



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Espacios de polinomios homogéneos de Onda-Dirac

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS ÁREA TERMINAL EN
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

YATZIRY AMAIRANI PORCAYO ESTRADA

TUTOR:

DR. EMILIO MARMOLEJO OLEA

Cuernavaca, Morelos, 2023



Índice general

Introducción	2
1 Problema de valores iniciales para la ecuación de onda	4
§1.1 Ecuación de onda	4
§1.2 Problema de valores iniciales para la ecuación de onda	5
§1.3 Dominio de dependencia y rango de influencia	7
§1.4 Fórmula de Kirchoff	8
2 Espacio de polinomios homogéneos de onda.	10
§2.1 Polinomios homogéneos que satisfacen la ecuación de onda	11
§2.2 Grupo de permutaciones S_k	12
3 Cuaterniones y Álgebras de Clifford	15
§3.1 Cuaterniones	15
§3.2 Álgebras de Clifford	17
4 Operador de Dirac y Álgebras de Clifford con signo	20
§4.1 Operador de Dirac	20
§4.2 Álgebras de Clifford con signo $Cl(1, n)$	21
§4.3 Operador de Dirac de Onda	24
§4.4 Problema de valores iniciales para la ecuación de Dirac de onda	26
§4.5 Espacios de polinomios de onda-monogénica	29

Introducción

Toda función holomorfa es una función armónica con valores complejos, podríamos decir que las propiedades de las funciones holomorfas son un refinamiento de las propiedades de las funciones armónicas. El objetivo del presente trabajo consiste en estudiar esta analogía para el caso del operador de onda y el operador parabólico de Dirac o también llamado operador de Dirac de onda, cuando las funciones tengan valores en un álgebra de Clifford, concretamente se estudiará el espacio de polinomios homogéneos de grado k definidos sobre un álgebra de Clifford con signo, los cuales satisfacen el operador de Dirac de onda en dimensiones bajas, con el objetivo de construir una base para este espacio de polinomios.

El presente trabajo consta de 4 capítulos, los cuales se dividen de la siguiente manera, en el primer capítulo definimos la ecuación de onda y presentamos la solución al problema de valor iniciales para esta ecuación, también se mostrarán algunas de sus propiedades, cabe mencionar que en este trabajo hemos puesto mucho énfasis en mostrar parte de la teoría general con ejemplos.

En el segundo capítulo se habla de la construcción de una base para los polinomios homogéneos, además estudiamos el espacio de polinomios homogéneos que satisfacen la ecuación de onda, asimismo presentamos una construcción sencilla para la base de este espacio vectorial, también recordamos el grupo de permutaciones S_k y mostramos algunos ejemplos.

En el capítulo tres iniciamos motivando de manera histórica la definición y las propiedades de los cuaterniones, descubiertos en 1843 por el matemático Sir William Rowan Hamilton. Posteriormente hablamos sobre las álgebras descubiertas por William Kingdon Clifford matemático y filósofo inglés. Construiremos estas álgebras a partir de las relaciones que la definen, daremos algunos ejemplos concretos en dimensiones bajas. Asimismo, observaremos algunas de las propiedades algebraicas y geométricas que poseen estas álgebras.

Finalmente, en el capítulo cuatro realizaremos análisis en álgebras de Clifford. Iniciamos introduciendo el análisis de Clifford a través del operador Dirac que factoriza el laplaciano, es importante mencionar que para este trabajo estamos interesados en una variante que factoriza el operador de onda. Para ello primero hablaremos de las álgebras de Clifford con signo y después el operador de Dirac de onda que factoriza al operador de onda. Enseguida estudiamos el problema de valores iniciales para el operador de Dirac de onda en una dimensión. En la parte medular de este trabajo adaptamos la construcción de los polinomios de Fueter que nos da la base de los polinomios homogéneos de grado k definidos sobre el álgebra de Clifford con signo, que satisfacen el operador de Dirac de onda, el obstáculo principal al que nos enfrentamos para encontrar esta base fue la no conmutatividad.

Capítulo 1

Problema de valores iniciales para la ecuación de onda

En este capítulo estudiaremos la ecuación unidimensional de onda y el problema de valores iniciales para dicha ecuación, así como también algunas propiedades importantes de sus soluciones como por ejemplo el dominio de dependencia y el rango de influencia, para estudiar estas propiedades seguimos el libro de *Strauss* [9].

La ecuación de onda en una dimensión permite calcular la elongación de la onda en una posición determinada, en un instante de tiempo concreto y representa la propagación de vibraciones a lo largo de una única dirección en una cuerda, en dos dimensiones muestra la propagación de ondas en la superficie del agua con poca profundidad y en tres dimensiones describe la propagación de ondas acústicas y ondas sonoras.

1.1. Ecuación de onda

La ecuación de onda clásica en una dimensión es una ecuación diferencial parcial lineal que nos dice como el desplazamiento puede cambiar en función de la posición y el tiempo.

Antes de escribir la ecuación de onda identificaremos \mathbb{R}^{n+1} con $\{(x, t) | x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ y consideremos una función real, suave $u(x, t)$, usaremos la siguiente notación para referirnos a las derivadas parciales de $u(x, t)$: $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\partial_t u$, $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $\partial_j u$.

Escribimos la ecuación de onda en n dimensiones como

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \Delta u(x, t)$$

ó

$$u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t)$$

donde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ con $t \geq 0$,

y el laplaciano en \mathbb{R}^n es

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

El operador de onda o también llamado operador D'Alembertiano, suele representarse de la siguiente manera

$$\square := \partial_{tt} - \Delta.$$

1.2. Problema de valores iniciales para la ecuación de onda

El problema de valores iniciales para la ecuación de onda se enuncia de la siguiente manera.

Dadas las funciones suaves φ, ψ , definidas en \mathbb{R}^n , buscamos una función $u(x, t)$ tal que $u_{tt} = \Delta u$ satisfaga los siguientes valores iniciales,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{dato inicial,}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{velocidad inicial.}$$

Primero estudiaremos el caso $n = 1$, donde la solución al problema de valores iniciales está dada por el siguiente resultado.

Proposición (Fórmula de D'Alembert)

Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ y $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, entonces la solución al problema con valores iniciales,

$$\partial_t^2 u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{y} \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

está dada por,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds.$$

Demostración.

Para encontrar la solución general de la ecuación de onda, vamos a integrar la ecuación de onda unidimensional

$$\partial_t^2 u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t).$$

Primero vamos a realizar el siguiente cambio de variable

$$\xi = x - t \quad y \quad \eta = x + t$$

sustituyendo las nuevas variables en (1.1) tenemos

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u \partial \xi}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial u \partial \eta}{\partial \eta \partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial^2 u \partial \xi}{\partial \xi^2 \partial x}.$$

De aquí se sigue que para cualesquiera f y g funciones reales C^2 -arbitrarias, $u(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$ es solución de la ecuación de onda.

Para resolver la ecuación de onda $u_{tt} = u_{xx}$, para $x \in \mathbb{R}$ con las condiciones iniciales $u(x, 0) = \varphi(x)$ y $u_t(x, 0) = \psi(x)$, donde φ y ψ son funciones arbitrarias de x , usaremos lo anterior ya que cualquier solución de la ecuación de onda es de la forma

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t). \tag{1.3}$$

Si tomamos el valor cuando $t = 0$ obtenemos,

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) \tag{1.4}$$

derivando la ecuación (1.3) respecto de t y evaluando con $t = 0$, obtenemos

$$\psi(x) = f'(x) - g'(x) \tag{1.5}$$

luego, consideremos (1.4) y (1.5) como ecuaciones para las funciones reales desconocidas $f(x)$ y $g(x)$.

Derivando la función (1.4) tenemos que

$$\varphi'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{1.6}$$

ahora vamos a sumar y restar (1.5) y (1.6) así tenemos el siguiente resultado,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\varphi'(x) + \psi(x)) \quad y \quad g'(x) = \frac{1}{2}(\varphi'(x) - \psi(x)) \tag{1.7}$$

integrando (1.7) de 0 a s obtenemos

$$f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2} \int_0^s \psi(x)dx + A \quad y \quad g(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2} \int_0^s \psi(x)dx + B \quad (1.8)$$

donde $A = f(0) - \frac{1}{2}\varphi(0)$ y $B = g(0) - \frac{1}{2}\varphi(0)$ son constantes y debido a (1.4) $A + B = 0$, de esto se sigue el valor de f y g en (1.3), y sustituyendo $s = x + t$ en f y $s = x - t$ en g obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x + t) + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \psi(s)ds + \frac{1}{2}\varphi(x - t) - \frac{1}{2} \int_0^{x-t} \psi(s)ds$$

simplificando,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + t) + \varphi(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds. \quad (1.9)$$

■

Esta fórmula de la solución para el problema de valores iniciales fue enunciada, en 1747 por el matemático y filósofo francés Jean le Rond D'Alembert.

Ejemplo 1.

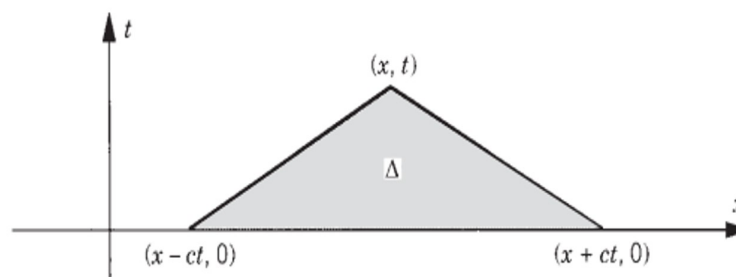
Sean $\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) = \cos(x)$, dado de que el dato inicial es 0, entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos(s)ds = \frac{1}{2}[\sen(x + t) - \sen(x - t)] = \cos(x)\sen(t).$$

Cabe mencionar que basta considerar los casos cuando $\varphi(x) = 0$ ó $\psi(x) = 0$, pues la solución general es la suma de las dos soluciones donde cada componente de la suma es solución de la ecuación.

1.3. Dominio de dependencia y rango de influencia

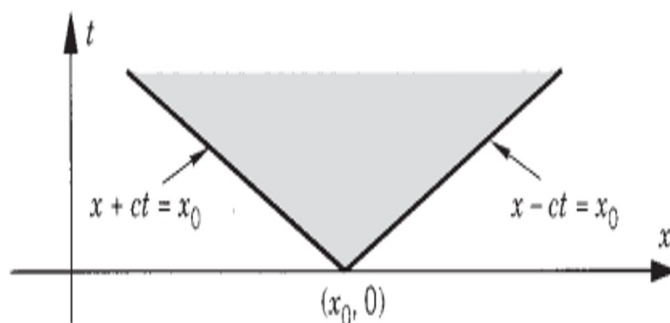
La fórmula de D'Alembert muestra que el valor de la solución de u en el punto (x_0, t_0) depende solamente de los valores de $\varphi(x)$ en los puntos $(x_0 - t_0)$ y $(x_0 + t_0)$ y de los valores de $\psi(x)$ sobre todo el intervalo $(x_0 - t_0, x_0 + t_0)$, a este intervalo se le llama **dominio de dependencia** de $u(x_0, t_0)$.



Dominio de dependencia.

Es importante mencionar que nosotros consideramos $c = 1$.

Desde una perspectiva diferente, los valores de $\varphi(x_0)$ en un punto t_0 influyen en la solución de u en todos los puntos del cono invertido $\{(x, t) \mid |x - t_0| \leq x_0\}$ que se llama **rango de influencia** de t_0 .



Rango de influencia.

Nuevamente consideramos $c = 1$.

1.4. Fórmula de Kirchoff

Ahora observemos que la solución al problema de valores iniciales cuando $n = 3$, está dada por el siguiente resultado.

Teorema (Fórmula de Kirchoff)

Sean $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Entonces, la solución al problema de valores iniciales para $u_{tt} = \Delta u$ con datos iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$\partial_t u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

esta dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \psi(y) ds(y) + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \varphi(y) ds(y) \right).$$

La fórmula de Kirchoff nos dice que integremos los datos iniciales sobre las esferas con centro en x y radio t . La demostración de este resultado se puede consultar en el libro de **Strauss** [9].

En general dados los valores iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, calcular $u(x, t)$ no es sencillo pero en el caso cuando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sean polinomios resulta más práctico usar otro método, el cual será mencionado en el capítulo 2. Asimismo las propiedades análogas de dominio de dependencia y rango de influencia también son válidas en dimensión 3.

La solución al problema de valores iniciales en la dimensión 2 se sigue de la solución en dimensión 3, en este caso lo que hacemos es tomar $x_3 = 0$, así la solución al problema de valores iniciales para cualquier $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, se escribe de la siguiente manera,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} \frac{t\varphi(y) + t\nabla\varphi(y)(y-x) + t^2\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy.$$

Notamos que $u(x, t)$ depende de los valores iniciales φ y ψ en el disco sólido $B(x, t)$. Este resultado se puede consultar en el libro de **Han** [5]. De la misma manera que en los casos anteriores las propiedades como el dominio de dependencia y el rango de influencia son válidos cuando $n = 2$.

Capítulo 2

Espacio de polinomios homogéneos de onda.

Los polinomios son objetos muy utilizados en matemáticas. En la práctica, son utilizados en cálculo y análisis matemático para aproximar cualquier función derivable; las ecuaciones y las funciones polinómicas tienen aplicaciones en una gran variedad de problemas, desde la matemática elemental hasta áreas como la física, química, economía y las ciencias sociales.

En este capítulo estudiaremos espacios vectoriales de polinomios y principalmente aquellos que satisfacen la ecuación de onda, así como también daremos un vistazo al grupo de permutaciones con ejemplos, en esta sección vamos a tomar de referencia el libro de **Axler** [2].

Definición

Sea k un entero y sea $p(x)$ un polinomio real definido en \mathbb{R}^n , decimos que $p(x)$ es homogéneo de grado k si para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda x) = \lambda^k p(x)$.

Sea $P_k(\mathbb{R}^n)$ el espacio de polinomios homogéneos de grado k en \mathbb{R}^n , es decir

$$P_k(\mathbb{R}^n) = \left\{ p(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_k x^\alpha \mid a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}$.

No es difícil ver que $P_k(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

A continuación se muestran algunos ejemplos de bases para $P_k(\mathbb{R}^3)$

$$P_1(\mathbb{R}^3) = \text{gen}\{x, y, z\} = ax + by + cz,$$

$$P_2(\mathbb{R}^3) = \text{gen}\{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\},$$

$$P_3(\mathbb{R}^3) = \text{gen}\{x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, xyz\},$$

$$P_4(\mathbb{R}^3) = \text{gen}\{x^4, y^4, z^4, x^3y, x^3z, y^3x, y^3z, z^3x, z^3y, x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2, x^2yz, y^2xz, z^2xy\},$$

$$P_5(\mathbb{R}^3) = \text{gen}\{x^5, y^5, z^5, x^4y, x^4z, y^4x, y^4z, z^4x, z^4y, x^3y^2, x^3z^2, y^3x^2, y^3z^2, z^3x^2, z^3y^2, x^3yz, y^3xz, z^3xy, x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\}.$$

La dimensión de los polinomios homogéneos de grado k se calcula de la siguiente manera

$$\dim P_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

En particular la dimensión de $P_k(\mathbb{R}^3)$ es

$$\dim P_k(\mathbb{R}^3) = \binom{k+2}{2}.$$

2.1. Polinomios homogéneos que satisfacen la ecuación de onda

Los polinomios que nos interesa estudiar en esta sección son los polinomios homogéneos de grado k que satisfacen la ecuación de onda, es decir,

$$W_k(\mathbb{R}^n) = \{p(x, t) \in P_k(\mathbb{R}^{n+1}) \mid \square p = 0\},$$

donde $\square = \partial_{tt} - \Delta$. Aquí nuevamente identificamos \mathbb{R}^{n+1} con $\{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$.

Primero consideremos el caso cuando $n = 1$. De la fórmula de D'Alembert se sigue que

$$W_k(\mathbb{R}) = P_k(\mathbb{R}) \oplus P_{k-1}(\mathbb{R}).$$

Los siguientes resultados que se muestran en la tabla nos dicen que basta considerar 2 casos, el primero cuando la velocidad inicial es cero, $\psi(x) = 0$ y el segundo cuando el dato inicial es cero, $\varphi(x) = 0$.

$\varphi(x) = x^k$ y $\psi(x) = 0$	k	$\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) = x^{k-1}$
x	1	t
$x^2 + t^2$	2	xt
$x^3 + 3xt^2$	3	$x^2t + \frac{t^3}{3}$
$x^4 + 6x^2t^2 + t^4$	4	$x^3t + xt^3$
$x^5 + 10x^3t^2 + 5xt^4$	5	$x^4t + 2x^2t^3 + \frac{t^5}{5}$

Para $n > 1$ similarmente consideramos $\varphi(x) \in P_k(\mathbb{R}^n)$ y $\psi(x) = 0$ ó $\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) \in P_k(\mathbb{R}^n)$ se sigue que,

$$W_k(\mathbb{R}^n) = P_k(\mathbb{R}^n) \oplus P_{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

De aquí se sigue que,

$$\dim W_k(\mathbb{R}^3) = \binom{k+2}{2} + \binom{k+1}{2} = (k+1)^2.$$

En la siguiente tabla se muestran algunos resultados de polinomios que satisfacen la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 . Nuevamente consideramos 2 casos, el primero cuando la velocidad inicial es cero $\psi(x) = 0$ y el segundo cuando el dato inicial es cero $\varphi(x) = 0$. Para este ejemplo usamos la notación más común para un punto, (x, y, z) de \mathbb{R}^3 .

$\varphi(x) = x^\alpha$ y $\psi(x) = 0$	$ \alpha $	$\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) = x^{\alpha-1}$
x, y, z	1	t
$x^2 + t^2, y^2 + t^2, z^2 + t^2, xy, xz, yz$	2	xt, yt, zt
$x^3 + 3xt^2, y^3 + 3yt^2, z^3 + 3zt^2, x^2y + yt^2,$ $x^2z + zt^2, y^2x + xt^2, y^2z + zt^2, z^2x + xt^2,$ $z^2y + yt^2, xyz.$	3	$x^2t + \frac{t^3}{3}, y^2t + \frac{t^3}{3}$ $z^2t + \frac{t^3}{3}$
$4x^3t + 4xt^3, 4y^3t + 4yt^3, 4z^3t + 4zt^3, x^3y + 3xyt^2,$ $x^3z + 3xzt^2, y^3x + 3xyt^2, y^3z + 3yzt^2, z^3x + 3xzt^2,$ $z^3y + 3yzt^2, x^2y^2 + (y^2 + x^2)t^2 + 2t^4, x^2z^2 + (z^2 + x^2)t^2 + 2t^4,$ $y^2z^2 + (z^2 + y^2)t^2 + 2t^4, x^2yz + yzt^2, y^2xz + xzt^2, z^2xy + xyt^2$	4	$\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2t^2}{2} + \frac{t^4}{4}$ $\frac{y^4}{4} + \frac{3y^2t^2}{2} + \frac{t^4}{4}$ $\frac{z^4}{4} + \frac{3z^2t^2}{2} + \frac{t^4}{4}$
$5x^4t + 10x^2t^3 + t^5, 5y^4t + 10y^2t^3 + t^5, 5z^4t + 10z^2t^3 + t^5,$ $x^4y + 6x^2yt^2 + 6yt^4, x^4z + 6x^2zt^2 + 6zt^4, y^4x + 6y^2xt^2 + 6xt^4,$ $y^4z + 6y^2zt^2 + 6zt^4, z^4x + 6z^2xt^2 + 6xt^4, z^4y + 6z^2yt^2 + 6yt^4,$ $x^3y^2 + (3xy^2 + x^3)t^2, x^3z^2 + (3xz^2 + x^3)t^2, y^3x^2 + (3yx^2 + y^3)t^2,$ $y^3z^2 + (3yz^2 + y^3)t^2, z^3x^2 + (3zx^2 + z^3)t^2, z^3y^2 + (3zy^2 + z^3)t^2,$ $x^3yz + 3xyzt^2, y^3xz + 3xyzt^2, z^3yx + 3xyzt^2,$ $x^2y^2z + (y^2z + x^2z)t^2 + 2z, x^2z^2y + (z^2y + x^2y)t^2 + 2y,$ $y^2z^2x + (z^2x + y^2x)t^2 + 2x$	5	$x^4t + 2x^2t^3 + \frac{t^5}{5}$ $y^4t + 2y^2t^3 + \frac{t^5}{5}$ $z^4t + 2z^2t^3 + \frac{t^5}{5}$

Los cálculos anteriores se realizaron con la siguiente fórmula,

$$u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) + \Delta\varphi(x, y, z)\frac{t^2}{2!} + \Delta(\Delta\varphi(x, y, z))\frac{t^4}{4!} + \dots$$

Como se mencionó en el capítulo 1, calcular $u(x, t)$ no es sencillo, pero en el caso cuando los valores iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son polinomios resulta ser más práctico usar esta fórmula pues eventualmente el laplaciano del laplaciano, etc. se anula y solo tendremos un número finito de términos.

2.2. Grupo de permutaciones S_k

Los grupos de permutaciones tienen un rol central en el estudio de la búsqueda de soluciones de ecuaciones polinomiales.

Sea S_k el grupo de permutaciones de k elementos que se define de la siguiente forma

$$S_k = \{f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \mid f \text{ es biyectiva}\}.$$

Consideremos los ejemplos cuando $k = 2, 3, 4$

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{array} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{array} \right\}$$

$$S_4 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 2 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 2 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 2 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 2 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 2 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 3 \end{array} , \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 2 \end{array} \end{array} \right\}$$

En general podemos observar que S_k tiene $k!$ elementos.

Capítulo 3

Cuaterniones y Álgebras de Clifford

Los cuaterniones fueron descubiertos en 1843 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton. Su motivación original era crear un tipo de números hipercomplejos relacionados con el espacio tridimensional de la misma forma que los números complejos se relacionan con el plano. En este capítulo estudiaremos las propiedades que tienen los cuaterniones y algunas de las operaciones que se pueden realizar con estos números, así como también vamos a definir las álgebras de Clifford, primero consideraremos una definición puramente matemática para luego ver sus propiedades geométricas, para este capítulo nos basaremos en el libro *Real Quaternionic* [7].

3.1. Cuaterniones

Los cuaterniones (también llamados cuaternios) son una extensión de los números complejos, similar a la de los números reales. Mientras que los números complejos son una extensión de los reales con la adición de la unidad imaginaria i , tal que $i^2 = -1$, los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias i y j a los números reales tal que $ij = k$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

En la siguiente tabla se describe la operación del grupo de cuaterniones

*	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Multiplicación de cuaterniones.

Los cuaterniones pueden expresarse como el conjunto

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^4$$

o su equivalente

$$\mathbb{H} = \{(a + bi) + (c + di)j \mid a + bi, c + di \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$$

algo importante que veremos es que (\mathbb{H}, \cdot) es un campo no conmutativo.

Que es un campo no conmutativo se sigue de que,

$$ij \neq ji.$$

Los cuaterniones cumplen con las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación. Si $p = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ y $q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ son cuaterniones y λ es un número real, estas operaciones se definen de la siguiente manera

1. Suma:

$$p + q := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

2. Resta:

$$p - q := (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k$$

3. Multiplicación por escalar:

$$\lambda p := (\lambda a_1) + (\lambda b_1)i + (\lambda c_1)j + (\lambda d_1)k$$

4. Multiplicación de cuaterniones:

$$\begin{aligned} pq := & (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ & + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente ejemplo

Si $q = a + bi + cj + dk$ y $\bar{q} = a - bi - cj - dk$, \bar{q} se le llama el conjugado de q , entonces no es difícil comprobar que $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2$, donde $|q|^2$ es el módulo de q . Por lo que, si $q \neq 0$, $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ y tenemos que $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

El inverso de un cuaternión unitario $|q| = 1$, es su conjugado, es fácil ver que se cumplen las siguientes propiedades:

1. $q\bar{q} = |q|^2$
2. $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, q \neq 0$

3. $|qr| = |q||r|$
4. $|\bar{q}| = |-q| = |q|$
5. $(qr)^{-1} = q^{-1}r^{-1}; qr \neq 0.$

3.2. Álgebras de Clifford

En esta sección vamos a definir lo que es un álgebra de Clifford, llamadas así por William Kingdon Clifford (4 de mayo de 1845 - 3 de marzo de 1879) quien fue un matemático y filósofo inglés. También observaremos algunas propiedades geométricas básicas. Primero consideraremos una definición puramente matemática para luego ver sus propiedades geométricas. Durante toda esta sección asumiremos que las álgebras A son asociativas con unidad y que los homomorfismos de álgebras llevan la unidad a la unidad, para esta sección nos basaremos en el libro **Gürlebeck** [4].

Primero vamos a recordar la definición de álgebra.

Definición

Un álgebra, es un espacio vectorial A sobre \mathbb{R} con una operación bilineal

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A, \\ (x, y) &\rightarrow x \odot y, \end{aligned}$$

tal que

1. $\lambda(x \odot y) = (\lambda x) \odot y = x \odot (\lambda y),$
2. $(x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z,$
3. $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

El álgebra de Clifford $Cl(n)$ es un álgebra con unidad, que se construye a partir de \mathbb{R}^n usando una base ortogonal e_1, e_2, \dots, e_n y es generada por $\{e_j\}_{j=1}^n$ sujeta a las siguientes relaciones

$$(i) \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{con} \quad i \neq j \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$(ii) \quad e_i^2 = -1 \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como $Cl(n)$ es una álgebra debe contener todos los productos de la base e_i y todas las combinaciones lineales, usando las relaciones podemos simplificar y así tendremos $e_i e_j$ con $i < j$ y sus combinaciones lineales, también $e_i e_j e_k$ con $i < j < k$, etc.

Así el álgebra de Clifford $Cl(n)$ se escribe de la siguiente manera.

$$Cl(n) = \left\{ \sum_{\alpha} a_{\alpha} e_{\alpha} \mid e_{\alpha} = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_l}, a_{\alpha} \in \mathbb{R} \right\}$$

Con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_l \leq n$, $e_0 = 1$, por lo que la dimensión de $Cl(n)$ es $\dim Cl(n) = 2^n$

Observemos que si,

$$1) \quad x = \sum x_i e_i \in \mathbb{R}^n \\ x^2 = -|x|^2$$

$$2) \quad x = \sum x_i e_i, \quad y = \sum y_i e_i \\ x \odot y = -x \cdot y + x \wedge y$$

donde $x \wedge y = \sum_{i < j} e_i e_j (x_i y_j - x_j y_i)$. Las propiedades geométricas se siguen de 2).

Sea \wedge^j el espacio generado por todos los j -productos de la base. Se sigue que,

$$Cl(n) = \wedge^0 \oplus \wedge^1 \oplus \wedge^2 \oplus \wedge^3 \oplus \dots \oplus \wedge^n$$

haremos uso de la siguiente subálgebra $Cl(n)^+ = \wedge^0 \oplus \wedge^2 \oplus \wedge^4 \oplus \dots \oplus \wedge^{[n]}$, donde $[n]$ es el entero par menor ó igual a n .

Veamos algunos ejemplos

Caso cuando $n = 1$

$Cl(1)$ se genera a partir de \mathbb{R} con una sola base, que es $e_1, e_1^2 = -1$ entonces,

$$Cl(1) = \{a_0 1 + a_1 e_1\} \cong \mathbb{C} \text{ y } \dim Cl(1) = 2.$$

La tabla de multiplicar de $Cl(1)$ está dada de la siguiente forma.

*	1	e_1
1	1	e_1
e_1	e_1	-1

Caso cuando $n = 2$

$Cl(2)$ se genera a partir de \mathbb{R}^2 con dos bases e_1, e_2 entonces,

$$Cl(2) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} e_{\alpha} = \{a_0 1 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{12} e_{12}\}$$

$$e_1 e_2 = e_{12}, \quad \alpha = (1, 2) \quad \text{y} \quad \text{su} \quad \dim Cl(2) = 4.$$

A continuación se muestra la tabla de multiplicar de $Cl(2)$.

*	1	e_1	e_2	e_{12}
1	1	e_1	e_2	e_{12}
e_1	e_1	-1	e_{12}	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_{12}$	-1	$-e_1$
e_{12}	e_{12}	e_2	$-e_1$	-1

De esta forma se sigue que $Cl(2)$ es isomorfo a los cuaterniones $Cl(2) \cong \mathbb{H}$.

Ahora consideremos $n = 3$

$Cl(3)$ se genera a partir de \mathbb{R}^3 con tres bases e_1, e_2, e_3 entonces,

$$Cl(3) = \{a_01 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{123}e_{123}\}$$

y su $\dim Cl(3) = 8$.

A continuación se muestra la tabla de multiplicar de $Cl(3)$.

*	1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{123}
1	1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{123}
e_1	e_1	-1	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	$-e_3$	e_{123}	$-e_{23}$
e_2	e_2	$-e_{12}$	-1	e_{23}	e_1	$-e_{123}$	$-e_3$	$-e_{13}$
e_3	e_3	$-e_{13}$	$-e_{23}$	-1	e_{123}	e_1	$-e_2$	$-e_{12}$
e_{12}	e_{12}	e_2	$-e_1$	e_{123}	-1	e_{23}	$-e_{13}$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	e_3	$-e_{123}$	$-e_1$	$-e_{23}$	-1	e_{12}	e_2
e_{23}	e_{23}	e_{123}	e_3	$-e_2$	e_{13}	$-e_{12}$	-1	$-e_1$
e_{123}	e_{123}	$-e_{23}$	e_{13}	$-e_{12}$	$-e_3$	e_2	$-e_1$	1

$Cl(n)$ **no es conmutativa** para $n > 2$ y en $Cl(3)$ se pueden encontrar divisores de cero. Por ejemplo $(1 + e_{123})(1 - e_{123}) = 0$.

Capítulo 4

Operador de Dirac y Álgebras de Clifford con signo

En este último capítulo vamos a definir el operador de Dirac y las álgebras de Clifford con signo $Cl(1, n)$ para posteriormente estudiar el operador de Dirac de onda y dar solución al problema de valores iniciales para la ecuación de Dirac de onda. Asimismo en este capítulo estudiaremos el espacio de polinomios de onda-monogénica, en el cual realizamos la construcción de los polinomios de Fueter los cuales nos ayudaran a obtener la base que tenemos que encontrar, lo que es el objetivo de esta tesis. En este capítulo tomaremos de referencia la siguiente bibliografía [3],[6],[8],[4].

4.1. Operador de Dirac

En matemáticas y mecánica cuántica, un operador de Dirac es un operador diferencial que es una raíz cuadrada formal de un operador de segundo orden como un laplaciano. El operador de Dirac fue publicado por primera vez en 1928, llamado así en honor a Paul Dirac a quien le preocupaba factorizar formalmente un operador para el espacio de Minkowski, para obtener una forma de teoría cuántica compatible con la relatividad especial; para obtener el laplaciano relevante como producto de operadores de primer orden. Nosotros estamos interesados en estudiar una variante del operador que considera Paul Dirac.

Análisis de Clifford

El análisis de Clifford es una generalización de la variable compleja en una dimensión al espacio Euclidiano \mathbb{R}^n donde el operador de Cauchy-Riemann es sustituido por el operador de Dirac y el rango de las soluciones es el álgebra de Clifford. Actualmente es un área de investigación muy activa. Sus orígenes datan de los trabajos de Fueter pero no fue hasta 1980 que el libro [3] detonó el interés por el área. A continuación menciono algunos libros del tema Rosen [8], Gurlebeck [4], etc.

Ahora bien, nosotros estamos interesados en una variante que factoriza el operador de onda en contraste al operador de Dirac que factoriza el laplaciano.

El operador de Dirac se define como

$$D = \sum_{j=1}^n e_j \partial_j,$$

actuando en funciones definidas sobre el álgebra de Clifford, es decir, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Cl(n)$, $f(x) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}(x)$, entonces

$$Df(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha} e_j e_{\alpha} \partial_j f_{\alpha} = 0.$$

Las funciones f que satisfacen $Df = 0$ se llaman funciones monogénicas.

Ejemplo

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow Cl(3)$, $f(x) = f_0(x) + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3 + \dots + f_{123}(x)e_{123}$,

$$Df = \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha} e_j e_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_j} = 0.$$

es un sistema de 8 ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

Un cálculo sencillo da que $D^2 = -\Delta$. Luego, si $Df = 0$, cada una de las componentes de f es armónica, es decir que $\Delta f_{\alpha} = 0$, para todo α . Las funciones monogénicas satisfacen muchos análogos de la variable compleja como por ejemplo fórmula integral de Cauchy, teorema de valor medio, teorema de Morera, etc. Ver [3].

Un ejemplo típico de función monogénica es,

$$f(x) = \frac{x}{|x|^n}.$$

4.2. Álgebras de Clifford con signo $Cl(1, n)$

Las álgebras con signo $Cl(1, n)$ son generadas por $\varepsilon, e_1, e_2, \dots, e_n$ que es la base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x) \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ la cual está sujeta a las siguientes relaciones.

1. $\varepsilon^2 = 1$
2. $e_i^2 = -1$ con $i = 1, 2, \dots, n$
3. $\varepsilon e_i = -e_i \varepsilon$ anticonmutan
4. $e_i e_j = -e_j e_i$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$

Una construcción similar al caso $Cl(n)$ muestra que

$$Cl(1, n) = \left\{ a = \sum_I a_I e_I \mid I = (i_0, \dots, i_l), 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_l \leq n, e_0 = \varepsilon, e_\emptyset = 1 \right\}$$

de aquí se tiene que la $\dim Cl(1, n) = 2^{n+1}$.

Análogamente al caso $Cl(n)$ tenemos que,

$$Cl(1, n) = \wedge^0 \oplus \wedge^1 \oplus \dots \oplus \wedge^n \oplus \wedge^{n+1}$$

y el subálgebra,

$$Cl(1, n)^+ = \wedge^0 \oplus \wedge^2 \oplus \dots \oplus \wedge^{[n+1]}.$$

A este tipo de álgebras se les llama álgebras graduadas, las cuales son un álgebra con la descomposición en suma directa.

Veamos algunos ejemplos.

1) $Cl(1, 1) = \{a = a_0 1 + a_\varepsilon \varepsilon + a_1 e_1 + a_{01} \varepsilon e_1\}$ y tiene $\dim Cl(1, 1) = 4$

A continuación se muestra la tabla de multiplicar de $Cl(1, 1)$.

	1	ε	e_1	εe_1
1	1	ε	e_1	εe_1
ε	ε	1	εe_1	e_1
e_1	e_1	$-\varepsilon e_1$	-1	ε
εe_1	εe_1	$-e_1$	$-\varepsilon$	1

De esta forma se sigue que $Cl(1, 1)$ es isomorfo a \mathbb{R}^4 o bien $Cl(2) \cong \mathbb{C}^2$, pero $Cl(1, 1)$ no es isomorfo a \mathbb{H} .

2) $Cl(1, 2) = \{a = a_0 1 + a_\varepsilon \varepsilon + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{01} \varepsilon e_1 + a_{02} \varepsilon e_2 + a_{12} e_1 e_2 + a_{012} \varepsilon e_1 e_2\}$ y tiene $\dim Cl(1, 2) = 8$

A continuación se muestra la tabla de multiplicar de $Cl(1, 2)$.

	1	ε	e_1	e_2	εe_1	εe_2	e_{12}	εe_{12}
1	1	ε	e_1	e_2	εe_1	εe_2	e_{12}	εe_{12}
ε	ε	1	εe_1	εe_2	e_1	e_2	εe_{12}	e_{12}
e_1	e_1	$-\varepsilon e_1$	-1	e_{12}	ε	$-\varepsilon e_{12}$	$-e_2$	εe_2
e_2	e_2	$-\varepsilon e_2$	$-e_{12}$	-1	εe_{12}	ε	e_1	εe_1
εe_1	εe_1	$-e_1$	$-\varepsilon$	εe_{12}	1	$-e_{12}$	$-\varepsilon e_2$	e_2
εe_2	εe_2	$-e_2$	$-\varepsilon e_{12}$	$-\varepsilon$	e_{12}	1	εe_1	$-e_1$
e_{12}	e_{12}	εe_{12}	e_2	$-e_1$	εe_2	$-\varepsilon e_1$	-1	ε
εe_{12}	εe_{12}	e_{12}	εe_2	$-\varepsilon e_1$	e_2	$-e_1$	$-\varepsilon$	-1

3) $Cl(1, 3) = \{a = a_01 + a_\varepsilon\varepsilon + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{01}\varepsilon e_1 + a_{02}\varepsilon e_2 + a_{03}\varepsilon e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{012}\varepsilon e_{12} + a_{013}\varepsilon e_{13} + a_{023}\varepsilon e_{23} + a_{123}e_{123} + a_{0123}\varepsilon e_{123}\}$ y tiene $\dim Cl(1, 3) = 16$

A continuación se muestran las tablas de multiplicar de $Cl(1, 3)$. La cual escribimos en dos tablas separadas debido a la cantidad de términos obtenidos.

	1	ε	e_1	e_2	e_3	εe_1	εe_2	εe_3
1	1	ε	e_1	e_2	e_3	εe_1	εe_2	εe_3
ε	ε	1	εe_1	εe_2	εe_3	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-\varepsilon e_1$	-1	e_{12}	e_{13}	ε	$-\varepsilon e_{12}$	$-\varepsilon e_{13}$
e_2	e_2	$-\varepsilon e_2$	$-e_{12}$	-1	e_{23}	εe_{12}	ε	$-\varepsilon e_{23}$
e_3	e_3	$-\varepsilon e_3$	$-e_{13}$	e_{23}	-1	εe_{13}	εe_{23}	ε
εe_1	εe_1	$-e_1$	$-\varepsilon$	εe_{12}	εe_{13}	1	$-e_{12}$	$-e_{13}$
εe_2	εe_2	$-e_2$	$-\varepsilon e_{12}$	$-\varepsilon$	εe_{23}	e_{12}	1	$-e_{23}$
εe_3	εe_3	$-e_3$	$-\varepsilon e_{13}$	$-\varepsilon e_{23}$	$-\varepsilon$	$-e_{13}$	$-e_{23}$	1
e_{12}	e_{12}	εe_{12}	e_2	$-e_1$	e_{123}	εe_2	$-\varepsilon e_1$	εe_{123}
e_{13}	e_{13}	εe_{13}	e_3	$-e_{123}$	$-e_1$	εe_3	$-\varepsilon e_{123}$	$-\varepsilon e_1$
e_{23}	e_{23}	εe_{23}	e_{123}	e_3	$-e_2$	εe_{123}	εe_3	$-\varepsilon e_2$
εe_{12}	εe_{12}	e_{12}	εe_2	$-\varepsilon e_1$	εe_{123}	e_2	$-e_1$	e_{123}
εe_{13}	εe_{13}	e_{13}	εe_3	$-\varepsilon e_{123}$	$-\varepsilon e_1$	e_3	$-e_{123}$	$-e_1$
εe_{23}	εe_{23}	e_{23}	εe_{123}	εe_3	$-\varepsilon e_2$	e_{123}	e_3	$-e_2$
e_{123}	e_{123}	$-\varepsilon e_{123}$	$-e_{23}$	e_{13}	$-e_{12}$	εe_{23}	$-\varepsilon e_{13}$	εe_{12}
εe_{123}	εe_{123}	$-e_{123}$	$-\varepsilon e_{23}$	εe_{13}	$-\varepsilon e_{12}$	e_{23}	$-e_{13}$	e_{12}

	e_{12}	e_{13}	e_{23}	εe_{12}	εe_{13}	εe_{23}	e_{123}	εe_{123}
1	e_{12}	e_{13}	e_{23}	εe_{12}	εe_{13}	εe_{23}	e_{123}	εe_{123}
ε	εe_{12}	εe_{13}	εe_{23}	e_{12}	e_{13}	e_{23}	εe_{123}	e_{123}
e_1	$-e_2$	$-e_3$	e_{123}	εe_2	εe_3	$-\varepsilon e_{123}$	$-e_{23}$	εe_{23}
e_2	e_1	$-e_{123}$	$-e_3$	$-\varepsilon e_1$	εe_{123}	εe_3	e_{13}	$-\varepsilon e_{13}$
e_3	e_{123}	e_1	e_2	$-\varepsilon e_{123}$	$-\varepsilon e_1$	$-\varepsilon e_2$	$-e_{12}$	εe_{12}
εe_1	$-\varepsilon e_1$	$-\varepsilon e_3$	εe_{123}	e_2	e_3	$-e_{123}$	$-\varepsilon e_{23}$	e_{23}
εe_2	εe_1	$-\varepsilon e_{123}$	$-\varepsilon e_3$	$-e_1$	e_{123}	e_3	εe_{13}	$-e_{13}$
εe_3	εe_{123}	εe_1	εe_2	$-e_{123}$	$-e_3$	$-e_2$	$-\varepsilon e_{12}$	e_{12}
e_{12}	-1	e_{23}	$-e_{13}$	ε	εe_{23}	$-e_{13}$	$-e_3$	$-\varepsilon e_3$
e_{13}	$-e_{23}$	-1	e_{12}	$-\varepsilon e_{23}$	$-\varepsilon$	εe_{12}	e_2	εe_2
e_{23}	e_{13}	$-e_{12}$	-1	εe_{13}	$-\varepsilon e_{12}$	$-\varepsilon$	$-e_1$	εe_1
εe_{12}	$-\varepsilon$	εe_{23}	$-\varepsilon e_{13}$	-1	e_{23}	$-e_{13}$	$-\varepsilon e_3$	$-e_3$
εe_{13}	$-\varepsilon e_{23}$	$-\varepsilon$	εe_{12}	e_{23}	-1	e_{12}	εe_2	e_2
εe_{23}	εe_{13}	$-\varepsilon e_{12}$	$-\varepsilon$	e_{13}	$-e_{12}$	-1	$-\varepsilon e_1$	$-e_1$
e_{123}	$-e_3$	e_2	$-e_1$	εe_3	$-\varepsilon e_2$	εe_1	1	$-\varepsilon$
εe_{123}	$-\varepsilon e_3$	εe_2	$-\varepsilon e_1$	e_3	$-e_2$	e_1	ε	-1

Conjugación

Consideremos la función,

$$Cl(1, n) \longrightarrow Cl(1, n)$$

$$a \longmapsto \bar{a}$$

tal que, cumple las siguientes propiedades

- i) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$
- ii) $\bar{\varepsilon} = -\varepsilon$
- iii) $\bar{e}_i = -e_i, \quad i = (1, 2, \dots, n).$

Ejemplo.

$$\overline{\bar{e}_i} = e_i \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = (-e_i)(-\varepsilon) = -\varepsilon e_i.$$

Observación, si $a \in Cl(1, n)$ existen únicos $a_1, a_2 \in Cl(n)$ tal que $a = a_1 + \varepsilon a_2$.

4.3. Operador de Dirac de Onda

En esta sección estudiaremos funciones suaves de la forma $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow Cl(1, n)$, es decir

$$f(x, t) = \sum e_I f_I(x, t).$$

El operador de Dirac de onda se define como

$$D_w = \varepsilon \partial_t - D = \varepsilon \partial_t - \sum_{j=1}^n e_j \partial_j$$

un cálculo sencillo muestra que $(D_w)^2 = \partial_t^2 - \Delta = \square$.

Las funciones suaves f tal que $D_w f = 0$ se llaman **funciones de onda-monogénicas**.

Lema

Sea $f : \mathbb{R}^{(n+1)} \rightarrow Cl(1, n)$ suave. Si escribimos a f como $f = f^+ + f^-$ con $f^+ \in Cl(1, n)^+$ y $f^- \in Cl(1, n) \setminus Cl(1, n)^+$, $D_w f = 0$ si y solo si $D_w f^+ = 0$ y $D_w f^- = 0$. De esta manera obtenemos dos soluciones independientes.

Demostración

Observemos que cuando $n=1$, $f = f_0 + \varepsilon f_\varepsilon + e_1 f_1 + \varepsilon e_1 f_{01} = f^+ + f^-$.

Con $f^+ = f_0 + \varepsilon e_1 f_{01}$ y $f^- = \varepsilon f_\varepsilon + e_1 f_1$.

Por demostrar que $D_w f = 0 \Leftrightarrow D_w f^+ = 0$ y $D_w f^- = 0$.

En este caso $D_w = \varepsilon \partial_t - e_1 \partial_1$, luego

$$D_w f^+ = \varepsilon \partial_t f_0 + e_1 \partial_t f_{01} - e_1 \partial_1 f_0 - \varepsilon \partial_1 f_{01} = \varepsilon(\partial_t f_0 - \partial_1 f_{01}) + e_1(\partial_t f_{01} - \partial_1 f_0)$$

Para que $D_w f^+ = 0$ cada una de sus componentes debe ser cero, de esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

1. - $\partial_t f_0 - \partial_1 f_{01} = 0$
2. - $\partial_t f_{01} - \partial_1 f_0 = 0$

Realizamos el mismo procedimiento para $D_w f^-$

$$D_w f^- = \partial_\varepsilon f_\varepsilon + \varepsilon e_1 \partial_t f_1 - \varepsilon e_1 \partial_t f_\varepsilon - \partial_1 f_1 = \varepsilon e_1 (\partial_t f_1 + \partial_1 f_\varepsilon) + \partial_t f_\varepsilon + \partial_1 f_1$$

luego,

3. - $\partial_t f_1 + \partial_1 f_\varepsilon = 0$
4. - $\partial_t f_\varepsilon + \partial_1 f_1 = 0$

se sigue,

1. - $\partial_t f_0 = \partial_1 f_{01}$
2. - $\partial_t f_{01} = \partial_1 f_0$
3. - $\partial_t f_1 = -\partial_1 f_\varepsilon$
4. - $\partial_t f_\varepsilon = -\partial_1 f_1$

de esta forma obtenemos dos sistemas independientes.

Finalmente si $D_w f = 0$ entonces, $D_w f^+ = 0$ y $D_w f^- = 0$ por linealidad.
Por lo tanto $D_w f = 0 \Leftrightarrow D_w f^+ = 0$ y $D_w f^- = 0$.

En el caso general $n > 1$, si tenemos $f^j \in \wedge^j$ notemos que $D_w f^j \in \wedge^{j-1} \oplus \wedge^{j+1}$ por lo tanto si

$$f^+ = f^0 + f^2 + f^4 + \dots$$

$$f^- = f^1 + f^3 + f^5 + \dots$$

entonces,

$$D_w f^+ \in Cl(1, n) \setminus Cl(1, n)^+ \quad y \quad D_w f^- \in Cl(1, n)^+$$

luego, si $D_w f = 0$, entonces

$$D_w f^+ = 0 \quad y \quad D_w f^- = 0.$$

■

4.4. Problema de valores iniciales para la ecuación de Dirac de onda

El problema de valores iniciales para el operador de Dirac de onda, se enuncia de la siguiente manera.

Encontrar una función $u(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow Cl(1, n)$, de clase C^2 tal que

$$\begin{aligned} i) \quad & D_w u(x, t) = 0 \\ ii) \quad & u(x, 0) = \varphi(x), \end{aligned}$$

donde $\varphi(x) \in Cl(1, n)$ es una función suave que representa el valor inicial. Nótese que no tenemos velocidad inicial, esto se debe a que D_w es de primer orden.

Primero analizaremos el caso $n = 1$, es decir la fórmula de D'Alembert (adaptada) en $Cl(1, 1)^+$.

Proposición

Supongamos que $u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon e_1 u_{01}(x, t)$ y $\varphi(x) = f(x) + \varepsilon e_1 g(x)$ ambas funciones de clase C^2 con valores en $Cl(1, 1)^+$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $u(x, t)$ resuelve el problema de valores iniciales para D_w en $n = 1$

$$\begin{aligned} i) \quad & D_w u(x, t) = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ ii) \quad & u(x, 0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

2. La función u satisface el sistema de **Cauchy-Riemann de onda**

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial u_{01}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_{01}}{\partial t} \quad y \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

3. Cada componente de $u(u_0, u_{01})$ satisfacen el problema de valores iniciales para el operador de onda \square de dimensión 1

$$\square u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0$$

con valores iniciales

$$\begin{aligned} u_0(x, 0) &= f(x) & u_{01}(x, 0) &= g(x) \\ \partial_t u_0(x, 0) &= g'(x) & \partial_t u_{01}(x, 0) &= f'(x). \end{aligned}$$

4. La función $u(x, t)$ está dada por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t) + g(x+t) - g(x-t)] + \frac{\varepsilon e_1}{2} [g(x+t) + g(x-t) + f(x+t) - f(x-t)]$$

Demostración

1 \Rightarrow 2

Si u resuelve el problema de valores iniciales, es decir que satisface $D_w u = 0$, entonces $D_w u = \varepsilon \partial_t u - e_1 \partial_{x_1} u = 0$ y $u(0, x) = \varphi(x)$.

Sea $u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon e_1 u_{01}(x, t)$, entonces

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \varepsilon e_1 \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} + \varepsilon e_1 \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial x}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_w u &= \varepsilon \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + e_1 \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial t} - e_1 \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial x} = 0 \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial x} \right) + e_1 \left(\frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que,

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial u_{01}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x}.$$

2 \Rightarrow 3

u satisface el sistema de **Cauchy-Riemann de onda**

$$1) \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial u_{01}}{\partial x}, \quad 2) \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_{01}}{\partial t}, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Queremos mostrar que,

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x^2}$$

entonces, partiendo de 1)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}.$$

similarmente, tomamos 2)

$$\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{01}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x^2}.$$

3 \Rightarrow 4

Cada componente de $u(u_0, u_{01})$ satisfacen el problema de valores iniciales para el operador de onda \square de dimensión 1

$$\square u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0$$

con valores iniciales

$$\begin{aligned} u_0(x, 0) &= f(x) & u_{01}(x, 0) &= g(x) \\ \partial_t u_0(x, 0) &= g'(x) & \partial_t u_{01}(x, 0) &= f'(x) \end{aligned}$$

Sea $u_0(x, 0) = f(x)$ y $\partial_t u_0(x, 0) = g'(x)$ por la fórmula de D'Alembert $u_0(x, t)$ tiene solución,

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g'(\eta) d\eta$$

resolviendo la integral, por el teorema fundamental del cálculo obtenemos que

$$\int_{x-t}^{x+t} g'(\eta) d\eta = g(x+t) + g(x-t)$$

de esto sigue que,

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} [g(x+t) - g(x-t)].$$

Similarmente calculamos $u_{01}(x, t)$. Sea $u_{01}(x, 0) = g(x)$ y $\partial_t u_{01}(x, 0) = f'(x)$ por la fórmula de D'Alembert $u_{01}(x, t)$ tiene solución,

$$u_{01}(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f'(\eta) d\eta$$

resolviendo la integral, por el teorema fundamental del cálculo obtenemos que

$$\int_{x-t}^{x+t} f'(\eta) d\eta = f(x+t) + f(x-t)$$

se sigue que,

$$u_{01}(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} [f(x+t) - f(x-t)]$$

componemos $u(x, t)$ que por hipótesis es

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon e_1 u_{01}(x, t)$$

luego,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t) + g(x+t) - g(x-t)] + \frac{\varepsilon e_1}{2} [g(x+t) + g(x-t) + f(x+t) - f(x-t)].$$

$4 \Rightarrow 1$

$u(x, t)$ está dada por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t) + g(x+t) - g(x-t)] + \frac{\varepsilon e_1}{2} [g(x+t) + g(x-t) + f(x+t) - f(x-t)].$$

Queremos mostrar que $D_w u(x, t) = 0$ y $u(x, 0) = \varphi(x) = f(x) + \varepsilon e_1 g(x)$. Iniciemos probando que $u(x, 0) = \varphi(x) = f(x) + \varepsilon e_1 g(x)$, si $t = 0$ entonces $u(x, t)$ es lo siguiente,

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} [f(x) + f(x) + g(x) - g(x)] + \frac{\varepsilon e_1}{2} [g(x) + g(x) + f(x) - f(x)]$$

se sigue que,

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} [f(x) + f(x)] + \frac{\varepsilon e_1}{2} [g(x) + g(x)]$$

entonces,

$$u(x, 0) = f(x) + \varepsilon e_1 g(x).$$

Ahora queremos ver que,

$$D_w u(x, t) = 0$$

sabemos que,

$$D_w u(x, t) = \varepsilon \partial_t u - e_1 \partial_x u$$

luego,

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u(x, t) &= \frac{\varepsilon}{2} [f'(x+t) - f'(x-t) + g'(x+t) + g'(x-t)] \\ &\quad + \frac{e_1}{2} [g'(x+t) - g'(x-t) + f'(x+t) + f'(x-t)], \\ e_1 \partial_x u(x, t) &= \frac{e_1}{2} [f'(x+t) + f'(x-t) + g'(x+t) - g'(x-t)] \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} [g'(x+t) + g'(x-t) + f'(x+t) - f'(x-t)] \end{aligned}$$

se sigue que

$$\varepsilon \partial_t u - e_1 \partial_x u = 0$$

entonces,

$$D_w u(x, t) = 0.$$

■

4.5. Espacios de polinomios de onda-monogénica

El espacio de polinomios homogéneos de grado k con valores en el álgebra de Clifford con signo $Cl(1, n)$ se denota de la siguiente manera $P_k(\mathbb{R}^n, Cl(1, n))$, del capítulo 2 sabemos cómo se construye una base para $P_k(\mathbb{R}^n)$, es decir $\{x^\alpha : |\alpha| = k\}$. De esta base obtenemos una para $P_k(\mathbb{R}^n, Cl(1, n))$, es decir $\{e_\beta x^\alpha\}$. Sea $DW_k(\mathbb{R}^n, Cl(1, n))$ el espacio de polinomios homogéneos de grado k que además satisfacen el operador de Dirac de onda, es decir los polinomios homogéneos de onda-monogénicos. En esta sección nos interesa construir una base de este espacio, para ello realizaremos la construcción en el caso cuando $n = 3$, $DW_k(\mathbb{R}^3, Cl(1, 3))$ siendo los

otros casos análogos. Las variables de Fueter se introdujeron debido a la no conmutatividad. Fueter simetrizó productos de sus variables y la simetrización compensa en cierto sentido la no conmutatividad.

Karl Rudolf Fueter (1880-1950)

Fue un matemático de Suiza que introdujo un conjunto de polinomios de aproximación alrededor de un punto, generalmente en el origen. Estos polinomios llevan su nombre y dan origen a las series de Taylor y Laurent para el caso monogénico.

Construcción de Fueter en $n = 3$

Primero, definimos los siguientes polinomios en \mathbb{R}^3 con valores en $Cl(1, 3)$

1. $W_1 = x_1 + \varepsilon e_1 t$
2. $W_2 = x_2 + \varepsilon e_2 t$
3. $W_3 = x_3 + \varepsilon e_3 t$

Observemos que W_i con $i = 1, 2, 3$ son polinomios de onda-monogénico de grado 1.

Para cada multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con $|\alpha| = k$ vamos a construir un polinomio $Q_\alpha(x, t)$ que será de grado k y el cual va a satisfacer el operador de Dirac de onda D_w . Antes de entender la construcción general, iniciaremos ilustrando el procedimiento con algunos ejemplos sencillos. Algo importante que debemos considerar en esta sección es la **no conmutatividad**. Empezamos considerando todos los posibles productos de los W_i para distintos grados.

Para el grado 2 tenemos los siguientes productos

W_1^2	W_2^2	W_3^2
W_1W_2	W_1W_3	W_2W_3
W_2W_1	W_3W_1	W_3W_2 .

Los productos obtenidos para el grado 3 son los siguientes

W_1^3	W_2^3	W_3^3	$W_1^2W_2$	$W_1^2W_3$
$W_2^2W_1$	$W_1W_2^2$	$W_1W_3^2$	$W_2W_1^2$	$W_2^2W_3$
$W_3^2W_1$	$W_3^2W_2$	$W_2W_3^2$	$W_3W_1^2$	$W_3W_2^2$
$W_1W_3W_2$	$W_2W_1W_3$	$W_2W_3W_1$	$W_3W_1W_2$	$W_3W_2W_1$
$W_1W_2W_1$	$W_1W_3W_1$	$W_2W_1W_2$	$W_3W_1W_3$	$W_3W_2W_3$
$W_1W_2W_3$	$W_2W_3W_2$.			

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, con $|\alpha| = k$ definimos

$$W^\alpha := W_1^{\alpha_1} W_2^{\alpha_2} W_3^{\alpha_3}.$$

Cabe mencionar que W^α no es necesariamente de onda-monogénica.

Ahora, vamos a construir $Q_\alpha(x, t)$ como la suma de todos los productos posibles a partir de W^α considerando la no conmutatividad. Iniciaremos con algunos ejemplos antes de dar la construcción general.

Ejemplos:

1.- Sí $\alpha = (1, 1, 0)$, $k = 2$

$$Q_{(1,1,0)}(x, t) = \frac{1}{2}(W_1 W_2 + W_2 W_1)$$

es decir, tomamos todos los posibles productos de orden 2, generados a partir de $W^{(1,1,0)}$.

2.- Sí $\alpha = (2, 1, 0)$, $k = 3$

$$Q_{(2,1,0)}(x, t) = \frac{1}{3}(W_1^2 W_2 + W_2 W_1^2 + W_1 W_2 W_1)$$

nuevamente, tomamos todos los posibles productos de orden 3, generados a partir de $W^{(2,1,0)}$.

3.- Sí $\alpha = (2, 1, 1)$, $k = 4$, entonces

$$Q_{(2,1,1)}(x, t) = \frac{1}{12}(W_1^2 W_2 W_3 + W_1^2 W_3 W_2 + W_2 W_1^2 W_3 + W_3 W_1^2 W_2 + W_2 W_3 W_1^2 + W_3 W_2 W_1^2 + W_1 W_2 W_1 W_3 + W_1 W_2 W_3 W_1 + W_1 W_3 W_2 W_1 + W_1 W_3 W_1 W_2 + W_2 W_1 W_3 W_1 + W_3 W_1 W_2 W_1).$$

en este caso tomamos todos los posibles productos de orden 4, generados a partir de $W^{(2,1,1)}$.

Cada uno de los diferentes productos se puede ver como W^α bajo la acción del grupo de permutaciones (con repeticiones).

Ahora recordemos que,

$$W^\alpha := W_1^{\alpha_1} W_2^{\alpha_2} W_3^{\alpha_3}.$$

entonces,

$$= W_{I(1)} W_{I(2)} W_{I(3)} W_{I(4)} \dots W_{I(k)}$$

donde I es la permutación identidad y W_1 está repetido en los primeros α_1 lugares, W_2 está en los siguientes α_2 lugares, etc.

Consideremos el siguiente ejemplo, sea σ la siguiente permutación

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 4 \end{array} \right\}$$

ahora $\sigma(W^\alpha)$ denotará el siguiente producto

$$\sigma(W^\alpha) = W_{\sigma(1)}W_{\sigma(2)}W_{\sigma(3)}W_{\sigma(4)}$$

supongamos que $\alpha = (2, 1, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma(W^{(2,1,1)}) &= W_{\sigma(1)}W_{\sigma(2)}W_{\sigma(3)}W_{\sigma(4)} \\ &= W_2W_3W_1W_4 \\ &= W_2W_1W_1W_3 \\ &= W_2W_1^2W_3. \end{aligned}$$

La construcción general para k se hace usando el grupo de simetrías de k elementos S_k de la siguiente manera

$$Q_\alpha(x, t) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(W^\alpha).$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \alpha - e_1 &= (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \alpha - e_2 &= (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3), \\ \alpha - e_3 &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1) \end{aligned}$$

etc. Acordamos que $Q_{(0,0,0)}(x, t) = 1$.

El siguiente teorema nos da fórmulas de recursión que nos permiten calcular el operador de Dirac de onda de manera efectiva.

Teorema (Fórmulas de Recursión)

I.- Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con $k = |\alpha|$ se tiene que,

$$kQ_\alpha(x, t) = \alpha_1Q_{\alpha-e_1}(x, t)W_1 + \alpha_2Q_{\alpha-e_2}(x, t)W_2 + \alpha_3Q_{\alpha-e_3}(x, t)W_3.$$

II.- Las parciales de $Q_\alpha(x, t)$ para $j = 1, 2, 3$ están dadas por

$$\partial_j Q_\alpha(x, t) = \alpha_j Q_{\alpha-e_j}(x, t).$$

III.- La parcial de $Q_\alpha(x, t)$ con respecto a t está dada por

$$\partial_t Q_\alpha(x, t) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon e_j \alpha_j Q_{\alpha-e_j}(x, t).$$

Demostración

I. Cada sumando de $Q_\alpha(x, t)$ contiene un factor de la forma W_i como su último elemento, así que factorizamos respecto a estos últimos factores obteniendo una expresión de la forma,

$$kQ_\alpha(x, t) = \tilde{Q}_1(x, t)W_1 + \tilde{Q}_2(x, t)W_2 + \tilde{Q}_3(x, t)W_3.$$

Afirmamos que,

$$\tilde{Q}_i(x, t) = \alpha_i Q_{\alpha - e_i}(x, t)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Observemos que en $\tilde{Q}_i(x, t)$ la suma recorre todas las permutaciones de S_k que fijan a W_i en la última posición. Es decir, tenemos todas las permutaciones para el índice $\alpha - e_i$. Además debemos tener en cuenta que W_i puede estar en el último lugar α_i -veces sin que cambie el factor, es decir que cada factor se repite α_i -veces. De aquí se sigue que,

$$\tilde{Q}_i(x, t) = \alpha_i Q_{\alpha - e_i}(x, t),$$

para $i = 1, 2, 3$.

II.- Usaremos inducción en k , probemos que es cierto para $k = 1$. Sea $W_i = x_i + \varepsilon e_i t$ con $i = 1, 2, 3$ observemos,

$$\partial_j W_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

de aquí se sigue que,

$$\partial_1 Q_\alpha(x, t) = \alpha_1 Q_{\alpha - e_1}(x, t).$$

Supongamos cierto para todo α y $|\alpha| \leq k - 1$, donde $k \geq 2$.

Luego, si $|\alpha| = k$ de I sabemos que,

$$kQ_\alpha(x, t) = \alpha_1 Q_{\alpha - e_1}(x, t)W_1 + \alpha_2 Q_{\alpha - e_2}(x, t)W_2 + \alpha_3 Q_{\alpha - e_3}(x, t)W_3$$

por lo tanto

$$k\partial_1 Q_\alpha(x, t) = \alpha_1 [\partial_1 Q_{\alpha - e_1}(x, t)]W_1 + \partial_1 Q_{\alpha - e_1}(x, t) + \alpha_2 [\partial_1 Q_{\alpha - e_2}(x, t)]W_2 + \alpha_3 [\partial_1 Q_{\alpha - e_3}(x, t)]W_3 = *$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que,

$$\begin{aligned} \partial_1 Q_{\alpha - e_1}(x, t) &= (\alpha_1 - 1)Q_{\alpha - 2e_1}(x, t), \\ \partial_1 Q_{\alpha - e_2}(x, t) &= \alpha_1 Q_{\alpha - e_1 - e_2}(x, t), \\ \partial_1 Q_{\alpha - e_3}(x, t) &= \alpha_1 Q_{\alpha - e_1 - e_3}(x, t). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 * &= \alpha_1(\alpha_1 - 1)Q_{\alpha-2e_1}(x, t)W_1 + \alpha_1Q_{\alpha-e_1}(x, t) + \alpha_2\alpha_1Q_{\alpha-e_1-e_2}(x, t)W_2 + \alpha_3\alpha_1Q_{\alpha-e_1-e_3}(x, t)W_3 \\
 &= \alpha_1[(\alpha_1 - 1)Q_{\alpha-2e_1}(x, t)W_1 + \alpha_2Q_{\alpha-e_1-e_2}(x, t)W_2 + \alpha_3Q_{\alpha-e_1-e_3}(x, t)] + \alpha_1Q_{\alpha-e_1}(x, t) =
 \end{aligned}$$

es decir, usando nuevamente la fórmula de recursión I

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_1(k - 1)Q_{\alpha-e_1}(x, t) + \alpha_1Q_{\alpha-e_1}(x, t) \\
 &= \alpha_1kQ_{\alpha-e_1}(x, t)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\partial_1 Q_\alpha(x, t) = \alpha_1 Q_{\alpha-e_1}(x, t).$$

Similarmente para las parciales ∂_2 y ∂_3 .

III.- Nuevamente aplicamos inducción con respecto de k .

Prueba en $k = 1$

$$\begin{aligned}
 \partial_t W_i &= \varepsilon e_i = \sum_{j=1}^3 (\varepsilon e_j) Q_{e_i-e_j}(x, t) \\
 &= \sum_{j=1}^3 \varepsilon e_j \partial_{ij} Q_{e_i-e_j}(x, t).
 \end{aligned}$$

Supongamos cierto para todo α y $|\alpha| \leq k - 1$, donde $k \geq 2$ y usando la fórmula de recursión I

$$\begin{aligned}
 \partial_t(kQ_\alpha(x, t)) &= \alpha_1\partial_t[Q_{\alpha-e_1}(x, t)W_1] + \alpha_2\partial_t[Q_{\alpha-e_2}(x, t)W_2] + \alpha_3\partial_t[Q_{\alpha-e_3}(x, t)W_3] \\
 &= \alpha_1[\partial_t Q_{\alpha-e_1}(x, t)]W_1 + \alpha_1Q_{\alpha-e_1}(x, t)\partial_t W_1 + \alpha_2[\partial_t Q_{\alpha-e_2}(x, t)]W_2 \\
 &\quad + \alpha_2Q_{\alpha-e_2}(x, t)\partial_t W_2 + \alpha_3[\partial_t Q_{\alpha-e_3}(x, t)]W_3 + \alpha_3Q_{\alpha-e_3}(x, t)\partial_t W_3
 \end{aligned}$$

sabemos que $\partial_t W_i = \varepsilon e_i$, se sigue

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_1[\partial_t Q_{\alpha-e_1}(x, t)]W_1 + \alpha_1Q_{\alpha-e_1}(x, t)\varepsilon e_1 + \alpha_2[\partial_t Q_{\alpha-e_2}(x, t)]W_2 \\
 &\quad + \alpha_2Q_{\alpha-e_2}(x, t)\varepsilon e_2 + \alpha_3[\partial_t Q_{\alpha-e_3}(x, t)]W_3 + \alpha_3Q_{\alpha-e_3}(x, t)\varepsilon e_3 = *
 \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que,

$$\partial_t Q_{\alpha-e_1}(x, t) = \varepsilon e_1(\alpha_1 - 1)Q_{\alpha-2e_1}(x, t) + \varepsilon e_2\alpha_2Q_{\alpha-e_1-e_2}(x, t) + \varepsilon e_3\alpha_3Q_{\alpha-e_1-e_3}(x, t)$$

$$\partial_t Q_{\alpha-e_2}(x, t) = \varepsilon e_1 \alpha_1 Q_{\alpha-e_1-e_2}(x, t) + \varepsilon e_2 (\alpha_2 - 1) Q_{\alpha-2e_2}(x, t) + \varepsilon e_3 \alpha_3 Q_{\alpha-e_2-e_3}(x, t)$$

$$\partial_t Q_{\alpha-e_3}(x, t) = \varepsilon e_1 \alpha_1 Q_{\alpha-e_1-e_3}(x, t) + \varepsilon e_2 \alpha_2 Q_{\alpha-e_2-e_3}(x, t) + \varepsilon e_3 (\alpha_3 - 1) Q_{\alpha-2e_3}(x, t)$$

entonces,

$$\begin{aligned} * &= \alpha_1 \varepsilon e_1 [(\alpha_1 - 1) Q_{\alpha-2e_1}(x, t) W_1 + \alpha_2 Q_{\alpha-e_1-e_2}(x, t) W_2 + \alpha_3 Q_{\alpha-e_1-e_3}(x, t) W_3] \\ &+ \alpha_2 \varepsilon e_2 [\alpha_1 Q_{\alpha-e_1-e_2}(x, t) W_1 + (\alpha_2 - 1) Q_{\alpha-2e_2}(x, t) W_2 + \alpha_3 Q_{\alpha-e_2-e_3}(x, t) W_3] \\ &+ \alpha_3 \varepsilon e_3 [\alpha_1 Q_{\alpha-e_1-e_3}(x, t) W_1 + \alpha_2 Q_{\alpha-e_2-e_3}(x, t) W_2 + (\alpha_3 - 1) Q_{\alpha-2e_3}(x, t) W_3] \\ &+ \alpha_1 \varepsilon e_1 Q_{\alpha-e_1}(x, t) + \alpha_2 \varepsilon e_2 Q_{\alpha-e_2}(x, t) + \alpha_3 \varepsilon e_3 Q_{\alpha-e_3}(x, t) \end{aligned}$$

reescribiendo lo anterior usando nuevamente I,

$$\begin{aligned} &[\varepsilon e_1 \alpha_1 [(k-1) Q_{\alpha-e_1}(x, t)] + \varepsilon e_2 \alpha_2 [(k-1) Q_{\alpha-e_2}(x, t)] + \varepsilon e_3 \alpha_3 [(k-1) Q_{\alpha-e_3}(x, t)]] \\ &+ \varepsilon e_1 \alpha_1 Q_{\alpha-e_1}(x, t) + \varepsilon e_2 \alpha_2 Q_{\alpha-e_2}(x, t) + \varepsilon e_3 \alpha_3 Q_{\alpha-e_3}(x, t) = \\ &= k[\varepsilon e_1 \alpha_1 Q_{\alpha-e_1}(x, t) + \varepsilon e_2 \alpha_2 Q_{\alpha-e_2}(x, t) + \varepsilon e_3 \alpha_3 Q_{\alpha-e_3}(x, t)]. \end{aligned}$$

■

Corolario

Para todo α , $Q_\alpha(x, t)$ es de onda monogénica, es decir $D_w Q_\alpha(x, t) = 0$.

Demostración

$$\begin{aligned} D_w Q_\alpha(x, t) &= \left(\varepsilon \partial_t - \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j \right) Q_\alpha(x, t) \\ &= \varepsilon \partial_t Q_\alpha(x, t) - \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j Q_\alpha(x, t) \end{aligned}$$

usando las fórmulas de recursión II Y III

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^3 \varepsilon e_j \alpha_j Q_{\alpha-e_j}(x, t) - \sum_{j=1}^3 e_j \alpha_j Q_{\alpha-e_j}(x, t)$$

$$= \sum_{j=1}^3 e_j \alpha_j Q_{\alpha - e_j}(x, t) - \sum_{j=1}^3 e_j \alpha_j Q_{\alpha_j - e_j}(x, t)$$

por lo tanto,

$$D_w Q_\alpha(x, t) = 0.$$

■

Teorema

Una base de $DW_k(\mathbb{R}^n, Cl(1, n))$ está dada por los $Q_\alpha(x, t)$ con α tal que x^α es base de $P_k(\mathbb{R}^n)$.

Demostración

Observemos que $Q_\alpha(x, 0) = x^\alpha$ y como x^α es una base de $P_k(\mathbb{R}^n)$ entonces $Q_\alpha(x, 0)$ son linealmente independientes y generan todo $DW(\mathbb{R}^n, Cl(1, n))$.

■

Bibliografía

- [1] S. Alinhac *Hyperbolic Partial Differential Equations*, Universitext Springer-Verlag, New York 2009.
- [2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*. Springer-Verlag, New York 1992.
- [3] F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford Analysis*, Research Notes in Mathematics, Vol. 76, Pitman, Boston, MA, 1982.
- [4] K. Gürlebeck, K. Habetha and W. Spröbig *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space* Birkhauser-Verlag AG, 2008.
- [5] Q. Han *A Basic Course in Partial Differential Equations* Graduate Studies in Mathematics Vol 120, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [6] E. Marmolejo-Olea. *Basic Properties of Solutions of Boundary Value Problem for the Dirac-Wave operator*, Complex Anal, Oper, Theory 17,95 (2023).
- [7] J.P. Morais, W. Spröbig and S. Georgiev. *Real Quaternionic Calculus Handbook*, Springer Basel 2014.
- [8] A. Rosen *Geometric Multivector Analysis, From Grassmann to Dirac* Springer, Cham, Switzerland, 2019.
- [9] W. Strauss *Partial Differential Equations. An Introduction* John Wiley & Sons, New York, 2008.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Control Escolar de Licenciatura



VOTOS DE APROBATORIOS

**SECRETARIA EJECUTIVA DEL
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS**

P R E S E N T E

Por medio del presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la C. **PORCAYO ESTRADA YATZIRY AMAIRANI** con número de matrícula **10005841** cuyo título es:

Espacios de polinomios homogéneos de Onda-Dirac

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS CON ÁREA TERMINAL EN MATEMÁTICAS.**

Cuernavaca, Mor a 19 de octubre del 2023

Atentamente
Por una universidad culta
Una universidad de excelencia

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DR. ROGELIO VÁLDEZ DELGADO
DR. ANTONIO DANIEL RIVERA LÓPEZ
DR. EMILIO MARMOLEJO OLEA
DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA
DR. CARLOS VILLEGAS BLAS

(PRESIDENTE)
(SECRETARIO)
(VOCAL)
(SUPLENTE)
(SUPLENTE) NO PARTICIPA

MFB/VRRC/eae

Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, Cuernavaca Morelos, México, 62209.
Tel. (777) 329 70 00, Ext. 3270 / correo IICBA@uaem.mx



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

SALVADOR PÉREZ ESTEVA | Fecha:2023-10-22 10:25:02 | Firmante

WC9bgnz0vExE432A5spYGwc8GTbSPOx+MeKPPHnm6DwT/Nu/LMCniiT3OPHvBi4EtmQFYn8XzDp8g39A5HnZUscjG9oSYtaYcj/5vrD0ftpkK1Ze8tO7fhGS78CTCPCX06wXZL/3AQBboOOih983dJyPqLxVyO3vTTWd57Lw9AhuomPsiy7KkbBHSQnG700RkKeeWECoj5+9UFS8NOdRBLiMMgp2YDZcR8r70U5A64vAq7kcRzbioiopyGN3f6iSQGFfourhvsy3MTclMQHingbFNkAuwbP79t+FiiK5wm3oKb7dAvpbJ/nhk8lLKATXnKE11qNnJRrRwK35JclLVRQ==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2023-11-12 20:32:35 | Firmante

U2Z6wdaHdpOoZEs9ulFYCkzMcuoZJD55S5H2PHAt1ihvEqLB1TbqwcPZLwxMk5gVuzDGRX7vuWlYkN057BxKSNMMaHjnnL9wGB9safY5yxKbcWENmHv9aVnz+fbNr+ThtQj2OtWa3QyJlbixLmsXmqjvI5Z25yNWUK6p0Dln1AwZr44BtvBqUfQKpy0RHNliKmwJuhcgY8ZFE37DOGvMNxxExBdpMnejq0raChatGC08q71sfA5ZFa9kOx4e/wGzXkjc3NHc7Nl36Bh+H55CfvZO2V153PRFvsmOuWgQ/LintOzyRIE3b247kw+YKlTlSoLS0ColntSt6++CMw==

EMILIO MARMOLEJO OLEA | Fecha:2023-11-29 07:36:36 | Firmante

I/ERQki1Uu2XyDu1ZelSf6Uvnw7i5ZpxNRDeKCOpGerRTB/q9WPnaNttY/E869SjTIUJ9W7CYeXw5EjUwn+hcFgd2DMWqCemXvzdeYb4RdNd+9CLDqHpzRGPm1NFkONBeUIPxtxQWExR3AHYTZ2h4QZUuJc4frAy/53SJ0pq/Wxy4DhaLJBjOVVJBofekVYz1UZk51QOA97KAyRxtozwkimOh1J7PesetCO9y1Omqm4jt1m90KapEw1Q9Z+NEJlmoG49GRLZqYooH88tQR1ZkbTQR4B9yJWvOMqUXpxrSzOwpo1wtijUhv3lcD4yHI+EYIAecGILu8Vd5x8zPbSgw==

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2023-12-01 11:47:33 | Firmante

vinrWKG4iwxv2gXZWER4/auN+/QVJCaj0wdReWkqv+TUTPFKsr4+KdpJKgxLu1n9VlgjMmuMnx9yp3eA0nPKjVV4lqHvGA55LLn/cJoW5125th4cHe0jj0Qv3zUhfPlYgannMue3Yp wd/oYJeDolEoBf/WT/Rs8mSJ/338MO8Fi0uQhAIQzHnXwVM8R7jD/HfospYs1bhBeymnO1bSX7oUDKsp7qpFVSAbt5bT+Ufd3BUgP3RUTf0mma5sMPaEOf2l+nFjHdmsUPo58 FMKN8BYdca0DgvA58z5dlIG+yqyqh9aCRuOzy9lq9Nt9/DyVEoyYmpb1jVkvTns3YUqTQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



2kIDO6quN

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/esa2cxJxMqQEple0NUaRnTiKbGuHp73u>

