(Y_0 \widehat{Y_0})$ es Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)$ también. Entonces tenemos

$$
\begin{gathered}
Y Y_0 = A_+ c_{\gamma_+} V_{\gamma_+} P_+ + A_- c_{\gamma_-} V_{\gamma_-} P_- + H_0, \\
\\
H_0 := (A_+ - A_-)(P_+ c_{\gamma_-} V_{\gamma_-} P_- - P_- c_{\gamma_+} V_{\gamma_+} P_+).
\end{gathered}
\tag{5.3.2}
$$

Para cada operador R_β dada por (3.4.2), deducimos de los Teoremas 3.5.1 y 3.5.2 que los operadores $A_{\pm,k} R_\beta$ poseen la propiedad: $\Psi_0(A_{\pm,k}, R_\beta)$ son operadores pseudodiferenciales de Mellin con simbolos cuasicontinuos en $QC(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$. Se puede ver fácilmente que los símbolos de los operadores pseudodiferenciales de Mellin en los Teoremas 3.5.1 y 3.5.2 pertenecen actualmente a las clases $[\widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R})]_{N\times N}$. Se sigue por analogía con [[22], Lema 5.5] que los operadores $\Psi_0(A^{-1}_{\pm,k}, R_\beta)$ también poseen tal propiedad. Por lo que concluimos de (5.3.2) que

$$
\Psi(H_0) = \mathrm{Op}[(\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-)(\mathfrak{P}_+ \widetilde{\mathfrak{D}}_- \mathfrak{P}_- - \mathfrak{P}_- \widetilde{\mathfrak{D}}_+ \mathfrak{P}_+)] \tag{5.3.3}
$$

es un operador pseudodiferencial de Mellin con símbolo matricial cuasicontinuo en la clase $[\widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))]_{N\times N}$, donde $\mathfrak{P}_\pm$ están dados por (3.5.25) y

$$
\mathcal{A}_\pm(r, x) := \mathrm{diag}\{a_{\pm,k}(r) - b_{\pm,k}(r) e^{i\omega_k(r)(x+i/p)}\}_{k=1}^N,
$$

$$
\widehat{\mathfrak{D}}_\pm = \mathrm{diag}\{\widehat{\mathfrak{d}}_{\pm,k}\}_{k=1}^N, \quad \widehat{\mathfrak{d}}_{\pm,k}(r, x) = \left\{ \begin{array}{rll} 1 & \text{si} & a_{\pm,k} \gg b_{\pm,k}, \\ e^{-i(\omega_k \circ \alpha_k^{-1})(r)x} & \text{si} & b_{\pm,k} \gg a_{\pm,k}, \end{array} \right.
$$

$$
ess\,\mathrm{ínf}\{|\det(\widehat{\mathfrak{D}}_\pm(r, x))| : \ (r, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\} > 0. \tag{5.3.4}
$$

Aplicando (5.3.1) y (3.5.4), deducimos que $\Psi(A_\pm c_{\gamma_\pm} V_{\gamma_\pm}) = diag\{B_{\pm,k}\}_{k=1}^N$, donde, respectivamente,

$$
B_{\pm,k} = \left\{ \begin{array}{rll} a_{\pm,k} I - b_{\pm,k} c_k^{-1} V_{\alpha_k} & \text{si} & a_{\pm,k} \gg b_{\pm,k}, \\ -(b_{\pm,k} c_k^{-1} I - a_{\pm,k} V_{\alpha_k}^{-1}) & \text{si} & b_{\pm,k} \gg a_{\pm,k}, \end{array} \right.
$$

donde las funciones c_k son definidas por (3.5.4). Consideremos los invertibles en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ operadores

$$
\widetilde{A}_{\pm,k} := \left\{ \begin{array}{lll} I - (b_{\pm,k}/a_{\pm,k}) c_{\pm,k}^{-1} V_{\alpha_k} & \text{si} & a_{\pm,k} \gg b_{\pm,k}, \\ I - (a_{\pm,k}/b_{\pm,k}) c_{\pm,k} V_{\alpha_k}^{-1} & \text{si} & b_{\pm,k} \gg a_{\pm,k}. \end{array} \right.
$$

y los invertibles en el espacio $L^p(\Gamma)$ operadores

$$\widehat{A}_{\pm,m} = \Psi^{-1}(\mathrm{diag}\{(1-\delta_{m,k})I + \delta_{m,k}\widetilde{A}_{\pm,k}\}_{k=1}^{N}), \quad m = 1,2,...,N, \tag{5.3.5}$$

donde $\delta_{m,k}$ es el símbolo de Kronecker. Para $m = 1,2,...,N$, consideremos los operadores $P_{\pm,2},\ Y_m,\ \widetilde{Y}_m \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ dados por

$$(P_{\pm,2}f)(t) := \frac{f(t)}{2} \pm \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t/\tau)^{1/2-1/p}f(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad f \in L^p(\Gamma),\ t \in \Gamma,$$

$$Y_m := \widehat{A}_{+,m}P_{+,2} + \widehat{A}_{-,m}P_{-,2}, \quad \widehat{Y}_m := \widehat{A}^{-1}_{+,m}P_{+,2} + \widehat{A}^{-1}_{-,m}P_{-,2}, \tag{5.3.6}$$

donde los operadores $\widehat{A}_{\pm,m}$ están definidos por (5.3.5). Como $\Psi(Y_m\widehat{Y}_m) \simeq \mathrm{Op}(\widehat{\mathfrak{N}}_m)$ y $\Psi(\widehat{Y}_mY_m) \simeq \mathrm{Op}(\widehat{\mathfrak{N}}_m$ y $\mathrm{Op}(\mathfrak{N}_m)$, $\mathrm{Op}(\widehat{\mathfrak{N}}_m)$ son operadores pseudodiferenciales de Mellin con simbolos cuasicontinuos $\mathfrak{N}_m, \widehat{\mathfrak{N}}_m \in [\widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R})]_{N\times N}$ dados por

$$\mathfrak{N}_m(r,x) = \mathcal{Y}_m(r,x)\widehat{\mathcal{Y}}_m(r,x), \quad \widehat{\mathfrak{N}}_m(r,x) = \widehat{\mathcal{Y}}_m(r,x)\mathcal{Y}_m(r,x),$$

$$\mathcal{Y}_m(r,x) = \widehat{\mathcal{A}}_{+,m}(r,x)\mathfrak{P}_{+,2}(r,x) + \widehat{\mathcal{A}}_{-,m}(r,x)\mathfrak{P}_{-,2}(r,x),$$

$$\widehat{\mathcal{Y}}_m(r,x) = \widehat{\mathcal{A}}^{-1}_{+,m}(r,x)\mathfrak{P}_{+,2}(r,x) + \widehat{\mathcal{A}}^{-1}_{-,m}(r,x)\mathfrak{P}_{-,2}(r,x), \quad (r,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

donde $\mathfrak{P}_{\pm,2}(r,x)$ están dadas por (3.5.25) con $\mathfrak{g}_{j,k}(r,x) := g_{j,k}(x)$ definida por (3.5.7) con p reemplazado por 2, $\widehat{\mathcal{A}}_\pm(r,x) = \mathrm{diag}\{(1-\delta_{m,k}) + \delta_{m,k}\widetilde{\mathcal{A}}_{\pm,k}(r,x)\}_{k=1}^N$, y

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{\pm,k}(r,x) = \begin{cases} 1 - (b_{\pm,k}(r)/a_{\pm,k}(r))e^{i\omega_k(r)(x+i/p)} & \text{si} \quad a_{\pm,k} \gg b_{\pm,k}, \\ 1 - (a_{\pm,k}(r)/b_{\pm,k}(r))e^{-i\omega_k(r)(x+i/p)} & \text{si} \quad b_{\pm,k} \gg a_{\pm,k}. \end{cases} \tag{5.3.7}$$

Por lo tanto los operadores $Y_m\widehat{Y}_m$ y $\widehat{Y}_mY_m$ son Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y solo si los operadores pseudodiferenciales de Mellin $\mathrm{Op}(\det(\mathfrak{N}_m\widehat{\mathfrak{N}}_m))$ con símbolos $\det(\mathfrak{N}_m\widehat{\mathfrak{N}}_m) \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))$ son Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. En tal caso los operadores Y_m y $\widehat{Y}_m$ son Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$. Ya que

$$\det(\mathfrak{N}_m(r,x)\widehat{\mathfrak{N}}_m(r,x)) = \det(\mathcal{Y}_m(r,x))\det(\widehat{\mathcal{Y}}_m(r,x)),$$

$$\det(\mathcal{Y}_m(r,x)) = \widetilde{\mathcal{A}}_{j_m,m}(r,x)\mathcal{P}_{+,2}(x) + \widetilde{\mathcal{A}}_{-j_m,m}(r,x)\mathcal{P}_{-,2}(x),$$

$$\det(\widehat{\mathcal{Y}}_m(r,x)) = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}_{j_m,m}(r,x)\mathcal{P}_{+,2}(x) + \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}_{-j_m,m}(r,x)\mathcal{P}_{-,2}(x),$$

donde $j_m = \pm$ si $\varepsilon_m = \pm 1$, $\mathcal{P}_{\pm,2}(x) = 2^{-1}(1 \pm \tanh(\pi x))$ para $x \in \overline{\mathbb{R}}$, y $\widetilde{\mathcal{A}}_{\pm,m}(r,x)$ están dados por (5.3.7), se sigue de manera similar a [[22], Teorema 7.1] que $\det(\mathfrak{N}_m\widehat{\mathfrak{N}}_m) \neq 0$ para todo $(\xi,x) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, lo cuál nos da la propiedad de Fredholm de Y_m y $\widehat{Y}_m$ en $L^p(\Gamma)$ para todo $m = 1,2,...,N$, e implica la propiedad:

$$\det(\widehat{\mathcal{Y}}_m(r,x)) \neq 0 \quad (\xi,x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty. \tag{5.3.8}$$

Más aún, deducimos de (5.3.2) y (5.3.6) que

$$N_0 := YY_0\widehat{Y}_1\widehat{Y}_2...\widehat{Y}_N = d_+P_{+,2} + d_-P_{-,2} + H, \tag{5.3.9}$$

$$H := \sum_{m=0}^{N} H_m\widehat{Y}_{m+1}\widehat{Y}_{m+2}...\widehat{Y}_N,$$

donde H_0 está dado por (5.3.2) y

$$H_1 := (A_+c_{\gamma_+}V_{\gamma_+} - A_-c_{\gamma_-}V_{\gamma_-})(P_+\widehat{A}^{-1}_{-,1}P_{-,2} - P_-\widehat{A}^{-1}_{+,1}P_{+,2})\widehat{Y}_2\widehat{Y}_3...\widehat{Y}_N,$$

$$H_m := (A_+c_{\gamma_+}V_{\gamma_+}\widehat{A}^{-1}_{+,1}...\widehat{A}^{-1}_{+,m-1} - A_-c_{\gamma_-}V_{\gamma_-}\widehat{A}^{-1}_{-,1}...\widehat{A}^{-1}_{-,m-1})$$

$$\times(P_{+,2}\widehat{A}^{-1}_{-,m}P_{-,2} - P_{-,2}\widehat{A}^{-1}_{+,m}P_{+,2})\widehat{Y}_{m+1}\widehat{Y}_{m+2}...\widehat{Y}_N \quad (m = 2, ..., N),$$

$$d_\pm(e^{i\beta_m}r) := d_{\pm,m}(r) = \begin{cases} a_{\pm,m}(r) & \text{si} \quad a_{\pm,m} \gg b_{\pm,m}, \\ -b_{\pm,m}(r)c_m^{-1}(r) & \text{si} \quad b_{\pm,m} \gg a_{\pm,m}. \end{cases}$$

con $r \in \mathbb{R}_+$.

Ya que los operadores Y_0 y $\widehat{Y}_m$ para $m = 1, 2, ..., N$ son Fredholm en $L^p(\Gamma)$, concluimos de (5.3.9) que el operador Y es Fredholm en el espacio $L^p(\Gamma)$ si y solo sí lo es el operador N_0. Pero $\Psi(N_0) = \mathrm{Op}(\mathfrak{N}_0)$ es un operador pseudodiferencial de Mellin con un símbolo cuasicontinuo $\mathfrak{N}_0 \in [\widehat{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+, V(\mathbb{R}))]_{N\times N}$. El operador $\mathrm{Op}(\mathfrak{N}_0)$ es Fredholm en el espacio $L^p_N(\mathbb{R}_+, d\mu)$ si y solo sí el operdor $\mathrm{Op}(\det \mathfrak{N}_0)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Por (5.3.9), inferimos que

$$\det \mathfrak{N}_0(r, x) = \det[\mathrm{diag}\{d_{+,m}(r)\}_{m=1}^N \mathfrak{P}_{+,2}(r, x) + \mathrm{diag}\{d_{-,m}(r)\}_{m=1}^N \mathfrak{P}_{-,2}(r, x)]$$

$$= \Big(\prod_{\varepsilon_m=1} d_{+,m}(r)\Big)\Big(\prod_{\varepsilon_m=-1} d_{-,m}(r)\Big)\mathcal{P}_+(x)$$

$$+\Big(\prod_{\varepsilon_m=-1} d_{+,m}(r)\Big)\Big(\prod_{\varepsilon_m=1} d_{-,m}(r)\Big)\mathcal{P}_-(x)$$

para $(r, x) \in \mathfrak{M}_{+\infty} \cup \mathfrak{M}_{-\infty}$. Ya que las funciones $d_{\pm,m}$ son invertibles en $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ para cada $m = 1, 2, ..., N$ en vista del Teorema 5.1.1 para los invertibles de operadores $A_\pm$, concluimos que $ess\,\mathrm{ínf}_{r\in\mathbb{R}_+} |\det \mathfrak{N}_0(r, \pm\infty)| > 0$. Por lo tanto, inferimos de [[30], Teorema 7.1] que el operador $\mathrm{Op}(\det \mathfrak{N}_0)$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ si y solo si $\det \mathfrak{N}_0(\xi, x) \neq 0$ para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$. Mas aún, se sigue de (5.3.9) para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$ que

$$\det \mathfrak{N}_0(\xi, x) = \det \mathcal{Y}(\xi, x) \det \mathcal{Y}_0(\xi, x) \det \widehat{\mathcal{Y}}_1(\xi, x)... \det \widehat{\mathcal{Y}}_N(\xi, x), \tag{5.3.10}$$

donde $\det \mathcal{Y}_0(\xi, x) = \det[(\widehat{\mathfrak{D}}_+\mathfrak{P}_+ + \widehat{\mathfrak{D}}_-\mathfrak{P}_-)(\xi, x)] \neq 0$ por (5.3.4) similarmente a (5.1.8), $\det \widehat{\mathcal{Y}}_m(\xi, x) \neq 0$ para todo $m \in \{1, ..., N\}$ por (5.3.8) y

$$\det \mathcal{Y}(\xi, x) = \det(\mathcal{A}_+(\xi, x)\mathfrak{P}_+(\xi, x) + \mathcal{A}_-(\xi, x)\mathfrak{P}_-(\xi, x))$$

es calculada por la fórmula (5.1.8) similarmente a la fórmula (3.2.5). Por lo tanto de (5.1.10) y (5.3.10) sigue que $\det \mathfrak{N}_0(\xi, x) \neq 0$ para todo $(\xi, x) \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$ si y solo sí $\det \mathcal{Y}(\xi, x) \neq 0$ para esos puntos, lo cuál completa la demostración del Teorema 5.1.2.

5.4. La forma general de operadores integrales singulares con corrimientos

Para probar el teorema 5.1.3 bajo las condiciones de la Sección 3.1, necesitamos encontrar por analogía con [8] una forma general de operadores en el álgebra C^*

$$\mathfrak{B} := \text{alg}\{QC(\Gamma), S_\Gamma, U_\alpha\} \subset \mathcal{B}(L^2(\Gamma)) \tag{5.4.1}$$

generado por todos los operadores de multiplicación aI con $a \in QC(\Gamma)$, por el operador integral singular de Cauchy S_Γ definido por (0.0.5) y por el operador de corrimiento unitario $U_\alpha : f \mapsto |\alpha'|^{1/2}(f \circ \alpha)$. Vemos que $U_\alpha^n \in \mathfrak{B}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

El grupo cíclico $G = \{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ generado por el corrimiento α tiene el conjunto $\Lambda := \{0, \infty\} \subset \Gamma$ de puntos fijos en común y actúa libremente en el conjunto $\Gamma_{arc} := \Gamma \setminus \Lambda$. Por lo tanto, el grupo G actúa topológicamente libremente sobre Γ, lo que significa que para cada conjunto finito $F \subset G \setminus \{e\}$, donde $e = \alpha^0$ es la unidad de G, y cada conjunto abierto $\Omega \subset \Gamma$ hay un $t \in \Omega$ tal que $g(t) \neq t$ para cada $g \in F$ (cf. [7]).

Sean Λ° y $\partial\Lambda$, respectivamente, el interior y la frontera de Λ. Entonces $\Lambda^\circ = \varnothing$ y $\partial\Lambda = \Lambda$. Para el conjunto G_Γ de todas las G-órbitas $G(t) := \{g(t) : g \in G\}$ de puntos $t \in \Gamma$, tenemos la siguiente partición: $G_\Gamma = G_\Lambda \cup G_{arc}$, donde G_Λ es el conjunto de todas las G-órbitas en Γ que tienen sólo un punto, y G_{arc} es el conjunto de todas las G-órbitas contables en Γ_{arc}.

Para cada $k = 1, 2, \dots, N$, definimos el mapeo

$$\gamma_k : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \Gamma_k, \quad \gamma_k(r) := e^{i\beta_k} r \quad \text{para todo} \quad r \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{5.4.2}$$

Fijando $t_w \in w$ para cada G-órbita $w \in G_{arc}$, y colocando $\Gamma_{k,arc} := \Gamma_k \setminus \Lambda$ para $k = 1, 2, \dots, N$, para cada G-órbita $w \in G_{arc}$, también definimos

$$\widetilde{t}_w := \gamma_k^{-1}(t_w) \;\; \text{y} \;\; \lambda_w := \gamma_k \;\; \text{si} \;\; t_w \in \Gamma_{k,arc} \;\; \text{para} \;\; k = 1, 2, \dots, N. \tag{5.4.3}$$

Junto con $\mathfrak{B}$ dada por (5.4.1), consideremos la subálgebra C^*

$$\mathfrak{A} := \mathrm{alg}\{QC(\Gamma), U_\alpha\} \subset \mathcal{B}(L^2(\Gamma)) \tag{5.4.4}$$

generada por los operadores U_α y aI para todo $a \in QC(\Gamma)$.

Sean $\mathfrak{A}^0$ y $\mathfrak{B}^0$ las subálgebras no cerradas de $\mathfrak{B}$ que consisten de todos los operadores de la forma $\sum_{i=1}^n T_{i,1}T_{i,2}\dots T_{i,j_i}$ $(n, j_i \in \mathbb{N})$, donde $T_{i,k}$ son, respectivamente, los generadores aI $(a \in QC(\Gamma))$ y U_α de la C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ dada por (5.4.4), o los generadores aI $(a \in QC(\Gamma))$, S_Γ and U_α de la C^*-álgebra $\mathfrak{B}$. Las álgebras $\mathfrak{A}^0$ y $\mathfrak{B}^0$ son subálgebras densas de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente.

Sea $\mathfrak{H}$ el ideal bilateral cerrado de $\mathfrak{B}$ siendo la clausura del conjunto

$$\mathfrak{H}^0 := \left\{ \sum_{i=1}^{m} B_i H_i C_i : B_i, C_i \in \mathfrak{B}^0,\ H_i \in \mathcal{H},\ m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathfrak{B}, \tag{5.4.5}$$

donde $\mathcal{H} := \big\{[aI, S_\Gamma], U_\alpha^n S_\Gamma (U_\alpha^n)^* - S_\Gamma : a \in QC(\Gamma), n \in \mathbb{Z}\big\}$. El ideal $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\Gamma))$ está contenido en $\mathfrak{H}$ (ver, e.g., [6, Section 11]).

Aplicando los Teoremas 3.5.1, 3.5.2 y 2.2.4, inferimos que los operadores $H \in \mathfrak{H}$ tienen singularidades puntuales en 0 y ∞, y son localmente compactos en todos los demás puntos de Γ debido a (2.2.7), lo que significa que $cH \simeq HcI \simeq 0$ para todas las funciones $c \in C(\Gamma)$ que desaparecen en 0 y ∞.

Para cada $k = 1, 2, \dots, N$, definimos el conjunto

$$\Omega_{k,arc} := \bigcup_{w \in G_{k,arc}} M_{\widetilde{t_w}}(QC(\mathbb{R})), \tag{5.4.6}$$

donde $G_{k,arc}$ es el conjunto de todas las G-órbitas de puntos $t \in \Gamma_{k,arc}$. Para cada $k = 1, 2, \dots, N$, cada $\xi \in \Omega_{k,arc}$ y cada operador $A = \sum_{m \in F} a_m U_\alpha^m \in \mathfrak{A}^0$ con un conjunto finito $F \subset \mathbb{Z}$ y coeficientes $a_m \in QC(\Gamma)$, definimos similarmente a

$$A_{k,\xi} := a_{k,\xi} I - b_{k,\xi} V \in \mathcal{B}(l^2), \tag{5.4.7}$$

los operadores discretos $A_{k,\xi}$ en el espacio $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ por

$$A_{k,\xi} = \sum_{m \in F} a_{m,k,\xi} V^m, \tag{5.4.8}$$

donde $(Vf)(n) = f(n+1)$ para todo $f \in l^2$ y todo $n \in \mathbb{Z}$, los coeficientes $a_{m,k,\xi} \in l^\infty$ están dados por $a_{m,k,\xi}(n) = ((a_m)_k \circ \alpha_k^n)(\xi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y $((a_m)_k \circ \alpha_k^n)(\xi)$ significa el valor de la transformada de Gelfand de la función $(a_m)_k \circ \alpha_k^n \in QC(\mathbb{R}_+)$ en el punto $\xi \in \Omega_{k,arc}$.

Puesto que $\Lambda^\circ = \varnothing$, obtenemos el siguiente lema por analogía con [8, Lemma 8.2].

Lema 5.4.1. *Cada operador $B \in \mathfrak{B}^0$ está representado en la forma*

$$B = A^+ P_+ + A^- P_- + H_B, \quad \textit{with} \;\; A^\pm = \sum_{m \in F} a_m^\pm U_\alpha^m \in \mathfrak{A}^0, \;\; H_B \in \mathfrak{H}^0, \tag{5.4.9}$$

donde F es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $a_m^\pm \in QC(\Gamma)$ para todo $m \in F$,

$$\max_{k=1,2,\ldots,N} \sup_{\xi \in \Omega_{k,arc}} \left\| A_{k,\xi}^\pm \right\|_{\mathcal{B}(l^2)} \leq \inf \left\{ \|B + H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))} : H \in \mathfrak{H}^0 \right\}, \tag{5.4.10}$$

los conjuntos $\Omega_{k,arc}$ están dados por (5.4.6)*, y para cada $k = 1, 2, \ldots, N$ y cada $\xi \in \Omega_{k,arc}$ los operadores $A_{k,\xi}^\pm \in \mathcal{B}(l^2)$ están definidos por $A^\pm \in \mathfrak{A}^0$ como en* (5.4.8)*.*

Demostración. Fijamos $B \in \mathfrak{B}^0$. Ya que $U_\alpha a U_\alpha^* = (a \circ \alpha) I$ y $a \circ \alpha \in QC(\Gamma)$ junto con $a \in QC(\Gamma)$ en vista del Teorema 3.3.2 aplicado a la función de matriz diagonal siendo el coeficiente en $\Psi[(a \circ \alpha)I]$ (viendo que

$$\begin{aligned} &\Upsilon : L^p(\Gamma) \to L_N^p(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad (\Upsilon f)(r) = \left\{ r^{1/p} f\left(e^{i\beta_k} r\right) \right\}_{k=1}^N \quad (r \in \mathbb{R}_+), \\ &\Psi : \mathcal{B}(L^p(\Gamma)) \to \mathcal{B}(L_N^p(\mathbb{R}_+, d\mu)), \quad A \mapsto \Upsilon A \Upsilon^{-1}), \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

deducimos de (5.4.5) que B es de la forma (5.4.9). Así, solo necesitamos probar la desigualdad (5.4.10).

En primer lugar, por analogía con [5, Theorem 7.2], demostremos que

$$\|A_{k,\xi}^\pm\|_{\mathcal{B}(l^2)} \leq \|B + H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))} \tag{5.4.12}$$

para cada $H \in \mathfrak{H}^0$, cada $k = 1, 2, \ldots, N$ y cada $\xi \in \Omega_{k,arc}$. Fijando $H \in \mathfrak{H}^0$, lo cual implica que

$$B + H = A^+ P_+ + A^- P_- + H_0, \quad \text{con} \;\; H_0 = H_B + H \in \mathfrak{H}^0. \tag{5.4.13}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\Pi_n \in \mathcal{B}(l^2)$ el operador de multiplicación por la función característica del conjunto finito $F_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n\}$.

Fijamos $k = 1, 2, \ldots, N$, $w \in G_{k,arc}$, $\xi \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R}))$. Entonces

$$\|A_{k,\xi}^\pm\|_{\mathcal{B}(l^2)} = \liminf_{n \to \infty} \|\Pi_n A_{k,\xi}^\pm \Pi_n\|_{\mathcal{B}(l^2)}. \tag{5.4.14}$$

Elegimos un segmento $u \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\widetilde{t}_w \in u$ y los segmentos $\alpha_k^m(u)$ son subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}_+$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Sea $M_u(QC(\mathbb{R})) := \bigcup_{\tau \in u} M_\tau(QC(\mathbb{R}))$. Consideremos el espacio de Hilbert $l^2(F_n)$ consistente en las restricciones de funciones $f \in l^2$ hacia el conjunto $(2n+1)$-puntos F_n. Sea χ_n la función característica del conjunto

$\widetilde{u}_n = \gamma_k(u_n) \subset \Gamma_{k,arc}$, donde $u_n := \bigcup_{m=-n}^{n} \alpha_k^m(u) \subset \mathbb{R}_+$. Entonces $\chi_n H_0 \chi_n I \simeq 0$ en el espacio $L^2(\Gamma)$. Aplicando el isomorfismo isométrico

$$\sigma_n : L^2(\widetilde{u}_n) \to L^2_{2n+1}(u), \quad (\sigma_n \varphi)(t) = \big[(U_\alpha^m \varphi)(\gamma_k(t))\big]_{m=-n}^{n}, \quad t \in u,$$

inferimos de la forma (5.4.13) similarmente a [5, Theorem 7.2] que

$$\begin{aligned} \sigma_n \chi_n (B+H) \chi_n \sigma_n^{-1} &\simeq \sigma_n \big(\chi_n A^+ \chi_n P_+ \chi_n I + \chi_n A^- \chi_n P_- \chi_n I\big) \sigma_n^{-1} \\ &\simeq \widetilde{A}^+_{(n)} P_u^+ + \widetilde{A}^-_{(n)} P_u^- \in \mathcal{B}(L^2_{2n+1}(u)), \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

donde $P_u^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_u)$ y S_u está dado por (0.0.5) con Γ reemplazado por $u \subset \mathbb{R}_+$, y $\widetilde{A}^\pm_{(n)}$ son $(2n+1) \times (2n+1)$ funciones matriciales con entradas en $QC(\mathbb{R})|_u$ tal que $\widetilde{A}^\pm_{(n)}(x) := \big[(a^\pm_{s-m,k} \circ \alpha_k^m)(x)\big]_{m,s=-n}^{n}$ para $x \in u$. Entonces se sigue de manera similar a [9, Theorem 7.1 y a la sección 7.4] que los operadores $\widetilde{A}^\pm_{(n)} I$ son invertibles en el espacio $L^2_{2n+1}(u)$ si el operador $\widetilde{A}^+_{(n)} P_u^+ + \widetilde{A}^-_{(n)} P_u^-$ es Fredholm en este espacio. Esto implica que

$$\big\|\widetilde{A}^\pm_{(n)} I\big\|_{\mathcal{B}(L^2_{2n+1}(u))} \le \big|\widetilde{A}^+_{(n)} P_u^+ + \widetilde{A}^-_{(n)} P_u^-\big|. \tag{5.4.16}$$

Combinando (5.4.15) and (5.4.16), inferimos que

$$\big\|\widetilde{A}^\pm_{(n)} I\big\|_{\mathcal{B}(L^2_{2n+1}(u))} \le |\chi_n (B+H) \chi_n I| \le \|B+H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))}. \tag{5.4.17}$$

Por (5.4.17), para cada $\eta \in M_u(QC(\mathbb{R}))$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\big\|\Pi_n A^\pm_{k,\eta} \Pi_n\big\|_{\mathcal{B}(l^2)} \le \big\|\widetilde{A}^\pm_{(n)} I\big\|_{\mathcal{B}(L^2_{2n+1}(u))} \le \|B+H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))},$$

lo cual implica que

$$\|\Pi_n A^\pm_{k,\xi} \Pi_n\|_{\mathcal{B}(l^2)} \le \sup_{\eta \in M_u(QC(\mathbb{R}))} \|\Pi_n A^\pm_{k,\eta} \Pi_n\|_{\mathcal{B}(l^2)} \le \|B+H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))}. \tag{5.4.18}$$

Aplicando (5.4.14) and (5.4.18), inferimos que para cada $k = 1, 2, \dots, N$, cada $w \in G_{k,arc}$ y cada $\xi \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R})) \subset \Omega_{k,arc}$,

$$\|A^\pm_{k,\xi}\|_{\mathcal{B}(l^2)} = \liminf_{n \to \infty} \|\Pi_n A^\pm_{k,\xi} \Pi_n\|_{\mathcal{B}(l^2)} \le \|B+H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))},$$

lo cual implica (5.4.12) para todo $\xi \in \Omega_{k,arc}$ y todo $H \in \mathfrak{H}^0$. Entonces, por (5.4.12),

$$\max_{k=1,2,\dots,N} \sup_{\xi \in \Omega_{k,arc}} \big\|A^\pm_{k,\xi}\big\|_{\mathcal{B}(l^2)} \le \|B+H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))} \quad \text{para todo} \quad H \in \mathfrak{H}^0,$$

que nos da (5.4.10). $\square$

Sea $\widetilde{\mathfrak{A}}$ el C^*-álgebra de 2×2 matrices diagonales con entradas valoradas en $\mathfrak{A}$.

Teorema 5.4.1. *Cada operador $B \in \mathfrak{B}$ está representado de forma única en la forma*

$$B = A^+ P_+ + A^- P_- + H_B, \tag{5.4.19}$$

donde $A^\pm$ son operadores funcionales en la C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma)$ y $H_B \in \mathfrak{H}$. Además, el mapeo $B \mapsto \operatorname{diag}\{A^+, A^-\}$ es un C^*-álgebra homomorfismo de $\mathfrak{B}$ sobre $\widetilde{\mathfrak{A}}$, cuyo kernel es $\mathfrak{H}$, y

$$\|A^\pm\| \leq \operatorname{ínf}\left\{\|B + H\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))} : H \in \mathfrak{H}\right\} \leq |B| = \operatorname*{ínf}_{K \in \mathcal{K}(L^2(\Gamma))} ||B + K||_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))}. \tag{5.4.20}$$

Demostración. Fijamos $B \in \mathfrak{B}^0$ representado en la forma (5.4.9). Se observa, en vista de (5.4.10) que el mapeo $B \mapsto \operatorname{diag}\{A^+, A^-\}$ es un *-homomorfismo algebraico del álgebra no cerrada $\mathfrak{B}^0$ en $\widetilde{\mathfrak{A}}$, cuyo kernel es $\mathfrak{H}^0$. Este mapeo está dado en los generadores de $\mathfrak{B}$ por

$$aI \mapsto \operatorname{diag}\{aI, aI\}, \quad U_g \mapsto \operatorname{diag}\{U_g, U_g\}, \quad S_\Gamma \mapsto \operatorname{diag}\{I, -I\}.$$

Se sigue de [7, Theorem 5.2] adaptado al espacio $L^2(\Gamma)$ que, respectivamente

$$\|A^\pm\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))} = \operatorname*{máx}_{k=1,2,\dots,N} \sup_{\xi \in \Omega_{k,arc}} \left\|A^\pm_{k,\xi}\right\|_{\mathcal{B}(l^2)}. \tag{5.4.21}$$

Condición (5.4.20) para $B \in \mathfrak{B}^0$ se sigue de (5.4.21), Lema 5.4.1 y $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Por continuidad, (5.4.20) es válido para cualquier operador $B \in \mathfrak{B}$, lo que implica la unicidad de descomposición (5.4.19) para cualquier operador $B \in \mathfrak{B}$. □

5.5. Demostración del Teorema 5.1.3

La demostración de Teorema 5.1.3 se divide en las demostraciones de varios teoremas.

De acuerdo a [8, Section 4], con el C^*-álgebra $\mathfrak{B}$ dada por (5.4.1), asociamos el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}^\infty := \bigoplus_{w \in G_{arc}} \mathcal{H}^\infty_w, \tag{5.5.1}$$

donde los espacios de Hilbert $\mathcal{H}^\infty_w$ son dados por

$$\mathcal{H}^\infty_w := l^2(M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R})) \times \{\pm\infty\},\ l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)) \ \text{ para todo } \ w \in G_{arc}. \tag{5.5.2}$$

Consideremos ahora la representación Φ^∞ del C^*-álgebra $\mathfrak{B}$ en el espacio de Hilbert (5.5.1), definido para cada $B \in \mathfrak{B}$ por

$$\Phi^\infty(B) := \bigoplus_{w \in G_{arc}} \Phi_w^\infty(B), \tag{5.5.3}$$

donde Φ^∞ es la suma directa de C^*-álgebra homomorfismos

$$\Phi_w^\infty : \ \mathfrak{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_w^\infty), \quad B \mapsto \Phi_w^\infty(B) = \mathrm{Sym}_w^\infty(B) I \ \ (w \in G_{arc}), \tag{5.5.4}$$

definido inicialmente en los generadores aI, S_Γ y U_α^κ del C^*-álgebra $\mathfrak{B}$ para todo $a \in QC(\Gamma)$ y todo $\kappa \in \mathbb{Z}$ como sigue.

Si $w \in G_{arc}$, $t_w \in \Gamma_{arc}$ y $\widetilde{t}_w \in \mathbb{R}_+$, entonces $\Phi_w^\infty(B)$ son operadores de multiplicación por las funciones matriciales no finitas

$$\mathrm{Sym}_w^\infty(B) : M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R})) \times \{\pm\infty\} \to \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)) \tag{5.5.5}$$

cuyos valores en los puntos $(\xi, x) \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R})) \times \{\pm\infty\}$ definen operadores lineales acotados en el espacio $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ y se dan en los generadores de $\mathfrak{B}$ por

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{Sym}_w^\infty(aI)](\xi, x) := \mathrm{diag}\Big\{ \mathrm{diag}\big\{(a \circ \alpha^n \circ \lambda_w)(\xi), (a \circ \alpha^n \circ \lambda_w)(\xi)\big\}\Big\}_{n \in \mathbb{Z}},\\
&[\mathrm{Sym}_w^\infty(S_\Gamma)](\xi, x) := \mathrm{diag}\Big\{ \mathrm{diag}\{\tanh(\pi x), -\tanh(\pi x)\}\Big\}_{n \in \mathbb{Z}},\\
&[\mathrm{Sym}_w^\infty(U_\alpha^\kappa)](\xi, x) := \big(\mathrm{diag}\big\{\delta_{n,m-\kappa}, \delta_{n,m-\kappa}\big\}\big)_{n,m \in \mathbb{Z}},
\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

donde por cada $a \in QC(\Gamma)$ y cada $t_w \in \Gamma_{k,arc}$ con $k = 1, 2, \ldots, N$, la función $a \circ \alpha^n \circ \gamma_k$ pertenece a $QC(\mathbb{R}_+)$, $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker, y γ_k y λ_w están definidos por (5.4.2) y (5.4.3), respectivamente.

Aplicando el Teorema 5.4.1, establecemos el siguiente resultado por analogía con [8, Teorema 10.1] (ver también [8, Teorema 4.1]).

Teorema 5.5.1. *Sean una curva estrellada Γ y un corrimiento $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ satisfacen las condiciones de la Sección 3.1 donde α tiene solo dos puntos fijos 0 y ∞. Entonces por cada $w \in G_{arc}$ el mapeo $\Phi_w^\infty : \mathfrak{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_w^\infty)$ definido en los generadores de la C^*-álgebra $\mathfrak{B}$ por fórmulas (5.5.4)–(5.5.6) extiende a un homomorfismo C^*-álgebra Φ_w^∞ de $\mathfrak{B}$ en la C^*-álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_w^\infty)$ tal que*

$$\|\Phi_w^\infty(B)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_w^\infty)} \le |B| = \inf_{K \in \mathcal{K}(L^2(\Gamma))} \|B + K\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))} \ \ \textit{para todo} \ \ B \in \mathfrak{B}, \tag{5.5.7}$$

donde $\mathcal{H}_w^\infty$ está dado por (5.5.2), y $\ker \Phi_w^\infty \supset \mathcal{K}(L^2(\Gamma))$.

Demostración. Sea $w \in G_{arc}$. Se puede ver de (5.5.6) que para cada $w \in G_{arc}$ existe una matriz D_w tal que $D_w I \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2))$, D_w tiene exactamente una entrada distinta de cero en cada fila y cada columna, todas estas entradas son iguales 1, y la transformación de semejanza $\mathrm{Sym}_w^\infty(B) \mapsto D_w \mathrm{Sym}_w^\infty(B) D_w^{-1} := (A_{i,j})_{i,j=1}^2$ cambia las posiciones de filas y columnas envía entradas diagonales impares en $A_{1,1}$ e incluye entradas diagonales pares en $A_{2,2}$. Entonces para cualquier operador $B \in \mathfrak{B}^0$ representando en la forma $B = A^+ P_+ + A^- P_- + H_B$ por el Lema 5.4.1, cada $k = 1, 2, \dots, N$, cada $w \in G_{k,arc}$ y cada punto $\xi \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R}))$, inferimos de (5.5.6) que

$$\begin{aligned} D_w([\mathrm{Sym}_w^\infty(B)](\xi, +\infty)) D_w^{-1} I &= \mathrm{diag}\{A_{k,\xi}^+, A_{k,\xi}^-\}, \\ D_w([\mathrm{Sym}_w^\infty(B)](\xi, -\infty)) D_w^{-1} I &= \mathrm{diag}\{A_{k,\xi}^-, A_{k,\xi}^+\}. \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Aplicando (5.4.21) y la estimación (5.4.20), deducimos de (5.5.8) que

$$\begin{aligned} \big\|[\mathrm{Sym}_w^\infty(B)](\xi, +\infty)\big\|_{\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2))} &\le \text{máx}\left\{\|A^\pm\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))}\right\} \le |B|, \\ \big\|[\mathrm{Sym}_w^\infty(B)](\xi, -\infty)\big\|_{\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2))} &\le \text{máx}\left\{\|A^\pm\|_{\mathcal{B}(L^2(\Gamma))}\right\} \le |B|. \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Por (5.5.9), los *-homomorfismos algebraicos $\Psi_w^\infty : \mathfrak{B}^0 \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_w^\infty)$ se extienden por continuidad a todo la C^*-álgebra $\mathfrak{B}$, y los *-homomorfismos $\Psi_w^\infty : \mathfrak{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_w^\infty)$ satisfacen (5.5.7) para todo $w \in G_{arc}$. □

Armado por el Teorema 5.5.1 y aplicando los C^*-álgebra homomorfismos de Φ_w^∞ dados por (5.5.4)–(5.5.6), inmediatamente obtenemos la siguiente condición necesaria de Fredholm por analogía con [8, Theorem 4.2(iv)].

Teorema 5.5.2. *Bajo las condiciones del Teorema 5.5.1, si un operador $B \in \mathfrak{B}$ es Fredholm en el espacio $L^2(\Gamma)$, entonces el operador $\Phi^\infty(B)$ definido por* (5.5.3)–(5.5.6) *es invertible en el espacio $\mathcal{H}^\infty$ dado por* (5.5.1)–(5.5.2)*, es decir, para cada $w \in G_{arc}$ y cada $(\xi, x) \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R})) \times \{\pm\infty\}$, el operador $[\mathrm{Sym}_w^\infty(B)](\xi, x)I$ es invertible en el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ y*

$$\sup_{w \in G_{arc}} \sup_{(\xi,x) \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R})) \times \{\pm\infty\}} \left\| \left([\mathrm{Sym}_w^\infty(B)](\xi, x) I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2))} < \infty.$$

De acuerdo con la Sección 5.1, para probar el Teorema 5.1.3, resta obtener la siguiente afirmación sobre la base del Teorema 5.5.2.

Teorema 5.5.3. *Si el operador Y definido por* (5.1.5) *es Fredholm en el espacio $L^2(\Gamma)$, entonces los operadores funcionales $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ son invertibles en el espacio $L^2(\Gamma)$.*

Demostración. Para cada $k = 1, 2, \ldots, N$, cada punto $t \in \Gamma_{k,arc}$ y cada $\xi \in M_{\gamma_k^{-1}(t)}(QC(\mathbb{R}))$, consideremos el operador discreto

$$A_{k,\xi}^{\pm} = a_{k,\xi}^{\pm} I - b_{k,\xi}^{\pm} V \in \mathcal{B}(l^2), \tag{5.5.10}$$

donde las funciones $a_{k,\xi}^{\pm}, b_{k,\xi}^{\pm} \in l^\infty$ están dadas por

$$a_{k,\xi}^{\pm}(n) = (a_{\pm,k} \circ \alpha_k^n)(\xi), \quad b_{k,\xi}^{\pm}(n) = (\widehat{b}_{\pm,k} \circ \alpha_k^n)(\xi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$\widehat{b}_{\pm,k} := b_{\pm,k}(\alpha_k')^{-1/2}$, and $a_{\pm,k}(r) = a_{\pm}(e^{i\beta_k} r)$, $b_{\pm,k}(r) = b_{\pm}(e^{i\beta_k} r)$ and $\alpha_k(r) := e^{-i\beta_k}\alpha(e^{i\beta_k} r)$ for $r \in \mathbb{R}_+$ and $k = 1, 2, \ldots, N$.

Por (5.5.6), para $w \in G_{arc}$ y Y definido por (5.1.5), el operador $\Phi_w^\infty(Y) = \mathrm{Sym}_w^\infty(Y)I$ está dado por la siguiente función matricial infinita: si $t_w \in \Gamma_{k,arc}$ para $k = 1, 2, \ldots, N$ y $\xi \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R}))$, entonces

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Sym}_w^\infty(Y)](\xi, +\infty) &= \Big(\operatorname{diag}\big\{(a_k^+ \circ \alpha_k^n)(\xi), (a_k^- \circ \alpha_k^n)(\xi)\big\}\delta_{n,m}\Big)_{n,m\in\mathbb{Z}} \\
&\quad + \Big(\operatorname{diag}\big\{(\widehat{b}_k^+ \circ \alpha_k^n)(\xi), (\widehat{b}_k^- \circ \alpha_k^n)(\xi)\big\}\delta_{n,m-1}\Big)_{n,m\in\mathbb{Z}}, \\
[\mathrm{Sym}_w^\infty(Y)](\xi, -\infty) &= \Big(\operatorname{diag}\big\{(a_k^- \circ \alpha_k^n)(\xi), (a_k^+ \circ \alpha_k^n)(\xi)\big\}\delta_{n,m}\Big)_{n,m\in\mathbb{Z}} \\
&\quad + \Big(\operatorname{diag}\big\{(\widehat{b}_k^- \circ \alpha_k^n)(\xi), (\widehat{b}_k^+ \circ \alpha_k^n)(\xi)\big\}\delta_{n,m-1}\Big)_{n,m\in\mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Entonces para $k = 1, 2, \ldots, N$, $t_w \in \Gamma_{k,arc}$ y $\xi \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R}))$, inferimos que los operadores $[\mathrm{Sym}_w^\infty(Y)](\xi, \pm\infty)I$ son invertibles en el espacio $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ si y solo si los operadores discretos $A_{k,\xi}^{\pm}$ dados por (5.5.10) son invertibles en el espacio $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, si el operador Y es Fredholm en el espacio $L^2(\Gamma)$, entonces deducimos del Teorema 5.5.2 que los operadores discretos $A_{k,\xi}^{\pm}$ son invertibles en el espacio l^2 para cada $k = 1, 2, \ldots, N$, cada $w \in G_{arc}$ con $t_w \in \Gamma_{k,arc}$, y cada $\xi \in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R}))$, y

$$\sup_{w\in G_{k,arc}} \sup_{\xi\in M_{\widetilde{t}_w}(QC(\mathbb{R}))} \big\|\big(A_{k,\xi}^{\pm}\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{B}(l^2)} < \infty.$$

Por lo tanto, por analogía con [7, Teorema 5.2(ii)], los operadores $A_{\pm,k} = a_{\pm,k}I - b_{\pm,k}V_{\alpha_k}$ son invertibles en los espacios $L^2(\Gamma_k)$ para todos los $k = 1, 2, \ldots, N$. Esto implica la invertibilidad de ambos operadores $A_\pm = a_\pm I - b_\pm V_\alpha$ en el espacio $L^2(\Gamma)$ para el operador de Fredholm $Y \in \mathcal{B}(L^2(\Gamma))$. $\square$

Finalmente, combinando el Teorema 5.5.3 y el Teorema 5.1.2 en el caso de $p = 2$, completamos la demostración del Teorema 5.1.3. $\square$

Bibliografía

[1] A.V. Aizenshtat, Yu. I. Karlovich, and G. S. Litvinchuk, The method of conformal gluing for Haseman boundary value problem on an open contour. Complex Variables 28 (1996), 313-346.

[2] A.B. Antonevich, *Linear Functional Equations. Operator Approach*, Oper. Theory Adv. Appl., 83, Birkhäuser, Basel, 1996, Russian original: University Press, Minsk, 1988.

[3] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional Differential Equations: I. C^*-Theory*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 70, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.

[4] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, *Spectral measures in C^*-algebras of singular integral operators with shifts*, J. Funct. Anal. **242** (2007), 86–126.

[5] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, *A C^*-algebra of singular integral operators with shifts admitting distinct fixed points*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014), 502–524.

[6] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, *A C^*-algebra of singular integral operators with shifts and piecewise quasicontinuous coefficients*, Operator Theory, Operator Algebras, and Matrix Theory, 25–64, Oper. Theory Adv. Appl., 267, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.

[7] M. A. Bastos, C. A. Fernandes, and Yu. I. Karlovich, Invertibility criteria in C^*-algebras of functional operators with shifts and PQC coefficients. Integr. Equ. Oper. Theory 91 (2019), 91:19.

[8] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, *On C^*-algebras of singular integral operators with PQC coefficients and shifts with fixed points*, Complex Variables and Elliptic Equations **67** (2021), no. 3, 581–614.

[9] A. Böttcher, S. Roch, B. Silbermann, I.M. Spitkovsky, *A Gohberg-Krupnik-Sarason symbol calculus for algebras of Toeplitz, Hankel, Cauchy, and Carleman operators*, Topics in Operator Theory. Ernst D. Hellinger Memorial Volume, 189–234, Oper. Theory Adv. Appl., 48, Birkhäuser, Basel, 1990.

[10] A. Böttcher and Yu. I. Karlovich, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators. Progress in Mathematics 154, Birkhäuser, Basel, 1997.

[11] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, and Silbermann, B.: Singular integral equations with PQC coefficients and freely transformed argument. Math. Nachr. 166, 113-133 (1994).

[12] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, I.M. Spitkovsky, *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, Birkhäuser, Basel, 2002.

[13] A. Böttcher and B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators. 2nd edition, Springer, Berlin, 2006.

[14] P.L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, 1970.

[15] F. D. Gakhov, Boundary value problems. English transl.: Perganion Press: Oxford, 1966.

[16] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions. Academic Press, New York, 1981.

[17] I. Gohberg and N. Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, I. Introduction, Birkhäuser, Basel, 1992.

[18] I. Gohberg and N. Krupnik, One-Diemnsional Linear Singular Integral Equations, Volume II General theory and applications, Birkhäuser, Basel, 1992.

[19] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, Invertibility in Banach algebras of functional operators with non-Carleman shifts, in: Ukrainian Mathematical Congress-2001, Kiev, Ukraine, August 21-23, 2001, Proceedings, Section 11, Functional Analysis, Kyïv, Instytut Matematyky NAN Ukraïny, 2002, pp. 107-124.

[20] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, and A. B. Lebre, Sufficients conditions for Fredholmness of singular integral operators with shifts and slowly oscillating data. Integr. Equ. Oper. Theory 70 (2011), 451-483.

[21] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, and A. B. Lebre, Necessary conditions for Fredholmness of singular integral operators with shifts and slowly oscillating data. Integr. Equ. Oper. Theory 71 (2011), 29-53.

[22] A. Yu. Karlovich, Yu. I. Karlovich, and A. B. Lebre, On a weighted singular integral operator with shifts and slowly oscillating data, Complex Anal. Oper. Theory 10 (2016) 1101-1131.

[23] Yu.I. Karlovich, *A local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^*-algebras*, Modern Operator Theory and Applications. The Igor Borisovich Simonenko Anniversary Volume, 137–166, Oper. Theory Adv. Appl., 170, Birkhäuser, Basel, 2007.

[24] Yu. I. Karlovich, On the Haseman problem. Demonstratio Mathematica 26 (1993). No. 3-4, 581-595.

[25] Yu. Karlovich, *Algebras of Mellin pseudodifferential operators with quasicontinuous symbols*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **13** (2022), 13:18, 36pp. Published online: 04 April 2022. https://doi.org/10.1007/s11868-022-00448-9.

[26] Yu. I. Karlovich, An algebra of pseudodifferential operators with slowly oscillating symbols. Proc. London Math. Soc. 92 (2006), 713-761.

[27] Yu. I. Karlovich, Algebras of pseudo-differential operators with discontinuous symbols, in: J. Toft, M. W. Wong, H. Zhu (Eds.), Modern Trends in Pseudo-differential Operators, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 172, Birkhäuser, Basel, 2007, pp. 207-233.

[28] Yu. I. Karlovich, The Haseman boundary value problem with slowly oscillating data. In: "Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2006", Eds. A.A. Kilbas, S.V. Rogozin, Cambridge Scientific Publishers, 2008, pp. 81-110.

[29] Yu. I. Karlovich, The Haseman boundary value problem with slowly oscillating coefficients and shift, in D.A. Bini, T. Ehrhardt, A.Yu. Karlovich, I. Spitkovsky (eds), Large Truncated Toeplitz Matrices, Toeplitz Operators, and Related Topics. the Albrecht Böttcher Aniversary Volume, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 259, Birkhäuser/ Springer, Basel, 2017, p. 463-500.

[30] Yu. I. Karlovich, On Mellin pseudodifferential operators with quasicontinuous symbols, Math. Meth. Appl. Sci., Special issue paper, 44-(2021), 9782-9816.

[31] Yu. I. Karlovich and V. G. Kravchenko, An algebra of singular integral operators with piecewise-continuous coefficients and a piecewise-smooth shift on a composite contour. Math. USSR Izvestiya 23 (1984), 307-352.

[32] Yu. I. Karlovich, and I. Loreto Hernández, On convolution type operators with piecewise slowly oscillating data. In: Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics. The Vladimir Rabinovich Anniversary Volume. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 228, pp. 185-207. Birkäuser/Springer, Basel (2013).

[33] Yu. I. Karlovich and J. Rosales Méndez, The Haseman boundary value problem with quasicontinuous coefficients and shifts, Complex Analysis and Operator Theory 16 (2022) 16:68, 28pp., https://doi.org/10.1007/s11785-022-01245-4.

[34] Yu. I. Karlovich and J. Rosales Mndez, On Singular Integral Operators with Shifts. in: M.S. Moslehian (Ed.) Matrix and Operator Equations and Applications, pp. 489-523. Mathematics online First Collection. Springer, Cham, 2023.

[35] V. G. Kravchenko and G. S. Litvinchuck, Introduction to the theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[36] G. S. Litvinchuk, Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift. Nauka, Moscow, 1997 [Russian].

[37] G. S. Litvinchuk, Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift. Mathematics and Its Applications , 523, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[38] V. S. Rabinovich, Algebras of singular integral operators on compound contours with nodes that are logaritmic whirl points. Izv. Math. 60 (1996), 1261-1292.

[39] V. S. Rabinovich, S. Roch, and B. Silbermann, Limit Operators and Their Applications in Operator Theory. Birkhäuser, Basel, 2004.

[40] S. Roch, P. A. Santos and B. Silbermann, Non-commutative Gelfrand Theories. A Tool-kit for Operator Theorists and Numerical Analysts. Springer, London, 2011.

[41] J. Rosales. Problema de Frontera de Haseman. tesis de Licenciatura. Febrero 2017.

[42] D. Sarason, Functions of vanishing mean oscillation. Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 391-405.

[43] D. Sarason, Toeplitz operators with piecewise quasicontinuous symbols. Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 817-838.

[44] I. Ya. Shneĭberg, On the solvability of linear equations in interpolation families of Banach spaces, Sov. Math., Dokl. 14 (2014) 1328-1332.

[45] I. N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, 1962.

Cuernavaca, Mor., a 20 de mayo de 2024

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS
P r e s e n t e

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: "PROBLEMA DE FRONTERA DE HASEMAN CON COEFICIENTES CUASICONTINUOS A TROZOS", que presenta la alumna M. en C. Jennyffer Rosales Méndez (10009567) para obtener el título de Doctorado en Ciencias.

Director de tesis: Dr. Yuriy Karlovych
Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Salvador Pérez Esteva UCIM	APROBADO	
Dr. Daniel Antonio Rivera López CInC- UAEM	APROBADO	
Dr. Yuriy Karlovych CInC- UAEM	APROBADO	
Dr. Slaviša Djordjević BUAP	APROBADO	
Dr. Gennadiy Burlak CIICAp - UAEM	APROBADO	

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

YURIY KARLOVYCH | Fecha:2024-05-20 14:53:04 | FIRMANTE
rRP+84yw5WI7ypGUExbDUFg5W6IwKCA4Pjk/xyN+7MK1UIivuOd3c2SB5x9AJm5VPl22XleM2WWwxX8OrSl0tDHEsJx9gf1lTT0LiJbRCnZ0KJvWKi0bcEWMj1Ofr4JlGKzfrAdZ3hYfDQrOzsEJPHiUg78atZ195TMhGnM6f3FKzc/x367oUCWnOMYop2R/IGRMBQFe6EPcQ6/XXkpLn3ObAnjZNP3jDi3nreTGYBJsvCD5yj2kgR+qLPYOmwpzadPaJVQCJ+twIZPYbprHUxQ7gJ2dLcQ9xg2RGwC1b4AwgtI/MZUiD0SZoVdrZMCPOqFo8neq43YysiAIU6+NZw==

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2024-05-20 14:54:06 | FIRMANTE
Sqjtb8ljhQ15CGXB9wFQBSZ7GIRyD0LmTppz/FvXtd9N7YhgWPM9jNWtmAYSlAVUK1lzi/cn5a9mksDnCKW1z4uYCZeFtWr3K190JQ4eaaj7iq8BQCeAuR6mXDm5IseN4OfcUU+RWygbj+3x5QqaTeXanrnU5vu4kSM8xc16pITpYhqHyKwzhoVhInCv7d8ZvOjeHs1BWWQg5/uME7VbigDj62uPoKpMNchuK/ZKzdEFch0E3Ep5ZNLierhh2jtcDGMohzBEYt9dsXkd2LMbRmAAcOIBBo5VV16+IzOUH9/WCw+yslsjZCMmws/7Iov+ZdKHwsZsvE6tBWUlXy5yuw==

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2024-05-20 15:14:26 | FIRMANTE
m4GErIWiOueaByKHyJwKubdOPyFLLzH/tGjgAnfSZav+t0fPJptX9SSjJAqCsCRFerd+uFXxCfcHQnraEJxDfNHhSbrA5C1X9pINFSIlJQCnr5zqkiIc4vT5k+CMOtZssV6A/tAEeN3kIwAd4R7Cz8VWCk1YD5yK4qayb//lwGKr9Pf1x2K40b6gwFh0k4gpKcvsEPXKPUJkmylE68U/pIaTZzpzVnuzLxw1jtT+XA8/7x55/FQlkTkU2jydS6YzZCWiRdLCbpflvGdqgsOo/AMia3ulpi6N/FIfOF3HJEwl1sS9VtaW/UIGP0yxhI+38NUpo/aAYplFJ1R2G8KhTQ==

GENNADIY BURLAK | Fecha:2024-05-20 16:09:44 | FIRMANTE
HLkKiZNdQC6cyeDsOmWwc+R9lMz58Eim3MaqtkiPTIYHqHqof7vjrLxIdVit1T3zLSUCB178FfFWy+Rc0aWtYpjlnNoyhx16tuXYuSOvCf+68jWTvoxrAQUPL5ysL/5d9kdF6SVeZU5a1ziQ+GNCSEXHJTf7J5FgbNz9AgpIGlWBCHXWSZuG2kbqchvjLLaO4zf6q0daFL5ZqDwyfHhDeoNZIeHY5xW3fDFrfeVuVZpM2p/YQ0qO7Ss9ZIN5YvyWF8HzeP7K6NJ9VH1ae07GO5RVlw4OOYw7/HpvkJKtQsW0LV5IXQ8s34AFpt1v1uE9sd210moa5eofo8aD9B6oWg==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2024-05-20 19:35:41 | FIRMANTE
ng+BDmlwI3mREL++xkKxjgI/4zDDM3gSy0ho0iNqSX5LJGLJJsNVLqytck/91pSRkbWOVNCoziPA3LWcFDxErsCwI0QekMr0rJwoZLNDcIrRj6PdXnGcccIEbhJxRFo4OXWhXFpAE0BokQEH8Se4b0x/40mcEVXFUhLp4xA0bVPzNMvZANRxb2wbYykor/wVs0AyxxqFiyAtOwf5tEQGURvESeLscXcKL+SrTseM2UmiRdm6/rh0CVosYB6pKF9m9FmOaJLucrp4LpDrQArZvruAZsMZ7X9fPBDZH+zl0DecQLqzPQ+LnAAt0Nd+GhAD931xXemKC6pvoIZpEy8doQ==

SLAVISA DJORDJEVIC | Fecha:2024-05-21 10:56:22 | FIRMANTE
m8kqF7cXSk/5v4X1aW0TSjAqftfoWJxiQbeoT++PqP5v17eJnsbJULbH0YF7jlCOzwJ1tWkaDrAOouScZNp8PB7RL/oS/9wq3JMILrI8+DT3BnzmSt8WCmi8ky+0zABxg2z9hQ81LLr5zhex0BJu1jFUoDgMLvLsQR9dOMhxkn8pWdjizLzeqXYKyOCoGoPrnw29PowVVwFgk98kyKhpiqUErQm4g00/SNYpDUE/G3d5aglxBlKnX31EIAzBUa482wWKi/s6C7tNlwOPF5tQLvJkKekPi2uQ8NmiVxxUt6UBJxFy5nLRXbOPYIOC52K7dCqT0U9F8Y7CFwNtz6QU3Q==

SALVADOR PÉREZ ESTEVA | Fecha:2024-05-22 15:43:46 | FIRMANTE
lYCKGhFGZuiyf2gR3SyYV5c428ed4yWRAJ80cZ1HMnpL8zu060o8GV0pp2uVfZROR6FcAg1Vcb7rRvwo4mpYV5QSnGhT+emLU2ySgfxVeW5S2v4ElEXJBn9y5ReAYvT1fcqGPKhD9ua/niIliYciB3WRnMtdfiXZaqjOUioonSFtUSUjvAy4tn1v5z9E53NmMU4R6WBljiUtAE7elDOLmVGVeGxkfKlvrQXs4pX/CmHkqsTeDJUNIQrPcVz9k25M8BCY8XVfuIa1+UtJFq6IvbbxnQ9kvRgQR1e7Q7TH8t/+sY2rNhdsQkXIevC4m/3UwatUnzkMZ5t/Gg4/SFGX7Q==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:

y7CzGr5sg

https://efirma.uaem.mx/noRepudio/gph7PBROanjfaNZGDaoIgv3lR3LqkdNv