

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Centro de Investigación en Ciencias

Renormalización Pacman en parámetros Siegel de tipo acotado

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTORADO EN CIENCIAS

PRESENTA:

Carlos Antonio Marin Mendoza

DIRECTOR: Dr. Rogelio Valdez Delgado

Cuernavaca, Morelos

Noviembre, 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y
APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**Renormalización Pacman en parámetros
Siegel de tipo acotado.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

CARLOS ANTONIO MARIN MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Rogelio Valdez Delgado

CUERNAVACA, MORELOS

NOVIEMBRE, 2023.

Lista del jurado

Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox.

Dra. Liudmila Lvovna Sabinina.

Dr. Carlos Cabrera Ocañas.

Dr. Rogelio Valdez Delgado.

Dr. Juan Pablo Díaz González.

Dr. Emilio Marmolejo Olea.

Dr. Daniel Antonio Rivera López.

Lista de publicaciones relacionadas con la tesis

Pacman Renormalization in Siegel Parameters of Bounded Type,
Carlos Antonio Marin-Mendoza, Rogelio Valdez-Delgado *Advances in
Pure Mathematics (APM)* Vol.13 No.10, October 25, 2023.
DOI: [10.4236/apm.2023.1310047](https://doi.org/10.4236/apm.2023.1310047)

Resumen

Un nuevo método de renormalización llamado renormalización pacman nos permite estudiar funciones de Siegel (con un sólo punto crítico) a través de las funciones tipo pacman. Se ha usado para investigar a los parámetros Siegel con número de rotación combinatoriamente periódico en la cardioide principal del conjunto de Mandelbrot [7]. Ya se sabe que se puede definir un operador de renormalización pacman tal que para los Siegel pacmen, con número de rotación combinatoriamente periódico, el operador es compacto, analítico y tiene un único punto fijo, en el cual es hiperbólico con variedad inestable uno-dimensional. En esta tesis observamos que este operador de renormalización pacman es compacto y analítico en cualquier parámetro Siegel pacman o función de Siegel con número de rotación combinatoriamente acotado. Esto nos permitió definir un operador de renormalización en las clases híbridas de los estándar Siegel pacmen al cual le construimos su herradura donde el operador es topológicamente semiconjugado al corrimiento a la izquierda en el espacio de sucesiones bi-infinitas de números naturales acotados por una constante.

Abstract

A new method of renormalization called Pacman renormalization allows us to study (unicritical) Siegel functions through pacman type functions. It has been used to investigate the Siegel parameters with combinatorially periodic rotation number in the main cardioid of the Mandelbrot set [7]. It is already known that it can be defined a pacman renormalization operator such that for Siegel pacmen, with combinatorially periodic rotation numbers, the operator is compact, analytic and has a unique fixed point, at which it is hyperbolic with one-dimensional unstable manifold. In this thesis we observe that this pacman renormalization operator is compact and analytic at any Siegel pacman or Siegel map with combinatorially bounded rotation number. This allows us to define a renormalization operator on the hybrid classes of the standard Siegel pacmen to which we built its horseshoe where the operator is topologically semiconjugated to the left shift on the space of bi-infinite sequences of natural numbers bounded by some constant.

Agradecimientos

Estoy muy agradecido con mi asesor el Dr. Rogelio porque desde que lo contacte para ingresar al posgrado y hasta el final de éste, siempre ha sido muy amable y ha tenido una gran disposición para trabajar, lo cual hizo del doctorado una experiencia muy agradable y enriquecedora. Le agradezco su guía y consejos, pues sin ellos no hubiera sido posible hacer éste trabajo. Y gracias por compartir sus conocimientos, así como el gran apoyo que me ha dado.

Les agradezco a los profesores de mi comité tutorial, el Dr. Carlos y la Dra. Gabriela por su gran apoyo y disposición durante todo el posgrado, por escucharme y darme sus consejos. También a los jurados por aceptar revisar el trabajo y sus comentarios para mejorarlo.

Le agradezco a Gemma por estar conmigo, apoyarme siempre y darme fuerzas en todos estos años, pues gracias a esto puedo decir que ésta ha sido una etapa muy feliz de mi vida.

Gracias a mis padres y a mi tía Lulú, porque siempre están al pendiente de mí ayudándome y apoyándome con mis decisiones.

A mi familia y amigos Lalo, Arturo, Néstor, Armando por acompañarme, motivarme e inspirarme durante esta etapa.

A los Profesores que a lo largo de mi vida, además de matemáticas, me enseñaron el valor del trabajo.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado durante el doctorado [CVU-714167].

Índice general

Lista del jurado	3
Lista de publicaciones relacionadas con la tesis	5
Resumen	7
Abstract	9
Introducción	15
1. Preliminares	21
1.1. Conjuntos de Julia y Fatou	21
1.2. Conjunto de Mandelbrot	27
1.3. Renormalización	28
1.4. Fracciones continuas	35
2. Renormalización pacman	39
2.1. Funciones pacman	39
2.2. Renormalización pacman	42
2.3. Analiticidad del operador de renormalización pacman	45
2.4. Renormalización en el disco y la función R_{prm}	47
3. Siegel pacman	53
3.1. Funciones tipo Siegel y Siegel pacman	53
3.2. El punto fijo de la renormalización pacman	57
4. Renormalización pacman en parámetros Siegel de tipo acotado	65
4.1. Extensión del operador de renormalización pacman	65
4.2. Herradura y conjugación del operador de renormalización pacman	66
Notación.	77
Bibliografía.	81

Introducción.

El conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} (Figura 1.2) fue estudiado por Benoit Mandelbrot a finales de los 70's aprovechando el gran avance de las computadoras. Douady fue quien propuso éste nombre para el conjunto \mathcal{M} pues Mandelbrot fue el primero en producir imágenes de dicho conjunto además de investigar sus propiedades, esto a partir del estudio de las iteraciones de la función $z \mapsto \lambda z(1 - z)$, pero tomando λ y z en los números complejos. Lo anterior desato grandes descubrimientos, en palabras de Mandelbrot:

“Se abren las cajas de Pandora de las posibilidades, las curvas fractales de Julia, tan gratas a la vista como al intelecto”.

El conjunto \mathcal{M} nos permite visualizar en el plano complejo la clasificación de los polinomios de grado dos con coeficientes en los complejos, a partir de sus “dinámicas”, es decir, el comportamiento de las órbitas de cada uno de los puntos en el plano complejo. Existen muchas propiedades importantes que tiene el conjunto de Mandelbrot, una de ellas es la autosimilaridad, ya que a simple vista podemos observar pequeñas copias, similares más no exactamente iguales, a él mismo pegadas a su alrededor y siempre que hacemos un acercamiento en su frontera nos encontraremos con una infinidad de copias emergiendo. Otra propiedad muy interesante del conjunto de Mandelbrot es la conexidad local en su frontera (MLC), pues aunque ya ha sido demostrada para algunos parámetros aún falta ser probada para toda su frontera, por ejemplo los parámetros que son infinitamente renormalizables [2]. Una de las principales razones de estudio del conjunto de Mandelbrot se debe a su relación con la conjetura de Fatou acerca de la densidad de las funciones racionales hiperbólicas en el espacio de las funciones racionales, pues la conjetura MLC implicaría la conjetura de Fatou en la familia de polinomios cuadráticos [2].

Una de las formas de estudiar la autosimilaridad y la conexidad local de \mathcal{M} es con la teoría de renormalización [2, 13]. Algunas de las teorías de renormalización más importantes son: la renormalización de Douady-Hubbard o de funciones de tipo cuadrático [5, 14], la renormalización parabólica [10] y la renormalización Siegel [16, 20].

Nuestro trabajo se enfoca en la renormalización de funciones tipo Siegel (Definición 3.1.1), que son funciones holomorfas $f : (U_f, \alpha) \rightarrow (\mathbb{C}, \alpha)$ con un punto fijo

indiferente $\alpha(f)$, el cual satisface $f(\alpha) = \alpha$ y $f'(\alpha) = e^{2\pi i\theta}$. Además $\alpha(f)$ tiene una vecindad donde es linealizable, esto quiere decir que la función f en dicha vecindad es conjugada a una rotación de ángulo $\theta \in [0, 1] \cap \mathbb{I}$, en el disco unitario. Su máximo dominio de linealización Z_f es llamado el disco de Siegel de f . Estaremos suponiendo que f tiene un único punto crítico el cual se encuentra en el quasicírculo ∂Z_f , entonces por [7, Teorema 3.2], θ tiene una fracción continua simple donde todos sus elementos son acotados (Definición 1.4.2).

Uno de los trabajos más importantes acerca de la renormalización de funciones tipo Siegel es el de McMullen [16], donde trabaja con *pares holomorfos* (*holomorphic pairs*) con el fin de complejizar los *pares analíticos que conmutan* (*analytic commuting pairs*), es decir, el comportamiento dinámico en la frontera de los discos de Siegel cerca del punto crítico. Esta renormalización relaciona la aproximación en fracciones continuas de un número θ con las funciones de primer retorno de la rotación de ángulo θ en intervalos de la frontera del disco unitario. Cuando aplica éstas herramientas a un polinomio cuadrático tipo Siegel con número de rotación con fracción continua periódica, demuestra que las renormalizaciones convergen a un punto fijo, lo que da una idea de la hiperbolicidad para estos parámetros.

Después Yampolsky [20] introdujo la renormalización cilíndrica y usando los resultados de la renormalización Siegel de McMullen, construye puntos fijos hiperbólicos para éste operador y prueba que la dimensión de su variedad inestable es exactamente uno.

Por otro lado en [3], Branner y Douady definieron un tipo de cirugía que encaja la basílica de la rama-1/2 (limb-1/2) en el conejo de la rama-1/3 (limb-1/3), el cual consiste en que para los parámetros en la rama-1/2, a su conjunto de Julia lleno se le pegan copias de ciertos sectores de su mismo conjunto de Julia lleno para así obtener conjuntos de Julia llenos de parámetros en la rama-1/3, y viceversa, se pueden remover ciertos sectores del conjunto de Julia lleno de los parámetros en la rama-1/3 para obtener conjuntos de Julia llenos de parámetros en la rama-1/2.

Usando los conceptos anteriores, en [7] definen un nuevo tipo de renormalización, llamada renormalización pacman. Para esto, se introducen las funciones tipo pacman (Definición 1.1.1), las cuales son funciones holomorfas $f : (U, \alpha) \rightarrow (V, \alpha)$ entre dos dominios anidados tales que $f : U \setminus \gamma_0 \rightarrow V \setminus \gamma_1$ es una cubierta doble ramificada donde γ_1 es un arco que conecta α con ∂V (Figura 2.1). La renormalización pacman primaria de f (Definición 2.2.2) se define al remover el sector S_1 acotado por γ_1 y su imagen γ_2 , luego se toma la primer función de retorno al complemento del sector S_1 (Figura 2.2). Esto se hace en tres pasos, primero definen una pre-renormalización como un prepacman (Definición 2.2.3), que es una función definida en un sector holomorfa a trozos con dos ramas; una rama es univalente mientras que la otra rama tiene un único punto crítico y un pequeño sector anclado a la otra preimagen del punto

fijo α . Así el prepacman se obtiene como las funciones de primer retorno al sector S anclado al punto fijo α . Entonces el sector S se pega adecuadamente y con ello se obtiene un pacman abstracto que finalmente se encaja en el plano complejo.

La renormalización pacman general de un pacman f existe si hay un prepacman definido en un sector S anclado al punto fijo α y tal que las funciones del prepacman son iteraciones de f que realizan el primer retorno al sector S (Definición 2.2.4). La renormalización pacman es combinatoriamente alguna iteración de la renormalización pacman primaria. Este tipo de renormalización se usa principalmente en Siegel pacman (Definición 3.1.3), que son funciones pacman que tienen una vecindad centrada en el punto fijo α donde son funciones de Siegel. Aunque para aplicar este operador de renormalización no es necesario que la función f sea un pacman, es suficiente que exista un prepacman en el plano dinámico de una función analítica f con un punto crítico y con un punto fijo distinguido α , para que un operador de renormalización pacman compacto y analítico pueda definirse alrededor de f (Observación 2).

En [7], Teorema 1.1 ellos probaron que para cualquier número de rotación θ con expansión en fracción continua periódica (Definición 1.4.2), el operador de renormalización pacman tiene un único punto periódico f_* , el cual es un Siegel pacman con número de rotación θ . Más aún, éste punto periódico es hiperbólico con variedad inestable (Definición 3.2.3) uno-dimensional y la variedad estable consiste de todos los Siegel pacman con el mismo número de rotación. Al aplicar el operador de renormalización pacman a los polinomios cuadráticos tipo Siegel en la cardioide principal de \mathcal{M} , con número de rotación combinatoriamente periódico, obtuvieron coeficientes de escalamiento para los centros de las pequeñas copias satélites del conjunto de Mandelbrot cercanas a estos parámetros Siegel de combinatoria periódica.

En su siguiente trabajo [6], usaron los resultados anteriores para probar que \mathcal{M} es localmente conexo en ciertos parámetros infinitamente renormalizables así como sus respectivos conjuntos de Julia, los cuales van a tener medida positiva. Además prueban que \mathcal{M} es autosimilar cerca de éstos parámetros Siegel con número de rotación de combinatoria periódica, pero no ahondaron en la extensión del operador de renormalización pacman a los parámetros Siegel con número de rotación de combinatoria acotada.

En el primer teorema de éste trabajo probamos que, debido a los resultados en [7], para cualquier Siegel pacman (o función de Siegel), con número de rotación de combinatoria acotada (Definición 1.4.2), existe alguna vecindad donde el operador de renormalización pacman es compacto y analítico, además actúa en los números de rotación como alguna iteración de la función R_{prm} (Lema 2.4.2).

Teorema 1. *Para cualquier Siegel pacman (o función de Siegel) $f : U_f \rightarrow V$ con número de rotación $\theta \in \Theta_{bnd}$, existe un Siegel prepacman $F = (S, f^{k-}, f^{k+})$ alrededor de cualquier punto $x \in \partial Z_f$, diferente del punto crítico o cualquiera de sus preimage-*

nes iteradas, y una función de pegado $\psi : S \rightarrow V'$ que proyecta a F al Siegel pacman $\mathcal{R}f : U' \rightarrow V'$ con número de rotación $R_{prm}^t(\theta)$, para algún $t \in \mathbb{N}$. También existen pequeñas vecindades de Banach $N_W(f, \varepsilon)$ y $N_{U'}(\mathcal{R}f, \delta)$ y un operador de renormalización pacman

$$\mathcal{R} : N_W(f, \varepsilon) \rightarrow N_{U'}(\mathcal{R}f, \delta)$$

tal que \mathcal{R} es compacto y analítico.

Cabe mencionar que cuando el número de rotación es combinatoriamente periódico (Definición 1.4.2) el operador de renormalización pacman no es necesariamente el mismo que en [7, Teorema 3.16], pues ellos construyeron un sector de renormalización muy específico que necesitaban para que el operador de renormalización pacman dejara fijo al Siegel pacman con número de rotación periódico.

Debido al Teorema 1 pudimos definir un operador de renormalización pacman \mathcal{R}_M y construirle una herradura (Definición 4.2.1), para ello necesitamos enfocarnos en un tipo específico de Siegel pacman, los estándar Siegel pacman (Definición 3.1.9), ya que podemos trabajar con sus clases híbridas (Teorema 3.1.10). Primero dada una $M > 0$ fija, definimos el conjunto de números de rotación irracionales $\Theta_{bnd}(M)$ (Definición 4.2.1), tales que su expresión en fracción continua (Definición 1.4.1) satisface que todos sus elementos son acotados por M . Con esto podemos definir la herradura o el conjunto de no escape \mathcal{A}_M (Definición 4.2.1), como el conjunto de clases híbridas de estándar Siegel pacman con número de rotación en $\Theta_{bnd}(M)$, estas clases son infinitamente renormalizables hacia atrás y hacia delante bajo el operador de renormalización \mathcal{R}_M (Definición 4.2.1), donde renormalizar una clase híbrida significa aplicar el operador de renormalización pacman \mathcal{R}_M a un representante de la clase híbrida, esto está bien definido debido al Teorema 1. El operador \mathcal{R}_M actúa en los números de rotación como la función R_{prm} iterada cierto número de veces de tal forma que elimina el primer elemento en la fracción continua del número de rotación.

Para la conjugación consideramos el espacio $\Sigma(M)$ de sucesiones bi-infinitas de números naturales acotados por la constante M , con la topología débil (Definición 4.2.3). El corrimiento hacia la izquierda $\omega : \Sigma(M) \rightarrow \Sigma(M)$ mueve cada elemento de la sucesión un espacio a la izquierda (Definición 4.2.3). El siguiente teorema lo probamos de manera similar a como Lyubich prueba [12, Lema 8.1], pero en lugar de pedir la condición de *a priori bounds*, usamos que el conjunto $\Theta_{bnd}(M)$ es cerrado (Observación 5).

Teorema 2. *Para cualquier $M > 0$ el conjunto \mathcal{A}_M es una herradura para el operador de renormalización $\mathcal{R}_M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_M$ el cual actúa en las clases de estándar Siegel pacman con número de rotación en $\Theta_{bnd}(M)$. La extensión natural $\tilde{\mathcal{R}}_M : \tilde{\mathcal{A}}_M \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_M$ es un homeomorfismo topológicamente conjugado al corrimiento a la izquierda $\omega : \Sigma(M) \rightarrow \Sigma(M)$ mientras que \mathcal{R}_M es semiconjugada a ω .*

Para mostrar que el conjunto \mathcal{A}_M es una herradura para el operador de renormalización \mathcal{R}_M necesitamos probar que cualquier elemento del conjunto \mathcal{A}_M tiene órbitas bi-infinitas y precompactas con respecto al operador de renormalización pacman \mathcal{R}_M y también que este operador de renormalización es topológicamente semiconjugado al corrimiento a la izquierda en el espacio $\Sigma(M)$ con la topología débil.

Con los Teoremas 1 y 2 construimos una herradura de renormalización para el operador de renormalización pacman \mathcal{R}_M para funciones Siegel pacman con número de rotación acotado. Debido a ésta conjugación con el corrimiento por la izquierda en el espacio de sucesiones bi-infinitas de números naturales acotadas por una constante (M) podemos saber perfectamente como es que el número de rotación va cambiando cada vez que el operador de renormalización es aplicado. Esto puede ser usado para construir una variedad estable e inestable para al operador \mathcal{R}_M y finalmente llegar que éste operador es hiperbólico, con lo cual se tendría una generalización del [7, Theorem 1.1] y un mejor entendimiento de los parámetros en la frontera de la molécula principal del conjunto de Mandelbrot.

En el primer capítulo damos algunos preliminares como son las definiciones de conjunto de Julia y el conjunto de Mandelbrot, además de algunos resultados clásicos de la dinámica holomorfa que ocupamos para desarrollar éste trabajo. Luego damos un breve contexto de la teoría clásica de renormalización (Douady-Hubbard), donde enunciamos el Teorema de Hiperbolicidad de Lyubich [12, Hyperbolicity Theorem], cuya primera parte nos sirvió como punto de partida para para trabajar nuestro resultado, el Teorema 2. Concluimos con la expansión en fracción continua de un número y algunas de sus propiedades que ocuparemos para trabajar con la renormalización pacman, además definimos los conjuntos de números de rotación combinatoriamente periódicos y acotados en los cuales estaremos trabajando con la función R_{prm} .

En el capítulo dos definimos las funciones tipo pacman, la renormalización pacman primaria y los prepacman, para así poder empezar a trabajar con la renormalización pacman. Luego vemos que esta renormalización nos genera un operador en el espacio de funciones analíticas y que además dicho operador es compacto y analítico. Finalmente vemos cómo se construye la renormalización de sector en el disco unitario, que es la base de la renormalización pacman primaria, por lo cual esta directamente relacionada con la función R_{prm} , la cual va a estar actuando en los números de rotación de las funciones pacman y damos un ejemplo de como actúa en la anti-media dorada $1/\phi^2$, donde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ es la media dorada o proporción áurea.

En el tercer capítulo se definen las funciones Siegel, Siegel pacman y una relación de gran importancia entre ellas, la conjugación híbrida, que después nos va a permitir trabajar con las clases de equivalencia. También vemos los principales resultados de

la renormalización pacman, entre ellos el Teorema del punto fijo hiperbólico (Teorema 3.2.5) para cualquier número de rotación de combinatoria periódica. Terminamos con un ejemplo de cómo se usa este teorema para estimar las distancias en el conjunto de Mandelbrot entre el punto $c(1/\phi^2)$ y los centros de las componentes hiperbólicas que van aproximando a la anti-media dorada $1/\phi^2$ mediante fracciones continuas.

En el capítulo cuatro primero vemos que el Teorema 1 es cierto. Después definimos la herradura de renormalización \mathcal{A}_M en las clases de estándar Siegel pacman con número de rotación con combinatoria acotada (Definición 4.2.1). Luego a partir de que una clase en \mathcal{A}_M nos determina una sucesión de clases híbridas de estándar Siegel pacmen podemos definir la extensión natural $\widehat{\mathcal{A}}_M$ de éste operador (Definición 4.2.3). Observamos que el conjunto $\Theta_{bnd}(M)$ es cerrado (Observación 5) lo cual se ocupa fuertemente para demostrar el Teorema 2. Dividimos la prueba del Teorema 2 en dos lemas. En el primero vemos que la herradura de renormalización es precompacta respecto a la renormalización de órbitas y en el segundo probamos que la extensión natural es conjugada a la función de corrimiento a la izquierda en el espacio de sucesiones bi-infinitas de números naturales acotados por una constante. Concluimos con algunas posibles direcciones para continuar éste trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En ésta tesis trabajaremos con funciones holomorfas en el plano complejo \mathbb{C} y la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Principalmente estamos interesados en la dinámica de éstas funciones cuya teoría puede consultarse en [1, 4, 14].

1.1. Conjuntos de Julia y Fatou

La dinámica estudia sobre todo los procesos de *iteración*, los cuales repiten los mismos procedimientos sobre resultados obtenidos en el paso anterior. Por ejemplo al iterar una función en el plano complejo es que se generan los conjuntos de Julia y Fatou (Definición 1.1.5).

Definición 1.1.1. Sean $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y $f : X \rightarrow X$ una función. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea f^n la función $f^n : X \rightarrow X$ definida para cada $x \in X$ como

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \text{ si } n \geq 1.$$

A $f^n(x)$ le llamaremos la *n-ésima iteración* de f en x .

Si f es una función invertible en X y su inversa es la función f^{-1} , podemos definir $f^{-n} : X \rightarrow X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como:

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(x), f^{-2}(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)), \dots, f^{-n}(x) = f^{-1}(f^{-(n-1)}(x)) \text{ si } n \geq 1.$$

Así para cada $x \in X$ se define la **órbita** de x bajo f como la sucesión de puntos $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ y en caso de que f sea invertible en X también podemos tomar la órbita $\{f^{-n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$.

Por otro lado sea $A \subset X$, al considerar $f^{-1}(A)$ nos referimos a la imagen inversa de A bajo la función f es decir al conjunto $\{z \in X \mid f(z) \in A\}$. Por lo cual aunque f no sea una función invertible, podemos definir para toda $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$f^{-(n+1)}(A) = f^{-1}(f^{-n}(A)).$$

Por ejemplo si f es un polinomio de grado n , entonces dado $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima iteración f^k será un polinomio de grado n^k .

En el caso de que f sea un polinomio, consideramos que $f(\infty) = \infty$ y entonces $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Por lo cual podemos ver a $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como una sucesión de funciones analíticas en $\widehat{\mathbb{C}}$.

La descripción del comportamiento local cerca de los puntos fijos sirve como punto de partida para el estudio de los sistemas dinámicos complejos.

Definición 1.1.2. Decimos que un punto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un **punto periódico** de periodo $k \in \mathbb{N}$ de una función f si $f^k(z_0) = z_0$ y $f^j(z_0) \neq z_0$ para toda $j < k$. Como la órbita de z_0 es finita y consta sólo de k elementos, se le llama **órbita periódica** o **ciclo de periodo k** .

El número $\lambda = (f^k)'(z_0)$, se llama **multiplicador** de f en z_0 . Los puntos fijos se clasifican de acuerdo a su multiplicador como sigue:

- a) *Atractor* si $|\lambda| < 1$. Cuando $\lambda = 0$ le llamamos *superatractor*.
- b) *Repulsor* si $|\lambda| > 1$.
- c) *Neutral racional* si $|\lambda| = 1$ y $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{Q}$.
- d) *Neutral irracional* si $|\lambda| = 1$ y $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{I}$.

Por otra parte decimos que z_0 es un **punto crítico** de la función analítica f en z_0 si $f'(z_0) = 0$.

Notemos que podemos ver a un punto k -periódico de f como un punto fijo de la función f^k , por lo cual toda la teoría de los puntos fijos se puede aplicar a un punto k -periódico para la función f^k . Además el multiplicador de un k -ciclo es el mismo en cualquier punto de la k -órbita pues por la regla de la cadena se tiene

$$(f^k)'(z) = \prod_{n=0}^{k-1} f'(f^n(z))$$

por lo cual el comportamiento de la función alrededor de cualquier punto del ciclo es el mismo.

Por ejemplo para $f_c(z) = z^2 + c$, con $c \in \mathbb{C}$, sus puntos fijos cumplen $f_c(z_0) = z_0$ por lo tanto son dos

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

excepto cuando $c = 1/4$ pues ambos puntos fijos colapsan en uno sólo $z_0 = 1/2$, el cual va a ser un punto fijo neutral racional. El punto fijo con el signo positivo en la raíz

cuadrada, siempre será un punto fijo repulsor (excepto cuando $c = 1/2$) y se le llama **β -punto fijo**. Mientras que el punto fijo con el signo negativo en la raíz cuadrada se le llama **punto fijo** α y puede variar entre ser un punto fijo atractor, neutral o repulsor.

El punto fijo α es atractor cuando $|f'_c(\alpha)| < 1$ es decir

$$|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1.$$

Y tendremos que el punto fijo α es neutral cuando $f'_c(\alpha) = 2\alpha = e^{2\pi i\theta}$, por lo cual

$$c(\theta) = \frac{e^{2\pi i\theta}}{2} - \left(\frac{e^{2\pi i\theta}}{2}\right)^2. \quad (1.1)$$

Nos interesan los multiplicadores λ de los puntos periódicos porque cerca de éstos puntos es fácil decir como se va a comportar la función, pues al ser diferenciable se puede aproximar como λz . Por ejemplo los puntos suficientemente cercanos a un punto fijo atractor z_0 van a empezar a acercarse al punto fijo con cada iteración de la función, más aún podemos decir que la sucesión de funciones $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ va a converger uniformemente en una vecindad del punto fijo z_0 a la función de valor constante z_0 . Por otro lado puntos suficientemente cercanos a un punto fijo repulsor se alejan de él con cada iteración.

Otra forma de estudiar el comportamiento dinámico de una función alrededor de ciertos puntos es transformarla en una función más sencilla a través de un cambio de coordenadas, es decir, bajo una conjugación.

Definición 1.1.3. Decimos que una función $f : U \rightarrow U$ es **topológicamente conjugada** a una función $g : V \rightarrow V$, si existe un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ tal que

$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

En particular estamos interesados cuando tenemos una **conjugación conforme**, es decir, cuando φ es un homeomorfismo **conforme**, esto es analítica y biyectiva o equivalentemente derivable y el valor de su derivada distinto de cero en todos los puntos de su dominio.

Las funciones conformes tienen la propiedad especial de que conservan el ángulo entre dos curvas que pasan por un punto. Por ejemplo, cuando pedimos que la función de conjugación $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sea conforme y que además sea una biyección de plano en el plano, entonces debe ser de la forma $\varphi(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

De la definición anterior podemos ver que φ también es una conjugación entre f^n y g^n , o en caso de que f y g sean invertibles, entonces φ conjugará a sus inversas. Por lo tanto la imagen $\varphi(z_0)$ de un punto k -periódico z_0 de f va a ser un punto k -periódico

de su conjugada g . Si además la conjugación φ es conforme, entonces también se van a preservar los multiplicadores. Por lo cual podemos decir que bajo una conjugación conforme se van a preservar las dinámicas.

Estaremos trabajando con una familia en particular de los polinomios de segundo grado en los complejos, dado $c \in \mathbb{C}$ definimos

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

Esta familia tiene la propiedad especial de que dado cualquier polinomio de segundo grado en los complejos $P(z)$, existe un único $c \in \mathbb{C}$ tal que $P(z)$ y $f_c(z)$ son conformemente conjugados. Así, basta estudiar la dinámica de los polinomios $f_c(z)$ para entender la dinámica de los polinomios de grado dos, además de que éstos polinomios están parametrizados por el plano complejo.

Notemos que el 0 es el único punto crítico de ésta familia de polinomios.

Lo siguiente también sucede no sólo para los puntos fijos sino para los k -ciclos que son puntos fijos de f^k , para toda $k \in \mathbb{N}$. Suponga que tenemos una función analítica en z_0

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + a(z - z_0)^p \dots$$

con $p \geq 2$, por el Teorema de Koenings [4, Teorema 2.1] si z_0 es un punto fijo atractor (no superatractor), entonces siempre existe una conjugación conforme entre $f(z)$ y la función λz , análogamente si z_0 es un punto fijo repulsor. Mientras que si tenemos un superatractor, por el Teorema de Boettcher [4, Teorema 4.1] sabemos que existe una conjugación conforme de $f(z)$ con la función z^p en el círculo unitario.

Cuando tenemos un punto neutral racional puede conjugarse en ciertos sectores anclados a z_0 (pétalos atractores) con la función $z + 1$ en el semiplano superior donde el ∞ toma el papel de z_0 [4, Capítulo 2, Sección 5].

El caso que más nos va a interesar es cuando $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{I}$, para éste existe una conjugación conforme con la rotación de ángulo θ en el círculo unitario siempre y cuando θ sea **diofantino** [4, Teorema 6.4], es decir, mal aproximado por números racionales, en el sentido de que deben existir $c > 0$ y $\mu < \infty$ tales que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\mu},$$

para todos los enteros p, q con $q \neq 0$. Para $\mu > 2$ fijo, la condición anterior se cumple para casi todos los números reales. Cuando existe ésta conjugación decimos que f es **linealizable** en z_0 con **número de rotación** θ y al máximo dominio de linealización Z_f le llamamos **disco de Siegel** (Figura 1.1) y decimos que f es una **función de Siegel** (Definición 3.1.1). Mientras que, si el punto fijo neutral irracional z_0 es tal que

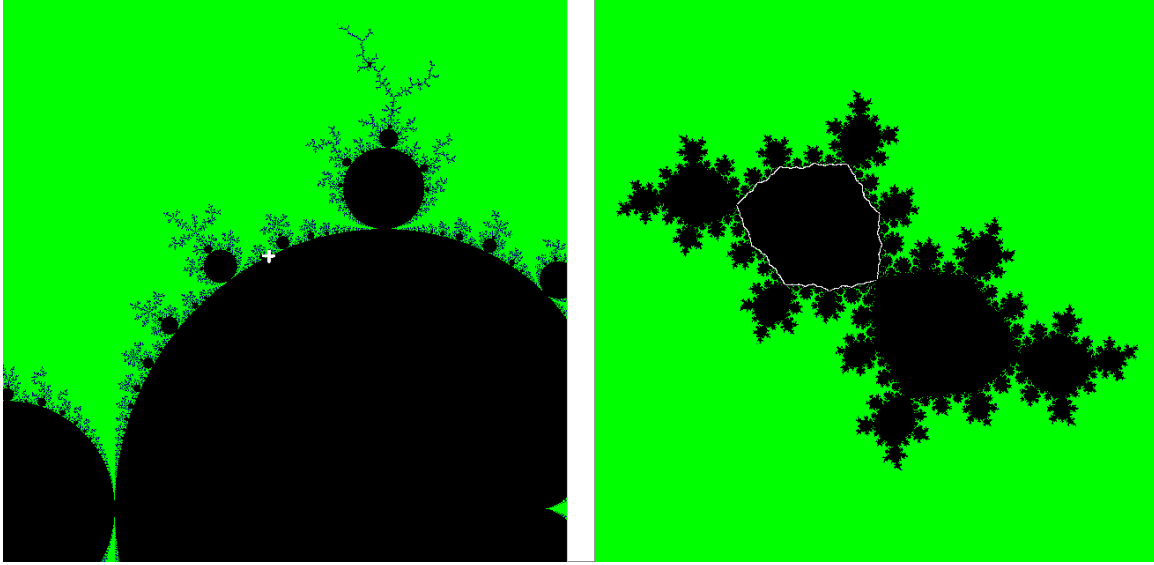


Figura 1.1: En el lado izquierdo se muestra con una cruz blanca la posición del parámetro $c(\theta) \in \partial\mathcal{M}$ cuando θ es la anti-media dorada, es decir, $\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.381966\dots = 1 - [0; \bar{1}]$, el cual nos genera una función de Siegel $f_{c(\theta)}$ la cual tiene un conjunto de Julia que se muestra en el lado derecho de la figura, donde la frontera del disco de Siegel es la curva de color blanco.

f no es linealizable en z_0 , se dice que tenemos un punto de **Cremer** [17, Capítulo 11].

Para trabajar los conjuntos de Julia y de Fatou de un polinomio, los cuales se empezaron a estudiar por P. Fatou y G. Julia aproximadamente en la segunda década del siglo pasado, se ocupa la noción de una familia normal de funciones.

Definición 1.1.4. Sea $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un subconjunto abierto y conexo. Sea $\mathcal{F} : \{f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas en U . Decimos que \mathcal{F} es una **familia normal** en $z_0 \in U$ si para toda sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos en una vecindad de z_0 contenida en U , a una función f_0 .

Los conjuntos de Julia y Fatou de la función van a dividir a $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos partes, el conjunto de Fatou contiene a los puntos donde la familia de funciones generada por las iteradas de la función se comporta de una misma manera o de manera estable, mientras que el conjunto de Julia contiene a los puntos caóticos, es decir, en cualquier vecindad de éstos existen puntos que bajo las iteraciones de f se comportan de manera muy distinta.

Definición 1.1.5. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función analítica. Definimos el **conjunto de Fatou** de f , $F(f)$, como el conjunto de puntos $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ para los cuales existe una

vecindad donde la familia de funciones $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal. Se define el **conjunto de Julia** de f , $J(f)$, como el complemento del conjunto de Fatou.

También pueden definirse el conjunto de **Julia lleno** o el conjunto de puntos prisioneros $K(f)$ como todos los puntos tales que su órbita está acotada (en las figuras 1.1 y 1.2 (lado derecho) $K(f)$ está pintado de color negro) y al conjunto de Julia como la frontera de éste conjunto. Mientras que el conjunto de Fatou sería el complemento del conjunto de Julia. Las definiciones son equivalentes pero se utiliza la definición de familia normal porque así puede usarse el Teorema de Montel ([1, Teorema 3.3.4]) y la teoría de sucesiones funciones analíticas equicontinuas.

A continuación tenemos un listado de las propiedades más importantes de los conjuntos de Julia y Fatou de un polinomio.

Proposición 1.1.6. *Dado un polinomio f su conjunto de Julia J cumple:*

1. $J \neq \emptyset$, $J \subset K$, el interior de J es vacío y J es compacto.
2. J y F son completamente invariante bajo f es decir $J = f(J) = f^{-1}(J)$ y $F = f(F) = f^{-1}(F)$.
3. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $J = f^k(J) = f^{-k}(J)$ y $J(f) = J(f^k)$.
4. J es un conjunto no numerable y perfecto, es decir, cerrado y sin puntos aislados.
5. Si $z_0 \in J$, entonces $\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z_0)$ es denso en J .
6. El conjunto de puntos periódicos repulsivos es denso en J .
7. El conjunto de los puntos periódicos atractores de f está contenido en F y el conjunto de puntos periódicos repulsivos en J .
8. El ∞ es un punto fijo superatractor, por lo tanto pertenece al conjunto de Fatou.

Uno de los teoremas más importantes de Fatou, es el siguiente el cual nos dice que la conexidad del conjunto de Julia de un polinomio depende de las órbitas de sus puntos críticos.

Teorema 1.1.7. *Para un polinomio en \mathbb{C} , su conjunto de Julia lleno es conexo si y sólo si las órbitas de sus puntos críticos son acotadas.*

1.2. Conjunto de Mandelbrot

A finales de la década de los 70's B. Mandelbrot hizo un experimento en un laboratorio de cómputo de IBM que consistió en pintar cada pixel de la pantalla que representa a un punto $c \in \mathbb{C}$ de negro si el conjunto de Julia del polinomio $f_c(z) = z^2 + c$ era conexo y de blanco si era desconexo. Lo que encontró fue un conjunto delimitado por una curva ramificada que él llamó *Separator* (Figura 1.2), este conjunto es el que ahora conocemos como el conjunto de Mandelbrot.

Para trabajar con dicho conjunto, estaremos ocupando la familia de polinomios cuadráticos f_c , donde $c \in \mathbb{C}$ y denotaremos su conjunto de Julia y de Fatou como J_c y F_c , respectivamente. El siguiente corolario se obtiene del Teorema 1.1.7, pues la familia f_c tiene al cero como su único punto crítico.

Corolario 1.2.1. *El conjunto J_c es conexo si y sólo si la órbita del cero es acotada. Por otro lado J_c es un conjunto de Cantor (totalmente desconexo) si y sólo si la órbita del cero no es acotada.*

Así para definir el conjunto de Mandelbrot es suficiente fijarnos en la órbita del cero para la familia de polinomios f_c .

Definición 1.2.2. *Definimos al conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} como*

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}.$$

El conjunto de Mandelbrot nos permite entender como es que va cambiando la dinámica de las funciones f_c conforme el parámetro $c \in \mathbb{C}$ se va moviendo a través de \mathcal{M} , ya que el comportamiento de J_c , en particular los ciclos periódicos de f_c , están estrechamente relacionados con la ubicación de $c \in \mathcal{M}$. Por ejemplo si f_c tiene un ciclo indiferente, entonces $c \in \partial\mathcal{M}$, pero si tiene un ciclo atractor, entonces c está en el interior de \mathcal{M} .

La **cardioide principal** es la curva más grande con forma de corazón que delimita a \mathcal{M} y se define como los parámetros $c \in \partial\mathcal{M}$ para los cuales f_c tiene un punto fijo indiferente, la cual está parametrizada en la ecuación (1.1) por el ángulo $\theta \in [0, 1]$. Cuando $\theta = p/q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ se dice que $f_{c(\theta)}$ tiene un punto fijo **parabólico** en su punto fijo α , además de $c(\theta)$ brota una componente hiperbólica con combinatoria p/q la cual contiene una copia homeomorfa del conjunto de Mandelbrot con combinatoria p/q . Mientras que si $\theta = p/q \in [0, 1] \cap \mathbb{I}$ y además θ es diofantino, entonces tendremos parámetros $c(\theta)$ los cuales generan funciones $f_{c(\theta)}$ de tipo Siegel con número de rotación θ , por ejemplo cuando θ es igual a la **anti-media dorada** denotada $1/\phi^2$ (Figura 1.1), donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la **media dorada o razón áurea**, por lo cual

$$\frac{1}{\phi^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

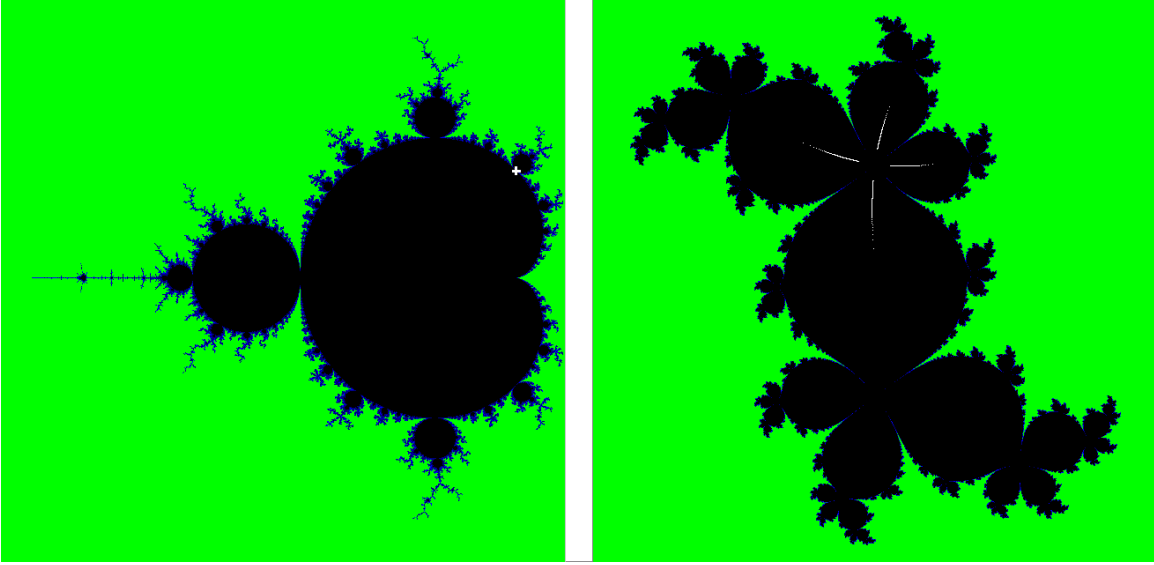


Figura 1.2: Del lado izquierdo observamos al conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} , con una cruz blanca indicando la posición del parámetro $c(\theta) \in \partial\mathcal{M}$ cuando $\theta = 1/4$, el cual nos genera una función parabólica $f_{c(1/4)}$ cuyo conjunto de Julia se muestra en el lado derecho de la figura, donde la línea blanca punteada es la órbita que sigue el 0 entre cada pétalo de la flor de Fatou convergiendo su centro, es decir, al punto fijo α con multiplicador $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Ya se han demostrado distintas propiedades del conjunto de Mandelbrot por ejemplo: $\mathcal{M} \subset \overline{B(0,2)}$, es conexo, compacto, su complemento también es conexo, entre otras [2, Sección 7]; pero todavía existen problemas no resueltos acerca de \mathcal{M} , el más importante es el de probar que la frontera de \mathcal{M} es localmente conexa, además éste problema se relaciona con la conjetura de la densidad de las **funciones racionales hiperbólicas** (funciones cuyas órbitas de sus puntos críticos convergen a sus ciclos periódicos atractores) en el espacio de funciones racionales [2].

1.3. Renormalización

Cuando las nuevas estructuras que descubrimos resultan ser semejantes a la estructura completa se da el fenómeno de *autosimilaridad*, ésta es una de las peculiaridades más importantes del conjunto de Mandelbrot ya que podemos encontrar una infinidad de pequeños subconjuntos muy similares a él, mas no iguales, en una vecindad de cualquier punto en la frontera de \mathcal{M} . La mayoría sólo son visibles al hacer un acercamiento lo suficientemente grande a la frontera de la imagen de \mathcal{M} por medio de una computadora. Para estudiar este fenómeno se usa la teoría de renormalización la cual fue introducida por Douady y Hubbard [5]. Para esto se tiene que ampliar

el lugar de trabajo de la familia de polinomios cuadráticos del tipo f_c al espacio de funciones de tipo cuadrático, el cual es un espacio de funciones de dimensión infinita que conserva las propiedades que nos interesan de dichos polinomios.

Definición 1.3.1. Sean $U \subset U'$ dos discos topológicos en \mathbb{C} . Una función $f : U \rightarrow U'$ holomorfa, cubriente ramificada de grado dos se llama una **función de tipo cuadrático**. Se normalizan de tal forma que el punto crítico sea el 0. Su conjunto de Julia lleno se define como su conjunto de no escape

$$K(f) = \{z \in U : f^n(z) \in U, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

y su frontera será el conjunto de Julia $J(f)$.

Las funciones de tipo cuadrático generalizan de cierta forma a los polinomios de segundo grado pues como ya dijimos conservan las principales características dinámicas de los polinomios cuadráticos, por ejemplo $K(f)$ y $J(f)$ son conexos si y sólo si $0 \in K(f)$, en caso contrario son de tipo Cantor [14, 28.1.3].

Para trabajar con **gérmenes de tipo cuadrático** se define la relación de *ajuste*, la cual nos dice que una aplicación de tipo cuadrático es el ajuste de otra si ambas funciones son iguales en la restricción de un dominio más pequeño que contenga al punto crítico 0. Por ejemplo cualquier polinomio f_c determina un germen de tipo cuadrático, al restringir f_c a la preimagen de un disco suficientemente grande (que contenga la imagen del punto crítico).

En [12], Lyubich dota al subconjunto de gérmenes con conjunto de Julia conexo con una topología y una estructura analítica compleja modelada por espacios de Banach.

Para definir una nueva clase de conjugación más general que la conjugación conforme se usan las funciones quasiconformes. Estas funciones que son una herramienta estándar para el estudio de sistemas dinámicos, aunque generan curvas de Jordan bastante irregulares tienen, en cierta forma, una cota para su deformación.

Definición 1.3.2. Usando la notación estándar sean $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$ y

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ es **K -quasiconforme** si localmente tiene derivadas distribucionales en $L^2(X)$ y si la dilatación compleja μ dada localmente por

$$\mu(z) \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = \frac{\partial f / \partial \bar{z} d\bar{z}}{\partial f / \partial z dz}$$

satisface

$$|\mu| < \frac{K-1}{K+1}, \text{ casi donde quiera con la medida de Lebesgue.}$$

A la dilatación μ también se le llama **coeficiente de Beltrami** de f y a la ecuación $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ se le llama *ecuación de Beltrami*.

Con ayuda de las funciones quasiconformes se define una nueva clase de conjugación más general que la conjugación conforme, la conjugación híbrida [12, p. 339]. Nosotros también estaremos ocupando ésta conjugación para relacionar a las funciones de Siegel y Siegel pacman (Definición 3.1.4), pues ésta conjugación sigue preservando la dinámica dentro de los conjuntos de Julia.

Definición 1.3.3. *Dos funciones de tipo cuadrático $f : U \rightarrow U', g : V \rightarrow V'$ son **topológicamente (quasiconformemente) conjugadas** si existe un homeomorfismo (quasiconforme) $h : (U', U) \rightarrow (V', V)$ tal que $h(f(z)) = g(h(z))$, para toda $z \in U$. Dos gérmenes de tipo cuadrático son topológicamente (quasiconformemente) conjugados si existe una elección de representantes que son topológicamente (quasiconformemente) conjugados. Si h es conforme casi dondequiera en el conjunto de Julia lleno entonces decimos que f y g son **híbridos equivalentes**.*

De hecho de acuerdo con el Teorema de Enderezamiento [5, Straightening Theorem 1] las restricciones del dominio que hacen a los polinomios cuadráticos funciones de tipo cuadrático representan a todas las funciones de tipo cuadrático bajo la relación de conjugación híbrida, es decir cualquier función de tipo cuadrático es híbrida equivalente a alguna restricción de un polinomio cuadrático f_c y éste polinomio es único si el conjunto de Julia es conexo, las **clases híbridas** se denotan $\mathcal{H}(c)$. Esto lleva a una laminación por clases híbridas de la familia de gérmenes de funciones de tipo cuadrático con conjunto de Julia conexo. Las cuales son subvariedades holomorfas, conexas de codimensión-uno del espacio de gérmenes de funciones de tipo cuadrático [12]. Con ayuda de la función de enderezamiento se prueba que hay homeomorfismos conformes en el interior de las copias y también homeomorfismos quasiconformes en el complemento de las copias del conjunto de Mandelbrot.

Podemos entender un sistema dinámico f a pequeña escala, al considerar una restricción y una cierta iteración (la de primer retorno al dominio restringido) de la función de tipo cuadrático y encontrar otra dinámica relacionada con la original, el nuevo sistema dinámico $\mathcal{R}(f)$ se le llama la renormalización del sistema original f . Puede pasar que $\mathcal{R}(f)$ sea muy parecido a f y entonces podemos tratar de repetir éste procedimiento y construir una segunda renormalización $\mathcal{R}^2(f)$, hay casos donde podemos repetir este procedimiento infinitamente y con ello obtener una sucesión de renormalizaciones, la cual va a estar relacionada con el sistema original [13]. La siguiente definición de renormalización fue introducida por Douady-Hubbard [14, 28.4.1].

Definición 1.3.4. *Sea f una función de tipo cuadrático tal que podemos encontrar discos topológicos $U \Subset U'$ alrededor del 0 y un entero $p > 0$ tal que $g = f^p : U \rightarrow U'$*

vuelve a ser una aplicación de tipo cuadrático con conjunto de Julia conexo. Supongamos que los pequeños conjuntos de Julia $f^k(J(g))$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ no se intersectan entre ellos excepto tal vez en sus puntos fijos repulsivos β . Entonces la función f se dice **renormalizable de periodo** p y a la función g se le llama **pre-renormalización** de f . Al germen de la función de tipo cuadrático g , considerada módulo una conjugación afín, se le llama **renormalización** $\mathcal{R}(f)$ de f .

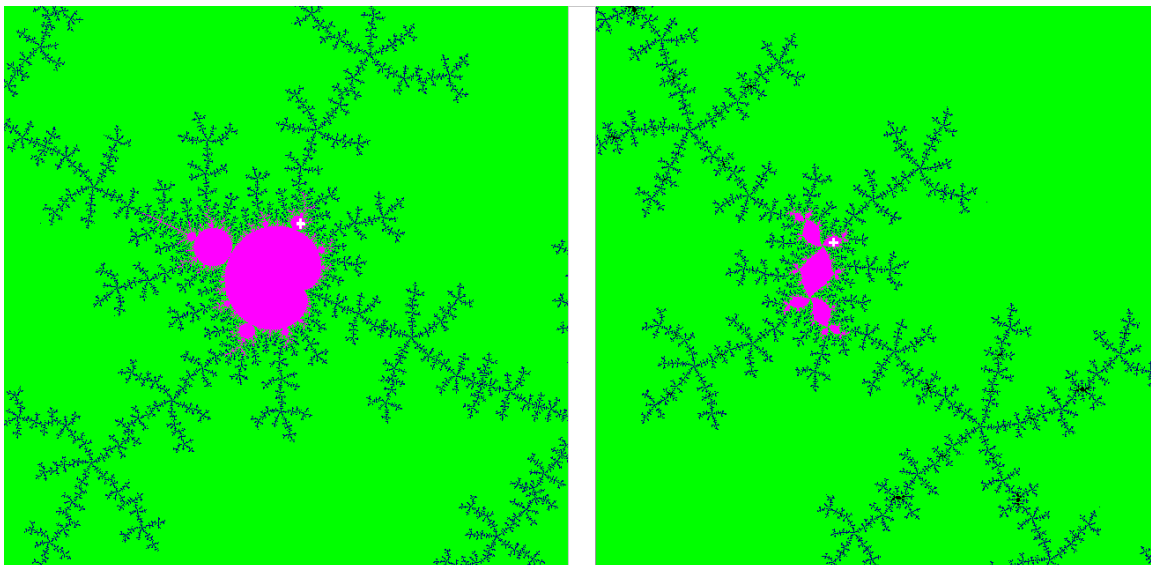


Figura 1.3: En el lado izquierdo de la figura en color rosa observamos un copia maximal de \mathcal{M} de periodo 12, con una cruz blanca se indica la posición del parámetro c en la copia. En el lado derecho de la figura observamos una parte del conjunto de Julia de f_c y en rosa está el conjunto de Julia resultante al considerar una renormalización de periodo 6, es decir, al considerar una restricción de f_c^6 , donde la cruz blanca indica el valor crítico tanto de f_c como de f_c^6 .

Notemos que cuando aplicamos la renormalización a una función de tipo cuadrático que proviene de la restricción de un polinomio, no obtenemos un polinomio sino una función de tipo cuadrático, es por esto que se introducen éste tipo de funciones para trabajar en un mismo espacio con el operador de renormalización. Así la renormalización de un germen será la renormalización de uno de sus representantes, ésta misma idea se aplica a las clases híbridas de los Siegel pacman (Definición 4.2.1).

Si tenemos un parámetro superatractor $c \neq 0$ en \mathcal{M} , gracias al teorema de enderezamiento, le podemos asociar una copia del conjunto de Mandelbrot $c * \mathcal{M}$, donde el homeomorfismo entre la copia y todo el conjunto manda al *centro* c en el 0 y el punto r_c correspondiente a $1/4$ se le llama la *raíz*. Cada copia $c * \mathcal{M}$ tiene un $p > 1$ tal que cualquier punto en la copia $c' \in c * \mathcal{M}$ (excepto posiblemente la raíz) y cualquier

gérmen de tipo cuadrático en la clase híbrida $f \in \mathcal{H}(c')$, tiene un dominio $U \ni 0$ tal que $f^p|_U$ es una aplicación de tipo cuadrático y por lo tanto f es **renormalizable de periodo p** . El **periodo de la copia** $p(c * \mathcal{M})$ es el máximo de tales p y decimos que la copia $c * \mathcal{M}$ es **máximal** si existe sólo una de tales p o equivalentemente, si no pertenece a otra copia excepto a \mathcal{M} (Figura 1.3).

Debido a que una vez que tenemos una función de tipo cuadrático que sea renormalizable bajo cierto periodo p y que en una vecindad suficientemente pequeña de éste todas las funciones son de tipo cuadrático y renormalizables con el mismo periodo, entonces existe un **operador de renormalización canónico** \mathcal{R} definido como la p -ésima iterada de f restringida a una vecindad adecuada U del punto crítico de tal forma que $f^p|_U$ es una función de tipo cuadrático. Este operador de renormalización actúa en el espacio de gérmenes de tipo cuadrático con conjunto de Julia conexo (Figura 1.4) y como éste espacio tiene una estructura analítica compleja modelada por espacios de Banach [12], el operador de renormalización tiene una extensión analítica a alguna vecindad de los gérmenes pues lo que hace el operador de renormalización es tomar una restricción de la p -ésima iteración, por lo cual el operador es analítico [12, Sección 5.3].

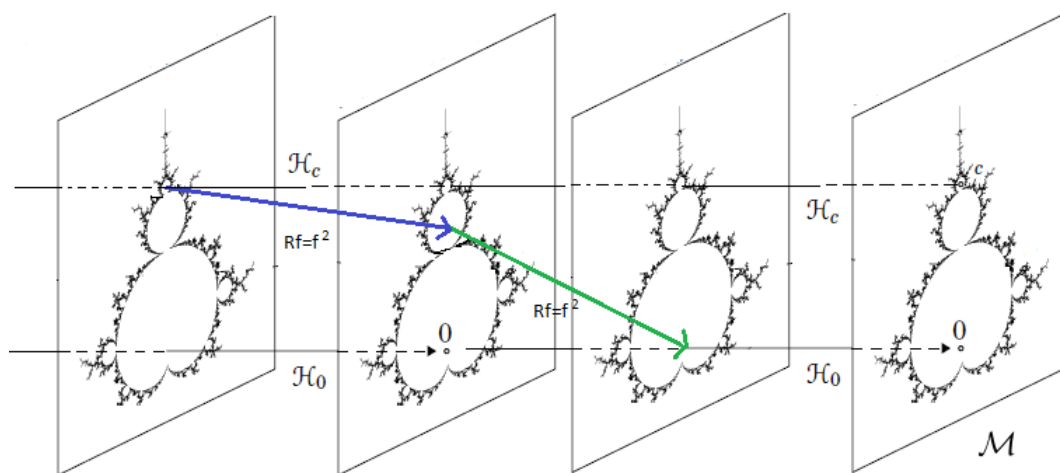


Figura 1.4: En la imagen tenemos un esquema de como se va moviendo el operador de renormalización \mathcal{R} entre transversales a las clases híbridas de gérmenes de funciones de tipo cuadrático \mathcal{H}_c . En éste caso primero se manda la clase \mathcal{H}_c del centro c de la componente hiperbólica de periodo 4 a la clase del centro de la componente de periodo 2 y finalmente a la clase del centro de la componente de periodo uno es decir, la clase correspondiente al parámetro 0, todo mediante renormalizaciones de periodo 2.

Por ejemplo hay funciones de tipo cuadrático f que sólo podemos renormalizar un número finito de veces pero si la renormalización $\mathcal{R}^n(f)$ está definida para toda

$n \in \mathbb{N}$, entonces decimos que f es **infinitamente renormalizable**, esto significa que el parámetro $c \in \mathcal{M}$ que representa a la clase híbrida de f pertenece a una infinidad de copias del conjunto de Mandelbrot. Las propiedades asintóticas de la sucesión de renormalizaciones $\{\mathcal{R}^n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ refleja la microestructura del sistema original; por ejemplo si $\mathcal{R}^n(f)$ converge a una función f_* independientemente de f que varía en una clase híbrida, entonces todas las funciones en dicha clase tienen en pequeñas escalas una geometría universal representada por f_* (Teorema 1.3.5 inciso ii).

El **itinerario o tipo combinatorio** [12, p. 366] de una función infinitamente renormalizable f es

$$\tau(f) := \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots\}$$

donde M_n es la copia máxima que contiene al parámetro c_n de la clase híbrida $\mathcal{R}^n(f)$, de la n -ésima renormalización de f .

Se dice que f tiene **combinatoria real** si todas las copias en $\tau(f)$ son reales, es decir, su centro es un número real. Una función de tipo cuadrático infinitamente renormalizable se dice de **tipo acotado** si el itinerario $\tau(f)$ está variando entre un número finito de copias M_n , lo cual es equivalente a que todos los periodos $p(M_n)$ de las copias son acotados, ésto guarda una gran similitud con los ángulos de rotación de tipo acotado (Definición 1.4.2) y por eso trabajamos la extensión del operador de renormalización de Siegel pacman con ángulos de rotación de tipo periódico análogamente a como lo hace Lyubich para extender el operador de renormalización de parámetros infinitamente renormalizables con itinerario estacionario a itinerario acotado [12, Sección 8].

La teoría de renormalización también está relacionada con la conexidad local de \mathcal{M} , pues por ejemplo ya se sabe que para cualquier polinomio f_c , con $c \in \mathcal{M}$, que no sea infinitamente renormalizable, entonces \mathcal{M} es localmente conexo en c . Lo cual reduce la conjetura MLC a los parámetros en la frontera de \mathcal{M} que son infinitamente renormalizables [2, Teorema 11.7].

Lo que se busca con la construcción de un operador de renormalización es probar su hiperbolicidad [11, Capítulo 4]) en ciertos parámetros pues con ello se obtienen resultados acerca de la autosimilaridad de \mathcal{M} , ésto es lo que hace Lyubich con el siguiente Teorema [12, Hyperbolicity Theorem].

Teorema 1.3.5. *Sea Σ_d el espacio de sucesiones bi-infinitas en d símbolos y $\omega : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$ la transformación de corrimiento de un lugar hacia la izquierda en éste espacio. Si existe un operador de renormalización \mathcal{R} de tipo real acotado en la unión de d -franjas de renormalización, entonces existe un conjunto \mathcal{R} -invariante y compacto \mathcal{A} , la **herradura de renormalización**, con las siguientes propiedades:*

- i) La restricción $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ es topológicamente conjugado a $\omega|_{\Sigma_d}$ y es uniformemente hiperbólico.*

- ii) Cualquier hoja estable $\mathcal{W}^s(f)$, $f \in \mathcal{A}$, coincide con la clase híbrida de f y tiene codimensión uno.
- iii) Cualquier hoja inestable $\mathcal{W}^u(f)$ es una curva analítica que pasa transversalmente a través de todas las clases híbridas reales excepto la cúspide (la correspondiente a $c = 1/4$).

Donde las hojas estables $\mathcal{W}^s(f)$ de f (inestables $\mathcal{W}^u(f)$) (Véase Definición 3.2.3), son las componentes conexas que contienen a f , en el espacio de funciones de tipo cuadrático, definidas de tal forma que las órbitas hacia adelante (atrás), bajo el operador de renormalización \mathcal{R} , son exponencialmente asintóticas a la correspondiente órbita de f .

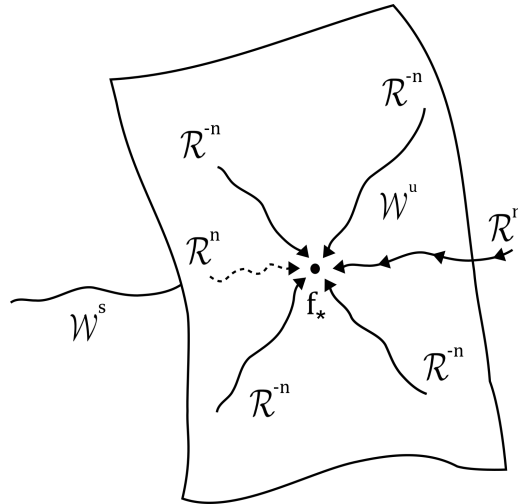


Figura 1.5: En la imagen se observa un esquema de la variedad estable e inestable en el punto fijo hiperbólico del operador de renormalización del Teorema 1.3.5.

En el teorema anterior el conjunto \mathcal{A} es un conjunto formado por gérmenes de tipo cuadrático infinitamente renormalizables con conjunto de Julia conexo. El inciso *i*) nos dice que el operador de renormalización es conjugado al corrimiento por la izquierda en el espacio de símbolos formado por copias de \mathcal{M} . Nuestro resultado Teorema 2 es un análogo a éste inciso pero con el operador de renormalización pacman y es el primer paso para probar la hiperbolicidad y el resto del teorema. Las partes *ii*) y *iii*) nos dicen que el conjunto de gérmenes que convergen a f bajo la iteración de \mathcal{R} son los híbridos equivalentes a f y su complemento lo podemos parametrizar por el plano, es decir la variedad inestable cerca del punto hiperbólico es de dimensión uno-compleja e intersecta en un sólo punto a las clases híbridas reales (Figura 1.5). La parte clave para probar la autosimilaridad de \mathcal{M} es la hiperbolicidad del operador

en la herradura de renormalización, lo cual resulta muy difícil de probar y por eso Lyubich sólo lo demuestra para parámetros reales. Para el operador de renormalización pacman lo demuestra cuando tiene un punto fijo [12, Teorema 7.7] y nosotros construimos la herradura de renormalización para una clase más general de parámetros (Definición 4.2.1).

1.4. Fracciones continuas

En ésta sección vamos a definir la expresión en fracción continua de un número [16, 22], la cual está relacionada con la aproximación de números irracionales [17, Apéndice C], la linealización de funciones de Siegel [17, Capítulo 11] y será usada en el Lema 3.1.7 para describir como cambia el número de rotación cuando se aplica la renormalización pacman.

Definición 1.4.1. Una **fracción continua generalizada** es una expresión de la forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots + \frac{b_n}{a_n + \cdots}}}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in \mathbb{N}$, para toda $i \in \mathbb{N}$, son llamados coeficientes o términos de la fracción continua. Si todas las b_i son iguales a 1 para toda $i \in \mathbb{N}$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + \cdots}}}$$

decimos que tenemos una **fracción continua (simple)** y se escribe de la forma

$$[a_0; a_1, a_2, \dots]$$

Debido a un resultado de Euler [22, p.177], todo número real α puede representarse de manera única por una fracción continua (simple), la cantidad de coeficientes de dicha fracción continua es finita si α es racional e infinita si α es irracional (los números racionales pueden tener dos representaciones debido a que $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$).

Observación 1. Dado un número $\theta \in [0, 1)$ nos interesan dos expresiones que involucran una fracción continua simple

$$\theta = [0; a_1, a_2, \dots] = 1 - [0; b_1, b_2, \dots],$$

donde la relación entre las dos expresiones es la siguiente

$$[0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \begin{cases} 1 - [0; 1, a_1 - 1, a_2, \dots] & \text{si } a_1 > 1 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{1}{2}); \\ 1 - [0; a_2 + 1, a_3, \dots] & \text{si } a_1 = 1 \Leftrightarrow \theta \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

de lo cual se obtiene también que

$$1 - [0; b_1, b_2, b_3, \dots] = \begin{cases} [0; 1, b_1 - 1, b_2, \dots] & \text{si } b_1 > 1 \Leftrightarrow \theta \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ [0; b_2 + 1, b_3, \dots] & \text{si } b_1 = 1 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

En efecto, primero supongamos que $a_1 > 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 - [0; 1, a_1 - 1, a_2, \dots] &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - 1 + [0; a_2, \dots]}} = \\ 1 - \frac{1}{\frac{a_1 - 1 + [0; a_2, \dots]}{a_1 - 1 + [0; a_2, \dots]}} &= 1 - \frac{a_1 - 1 + [0; a_2, \dots]}{a_1 + [0; a_2, \dots]} = \frac{1}{a_1 + [0; a_2, \dots]} = [0; a_1, a_2, \dots]. \end{aligned}$$

Y si $a_1 = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} 1 - [0; a_2 + 1, a_3, \dots] &= 1 - \frac{1}{a_2 + 1 + [0; a_3, \dots]} = \frac{a_2 + [0; a_3, \dots]}{a_2 + [0; a_3, \dots] + 1} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{a_2 + [0; a_3, \dots]}} &= [0; 1, a_2, a_3, \dots]. \end{aligned}$$

A continuación se definen los conjuntos de números irracionales en el intervalo $(0, 1)$ con expresión en fracción continua periódica y acotada. Son los números con los que vamos a estar trabajando en la renormalización pacman ya que representan a los números de rotación de los parámetros Siegel pacman (Teorema 3.1.2).

Definición 1.4.2. Denotamos como Θ_{per} el conjunto de **números de rotación combinatoriamente periódicos**, es decir, los números $[0; a_1; a_2, a_3, \dots] \in (0, 1) \cap \mathbb{I}$ con expansión en fracción continua periódica, cuya periodicidad empieza desde el primer coeficiente a_1 , por lo cual tienen un bloque de elementos a_1, \dots, a_k que se repiten de forma periódica, donde a k se le llama el **periodo de la expansión** y se escriben

$$[0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}] := [0; a_1; a_2, a_3, \dots, a_k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_1, \dots].$$

Si la periodicidad de $[0; a_1; a_1, a_2, \dots]$ no empieza en a_1 entonces el **número de rotación es combinatoriamente preperiódico**.

Denotamos por Θ_{bnd} al conjunto de **números de rotación combinatoriamente acotados**, es decir, los números de rotación con expansión en fracción continua $[0; a_1; a_2, a_3, \dots] \in (0, 1) \cap \mathbb{I}$ donde todos sus coeficientes a_i son acotados por una misma constante

$$a_i \leq M, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Note que $\Theta_{per} \subsetneq \Theta_{bnd}$. Además los números en Θ_{per} van a ser los puntos periódicos de la función R_{prm} (Lema 2.4.2) y por lo tanto van a representar a los números de rotación de los puntos fijos del operador de renormalización pacman (Teorema 3.2.2).

Por [2, Proposición 2.7.3] se sabe que θ es de combinatoria acotada si y sólo si es diofantino de exponente dos ($\mu = 2$). Luego por el Teorema de Siegel [4, Teorema 6.4] tendremos que cualquier función analítica con un punto fijo neutral irracional, cuyo número de rotación es de tipo acotado, será linealizable en dicho punto. Por ejemplo cuando θ es igual a la anti-media dorada $1/\phi^2 = 1 - [0; \bar{1}]$ (Figura 1.1) o cuando $\theta = 1/\phi = [0; \bar{1}]$.

Para los polinomios de grado dos con un punto fijo neutral irracional con número de rotación θ , ya se sabe por el teorema de Brjuno [2, Teorema 2.7.6], que una condición necesaria y suficiente para que f sea linealizable, es que las n -ésimas aproximaciones en fracción continua $p_n/q_n = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ de $\theta = [0; a_1, a_2, \dots]$, cumplan que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(q_{k+1})}{q_k} < \infty.$$

Capítulo 2

Renormalización pacman

Después de la renormalización de Douady-Hubbard empezaron a definirse otro tipo de renormalizaciones, por ejemplo la renormalización parabólica [10] o para los parámetros de tipo Siegel la renormalización de *pares holomorfos que conmutan* (*holomorphic commuting pairs*) [16] y la renormalización cilíndrica [20], las cuales han servido para probar autosimilaridad en los conjuntos de Julia de éstos parámetros. Estas surgen debido a que la renormalización de Douady-Hubbard no es posible aplicarla a estos parámetros pues requiere de una vecindad repulsora del punto fijo α de corte para poder hacer un engordamiento de los sectores de renormalización ([14, Sección 28.4.3]) y con ello obtener una función de tipo cuadrático.

La renormalización pacman es relativamente nueva y se basa en la cirugía de Branner-Doaury [3] y en la renormalización de pares holomorfos que conmutan de McMullen [15], la cual a su vez está relacionada con la renormalización de *funciones críticas del círculo* (*critical circle maps*) [21].

En éste capítulo veremos la teoría necesaria para trabajar con la renormalización pacman y puede encontrarse en [7].

2.1. Funciones pacman

Por razones técnicas en la teoría de la renormalización pacman se trabajan con dos tipos de funciones pacman: los full-pacman y los pacman truncados o simplemente pacman. Un pacman se obtiene de un full-pacman al remover una pequeña vecindad del punto pre-fijo α' (la otra preimagen del punto fijo α), mientras que un full-pacman siempre puede obtenerse al extender topológicamente un pacman truncado.

Definición 2.1.1. *Considere un disco topológico cerrado \bar{V} , con un arco simple γ_1 conectando un punto de la frontera de V a un punto α en el interior. Llamaremos a γ_1 el **arco crítico del pacman**.*

*Un **full-pacman** es una función $f : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ tal que:*

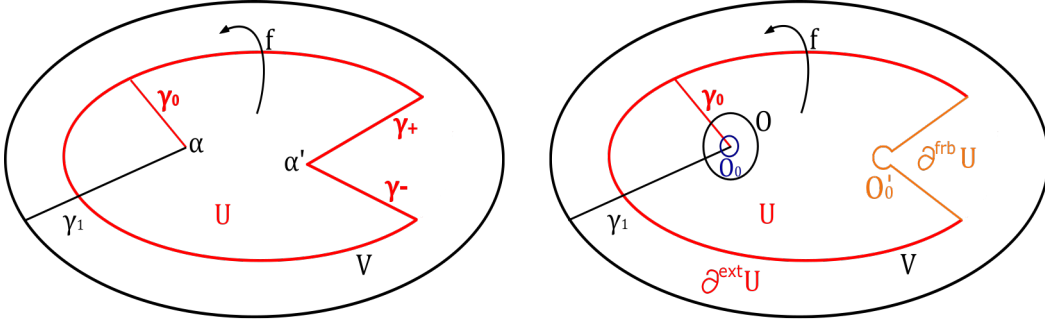


Figura 2.1: Del lado izquierdo vemos un full-pacman $f : U \rightarrow V$, el cual es una función analítica dos a uno de $U \setminus \gamma_0$ a $V \setminus \gamma_1$ y tal que $f^{-1}(\gamma_1) = \gamma_0 \cup \gamma_- \cup \gamma_+$. Un pacman $f : (U \setminus O'_0, O_0) \rightarrow (V, O)$, que es la versión truncada de un full pacman con $f(\partial U) = \partial V \cup \gamma_1 \cup \partial O$, se puede ver del lado derecho.

- α es un **punto fijo** de f , es decir, $f(\alpha) = \alpha$.
- \bar{U} es un disco topológico cerrado tal que $\bar{U} \subset V$.
- El arco crítico γ_1 tiene exactamente tres preimágenes $\gamma_0 \subset U$ y $\gamma_+, \gamma_- \subset \partial U$ tal que γ_0 empieza en el punto fijo α mientras que γ_+, γ_- empiezan en el **pre-punto fijo** α' ; suponemos que γ_1 no interseca a $\gamma_0, \gamma_+, \gamma_-$ fuera de α .
- $f : U \rightarrow V$ es analítica y $f : U \setminus \gamma_0 \rightarrow V \setminus \gamma_1$ es una función cubriente ramificada dos a uno. Por lo cual f tiene un único **punto crítico** $c_0(f) \in U \setminus \gamma_0$. Denotamos el **valor crítico** de f , es decir, la imagen del punto crítico como $c_1(f)$.
- f admite localmente una extensión conforme a través de $\partial U \setminus \{\alpha'\}$.

Notemos que las funciones full-pacman son casi funciones de tipo cuadrático [5], el problema es la curva γ_1 debido a que tiene tres preimágenes y también hace que $f(\partial U) \not\subset \partial V$.

Definición 2.1.2. Considere un full pacman $f : U \rightarrow V$ y sea O un pequeño disco topológico cerrado alrededor de α , tal que $c_1(f) \notin \text{int}(O)$ y suponga que γ_1 cruza-intersecta a ∂O en un sólo punto. Entonces $f^{-1}(O)$ consiste de dos componentes conexas: $O_0 \ni \alpha$ y $O'_0 \ni \alpha'$. Así obtenemos un **pacman truncado** o simplemente **pacman**

$$f : (U \setminus O'_0, O_0) \rightarrow (V, O),$$

que es una función que admite una extensión local conforme a través de ∂U tal que f puede ser topológicamente extendida a un full pacman. En particular, todo punto en $V \setminus O$ tiene dos preimágenes mientras que todo punto en O tiene una sólo preimagen en O_0 .

Denotamos a los dos subconjuntos de la frontera de U como: la **frontera externa** $\partial^{ext}U := f^{-1}(\partial V)$ y la **parte olvidada de la frontera** $\partial^{frb}U := \partial U \setminus \overline{\partial^{ext}U}$.

Podemos obtener ejemplos de funciones full pacman y pacman al aplicar la renormalización pacman a cualquier función de Siegel como un polinomio cuadrático tipo Siegel (véase Lema 3.1.7 y Corolario 3.1.8).

Análogamente a como se hace con las funciones de tipo cuadrático podemos definir el conjunto de no escape para las funciones tipo pacman [12, p.332], aunque éste conjunto es sensible a pequeñas deformaciones de ∂U .

Definición 2.1.3. *Fijemos un pacman $f : U \rightarrow V$. El conjunto de no escape de un pacman es*

$$\mathfrak{R}_f := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\overline{U}).$$

El conjunto de escape es el complemento $V \setminus \mathfrak{R}_f$.

Los **rayos externos de un pacman** [7, p.10-11] se definen de la siguiente manera: se encaja un rectángulo \mathfrak{F} en $\overline{V} \setminus U$ tal que el lado horizontal inferior B es igual a $\partial^{ext}U$ y el lado horizontal superior T es un subconjunto de ∂V . Las imágenes de las líneas verticales dentro de \mathfrak{F} forman una laminación de un subconjunto de $\overline{V} \setminus U$. Llevamos ésta laminación adentro de U usando las preimágenes $f^{-n}(\mathfrak{F})$. Las hojas de ésta laminación que empiecen en ∂V son llamadas **segmentos de rayos externos** de f . Los segmentos de rayos externos infinitos, es decir, los rayos formados por la unión de segmentos que conectan a ∂V con $\partial \mathfrak{R}_f$ son llamados **rayos externos** de f . Tenemos dos funciones de B a T : una es la identificación natural π a lo largo de las líneas verticales, la otra es la función $f : B \rightarrow T$ que está definida sólo en $f^{-1}(T)$. Por lo tanto la composición $\phi = \pi^{-1} \circ f : B \rightarrow B$ es una función parcialmente definida dos a uno. Consideremos el conjunto $A \subset B$ de todos los puntos cuya órbita hacia adelante siempre está bien definida (podemos caer fuera de $f^{-1}(T)$ cuando aplicamos π^{-1}). Entonces A es un conjunto completamente invariante y existe una única función que preserva orientaciones

$$\theta : A \rightarrow S^1,$$

que semiconjuga $\phi : A \rightarrow A$ con la función duplicadora del círculo. Decimos que $\theta(a)$ es el **ángulo del segmento de rayo externo** que pasa a través del punto a .

Notemos que un segmento de rayo externo que pasa a través de un punto $a \in A$ es infinito (es decir un rayo externo) si y sólo si no toca a la iterada de un punto precrítico (pues eventualmente aterrizaría en el Julia) ni tampoco una preimagen iterada de $\partial^{frb}U$ (porque eventualmente se truncaría al caer en $\partial^{frb}U$).

2.2. Renormalización pacman

Para la teoría de renormalización pacman se define un sector, que será el lugar del plano dinámico del pacman donde se lleva a cabo la renormalización, el cual se pega topológicamente con una función para generar otro pacman.

Definición 2.2.1. Un **sector** S es un disco topológico cerrado con dos arcos distinguidos β_-, β_+ en ∂S intersectándose en un sólo punto llamado el **vértice** de S .

Una función $\psi : S \rightarrow \bar{V}$ de un sector cerrado (S, β_-, β_+) sobre un disco topológico cerrado $\bar{V} \subset \mathbb{C}$ se llama **función de pegado** si ψ es conforme en el interior de S , $\psi(\beta_-) = \psi(\beta_+)$ y ψ se puede extender de manera conforme a una vecindad de cualquier punto en $\beta_- \cup \beta_+$ excepto el vértice de S .

El proceso de cirugía desarrollado en [3] por Branner y Douady, sirvió de motivación para la definición de renormalización pacman primaria.

Definición 2.2.2. Sea $f : U \rightarrow V$ un full-pacman y sean γ_0, γ_1 y $\gamma_2 = f(\gamma_1)$ mutuamente disjuntas excepto por el punto fijo α . Denotemos por S_1 el sector cerrado de V con vértice en α y acotado por $\gamma_1 \cup \gamma_2$ que no contiene a γ_0 . Supongamos que:

- i) S_1 no contiene el valor crítico c_1 , por lo cual el punto crítico $c_0 \notin S_0 \cup S'_0$.
- ii) $\gamma_+ \cup \gamma_- \subset V \setminus S_1$.

Sea \widehat{V} la superficie de Riemann con frontera obtenida de $\bar{V} \setminus \text{int}(S_1)$ al pegar $\gamma'_1 = f^{-1}(\gamma_2) \cap \gamma_1$ y γ_2 a lo largo de f . Esto significa que existe una función cociente

$$\psi : \bar{V} \setminus \text{int}(S_1) \rightarrow \widehat{V},$$

tal que ψ es conforme en $V \setminus S_1$ mientras que $\psi(z) = \psi(f(z)) \in \widehat{V}$, para toda $z \in \gamma'_1$. Encajamos la superficie \widehat{V} en \mathbb{C} .

El sector S_1 tiene dos preimágenes bajo f ; sean S_0 la preimagen de S_1 unido a α y S'_0 la preimagen de S_1 unida a α' . Además notemos que $\gamma_- \cup \gamma_+ \subset V \setminus S_0$, pues de lo contrario $c_0 \in S_0$ implica que $c_1 \in S_1$, lo que contradice a la condición ii). Defina

$$\bar{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U \setminus (S_1 \cup S_0 \cup S'_0); \\ f^2(z) & \text{si } z \in S_0 \cap f^{-1}(U). \end{cases}$$

Suponiendo que $c_0 \notin S_1$, entonces la función \bar{f} desciende vía ψ a un full-pacman

$$\widehat{f} : \widehat{U} \rightarrow \widehat{V}$$

con el rayo crítico $\widehat{\gamma}_1$. A ésta función se le llama la **renormalización pacman primaria** de f .

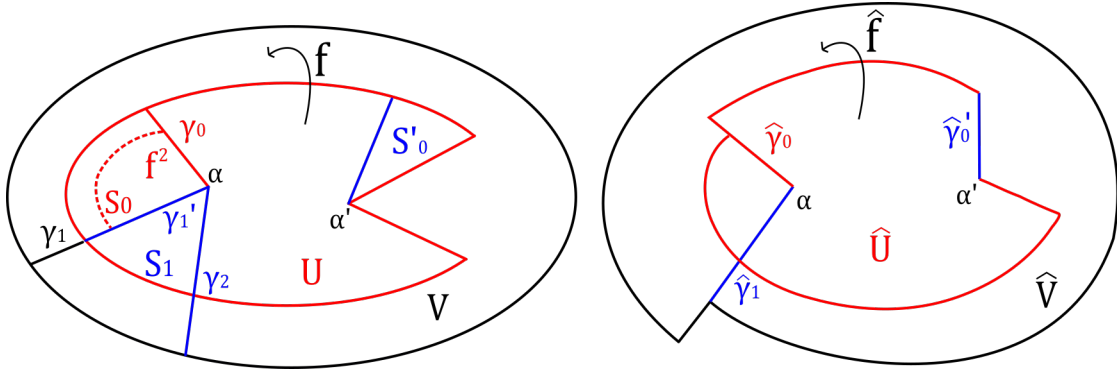


Figura 2.2: Del lado izquierdo de la figura vemos un full-pacman $f : U \rightarrow V$, cuando le aplicamos la renormalización pacman primaria obtenemos un nuevo full-pacman $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ que se muestra del lado derecho.

En pocas palabras lo que se hace en la renormalización primaria de un full-pacman es borrar el sector S_1 tanto de U como de V , pegando γ_1 y γ_2 a lo largo de $f : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. También quitamos el sector S'_0 pero sólo en el dominio U y redefinimos f en S_0 como f^2 . Así obtenemos un nuevo full-pacman $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ como se muestra en la Figura 2.2.

La siguiente definición de prepacman es el análogo de los pares holomorfos (holomorphic pairs) de McMullen [20, Definición 2.3].

Definición 2.2.3. *Considere un sector S con rayos de frontera β_-, β_+ y con rayo interior β_0 que divide a S en dos subsectores T_-, T_+ . Sean $f_- : U_- \rightarrow S$, $f_+ : U_+ \rightarrow S$ una pareja de funciones holomorfas definidas en $U_- \subset T_-$, $U_+ \subset T_+$. Decimos que*

$$F = (S, f_-, f_+)$$

es un **prepacman** si existe una función de pegado en S que proyecta a (f_-, f_+) sobre un (full)-pacman $f : U \rightarrow V$ donde β_-, β_+ son enviadas al arco crítico γ_1 y β_0 es enviada a γ_0 (Figure 2.3). La función ψ es llamada **renormalización de cambio de variables**.

Los objetos dinámicos como el **conjunto de no escape de un prepacman** F son preimágenes contenidas en el sector S del correspondiente objeto dinámico de f bajo la función ψ .

Por la definición se tiene que f_-, f_+ conmutan en una vecindad de β_0 . Por otro lado dado que β_- y β_+ cada una tiene dos preimágenes y una de las cuales es β_0 , entonces el pegado hace que γ_1 tenga exactamente tres preimágenes.

Nótese que todo pacman $f : U \rightarrow V$ tiene un prepacman trivial que se obtiene al cortar V a lo largo del arco crítico γ_1 y cuando lo pegamos obtenemos el mismo pacman.

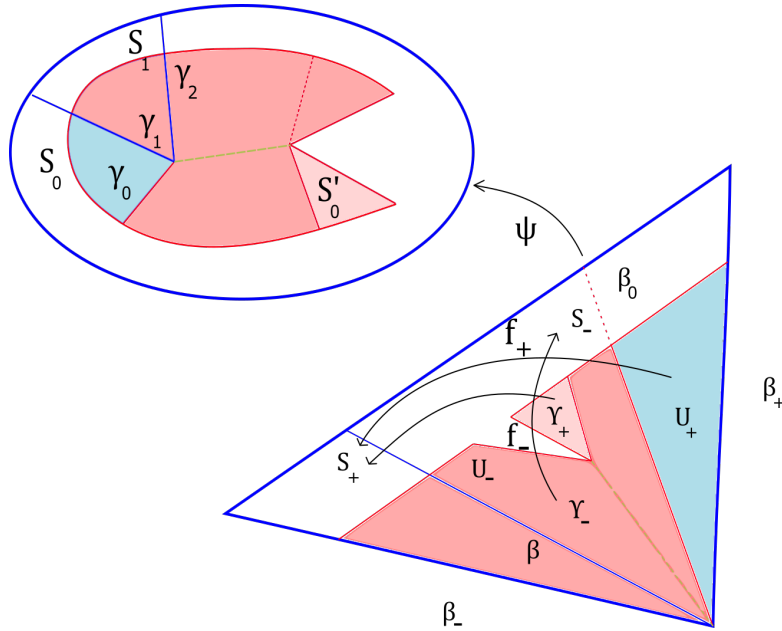


Figura 2.3: En un (full)-prepacman ($f_- : U_- \rightarrow S$, $f_+ : U_+ \rightarrow S$) tenemos que $U_- = \Upsilon_- \cup \Upsilon_+$, donde el punto crítico de f_- pertenece a Υ_- así que f_- manda a Υ_- de forma dos a uno a S_- y Υ_+ de forma uno a uno a S_+ . La función f_+ manda U_+ de manera univalente a S_+ . Después de pegar el sector con ψ , $\psi(\beta_+) = \psi(\beta_-) = \gamma_1$, $\psi(\beta_0) = \gamma_0$, $\psi(\beta) = \gamma_2$, obtenemos un full-pacman.

Después veremos que la siguiente definición de renormalización pacman se puede extender a cualquier función $f : U \rightarrow V$ con un **punto fijo distinguido** $\alpha(f)$, esto es, la renormalización pacman no está definida únicamente para funciones tipo pacman sino para cualquier función que tenga un prepacman, por ejemplo cualquier función de Siegel (Corolario 3.1.8).

Definición 2.2.4. Decimos que un **pacman** $f : U \rightarrow V$ es **renormalizable** si existe un prepacman

$$G = (g_- = f^a : U_- \rightarrow S, g_+ = f^b : U_+ \rightarrow S)$$

definido en un sector $S \subset V$ con vértice en α , tal que g_-, g_+ son iteraciones de f realizando la primera función de retorno a S y tal que las f -órbitas de U_-, U_+ , antes de que regresen a S , cubren una vecindad de α compactamente contenida en U (Figura 2.4). Llamamos a G la **pre-renormalización de f** y al pacman $g : \widehat{U} \rightarrow \widehat{V}$ la **renormalización de f** .

Los números a, b son los **tiempos de retorno de la renormalización**. La **renormalización de f es primaria** si $a + b = 3$.

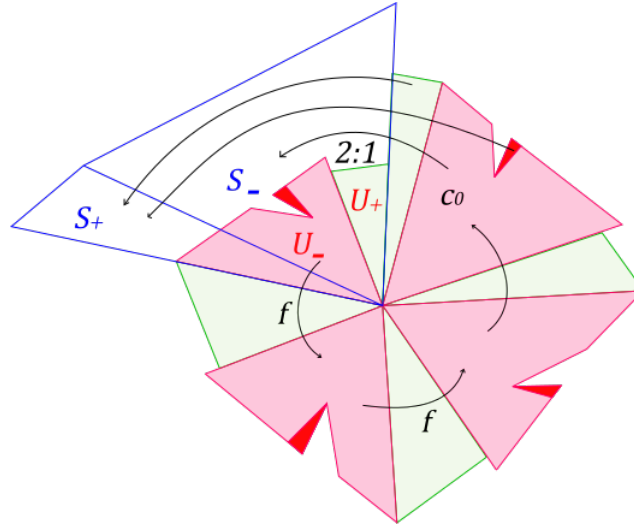


Figura 2.4: La renormalización pacman de f : las primeras funciones de retorno de los puntos en $U_+ \cup U_-$ bajo ciertas iteraciones de f de regreso a $S = S_+ \cup S_-$ es un prepacman. Al esparcir las órbitas de U_+ y U_- alrededor del punto fijo $\alpha(f)$ antes de regresar a S se triangula una vecindad Δ de $\alpha(f)$ y se pide que $\Delta \cup S \in \text{Dom} f$.

Más adelante veremos que combinatoriamente una renormalización pacman en general es una iteración de la renormalización primaria, debido a que la renormalization pacman viene de una renormalización de sector en el disco unitario cerrado (Lema 3.1.7).

Definición 2.2.5. Definimos $\Delta = \Delta_G$ como la unión de puntos de las f -órbitas de \bar{U}_-, \bar{U}_+ antes de regresar a S . Naturalmente Δ es una vecindad triangulada de α . Llamamos a Δ una **renormalización triangulada** y diremos que Δ es obtenida al **esparcir alrededor** U_+, U_- (Figura 2.4).

Sean f, g dos funciones cualesquiera con puntos fijos distinguidos y sean R y Q dos prepacman en el plano dinámico de f y g definiendo algunas renormalizaciones pacman. Sea h una conjugación local entre f y g restringida a vecindades de sus puntos fijos $\alpha(f)$ y $\alpha(g)$. Entonces h **respeta a** R y Q si h envía la triangulación Δ_R a Δ_Q tal que la imagen de $(S_R, U_{R,\pm})$ es $(S_Q, U_{Q,\pm})$.

2.3. Analiticidad del operador de renormalización pacman

En esta sección veremos que el operador de renormalización pacman es analítico en el espacio de funciones analíticas con la norma del supremo.

La siguiente definición dota con una estructura de espacio de Banach al espacio de funciones de pacman.

Definición 2.3.1. *Considere un pacman $f : U_f \rightarrow V$ con disco de truncamiento O no vacío. Suponga que existe un disco topológico $W \ni U_f$ con frontera suave a pedazos tal que f se extiende analíticamente a W y continuamente a su cerradura. Sea $\varepsilon > 0$, definimos la bola centrada en el pacman f de radio ε como $N_W(f, \varepsilon)$ y es el conjunto de funciones analíticas $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ con extensión continua a ∂W tales que*

$$\sup_{z \in W} |f(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Luego $N_W(f, \varepsilon)$ es una bola de Banach.

A continuación veremos que el operador de renormalización pacman es analítico en bolas de Banach suficientemente pequeñas, esto significa que el operador es diferenciable en el sentido de Frechet y que la diferencial es lineal con respecto a los números complejos.

Decimos que la **curva γ aterriza en α , en un ángulo bien definido**, si existe una curva tangente a γ en α .

Debido a [7, Lema 2.5] sabemos que dado un pacman $f : U_f \rightarrow V$, es suficiente que las curvas γ_1 y γ_0 aterricen en $\alpha(f)$ con ángulos bien definidos para que exista una pequeña vecindad de Banach $N_W(f, \varepsilon)$ de f donde todas las funciones $g \in N_W(f, \varepsilon)$ tienen un dominio $U_g \subset W$, tales que $g : U_g \rightarrow V$ es un pacman con los mismos γ_1, O, V pero trasladados a $\alpha(g)$, el punto fijo de g . Más aún, los rayos periódicos son estables, es decir, si un rayo periódico $R(f)$ de f aterriza en un punto periódico repulsor $x(f) \in U_f$, entonces el rayo periódico $R(g)$ de g aterriza en $x(g) \in U_g$ y $\overline{R(g)}$ está contenido en una pequeña vecindad de $\overline{R(f)}$.

Usando lo anterior y resolviendo la ecuación de Beltrami para la imagen hacia delante (*pushforward*) de la diferencial de Beltrami generada por el movimiento holomorfo del sector S_f (el prepacman de f), se obtienen funciones de pegado ψ_g las cuales dependen analíticamente de g en una vecindad de Banach de f suficientemente pequeña. Así es como se prueba el siguiente resultado [7, Teorema 2.7], el cual nos dice que para obtener un operador de renormalización pacman analítico y compacto, es suficiente que para un prepacman de f existan curvas que aterrizan con ángulos bien definidos en $\alpha(f)$.

Teorema 2.3.2. *Suponga que $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ es una renormalización del pacman $f : U_f \rightarrow V$ vía una función cociente $\psi_f : S_f \rightarrow \hat{V}$. Suponga que las curvas $\beta_0, \beta_+, \beta_-$ aterrizan en α con ángulos bien definidos distintos a pares. Entonces para toda vecindad $N_W(f, \varepsilon)$ suficientemente pequeña existe un operador de renormalización pacman*

$\mathcal{R} : g \mapsto \widehat{g}$ compacto y analítico definido en $N_W(f, \varepsilon)$ tal que $\mathcal{R}(f) = \widehat{f}$. Más aún, la función de pegado ψ_g usada para ésta renormalización depende analíticamente de g .

Observación 2. Es importante notar que en la prueba del teorema anterior no es necesario que la función f sea un pacman, mas bien sólo se requiere que un prepacman pueda ser definido en el plano dinámico de una función analítica f con un punto fijo α . Esto nos permite definir un operador de renormalización pacman compacto y analítico cerca de f .

2.4. Renormalización en el disco y la función R_{prm}

Considere $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y sea $L_\theta : \overline{\mathbb{D}^1} \rightarrow \overline{\mathbb{D}^1}$ la rotación de ángulo θ en el disco unitario, $z \mapsto e^{2\pi i \theta} z$. A continuación veremos como se define la renormalización primaria en \mathbb{D}^1 de una rotación de ángulo θ que después se generaliza para definir la renormalización de sector en \mathbb{D}^1 (Definición 2.4.4).

Definición 2.4.1. Suponga que $\theta \neq 0$ y considere un rayo interno cerrado \mathbb{I} de $\overline{\mathbb{D}^1}$. Un **sector fundamental** $\mathbb{Y} \subset \overline{\mathbb{D}^1}$ de L_θ es el sector cerrado más pequeño acotado por \mathbb{I} y $L_\theta(\mathbb{I})$. El **ángulo ω en el vértice de \mathbb{Y}** es θ si $\theta \in [0, 1/2]$ o $1 - \theta$ si $\theta \in [1/2, 1]$. Un sector fundamental está definido de manera única salvo una rotación; rotemoslo de tal forma que $1 \in \overline{\mathbb{D}^1} \setminus \mathbb{Y}$. Sean

$$\mathbb{Y}_- := L_\theta^{-1}(\mathbb{Y}), \quad \mathbb{Y}_+ := \overline{\mathbb{D}^1 \setminus \mathbb{Y} \cup \mathbb{Y}_-}.$$

Así $(L_\theta|_{\mathbb{Y}_+}, L_\theta^2|_{\mathbb{Y}_-})$ es el primer regreso de los puntos en $\mathbb{Y}_- \cup \mathbb{Y}_+$ a $\mathbb{Y}_- \cup \mathbb{Y}_+$. La **renormalización primaria de L_θ** es la rotación

$$L_{R_{prm}(\theta)} : \overline{\mathbb{D}^1} \rightarrow \overline{\mathbb{D}^1}$$

obtenida de $(L_\theta|_{\mathbb{Y}_+}, L_\theta^2|_{\mathbb{Y}_-})$ al aplicar la función de pegado $\psi_{prm} : \mathbb{Y}_- \cup \mathbb{Y}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{D}^1}$ dada por

$$z \mapsto z^{1/(1-\omega)},$$

ésta función borra al sector \mathbb{Y} pegando \mathbb{I} con $L_\theta(\mathbb{I})$ y define una nueva rotación al proyectar L_θ bajo ψ_{prm} , es decir

$$L_{R_{prm}(\theta)} = \psi_{prm} \circ (L_\theta|_{\mathbb{Y}_+}, L_\theta^2|_{\mathbb{Y}_-}) \circ \psi_{prm}^{-1}.$$

Lo que hace la renormalización primaria es que dado un ángulo de rotación $\theta \in (0, 1)$, borra un sector $\mathbb{Y} \subset \overline{\mathbb{D}^1}$ de ángulo θ ó $1 - \theta$ y al pegar $\overline{\mathbb{D}^1} \setminus \mathbb{Y}$ bajo la función ψ_{prm} , obtenemos una nueva rotación $L_{R_{prm}(\theta)}$, que es básicamente modificar la rotación L_θ para obtener iteraciones de L_θ de tal forma que sean un primer retorno del sector $\overline{\mathbb{D}^1} \setminus \mathbb{Y}$ a el mismo, pero que al evaluarlas en éste sector no caigamos en el sector \mathbb{Y} (Figura 2.5). El siguiente Lema [7, Lema A.1] nos dice exactamente como se va a modificar el ángulo de rotación θ cuando le aplicamos la renormalización primaria.

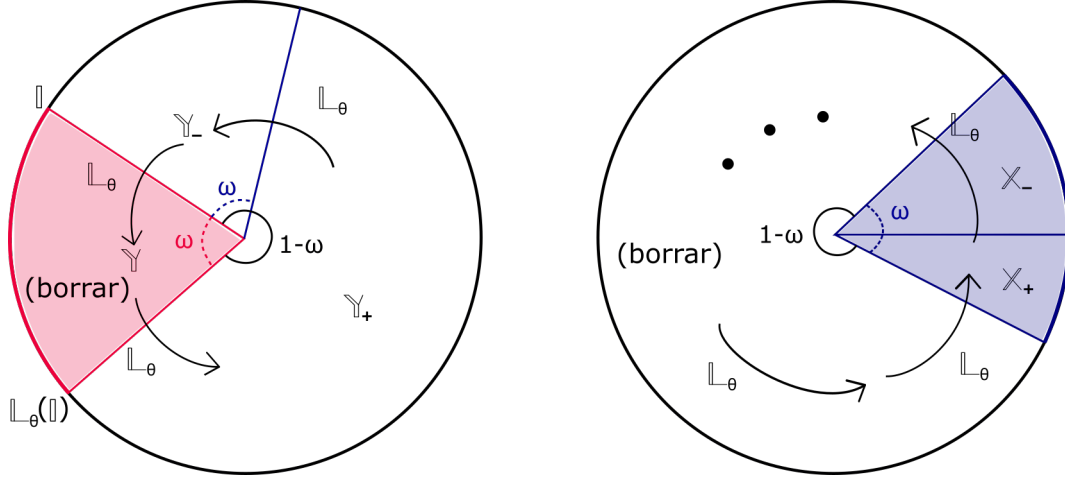


Figura 2.5: A la izquierda se observa la renormalización primaria que borra un sector fundamental \mathbb{Y} y proyecta a $(L_\theta|_{\mathbb{Y}_+}, L_\theta^2|_{\mathbb{Y}_-})$ a una nueva rotación $L_{R_{prm}(\theta)}$. A la derecha tenemos una renormalización de sector la cual borra el complemento del sector $\mathbb{X} = \mathbb{X}_+ \cup \mathbb{X}_-$, de ángulo ω , y proyecta las primeras funciones de retorno $(L_\theta^a|_{\mathbb{X}_-}, L_\theta^b|_{\mathbb{X}_+})$ a una nueva rotación $\mathcal{R}(L_\theta)$.

Lema 2.4.2. *Tenemos que*

$$R_{prm}(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq 1/2; \\ \frac{1-\theta}{2\theta-1} & \text{si } 1/2 \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

Si θ está dada en sus expresiones en fracción continua

$$\theta = [0; a_1, a_2, \dots] = 1 - [0; b_1, b_2, \dots]$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces

$$R_{prm}([0; a_1, a_2, \dots]) = \begin{cases} [0; a_1 - 1, a_2, \dots] & \text{si } a_1 > 1; \\ 1 - [0; a_2, a_3, \dots] & \text{si } a_1 = 1. \end{cases}$$

$$R_{prm}(1 - [0; b_1, b_2, \dots]) = \begin{cases} 1 - [0; b_1 - 1, b_2, \dots] & \text{si } b_1 > 1; \\ [0; b_2, b_3, \dots] & \text{si } b_1 = 1. \end{cases}$$

Observemos que θ es periódico bajo R_{prm} si y sólo si existe un $\theta' \in \Theta_{per}$ tal que $\theta = R_{prm}^n(\theta')$ para algún $n \geq 0$, es decir, θ es periódico bajo R_{prm} si la periodicidad de θ empieza desde su primer coeficiente a_1 o b_1 ; si su periodicidad empieza después entonces es pre-periódico.

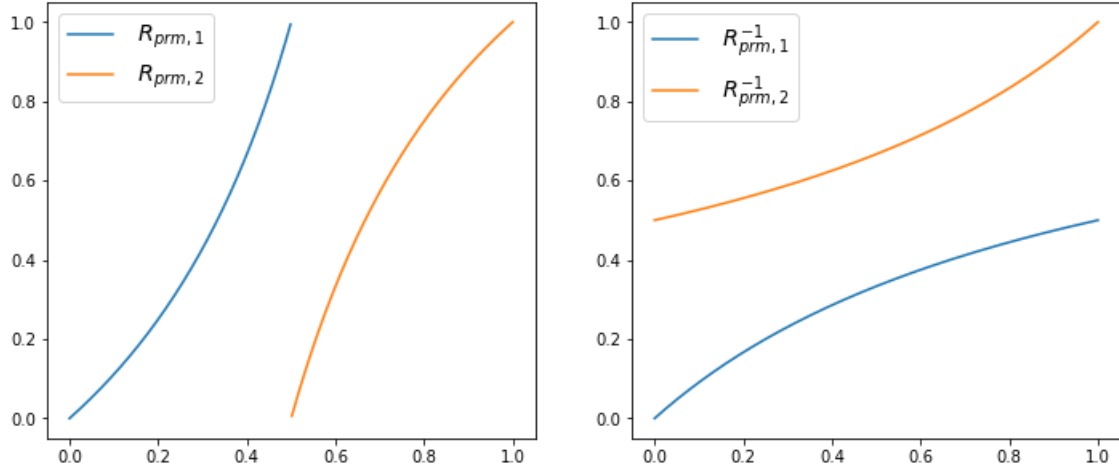


Figura 2.6: Del lado izquierdo tenemos la gráfica de la función R_{prm} y en el lado derecho las ramas de la función inversa de R_{prm} .

La función $R_{prm} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua en todo el intervalo excepto en el punto $1/2$, pero si lo es cuando consideramos que los elementos del intervalo $[0, 1]$ están bajo la relación de equivalencia de congruencia módulo uno, así la clase del 0 es igual a la clase del 1 por lo cual en la clase de $1/2$ la función R_{prm} es continua. También la función R_{prm} es diferenciable en el intervalo $[0, 1]$ bajo la relación de equivalencia de congruencia módulo uno.

Además la función en $(0, \frac{1}{2})$ es creciente y $R_{prm}(\theta) \geq \theta$; pero en $(\frac{1}{2}, 1)$ se tiene que $R_{prm}(\theta) \leq \theta$ aunque la función sigue siendo creciente.

Como la función R_{prm} es dos a uno en $[0, 1]$, podemos calcular las ramas de la función inversa:

$$R_{prm,1}^{-1}(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta} \quad \text{para} \quad R_{prm,1}(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$$

$$R_{prm,2}^{-1}(\theta) = \frac{1}{2-\theta} \quad \text{para} \quad R_{prm,2}(\theta) = \frac{2\theta-1}{\theta}.$$

Veamos como actúan éstas funciones en los elementos de las fracciones continuas:

$$R_{prm,1}^{-1}([0; a_1, a_2, \dots]) = [0; a_1 + 1, a_2, \dots] = 1 - [0; 1, a_1, a_2, \dots]$$

$$R_{prm,1}^{-1}(1 - [0; b_1, b_2, \dots]) := \begin{cases} 1 - [0; 1, 1, b_1 - 1, b_2, \dots] & \text{si } b_1 > 1; \\ 1 - [0; 1, b_2 + 1, b_3, \dots] & \text{si } b_1 = 1. \end{cases}$$

Y

$$R_{prm,2}^{-1}(1 - [0; b_1, b_2, \dots]) = 1 - [0; b_1 + 1, b_2, \dots] = [0; 1, b_1, b_2, \dots]$$

$$R_{prm,2}^{-1}([0; a_1, a_2, \dots]) := \begin{cases} [0; 1, 1, a_1 - 1, a_2, \dots] & \text{si } a_1 > 1; \\ [0; 1, a_2 + 1, a_3, \dots] & \text{si } a_1 = 1. \end{cases}$$

Veamos un ejemplo de cómo actúa la función R_{prm} en el anti-punto medio dorado (anti-golden mean point) que es un número de rotación combinatoriamente periódico relacionado con el número áureo.

Ejemplo 2.4.3. *Consideremos la media dorada o proporción áurea*

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}_{n+1}}{\mathcal{P}_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1; \bar{1}],$$

donde $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ es la sucesión de Fibonacci.

Como se cumple la igualdad

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi},$$

entonces

$$\frac{1}{\phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+1}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = [0; \bar{1}].$$

Luego como $\frac{1}{\phi} \approx 0.6180 \dots \in [\frac{1}{2}, 1]$, tenemos que

$$R_{prm} \left(\frac{1}{\phi} \right) = \frac{2(\frac{1}{\phi}) - 1}{\frac{1}{\phi}} = 2 - \phi = 1 - \frac{1}{\phi},$$

y como se cumple la identidad

$$\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} - 1 = 0,$$

donde

$$\frac{1}{\phi^2} = 1 - [0; \bar{1}] = [0; 2, \bar{1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+2}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.38196 \dots$$

obtenemos la anti-media dorada (anti-golden mean point)

$$R_{prm} \left(\frac{1}{\phi} \right) = \frac{1}{\phi^2}.$$

Análogamente

$$R_{prm} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = \frac{\frac{1}{\phi^2}}{1 - \frac{1}{\phi^2}} = \frac{1}{\phi^2 - 1} = \frac{1}{\phi}.$$

Por otro lado tenemos que

$$R_{prm,1}^{-1} \left(\frac{1}{\phi} \right) = \frac{1}{\phi^2}, \quad R_{prm,2}^{-1} \left(\frac{1}{\phi} \right) = \frac{1}{4\phi^2} = \frac{1}{3 - \phi}$$

y

$$R_{prm,1}^{-1} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = \frac{1}{2 + \phi} = \frac{1}{1 + \phi^2}, \quad R_{prm,2}^{-1} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = \frac{1}{\phi}.$$

A continuación definimos la renormalización de sector en \mathbb{D}^1 , la cual será la base para trabajar con la renormalización Siegel pacman (Lema 3.1.7).

Definición 2.4.4. Una *renormalización de sector* \mathcal{R} de L_θ es:

1. Un **sector de renormalización** \mathbb{X} presentado como la unión de dos subsectores $\mathbb{X}_- \cup \mathbb{X}_+$ normalizados de tal forma que $1 \in \mathbb{X}_- \cap \mathbb{X}_+$ (lo cual siempre es posible usando rotación).
2. Un par de iteraciones, $(L_\theta^a|\mathbb{X}_-, L_\theta^b|\mathbb{X}_+)$ llamadas **pre-renormalización de sector**, realizando la primer función de retorno de los puntos en $\mathbb{X}_- \cup \mathbb{X}_+$ de regreso a $\mathbb{X}_- \cup \mathbb{X}_+$. A \mathbf{a}, \mathbf{b} les llamamos **tiempos de retorno de la renormalización**.
3. La **función de pegado**

$$\psi : \mathbb{X}_- \cup \mathbb{X}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{D}}^1, \quad z \mapsto z^{1/\omega}$$

proyectando $(L_\theta^a|\mathbb{X}_-, L_\theta^b|\mathbb{X}_+)$ a una nueva rotación

$$\mathcal{R}(L_\theta) = \psi \circ (L_\theta^a|\mathbb{X}_-, L_\theta^b|\mathbb{X}_+) \circ \psi^{-1}$$

donde ω es el ángulo de \mathbb{X} en 0.

Se permite que los sectores se traslapen y que alguno de los dos sectores \mathbb{X}_- o \mathbb{X}_+ tenga ángulo 0 pero no ambos.

Notemos que la renormalización primaria es un caso particular de la renormalización de sector con $\mathbb{X}_- = \mathbb{Y}_-, \mathbb{X}_+ = \mathbb{Y}_+, (\mathbb{X}_- \cup \mathbb{X}_+)^c = \mathbb{Y}$.

Sean $\mathcal{R}_1(L_\theta) = L_\mu$ y $\mathcal{R}_2(L_\mu) = L_\nu$ dos renormalizaciones de sector. La composición $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1(L_\theta) = L_\nu$ se obtiene al tomar la preimagen de la renormalización de \mathcal{R}_2 en el plano dinámico de L_θ . Es decir, para evaluar la renormalización $\mathcal{R}_2(L_\mu) = (L_\mu^{a'}|\mathbb{X}'_-, L_\mu^{b'}|\mathbb{X}'_+)$, la cual tiene sectores de renormalización $\mathbb{X}'_-, \mathbb{X}'_+$ en el plano dinámico de L_μ , se proyectan dentro de los sectores $\mathbb{X}_-, \mathbb{X}_+$ en el plano dinámico de L_θ , por lo cual $\mathcal{R}_2(L_\mu) = L_\nu$ va a ser una renormalización de sector de L_θ bajo una combinación de los primeros retornos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$, dependiendo los sectores en los que aterrice. Por lo tanto se tiene el siguiente resultado [7, Lema A.2].

Lema 2.4.5. Una renormalización de sector es una iteración de la renormalización primaria.

Así podemos concluir que la renormalización de sector también va a actuar en los ángulos de rotación como alguna iteración de la función R_{prm} .

Capítulo 3

Siegel pacman

En éste capítulo se definen las funciones de Siegel, los pacman tipo Siegel y la relación de conjugación híbrida entre ellos y algunas de sus propiedades las cuales pueden encontrarse en [7, p.16-29] y que ocuparemos en el último capítulo para probar los Teoremas 1 y 2. También analizamos el Teorema del punto fijo de la renormalización pacman (Teorema 3.2.2) y el Teorema de hiperbolicidad (Teorema 3.2.5). Concluimos con un ejemplo de como se utilizan éstos teoremas para hacer estimaciones en el conjunto de Mandelbrot.

3.1. Funciones tipo Siegel y Siegel pacman

A continuación veremos que las funciones de Siegel y los pacman tipo Siegel con un único punto crítico son básicamente funciones holomorfas que tienen una vecindad del punto fijo en donde son conjugadas a una rotación irracional.

Definición 3.1.1. Sea $f : (U, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa que tiene un punto fijo indiferente α con **multiplicador** $f'(\alpha) = e^{2\pi i\theta}$ y **número de rotación** $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la cual es **localmente linealizable** en una vecindad de α , es decir, es topológicamente conjugada a la rotación $e^{2\pi i\theta}$ en el disco unitario. Su máximo dominio de linealización \overline{Z}_f , que es completamente invariante, se llama **disco de Siegel** de f . Si $\overline{Z}_f \Subset U_f$ es un quasidisco cuya frontera contiene exactamente un **punto crítico** $c_0 \in \partial Z_f$, entonces f es llamada **función de Siegel** (Figura 1.1).

Podemos hacer una foliación en el disco de Siegel Z_f de f por equipotenciales que vienen de la linealización, parametrizados por sus **alturas** que van desde 0 que es la altura de α , hasta 1 que es la altura de ∂Z_f .

El siguiente resultado [7, Teorema 3.2], nos asegura que el hecho de tener una función holomorfa con un disco de Siegel y un único punto crítico está relacionado con un número de rotación combinatoriamente acotado en el disco de Siegel.

Teorema 3.1.2. Si $\theta \in \Theta_{\text{bnd}}$, entonces el disco de Siegel cerrado \overline{Z} del polinomio cuadrático p_θ , es un quasidisco que contiene al punto crítico de p_θ .

Recíprocamente, suponga que una función holomorfa $f : U \rightarrow V$ con un único punto crítico tiene un quasidisco de Siegel fijo $\overline{Z}_f \Subset U \cap V$ que contiene al punto crítico de f . Entonces f tiene un número de rotación de tipo acotado.

Las funciones Siegel pacman son las funciones donde nos interesa aplicar el operador de renormalización pacman.

Definición 3.1.3. Un **pacman** $f : U \rightarrow V$ es **Siegel** si:

- a) f es una función de Siegel con disco de Siegel Z_f centrado en α .
- b) El arco crítico γ_1 es la concatenación de un rayo externo R_1 seguido de un rayo interno I_1 de Z_f tal que el único punto en la intersección $\gamma_1 \cap Z_f$ no es precrítico.
- c) Escribiendo $f : (U \setminus O'_0, O_0) \rightarrow (V, O)$ como un pacman truncado, el disco O es un subconjunto de Z_f acotado por su equipotencial.

El **número de rotación** de un Siegel pacman es $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $e(\theta) = e^{2\pi i \theta}$ es el multiplicador en α . Además por el Teorema 3.1.2 se tiene que el número de rotación de una función Siegel está en Θ_{bnd} .

El **nivel de truncamiento** de f es la altura de ∂O .

Si $f : U \rightarrow V$ es un Siegel pacman definimos el **conjunto de Julia de f** como

$$\mathcal{J}_f := \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\partial Z_f)}.$$

Ahora vamos a definir la relación de conjugación híbrida entre dos funciones de Siegel o dos Siegel pacman, la cual relaciona a dos de éstas funciones mediante sus discos de Siegel, la conjugación híbrida es una relación de equivalencia lo cual nos permitirá trabajar mas adelante con clases híbridas.

Definición 3.1.4. Como γ_1 es una concatenación de un rayo externo R_1 y un rayo interno I_1 , también γ_0 es la concatenación de un rayo externo R_0 con un rayo interno I_0 con $f(R_0 \cup I_0) = R_1 \cup I_1$.

Dos Siegel pacman $f : U_f \rightarrow V_f$ y $g : U_g \rightarrow V_g$ son **combinatoriamente equivalentes** si tienen el mismo número de rotación y si $R_0(f)$ y $R_0(g)$ tienen el mismo ángulo externo.

Una **conjugación híbrida entre funciones de Siegel** es una conjugación quasi-conforme que es conforme en una vecindad de los discos de Siegel. Análogamente se define una **conjugación híbrida entre Siegel pacman**.

Del siguiente resultado [7, Theorem 3.6] podemos concluir que el número de rotación determina la clase híbrida de una función de Siegel.

Teorema 3.1.5. *Cualesquiera dos funciones de Siegel con el mismo número de rotación son híbridas conjugadas en vecindades de sus discos de Siegel cerrados.*

Por ejemplo cualquier polinomio cuadrático de la forma

$$p_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} z + z^2,$$

con $\theta \in \Theta_{bnd}$, es una función de Siegel, así como el polinomio cuadrático

$$p_{c(\theta)}(z) = z^2 + c(\theta)$$

que tiene un punto fijo indiferente en $\alpha = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ con multiplicador $e^{2\pi i\theta}$ y número de rotación θ , en donde $c(\theta)$ (Ecuación 1.1) se encuentra en la frontera de la cardioide principal del conjunto de Mandelbrot, entonces ambos polinomios son híbridos conjugados, más aún la conjugación no sólo es conforme en una vecindad de sus discos de Siegel sino en toda una vecindad de sus conjuntos de Julia.

En la siguiente definición de prepacman de un Siegel pacman f vemos que es esencialmente lo mismo que el prepacman de un pacman, sólo que ahora para trabajar con clases híbridas nos va a importar el punto en el cual la curva β_0 del sector del prepacman se intersecta con el disco de Siegel de f .

Definición 3.1.6. *El prepacman Q de un Siegel pacman q también se le llama **Siegel prepacman**; el **número de rotación** y el **nivel de truncamiento** de Q son los de q . Recuerde que Q consiste de dos funciones que conmutan $q_- : U_- \rightarrow S_Q$ y $q_+ : U_+ \rightarrow S_Q$ tales que U_- y U_+ están separadas por β_0 . Dada una función de Siegel f decimos que f **tiene un prepacman Q alrededor del punto** $x \in \partial Z_f$ si q_-, q_+ son iteradas de f , el vértice de S_Q está en $\alpha(f)$ y $\beta_0(Q)$ intersecta a ∂Z_f en x .*

El siguiente lema [7, Lema 3.4] nos dice que para cualquier polinomio cuadrático de Siegel p con número de rotación de tipo acotado, existe un prepacman alrededor de cualquier punto $x \in \partial Z_p$, que no sea el punto crítico ni alguna de sus preimágenes iteradas, el cual lo hace pacman renormalizable. Además el número de rotación cambia como alguna iteración de la función R_{prm} en el número de rotación de p y el esparcimiento de U_+, U_- alrededor de α se queda tan cerca del disco de Siegel $\overline{Z_p}$ como queramos.

Lema 3.1.7. *Suponga que p es un polinomio cuadrático Siegel con número de rotación $\theta \in \Theta_{bnd}$. Considere un punto $x \in \partial Z_p$ tal que x no es el punto crítico de p o alguna de sus preimágenes. Entonces para toda $r \in (0, 1)$ y toda $\varepsilon > 0$, la función p tiene un Siegel prepacman*

$$Q = (q_- : U_- \rightarrow S_Q, q_+ : U_+ \rightarrow S_Q)$$

alrededor de x tal que:

- i) el número de rotación de Q es el resultado de aplicar cierto número de veces la función R_{prm} a θ .
- ii) para toda $z \in U_- \cup U_+$, la órbita $z, p(z), \dots, p^k(z)$ está en la ε -vecindad de $\overline{Z_p}$, para k tal que $p^k(z) = q_{\pm}(z)$.
- iii) r es el nivel de truncamiento de Q .
- iv) Todo segmento de rayo externo de Q está dentro de un rayo externo de p .

El lema anterior se prueba usando la conjugación del polinomio en su disco de Siegel con una rotación en el disco unitario, así se trasladan los sectores de renormalización de \mathbb{D}^1 a Z_p y se extiende dicho sector con rayos mas allá de Z_p para construir un prepacman en el plano dinámico de p .

Usando el Teorema 3.1.5 y el lema anterior, podemos mandar un prepacman de cualquier polinomio cuadrático de Siegel a un prepacman de cualquier función de Siegel con el mismo número de rotación que el polinomio [7, Corolario 3.7].

Corolario 3.1.8. *Toda función de Siegel $f : U \rightarrow V$ es pacman renormalizable. Además de que existen prepacman de f y p , donde p es el polinomio cuadrático con el mismo número de rotación que f , tales que la conjugación híbrida entre f y p respeta los prepacman como en la Definición 2.2.5.*

Si el Siegel pacman $f : U \rightarrow V$ proviene de la renormalización de un polinomio cuadrático Siegel, entonces su conjunto de no escape \mathfrak{R}_f es localmente conexo.

Ahora definiremos los estándar Siegel pacman [7, p.26], que son Siegel pacman tales que γ_0 pasa por el valor crítico y con un prepacman alrededor del valor crítico (Definición 3.1.6), las clases híbridas de los estándar Siegel pacman serán las que utilizaremos probar el Teorema 2.

Definición 3.1.9. *Decimos que un **Siegel pacman** es **estándar** si γ_0 pasa a través del valor crítico $c_1 = f(c_0)$, equivalentemente si γ_1 pasa a través de la imagen del valor crítico $f(c_1)$.*

*Un **estándar prepacman** R en el plano dinámico de una función de Siegel g es un prepacman alrededor del valor crítico de g . El pacman r obtenido de R es estándar y la función de renormalización de cambio de variables ψ_R respeta el rayo interno que pasa a través del valor crítico. La renormalización pacman asociada con R se llama **renormalización pacman estándar** de g .*

El siguiente teorema [7, Teorema 3.11] nos dice que después de fijar el nivel de truncamiento, podemos trabajar con clases híbridas de estándar Siegel pacman, las cuales están determinadas por su número de rotación.

Teorema 3.1.10. *Suponga que dos Siegel pacman son combinatoriamente equivalentes y además tienen el mismo nivel de truncamiento, entonces son híbridos equivalentes.*

3.2. El punto fijo de la renormalización pacman

En [7, Teorema 3.16], dado un número de rotación $\theta \in \Theta_{prd}$, se prueba que existe un Siegel pacman con éste número de rotación, el cual va a quedar fijo bajo cierto operador de renormalización pacman, para ello usan los resultados de McMullen [16, Teorema 8.1], en donde encuentra un punto fijo para la renormalización de *pares holomorfos* [16, p.29], los cuales son iteraciones para un primer retorno a ciertos dominios de una función holomorfa y en particular, polinomios cuadráticos de Siegel, donde además las iteraciones de primer retorno están relacionadas con la aproximación en fracción continua del número de rotación del polinomio de Siegel, por lo cual guarda un gran parecido a la renormalización pacman.

Usando el resultado mencionado arriba de McMullen, pero llevando a cabo la renormalización alrededor del punto c_1 , obtienen el siguiente lema [7, Lema 3.15].

Lema 3.2.1. *Para cualquier $\theta \in \Theta_{prd}$, existe un estándar Siegel pacman $f_* : U_* \rightarrow V_*$ que tiene un estándar Siegel prepacman $F_* = (f_*^a|_{U_-} \rightarrow S_*, f_*^b|_{U_+} \rightarrow S_*)$ junto con una función de pegado $\psi_* : S_* \rightarrow \bar{V}_*$ que proyecta a F_* de vuelta a f_* . Más aún se tiene que $\Delta_{F_*} \in f_*^{-1}(U_*)$.*

Al aplicar el Teorema 2.3.2 a f_* del Lema 3.2.1 obtienen el siguiente resultado [7, Teorema 3.16].

Teorema 3.2.2. *Sean $f_* : U_* \rightarrow V_*$ y F_* el prepacman del Lema 3.2.1. Entonces existen pequeñas vecindades $N_W(f_*, \varepsilon), N_W(f_*, \delta)$ de f_* con $\varepsilon < \delta$ y un operador analítico de renormalización pacman $\mathcal{R} : N_W(f_*, \varepsilon) \rightarrow N_W(f_*, \delta)$ tal que $\mathcal{R}f_* = f_*$. Más aún el operador \mathcal{R} es compacto así que su espectro es una sucesión que converge a cero. La prerenormalización de $\mathcal{R}f_*$ es F_* .*

El resultado anterior nos dice que al fijar un número de rotación periódico vamos a encontrar un estándar Siegel pacman f_* con éste número de rotación y una vecindad de f_* en donde existe un operador de renormalización pacman que deja fijo a f_* , además dicho operador de renormalización es analítico y compacto. El Teorema 1 extiende el resultado anterior en el sentido de que si ahora pedimos que el número de rotación sea de combinatoria acotada, no solamente periódica, para cualquier Siegel pacman podemos encontrar una vecindad de donde existe un operador analítico y compacto, aunque en éste caso no tendremos un punto fijo.

Para utilizar los resultados de analiticidad del operador de renormalización pacman y trabajar con su espacio tangente se usan los conceptos de variedad estable e inestable [11, Capítulo 6].

Definición 3.2.3. *Sea $f : X \rightarrow X$ un difeomorfismo y sea p un punto fijo de f . El conjunto o variedad estable de f en p es*

$$\{x \in X : f^n(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

La **variedad inestable** de f en p es el conjunto estable pero de la función f^{-1} en p .

El siguiente corolario [7, Corolario 3.17] nos dice que en una vecindad del punto fijo f_* , existe una variedad analítica \mathcal{W}^u que va a ser de dimensión finita, la cual sirve para partir el espacio tangente del operador de renormalización pacman en el punto f_* en la suma directa de dos componentes, una de estas componentes será \mathcal{W}^u .

Corolario 3.2.4. *En una pequeña vecindad de f_* el operador \mathcal{R} del Teorema 3.2.2, tiene una subvariedad analítica inestable finito-dimensional \mathcal{W}^u tangente a la dirección inestable de \mathcal{R} .*

En la demostración del corolario anterior usan resultados de la teoría de operadores hiperbólicos [9, Corolario 5.4], en particular que el operador analítico tenga un punto fijo, es por esto que no es tan sencillo poder extender éste resultado cuando el número de rotación es de tipo acotado; por lo cual en el Teorema 2 nosotros buscamos la construcción de la herradura de renormalización para que sea el análogo al punto fijo de renormalización y tener el resultado del corolario anterior pero para el operador del Teorema 1.

Un **pacman indiferente** es un pacman con un punto fijo indiferente $\alpha(f)$. El número de rotación de un pacman indiferente f es $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donde $e^{2\pi i\theta}$ es el multiplicador en $\alpha(f)$. Y si el número de rotación $\theta \in \mathbb{Q}$, entonces f es **parabólico**. La siguiente observación [7, Lema 3.18] no indica como actúa el operador de renormalización pacman cuando se aplica a un pacman de tipo parabólico.

Observación 3. *Tenemos que los parámetros racionales $\theta = p/q \in [0, 1]$ representan polinomios cuadráticos f_c , donde $c \in \partial\mathcal{M}$ pertenece a la cardioide principal del conjunto de Mandelbrot, que tienen un punto fijo indiferente de multiplicador $e^{2\pi i\theta}$, los cuales tienen en su conjunto de Julia una **flor de Fatou** con combinatoria p/q [14, Sección 21.3], es decir la flor tiene q -pétalos atractores por lo cual bajo q -iteraciones de f regresamos al mismo pétalo donde empezamos pero cada vez mas cerca del punto fijo α y en cada iteración de f en la flor avanzamos p -pétalos en dirección contraria a las manecillas del reloj. La función R_{prm} actúa en el número de rotación y en la flor de Fatou con combinatoria p/q de la siguiente manera:*

i) Si $p/q \in [0, 1/2]$, entonces

$$R_{prm} \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{p}{q-p}$$

remueve p -pétalos atractores y se sigue avanzado p -pétalos a la izquierda en cada iteración de $\mathcal{R}_{prm}(f)$.

ii) Si $p/q \in [1/2, 1]$, entonces

$$R_{prm} \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{2p - q}{q - (q - p)}$$

remueve $(q - p)$ -pétalos atractores y se avanza $(2p - q)$ -pétalos a la izquierda en cada iteración de $\mathcal{R}_{prm}(f)$.

Por otro lado lo que hacen las ramas inversas de R_{prm} a una flor de Fatou con combinatoria p/q es:

a) la primera rama

$$R_{prm,1}^{-1} \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{p}{q + p}$$

agrega $(p + q)$ -pétalos atractores y se sigue avanzado p -pétalos a la izquierda en cada iteración de $\mathcal{R}_{prm,1}^{-1}(f)$;

b) la segunda rama

$$R_{prm,2}^{-1} \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{q}{2q - p}$$

agrega $(2q - p)$ -pétalos atractores y se avanza q -pétalos a la izquierda en cada iteración de $\mathcal{R}_{prm,2}^{-1}(f)$.

El operador de renormalización pacman se puede aplicar a pacman indiferentes parabólicos pues al considerar la variedad inestable de f_* del Corolario 3.2.4 se puede tomar una foliación en dicha variedad dada por el multiplicador en el punto fijo α [7, Sección 7]. Por lo cual hay pacman parabólicos muy cerca de f_* donde el operador de renormalización está bien definido y por la observación anterior sabemos cómo actúa en los números de rotación.

Además trabajando en el espacio de prepacman maximales en [7, Sección 5] demuestran que los pacman hiperbólicos también tienen conjuntos llamados *flores valiosas* (valuable flowers) los cuales tienen pétalos atractores y repulsores que bajo cierta iteración se conjugan con la función $z + 1$ en el semiplano superior [7, Sección 6], es decir, se comportan de manera análoga a los polinomios cuadráticos indiferentes racionales y sus flores de Fatou.

Luego prueban que hay un movimiento holomorfo en \mathbb{C} equivariante con la órbita del punto crítico de los prepacman maximales [7, Lema 7.1]. Con esto y utilizando otra vez los resultados de McMullen [15, Teorema 8.1] demuestran la hiperbolicidad del operador de renormalización pacman en f_* [7, Teorema 7.7].

Teorema 3.2.5. *El operador de renormalización pacman \mathcal{R} , como el del Teorema 3.2.2, es hiperbólico en f_* con variedad inestable uno-dimensional \mathcal{W}^u y con variedad inestable \mathcal{W}^s de codimensión uno.*

En una pequeña vecindad de f_* la variedad estable \mathcal{W}^s coincide con el conjunto de pacman que tienen el mismo multiplicador que f_* en el punto fijo α . Todo pacman en \mathcal{W}^s es Siegel.

En una pequeña vecindad de f_* la variedad inestable \mathcal{W}^u está parametrizada por los multiplicadores del punto fijo α de los puntos $f \in \mathcal{W}^u$.

Cuando tenemos un operador lineal entre espacios vectoriales con un punto fijo, decimos que es **hiperbólico** si su espectro (el análogo al conjunto de eigenvectores pero en espacios de dimensión infinita) no tiene elementos de norma uno [11, Capítulo 4]. Lo cual es equivalente a poder dividir el espacio vectorial en una suma directa de la variedad estable e inestable las cuales son invariantes bajo el operador lineal y tienen constantes de expansión y contracción, además los eigenvectores nos van a decir cómo se comporta la transformación hiperbólica cerca de los puntos hiperbólicos. En nuestro caso la diferencial del operador de renormalización pacman es el operador lineal hiperbólico por lo cual el espacio tangente en el punto fijo se descompone en dos espacios los cuales son tangentes a \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s . En la variedad inestable la antirenormalización \mathcal{R}^{-1} se comporta como λf donde λ es el único eigenvector de la diferencial $D\mathcal{R}$ en \mathcal{W}^u , la cual al ser de dimensión uno-compleja puede ser parametrizada por el plano complejo. Mientras que en la variedad estable al aplicar la renormalización a puntos cercanos a f_* sus iteraciones van a converger a f_* exponencialmente [7, Teorema 7.5].

Por último en el Teorema de escalamiento [7, Teorema 8.2], prueban que si se toma una transversal a la clase híbrida de una función de Siegel f con número de rotación θ_* , es decir, funciones cercanas a f que tienen diferente multiplicador en su punto fijo α , y existe una sucesión $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{-\infty}$ tal que $R_{prm}^t(p_n/q_n) = p_{n+1}/q_{n+1}$ y $p_n/q_n \rightarrow \theta_*$ cuando $n \rightarrow -\infty$, donde $t \in \mathbb{N}$ es tal que $R_{prm}^t(\theta_*) = \theta_*$. Entonces existen representantes $g_{n,t}$ en la intersección de la transversal con la vecindad de f que tienen una flor valiosa de combinatoria p_n/q_n , y multiplicador $\lambda_t \in \mathbb{D}$ en el punto fijo α tales que

$$dist(f, g_{n,t}) \sim ((R_{prm}^t)'(\theta_*))^n.$$

Es así como obtienen los factores de escalamiento cerca de los parámetros Siegel en la cardioide principal con número de rotación de combinatoria acotada.

Por ejemplo tomemos la anti-media dorada $1/\phi^2 = 1 - [0; \bar{1}] \in \Theta_{prd}$ que vimos en el Ejemplo 2.4.3, entonces el parámetro c_* en la cardioide principal de \mathcal{M} con número de rotación $1/\phi^2$ es

$$c_* = \frac{e^{2\pi i \frac{1}{\phi^2}}}{2} - \left(\frac{e^{2\pi i \frac{1}{\phi^2}}}{2} \right)^2.$$

Por lo cual f_{c_*} es un polinomio cuadrático de Siegel con número de rotación $1/\phi^2$. Sabemos que a $1/\phi^2$ lo podemos aproximar por racionales con su sucesión en fracciones

continuas:

$$1 - [0; 1] = 0, \quad 1 - [0; 1, 1] = \frac{1}{2}, \quad 1 - [0; 1, 1, 1] = \frac{1}{3}, \quad 1 - [0; 1, 1, 1, 1] = \frac{2}{5}, \dots,$$

es decir si $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de Fibonacci ($\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} + \mathcal{P}_{n-2}$ donde $\mathcal{P}_0 = 1$ y $\mathcal{P}_1 = 1$), entonces la aproximación a $1/\phi^2$ por fracciones continuas es

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \dots, \frac{\mathcal{P}_{n-1}}{\mathcal{P}_{n+1}}, \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+2}}, \frac{\mathcal{P}_{n+1}}{\mathcal{P}_{n+3}}, \frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+4}}, \dots \right\}.$$

Por otro lado vimos en el Ejemplo 2.4.3 que $1/\phi^2$ es periódico bajo la función R_{prm}

$$R_{prm}^2 \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = \frac{1}{\phi^2}.$$

Entonces por el Teorema de escalamiento [12, Teorema 8.2], necesitamos encontrar una sucesión de racionales $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{-\infty}$ tales que $R_{prm}^2(p_n/q_n) = p_{n+1}/q_{n+1}$ y $p_n/q_n \rightarrow \theta_*$, cuando $n \rightarrow -\infty$. Ya sabemos que la sucesión $\{\mathcal{P}_n/\mathcal{P}_{n+2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a θ_* pero aplicando R_{prm} a ésta sucesión, tomando en cuenta que $\mathcal{P}_{n+2}/\mathcal{P}_{n+4} < 1/2$, para toda $n \geq 1$, tendremos que

$$R_{prm} \left(\frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+4}} \right) = \frac{\mathcal{P}_{n+2}/\mathcal{P}_{n+4}}{1 - \mathcal{P}_{n+2}/\mathcal{P}_{n+4}} = \frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+4} - \mathcal{P}_{n+2}} = \frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+3} + \mathcal{P}_{n+2} - \mathcal{P}_{n+2}} = \frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+3}},$$

luego como $\mathcal{P}_{n+2}/\mathcal{P}_{n+3} > 1/2$, entonces

$$R_{prm}^2 \left(\frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+4}} \right) = R_{prm} \left(\frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+3}} \right) = \frac{2(\mathcal{P}_{n+2}/\mathcal{P}_{n+3}) - 1}{\mathcal{P}_{n+2}/\mathcal{P}_{n+3}} = \frac{\mathcal{P}_{n+2} - \mathcal{P}_{n+1}}{\mathcal{P}_{n+2}} = \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+2}}.$$

Por lo cual para cumplir con las condiciones del teorema tomamos la subsucesión

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{\mathcal{P}_{n-2}}{\mathcal{P}_n}, \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+2}}, \frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+4}}, \dots \right\} \subset \left\{ \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

la cual está aproximándose a $1/\phi^2$ por la izquierda. También podríamos considerar a la subsucesión de $\{\mathcal{P}_n/\mathcal{P}_{n+2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que se aproxima a $1/\phi^2$ por la derecha y obtendremos el mismo resultado.

Al considerar la función de Siegel f_{c_*} y como rebanada transversal de f_{c_*} a la familia de polinomios cuadráticos f_c , entonces las funciones $g_{n,t}$ son de la forma f_c , en particular $g_{n,1} = f_{p_n/q_n}(0) = a_{p_n/q_n}$ es el centro (parámetro superatractor) de la componente hiperbólica con combinatoria p_n/q_n . Por lo cual

$$|c_* - a_{p_n/q_n}| = |f_{c_*}(0) - f_{p_n/q_n}(0)| \leq \text{dist}(f_{c_*}, g_{n,1}) \sim ((R_{prm}^2)'(\theta_*))^{-n}.$$

Por otro lado como $1/\phi^2 = \theta_* < 1/2$ y $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, entonces

$$R'_{prm} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\phi^2}\right)^2} = \frac{\phi^4}{(\phi^2 - 1)^2} = \frac{\phi^4}{\phi^2} = \phi^2.$$

Por lo cual tendremos que

$$(R^2_{prm})' \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = R'_{prm} \left(R_{prm} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) \right) R'_{prm} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) = R'_{prm} \left(\frac{1}{\phi} \right) \cdot \phi^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\phi}\right)^2} \cdot \phi^2 = \phi^4.$$

Así es como concluyen que los centros de las componentes hiperbólicas que aproximan a c_* , bajo la sucesión anterior, cumplen que

$$|c_* - a_{p_n/q_n}| \sim (\phi^4)^{-n}.$$

Además se obtiene exactamente el mismo resultado si en lugar de considerar la anti-media dorada $1/\phi^2$ tomamos el número

$$\frac{1}{\phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+1}} = [0; \bar{1}] \approx 0.6180\dots,$$

pues como vimos en el Ejemplo 2.4.3, se cumple que

$$R^2_{prm} \left(\frac{1}{\phi} \right) = \frac{1}{\phi}.$$

Si consideramos la subsucesión

$$\left\{ 1, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}, \dots, \frac{\mathcal{P}_{n-2}}{\mathcal{P}_{n-1}}, \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+1}}, \frac{\mathcal{P}_{n+2}}{\mathcal{P}_{n+3}}, \dots \right\} \subset$$

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \dots, \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+1}}, \frac{\mathcal{P}_{n+1}}{\mathcal{P}_{n+2}}, \dots \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

que cumple

$$R^2_{prm} \left(\frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{n+1}} \right) = \frac{\mathcal{P}_{n-2}}{\mathcal{P}_{n-1}},$$

entonces su multiplicador es

$$\begin{aligned} (R^2_{prm})' \left(\frac{1}{\phi} \right) &= R'_{prm} \left(R_{prm} \left(\frac{1}{\phi} \right) \right) R'_{prm} \left(\frac{1}{\phi} \right) = R'_{prm} \left(\frac{1}{\phi^2} \right) \left(\frac{1}{\phi} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\phi^2}\right)^2} \cdot \phi^2 = \phi^4. \end{aligned}$$

Así obtenemos el mismo factor de escalamiento que para la anti-media dorada. En la Figura 3.1 se puede observar la autosimilaridad de \mathcal{M} alrededor del punto $c(1/\phi)$ y como se van aproximando las copias con la combinatoria antes mencionada.

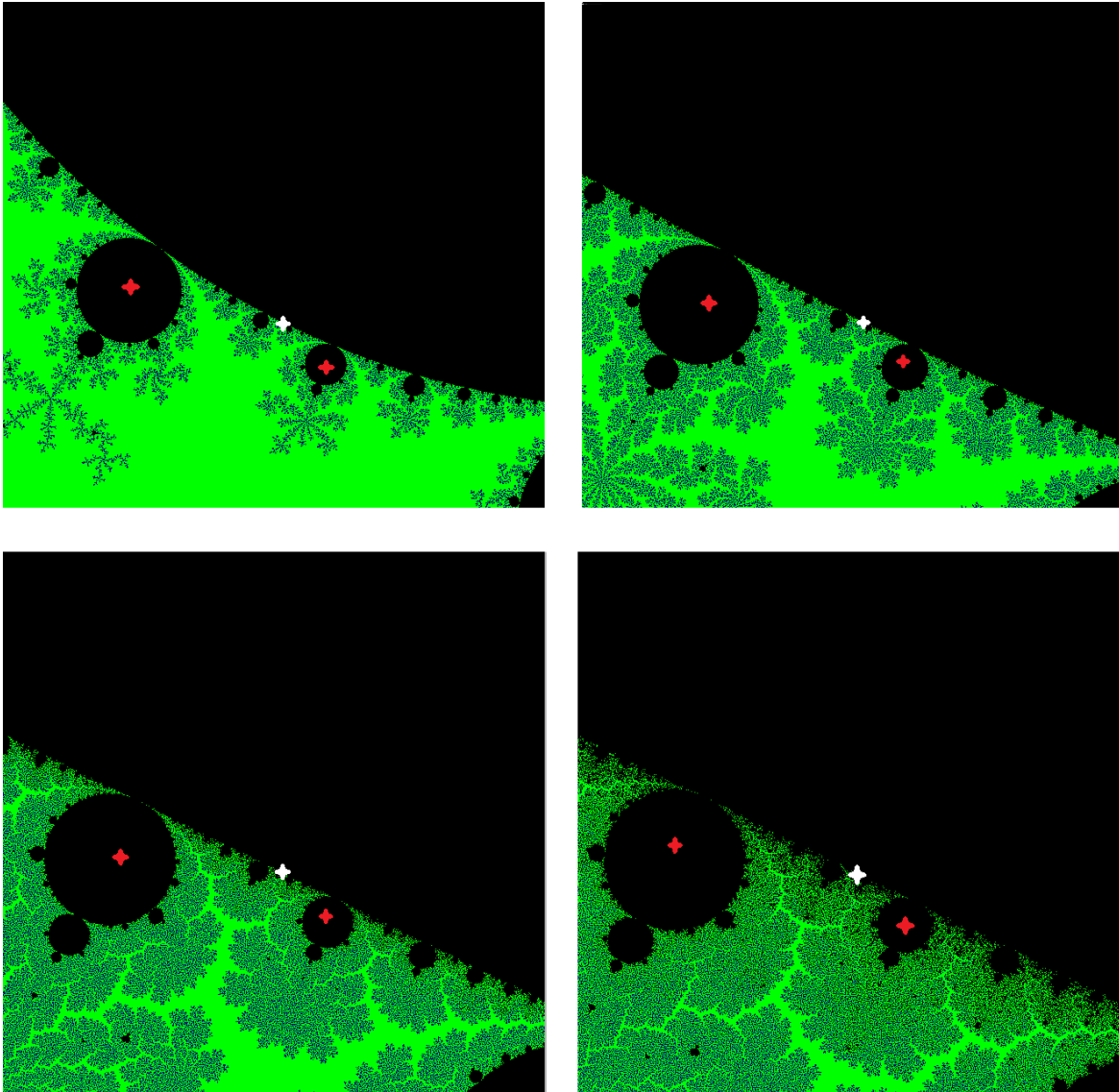


Figura 3.1: Con una cruz blanca se indica la posición del parámetro $c(1/\phi) \in \partial\mathcal{M}$ y en cada imagen se hace un acercamiento a este punto. En la imagen del lado superior izquierdo, la copia del lado izquierdo con una cruz roja es la de combinatoria $3/5$ mientras que la copia del lado derecho con una cruz roja es la de combinatoria $5/8$. En la imagen del lado superior derecho, la copia del lado izquierdo con una cruz roja es la de combinatoria $8/13$ mientras que la copia del lado derecho con una cruz roja es la de combinatoria $13/21$. En la imagen del lado inferior izquierdo, la copia del lado izquierdo con una cruz roja es la de combinatoria $21/34$ mientras que la copia del lado derecho con una cruz roja es la de combinatoria $34/55$. En la imagen del lado inferior derecho, la copia del lado izquierdo con una cruz roja es la de combinatoria $55/89$ mientras que la copia del lado derecho con una cruz roja es la de combinatoria $89/144$.

Capítulo 4

Renormalización pacman en parámetros Siegel de tipo acotado

En éste capítulo extendemos la definición y analiticidad del operador de renormalización pacman a cualquier función de Siegel o Siegel pacman que tenga número de rotación combinatoriamente acotado, ya que originalmente en [7] sólo estaba definido para funciones de Siegel o Siegel pacman con número de rotación periódico. Después usando éste resultado, construimos la herradura de renormalización del operador de renormalización pacman sobre las clases de equivalencia de los estándar Siegel pacman y concluimos con la demostración de que éste operador es semiconjugado al operador de corrimiento de un lugar a la izquierda en el espacio de sucesiones infinitas de símbolos en los naturales acotados por una misma constante.

4.1. Extensión del operador de renormalización pacman


Primero vamos a probar el Teorema 1 de la introducción, el cual se sigue de los resultados en [7] y nos dice que para cualquier Siegel pacman o función de Siegel, con número de rotación de combinatoria acotada, existe una vecindad donde el operador de renormalización pacman es analítico y compacto.

Teorema 4.1.1 (Teorema 1). *Para cualquier Siegel pacman (o función de Siegel) $f : U_f \rightarrow V$ con número de rotación $\theta \in \Theta_{bnd}$, existe un Siegel prepacman $F = (S, f^{k-}, f^{k+})$ alrededor de cualquier punto $x \in \partial Z_f$ diferente del punto crítico o alguna de sus preimágenes iteradas y una función de pegado $\psi : S \rightarrow V'$ que proyecta a F al Siegel pacman $\mathcal{R}f : U' \rightarrow V'$ con número de rotación $R_{prm}^t(\theta)$, para algún $t \in \mathbb{N}$. También existen pequeñas vecindades de Banach $N_W(f, \varepsilon)$ y $N_{U'}(\mathcal{R}f, \delta)$ y un operador de renormalización pacman*

$$\mathcal{R} : N_W(f, \varepsilon) \rightarrow N_{U'}(\mathcal{R}f, \delta)$$

tal que \mathcal{R} es compacto y analítico.

Demostración.

Debido al Corolario 3.1.8 ya sabemos que toda función de Siegel es pacman renormalizable, en particular si el número de rotación de f es de tipo acotado (Lema 3.1.7). Entonces podemos usar el Teorema 2.3.2, por lo cual existe una vecindad de f suficientemente pequeña donde podemos definir un operador de renormalización pacman que sea compacto y analítico. 

Notemos que el sector de renormalización de f en el teorema anterior, cuando x es el valor crítico $f(c_0)$ y el número de rotación de f es de tipo periódico, no es necesariamente el mismo sector de renormalización de [7, Lema 3.15], pues ellos necesitaban un sector de renormalización muy específico que viene de los resultados de McMullen [16], el cual hace que al pegar el prepacman obtengamos el mismo Siegel pacman.

4.2. Herradura y conjugación del operador de renormalización pacman

La definición del conjunto \mathcal{A}_M es análoga a la definición de la herradura de renormalización $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ en [12, p.389-390], pero en lugar de pedir la condición de *a priori bounds* [12, p.367], nosotros pedimos que los números de rotación pertenezcan al conjunto $\Theta_{\text{bnd}}(M)$, así que los elementos de la fracción continua del número de rotación están acotados por la constante M .

Definición 4.2.1. *Definimos el conjunto $\Theta_{\text{bnd}}(M) \subset \Theta_{\text{bnd}}$ como el subconjunto de ángulos cuyos elementos de su fracción continua están acotados por la constante M , esto es, si $\theta = [0; a_0, a_1, \dots]$ o $\theta = 1 - [0; a_0, a_1, \dots]$, entonces $\theta \in \Theta_{\text{bnd}}(M)$ si y sólo si $a_i \leq M$, para toda $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

*El conjunto de **puntos completamente sin escape o la herradura** \mathcal{A}_M es el conjunto de clases híbridas $[f]$ de estándar Siegel pacman, con un nivel de truncamiento fijo, con su número de rotación $\theta \in \Theta_{\text{bnd}}(M)$. A θ le podemos asignar la sucesión infinita $\{a_n\}_{n \geq 0}$ la cual depende de los elementos de su fracción continua. Luego podemos tomar cualquier sucesión $\{a_n\}_{n < 0} \subset \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq M$, con lo cual obtenemos una sucesión bi-infinita $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ relacionada con θ . Así tendremos que $[f]$ es infinitamente pacman renormalizable hacia atrás y hacia adelante, lo cual significa que para toda $n \in \mathbb{Z}$ existen clases híbridas $[f_n]$ y $[f_{n+1}]$ definidas por su número de rotación $\rho([f_n]) = [0; a_n, a_{n+1}, \dots]$ (o $1 - [0; a_n, a_{n+1}, \dots]$ dependiendo si $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ o $\theta = 1 - [a_0, a_1, \dots]$ y si n es impar o par) tales que $\mathcal{R}_M[f_n] = [f_{n+1}]$, donde $[f_0] = [f]$ y renormalizar una clase híbrida significa hacer la renormalización pacman en algún representante de la clase $\hat{f} \in [f]$, de tal forma que $\mathcal{R}_M \hat{f}$ actúa en el número de rotación*

$\theta = [0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ como

$$R_M(\theta) = R_{prm}^{a_0}([0; a_0, a_1, a_2, \dots]) = 1 - [0; a_1, a_2, \dots];$$

análogamente en el caso $\theta = 1 - [0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ el operador \mathcal{R}_M actúa como

$$R_M(\theta) = R_{prm}^{a_0}(1 - [0; a_0, a_1, a_2, \dots]) = [0; a_1, a_2, \dots].$$

Note que debido al Teorema 4.1.1, el operador de renormalización pacman \mathcal{R}_M en \mathcal{A}_M siempre está bien definido. También éste conjunto es no vacío pues al menos están las clases $[f]$ tales que su número de rotación $\theta = [0; \overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$ es periódico con $a_i \leq M$, y podemos asociarles la sucesión bi-infinita:

$$\{\dots, a_n, a_0, a_1, \dots, a_n, a_0, a_1, \dots, a_n, a_0, \dots\}.$$

Tomando en cuenta la Observación 1 también podemos ver a la función R_M de la siguiente forma, si $\theta = [0; a_0, a_1, \dots]$ tenemos que

$$R_M(\theta) = R_{prm}^{a_0}([0; a_0, a_1, a_2, \dots]) = \begin{cases} [0; 1, a_1 - 1, a_2, \dots] & \text{si } R_M(\theta) \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow a_1 > 1; \\ [0; a_2 + 1, a_3, \dots] & \text{si } R_M(\theta) \in [0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow a_1 = 1, \end{cases}$$

y si $\theta = 1 - [0; b_0, b_1, \dots]$, entonces

$$R_M(\theta) = R_{prm}^{b_0}(1 - [0; b_0, b_1, b_2, \dots]) = \begin{cases} 1 - [0; 1, b_1 - 1, b_2, \dots] & \text{si } R_M(\theta) \in [0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow b_1 > 1; \\ 1 - [0; b_2 + 1, b_3, \dots] & \text{si } R_M(\theta) \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow b_1 = 1. \end{cases}$$

Por lo cual tenemos que R_M aplicada a un $\theta \in \Theta_{bnd}(M)$ vuelve a caer en $\Theta_{bnd}(M)$ o a lo más en $\Theta_{bnd}(M + 1)$, dependiendo como expresamos al número $R_M(\theta)$ (debido al primer coeficiente), pero no importa cuantas veces iteramos R_M en un elemento de $\Theta_{bnd}(M)$ no nos salimos de $\Theta_{bnd}(M + 1)$.

Ejemplo 4.2.2. Supongamos que $\theta_0 \in \Theta_{per}$ donde $\theta_0 = [0; \overline{a_0, a_1, \dots, a_k}]$, entonces

$$R_M^{k+1}(\theta_0) = \begin{cases} [0; a_0, a_1, \dots] = \theta_0 & \text{si } k \text{ es impar;} \\ 1 - [0; a_0, a_1, \dots] & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

Por lo cual si k es par hay que volver a aplicar R_M^{k+1} a $R_M^{k+1}(\theta_0)$ para obtener a θ_0 . Es decir, si tenemos un número θ_0 periódico respecto a R_{prm} , con k la longitud de su periodo, éste también será periódico respecto a R_M donde

$$\theta_0 = \begin{cases} R_M^{k+1}(\theta_0) & \text{si } k \text{ es impar;} \\ R_M^{2(k+1)}(\theta_0) & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

La siguiente observación nos dice que una clase $[f] \in \mathcal{A}_M$ determina una sucesión de clases híbridas de estándar Siegel pacman $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}_M$, una sucesión de números de rotación $\theta_n = \rho([f_n])$ y una sucesión bi-infinita $\tau([f])$.

Observación 4. *Por la Definición 4.2.1 dada $[f] \in \mathcal{A}_M$, automáticamente obtenemos una sucesión de clases $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}_M$ tales que $\mathcal{R}_M[f_n] = [f_{n+1}]$, las cuales a su vez generan una sucesión de ángulos $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definidos por el número de rotación de cada clase $\theta_n = \rho([f_n])$. Debido a la condición $\mathcal{R}_M[f_n] = [f_{n+1}]$ y como actúa R_M en los ángulos de rotación, podemos obtener una sucesión bi-infinita $\tau([f]) = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ cuyos elementos son los números naturales que definen a los números de rotación de las clases $[f_n]$.*

Las siguientes definiciones para la construcción de la conjugación son análogas a las de [12, p.389-391].

Definición 4.2.3. *La **extension natural** $\widehat{\mathcal{R}}_M : \widehat{\mathcal{A}}_M \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_M$ del operador $\mathcal{R}_M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_M$ se define como el levantamiento de \mathcal{R}_M al **espacio de órbitas de dos lados** $\mathcal{F} = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde $\widehat{\mathcal{R}}_M(\mathcal{F}) = \{\mathcal{R}_M[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, entonces $\widehat{\mathcal{R}}_M$ es un homeomorfismo con respecto a la topología débil en $\widehat{\mathcal{A}}_M$. Esto significa que $\mathcal{G}_m = \{[g_{m,n}]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ converge a $\mathcal{F} = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cuando $m \rightarrow \infty$ si y sólo si dada $n \in \mathbb{Z}$ la coordenada $[g_{m,n}]$ está bien definida siempre y cuando la coordenada $[f_n]$ está bien definida y cuando esto pasa $[g_{m,n}] \rightarrow [f_n]$ cuando $m \rightarrow \infty$, esto es, para cada m hay un representante de $[g_{m,n}]$ tales que convergen a un representante de $[f_n]$ en el espacio de funciones analíticas con respecto a la norma del supremo.*

*También consideramos el **espacio** $\Sigma(M)$ de **sucesiones bi-infinitas de números naturales** de la forma $\tau = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$, acotados por la misma constante M y con la topología débil (es decir convergencia punto a punto como arriba). Denotamos por $\omega : \Sigma(M) \rightarrow \Sigma(M)$ el **corrimiento a la izquierda** es éste espacio, algunas veces llamado **desplazamiento de Bernoulli**, de tal forma que a_1 es la coordenada cero de $\omega(\tau)$.*

La siguiente observación nos dice que $\Theta_{bnd}(M)$ es un subconjunto cerrado de Θ_{bnd} , lo cual nos va a permitir definir la herradura de renormalización para el operador de renormalización pacman en las clases híbridas de los estándar Siegel pacmen. Por **herradura de renormalización** nos referimos a un conjunto que es invariante bajo el operador R_M , secuencialmente compacto donde R_M es topológicamente semi-conjugado al operador de corrimiento de Bernoulli en el espacio de símbolos $\Sigma(M)$.

Observación 5. *Dado cualquier $M \in \mathbb{N}$, el conjunto $\Theta_{bnd}(M) \subset \Theta_{bnd} \subset [0, 1]$ de números de rotación irracionales $\theta = [0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ o $\theta = 1 - [0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ tales que $a_i \leq M$, para toda $i = 0, 1, 2, \dots$, es un conjunto cerrado.*

En efecto supongamos que $\theta = [0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ (el caso $\theta = 1 - [0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ es análogo), sea $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Theta_{bnd}(M)$, donde $\theta_n = [0; a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots]$ y tal que $\theta_n \rightarrow$

θ , cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto θ también es irracional y ya que la expansión en fracción continua es única, para todo $\varepsilon > 0$, existen $N, m(N) \in \mathbb{N}$ tales que si para toda $n \geq N$, $|\theta_n - \theta| < \varepsilon$, entonces $a_i^{(n)} = a_i$, para toda $i \leq m$. Así que para toda $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = a_i$. Y como para toda $i, n \in \mathbb{N}$, $a_i^{(n)} \leq M$, entonces su límite también está acotado por M , esto es, $a_i \leq M$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\theta = [0; a_0, a_1, a_2, \dots] \in \Theta_{\text{bnd}}(M)$.

Ahora ya estamos listos para demostrar el teorema principal de éste trabajo.

Teorema 4.2.4 (Teorema 2). *Para cualquier $M > 0$ el conjunto \mathcal{A}_M es una herradura para el operador de renormalización $\mathcal{R}_M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_M$ el cual actúa en las clases híbridas de estándar Siegel pacman con número de rotación en $\Theta_{\text{bnd}}(M)$. La extensión natural $\widehat{\mathcal{R}}_M : \widehat{\mathcal{A}}_M \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_M$ es un homeomorfismo topológicamente conjugado al corrimiento a la izquierda $\omega : \Sigma(M) \rightarrow \Sigma(M)$ mientras que \mathcal{R}_M es semiconjugada a ω .*

En resumen lo que vamos a probar es que el siguiente diagrama es conmutativo y que las funciones el él son continuas.

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma(M) & \xrightarrow{\omega} & \Sigma(M) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
 \widehat{\mathcal{A}}_M & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{R}}_M} & \widehat{\mathcal{A}}_M \\
 \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_0 \\
 \mathcal{A}_M & \xrightarrow{\mathcal{R}_M} & \mathcal{A}_M
 \end{array}$$

Dividiremos la prueba del teorema anterior en los siguientes lemas.

Lema 4.2.5. *El conjunto \mathcal{A}_M es precompacto con respecto a la renormalización de órbitas.*

Demostración.

Veamos que dada $[f_0] \in \mathcal{A}_M$, la cual por la Observación 4 tiene asociada una sucesión de clases $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{A}_M$ tal que $[f_n] = \mathcal{R}_M^n[f_0]$ y $\mathcal{R}_M[f_n] = [f_{n+1}]$, entonces debemos encontrar una subsucesión $\{[f_{n_k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una clase $[F] \in \mathcal{A}_M$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} [f_{n_k}] = [F]$. Para probar esto necesitamos encontrar representantes de éstas clases que converjan a un representante de $[F]$ en el espacio de funciones analíticas con la norma uniforme.

Como ya vimos por la Observación 4, a $[f] \in \mathcal{A}_M$ le podemos asociar una sucesión de ángulos $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definidos por el número de rotación de cada clase de $[f_n]$, es decir $\theta_n = \rho([f_n])$. Así que dado cualquier $N \in \mathbb{Z}$ podemos tomar la sucesión $\{\theta_n\}_{n \geq N} \subset \Theta_{\text{bnd}}(M)$ de números de rotación asociados a cada $[f_n]$. Ahora por la Observación 5, el conjunto $\Theta_{\text{bnd}}(M)$ es cerrado en $[0, 1]$, entonces $\{\theta_n\}_{n \geq N}$ debe tener

una subsucesión $\{\theta_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a un $\theta_+ \in \Theta_{\text{bnd}}(M)$. Dado que todo número irracional tiene una única expresión en fracción continua, la convergencia anterior nos dice que eventualmente los primeros elementos $a_i^{n_k}$ de cada θ_{n_k} deben ser iguales a los primeros elementos a_i^+ de la fracción continua de θ_+ , esto es $a_i^{n_k} = a_i^+$ para $i = 0, \dots, k_0$, donde $k_0 \rightarrow \infty$ si $|\theta_{n_k} - \theta_+| \rightarrow 0$.

Ahora a cada θ_{n_k} le asociamos la clase de estándar Siegel pacman $[f_{n_k}]$ que tiene el número de rotación θ_{n_k} y de la misma forma a θ_+ le asociamos su clase $[F]$. Para probar que $[f_{n_k}] \rightarrow [F]$ necesitamos encontrar representantes donde se de la convergencia.

Definimos el número θ'_+ de tal manera que si $\theta_+ = [0; a_0^+, a_1^+, a_2^+, \dots]$ (análogamente si $\theta_+ = 1 - [0; a_0^+, a_1^+, a_2^+, \dots]$), entonces $\theta'_+ := [0; a_0^+ + 1, a_1^+, a_2^+, \dots]$; y de la misma forma a cada θ_{n_k} le asociamos θ'_{n_k} que consiste en añadir un 1 al primer elemento de la fracción continua de θ_{n_k} . Por lo cual tendremos que $R_{\text{prm}}(\theta'_+) = \theta_+$, $R_{\text{prm}}(\theta'_{n_k}) = \theta_{n_k}$ y por lo tanto $\theta'_{n_k} \rightarrow \theta'_+$.

Ahora consideremos los polinomios cuadráticos $f_{c(\theta)} = z^2 + c(\theta)$ de tipo Siegel en la cardioide principal de \mathcal{M} , los cuales tienen número de rotación θ , esto es, $f'_{c(\theta)}(\alpha_{c(\theta)}) = e^{2\pi i \theta}$, donde $\alpha_{c(\theta)}$ es el punto fijo α de $f_{c(\theta)}$. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \partial\mathcal{M}$ la función que a cada $\theta \in [0, 1]$ le asigna el punto $c = \frac{1 - (1 - e^{2\pi i \theta})^2}{4}$ en la frontera de la cardioide principal (esto es porque el punto fijo α de f_c satisface que $f'_c(\alpha) = e^{2\pi i \theta}$ y $\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$). Por lo tanto g es continua en su dominio.


Sea A_∞ el espacio de Banach de funciones analíticas con la norma uniforme. Ahora definimos la función $h : \partial\mathcal{M} \rightarrow A_\infty$, tal que $h(c) = f_c$ es el polinomio $f_c(z) = z^2 + c$. Entonces la función g es continua porque si $|c_1 - c_2| \rightarrow 0$, entonces $\|h(c_1) - h(c_2)\|_\infty = \|z^2 + c_1 - (z^2 + c_2)\|_\infty = |c_1 - c_2| \rightarrow 0$.

Cuando tomamos la composición de funciones $h \circ g : [0, 1] \rightarrow A_\infty$ obtenemos una función continua que a cada $\theta \in [0, 1]$ le asigna el polinomio $f_{c(\theta)}$. Entonces conforme $\theta'_{n_k} \rightarrow \theta'_+$, tenemos que $f_{c(\theta'_{n_k})} \rightarrow f_{c(\theta'_+)}$.

Si consideramos el operador de renormalización pacman del Lema 3.1.7 aplicado en $f_{c(\theta'_+)}$, con $x = f(0)$ para tener un estándar Siegel pacman, de tal forma que actúa como solo una iterada de la función R_{prm} en el número θ'_+ , es decir, restando un uno al primer coeficiente de la fracción continua por lo cual $R_{\text{prm}}(\theta'_+) = \theta_+$. Entonces por el Teorema 4.1.1, existe una vecindad $N_U(f_{c(\theta'_+)}, \varepsilon)$, donde el operador de renormalización pacman \mathcal{R} es compacto y analítico.

Si consideramos el estándar Siegel pacman $\mathcal{R}f_{c(\theta'_+)}$ por construcción tenemos un estándar Siegel pacman con número de rotación θ_+ por lo cual es un representante de la clase $[F]$. De la misma forma si $k \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande tenemos que $f_{c(\theta'_{n_k})} \in N_U(f_{c(\theta'_+)}, \varepsilon)$ y si consideramos a $\mathcal{R}f_{c(\theta'_{n_k})}$ tendremos un estándar Siegel pacman que tiene número de rotación θ_{n_k} por lo cual es un representante de la clase $[f_{n_k}]$. Así conforme $f_{c(\theta'_{n_k})} \rightarrow f_{c(\theta'_+)}$ y dado que el operador de renormalización pacman \mathcal{R} es continuo en $N_U(f_{c(\theta'_+)}, \varepsilon)$, podemos concluir que $\mathcal{R}f_{c(\theta'_{n_k})} \rightarrow \mathcal{R}f_{c(\theta'_+)}$ en alguna vecindad de $\mathcal{R}f_{c(\theta'_+)}$, es decir, hemos encontrado representantes de las clases donde se

da la convergencia.

Finalmente veamos que $[F] \in \mathcal{A}_M$. Por construcción sabemos que su número de rotación θ_+ pertenece a $\Theta_{bnd}(M)$ por lo cual $[F]$ es infinitamente renormalizable hacia delante. Ahora falta ver que $[F]$ es infinitamente renormalizable hacia atrás, para ésto podemos simplemente añadir cualquier sucesión infinita $\{a_n^+\}_{n<0}$ acotada por M , de tal manera que al combinarla con la sucesión generada por θ_+ obtenemos una sucesión bi-infinita $\{\dots, a_{-1}^+, a_0^+, a_1^+, \dots\} \in \Sigma(M)$ a la cual le podemos asociar una sucesión de clases híbridas de estándar Siegel pacman $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donde el número de rotación de $[f_n]$ está dado por $\theta_n = [0; a_n^+, a_{n+1}^+, \dots]$ si $n \in \mathbb{Z}$ es par y $\theta_n = 1 - [0; a_n^+, a_{n+1}^+, \dots]$ si $n \in \mathbb{Z}$ es impar. Así $[f_0] = [F]$ y por lo tanto $\mathcal{R}_M[f_n] = [f_{n+1}]$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. 

Lema 4.2.6. *El operador $\widehat{\mathcal{R}}_M$ es conjugado al operador ω mientras que \mathcal{R}_M es semi-conjugado a ω .*

Demostración.

Definimos la función de conjugación $\Phi : \Sigma(M) \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_M$ tal que a cada $\tau = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma(M)$ le asigna una $\mathcal{F} = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \widehat{\mathcal{A}}_M$ de tal manera que el número de rotación ρ de cada clase de estándar Siegel pacman $[f_n]$ está dado por

$$\rho([f_n]) = \begin{cases} [0; a_n, a_{n+1}, \dots] & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1 - [0; a_n, a_{n+1}, \dots] & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La función Φ está bien definida pues debido al Teorema 3.1.10 cada número de rotación determina una única clase de estándar Siegel pacman.

Veamos que Φ es una función inyectiva. Si tomamos dos sucesiones distintas $\tau = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \tau' = \{a'_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma(M)$ con $\Phi(\tau) = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\Phi(\tau') = \{[f'_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, entonces debe existir al menos una $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_{n_0} \neq a'_{n_0}$. Por lo cual $[f_{n_0}] \neq [f'_{n_0}]$, pues tienen diferente número de rotación, así que $\Phi(\tau) \neq \Phi(\tau')$.

Por otro lado Φ es suprayectiva. Sea $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \widehat{\mathcal{A}}_M$ y si suponemos que $n \in \mathbb{Z}$ es par (el caso impar es análogo), sean $\theta_n = \rho([f_n]) = [0; a_n^{(n)}, a_{n+1}^{(n)}, a_{n+2}^{(n)}, \dots]$ y $\theta_{n+1} = \rho([f_{n+1}]) = 1 - [0; a_{n+1}^{(n+1)}, a_{n+2}^{(n+1)}, \dots]$. Debido a que $\mathcal{R}_M[f_n] = [f_{n+1}]$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, esto implica que $\rho(\mathcal{R}_M[f_n]) = \rho([f_{n+1}])$, así que $a_i^{(n)} = a_i^{(n+1)}$ para toda $i \geq n+1$. Como esto pasa para toda $n \in \mathbb{Z}$, tenemos una única sucesión de elementos $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ que define a los números de rotación de las clases de $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Por lo tanto es suficiente tomar $\tau = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma(M)$ para que $\Phi(\tau) = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Por último veamos que la función Φ es continua. Sean $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma(M)$ una sucesión con $\tau_k = \{a_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\tau = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma(M)$ tales que $\tau_k \rightarrow \tau$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces tenemos que probar que si $\Phi(\tau_k) = \mathcal{F}_k = \{[f_n^{(k)}]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\Phi(\tau) = \mathcal{F} = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, entonces $\mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}$ cuando $k \rightarrow \infty$, es decir, para toda $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} [f_n^{(k)}] = [f_n]$. Así que fijando un entrada, digamos $n = 0$, hay que encontrar representantes de las clases

$[f_0^{(k)}]$ y $[f_0]$ en el espacio A_∞ donde se tenga la convergencia.

Sea $\Sigma^+(M)$ el espacio de sucesiones infinitas hacia la derecha con elementos en los números naturales acotados por la constante M , dotado con la topología débil. Vamos a probar que la función $g : \Sigma^+(M) \rightarrow \Theta_{bnd}(M)$, tal que

$$g(\{a_n\}_{n \geq 0}) = [0; a_0, a_1, a_2, \dots], \quad (4.1)$$

es continua. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos la sucesión $\tau'_k = \{a_n^{(k)}\}_{n \geq 0} \in \Sigma^+(M)$, como por hipótesis $\tau_k \rightarrow \tau$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces τ'_k converge a $\tau' = \{a_n\}_{n \geq 0} \in \Sigma^+(M)$ cuando $k \rightarrow \infty$, por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)} = a_n$. Debido a que $a_n^{(k)}, a_n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una $K(n) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq K$ se satisface que $a_n^{(k)} = a_n$.

Notemos que $K(n)$ no necesariamente es la misma para cada n , pero lo que si podemos asegurar es que dado un $m \in \mathbb{N}$, existe un $N(m) = \max\{K(0), K(1), \dots, K(m)\}$ tal que para toda $k \geq N(m)$, $a_i^{(k)} = a_i$ para $i = 0, 1, \dots, m$.

Ahora si probamos que dadas cualesquiera dos expansiones en fracción continua

$[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots]$, $[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots] \in \Theta_{bnd}(M)$ tales que sus primeros n -elementos son iguales, entonces deben satisfacer que

$$|[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots] - [0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots]| \leq \frac{M}{B^{2n}}, \quad (4.2)$$

donde $B = 1 + \frac{1}{M+1}$.

Con esto último y como ya sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \{a_n^{(k)}\}_{n \geq 0} = \{a_n\}_{n \geq 0}$, podemos concluir que para toda $\varepsilon > 0$, existen $n, N \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes tales que si $k \geq N$ y $a_i^{(k)} = a_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces

$$|[0; a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots] - [0; a_0, a_1, a_2, \dots]| < \varepsilon.$$

Por lo cual $\lim_{k \rightarrow \infty} g(\tau'_k) = g(\tau')$ y entonces g será continua.

Primero veamos que (4.2) se cumple para expresiones finitas donde los primeros n -elementos son iguales, esto es de la forma $[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$, $[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n]$ cuyos elementos están acotados por M . Al hacer la resta de fracciones obtenemos

$$[0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] - [0; a_0, a_1, a_2, \dots, b_n] = \frac{[0; a_1, a_2, a_3, \dots, b_n] - [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]}{A_0 A'_0}$$

donde $A_0 := a_0 + [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$, $A'_0 := a_0 + [0; a_1, a_2, a_3, \dots, b_n]$.

De la misma forma cuando hacemos la resta $[0; a_1, a_2, a_3, \dots, b_n] - [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$, obtenemos

$$[0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] - [0; a_0, a_1, a_2, \dots, b_n] = \frac{[0; a_2, a_3, a_4, \dots, b_n] - [0; a_2, a_3, a_4, \dots, a_n]}{A_0 A'_0 A_1 A'_1}$$

donde $A_1 := a_1 + [0; a_2, a_3, \dots, a_n]$, $A'_1 := a_1 + [0; a_2, a_3, \dots, b_n]$.

Procediendo de forma análoga haciendo todas las restas de fracciones obtenemos

$$|[0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] - [0; a_0, a_1, a_2, \dots, b_n]| = \frac{|a_n - b_n|}{A_0 A'_0 A_1 A'_1 \dots A_{n-1} A'_{n-1} A_n A'_n}$$

donde $A_i := a_i + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n]$, $A'_i := a_i + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, b_n]$ con $i = 0, 1, \dots, n$. Por hipótesis se satisface que $1 \leq a_k, b_n \leq M$ para $k = 0, \dots, n$, así que para $i = 0, 1, \dots, n-1$ tenemos que

$$A_i = a_i + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n] \geq B;$$

también $A_n = a_n \geq 1$ implica que $1/A_n \leq 1$ y lo mismo pasa para A'_i . Por lo tanto podemos concluir que (4.2) es verdad para el caso finito.

Ahora veamos que lo de arriba se sigue cumpliendo cuando tenemos fracciones continuas infinitas cuyos primeros n -elementos son iguales, así que vamos a tomar dos elementos de la forma $[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots]$, $[0; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots] \in \Theta_{\text{bnd}}(M)$. En efecto, para toda $i \in \mathbb{N}$ se sigue cumpliendo que

$$A_i := a_i + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots] \geq B$$

$$A'_i := a_i + [0; a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots] \geq B.$$

Por lo cual en la n -ésima resta tendremos que:


$$\begin{aligned} & |[0; a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] - [0; a_0, a_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots]| = \\ & \frac{|a_n + [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] - (b_n + [0; b_{n+1}, b_{n+2}, \dots])|}{A_0 A'_0 A_1 A'_1 \dots A_{n-1} A'_{n-1} A_n A'_n} \leq \frac{M}{B^{2n}}. \end{aligned}$$

Ahora con todo lo anterior probemos que la función Φ es continua en la entrada $n = 0$. Dado que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\tau_k = (\dots, a_{-1}^{(k)}, a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots) \in \Sigma(M)$, consideremos la sucesión $\{\tau'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con elementos $\tau'_k := \{1 + a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots\} \in \Sigma^+(M+1)$ y un punto $\tau' := \{1 + a_0, a_1, a_2, \dots\} \in \Sigma^+(M+1)$. Como por hipótesis $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \tau$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau'_k = \tau'$.

Consideremos la sucesión de ángulos $\{\theta'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por $\theta'_k = [0; 1 + a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots]$, el cual es el número de rotación de $[f_0^{(k)}]$ pero sumándole un uno al primer elemento de su fracción continua. Dado que la función $g : \Sigma^+(M+1) \rightarrow \Theta_{\text{bnd}}(M+1)$ definida de igual forma que en (4.1) también debe ser continua, entonces $\theta'_k = g(\tau'_k) \rightarrow g(\tau') = \theta' = [0; 1 + a_0, a_1, a_2, \dots]$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Ahora procederemos de la misma forma a como probamos la compacidad de las sucesiones en \mathcal{A}_M con respecto a la órbitas de renormalización (Lema 4.2.5). Es decir, a cada θ'_k lo mandamos a $\partial\mathcal{M}$ con $c(\theta'_k) = \frac{1 - (1 - e^{2\pi i \theta'_k})^2}{4}$ de manera continua, por lo tanto $c(\theta'_k) \rightarrow c(\theta')$ cuando $k \rightarrow \infty$. Luego a cada $c(\theta'_k)$ le asignamos el polinomio

$f_{c(\theta'_k)}$ en A_∞ , lo cual ya vimos que es continuo, por lo tanto $f_{c(\theta'_k)} \rightarrow f_{c(\theta')}$. Finalmente aplicamos el operador de renormalization pacman \mathcal{R} , el cual por el Teorema 4.1.1 es continuo en una vecindad suficientemente pequeña de $f_{c(\theta')}$, de tal forma que actúa en el número de rotación como R_{prm} , por lo tanto $\mathcal{R}f_{c(\theta'_k)} \rightarrow \mathcal{R}f_{c(\theta')}$. De ésta forma es como obtenemos los representantes $\mathcal{R}f_{c(\theta'_k)}$ de las clases $[f_0^{(k)}]$, pues tienen los mismos números de rotación, los cuales convergen a $f_{c(\theta')}$ que es un representante de $[f_0]$. Lo mismo puede hacerse para cada $[f_n]$, con $n \in \mathbb{Z}$, que pertenece a $\mathcal{F} = \{[f_n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Por lo cual Φ es un homeomorfismo.

Finalmente como la función proyección en la coordenada cero $\Pi_0 : \widehat{\mathcal{A}}_M \rightarrow \mathcal{A}_M$ no es inyectiva, entonces $\mathcal{R}_M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_M$ es semiconjugado a $\omega : \Sigma(M) \rightarrow \Sigma(M)$. 

Conclusión

Con el Teorema 1 probamos que se puede definir un operador de renormalización pacman que sea compacto y analítico en cualquier Siegel pacman con número de rotación acotado. Usamos esto para definir un conjunto herradura \mathcal{A}_M donde el operador de renormalización Siegel pacman \mathcal{R}_M puede aplicarse infinitamente hacia atrás y hacia adelante. Luego en el Teorema 2 probamos que el comportamiento de éste operador en los números de rotación está modelado por el corrimiento a la izquierda en el espacio de sucesiones bi-infinitas de números naturales acotadas por una misma constante. De esta manera nos acercamos a la conjetura de Lyubich [7, Apéndice C] la cual dice que existe un operador de renormalización pacman global, el cual tiene una herradura de renormalización en la molécula principal del conjunto de Mandelbrot (la molécula principal de \mathcal{M} es el subconjunto cerrado más pequeño de \mathcal{M} que contiene a la componente hiperbólica principal así como a todas las componentes hiperbólicas obtenidas de la componente principal a través de bifurcaciones parabólicas), el cual es analítico a pedazos, hiperbólico con variedad inestable uno-dimensional tal que su herradura de renormalización es compacta y combinatoriamente relacionada con R_{prm} . Para llegar a probar dicha conjetura faltaría ver que el operador de renormalización pacman \mathcal{R}_M en los parámetros Siegel con número de rotación acotada es hiperbólico, pero el primer obstáculo es encontrar la teoría de operadores hiperbólicos que nos garantice la existencia de la variedad inestable finito dimensional tangente a la dirección inestable del operador, pues ésta sólo se ha encontrado cuando se tiene un punto fijo. Otra dirección que puede tomar este trabajo es tratar de extender el operador de renormalización pacman a otras componentes hiperbólicas de \mathcal{M} , es decir, a las funciones de Siegel pero con ciclos de punto fijos indiferentes, las cuales tienen dos o más discos de Siegel con el mismo número de rotación con combinatoria periódica, para llegar a resultados de autosimilaridad alrededor de éstos parámetros que sean análogos a los que se tienen para funciones de Siegel con un único punto fijo.

Notación

\mathbb{N}	—	El conjunto de números naturales.
\mathbb{Z}	—	El conjunto de números enteros.
\mathbb{Q}	—	El conjunto de números racionales.
\mathbb{I}	—	El conjunto de números irracionales.
\mathbb{R}	—	El conjunto de números reales.
\mathbb{C}	—	El conjunto de números complejos.
\overline{X}	—	La cerradura del conjunto X .
$\text{int}(X)$	—	El interior del conjunto X .
∂X	—	La frontera del conjunto X .
$X \setminus A$	—	El conjunto diferencia de X y A .
$A \Subset X$	—	El conjunto A está compactamente contenido en el conjunto X .
\mathbb{D}^1	—	El disco unitario.
\mathcal{M}	—	El conjunto de Mandelbrot.

Índice de figuras

1.1. Imagen del parámetro antigolden y su conjunto Julia	25
1.2. El conjunto de Mandelbrot y el conjunto de Julia de $f_{c(1/4)}$	28
1.3. Copia satelite del conjunto de Mandelbrot y renormalización en el conjunto de Julia	31
1.4. Esquema de la renormalización entre clases híbridas	32
1.5. Esquema de la variedad estable e inestable del operador de renormalización	34
2.1. Esquemas de un full-pacman y un pacman	40
2.2. Esquema de la renormalización pacman primaria	43
2.3. Esquema de un prepacman y su pegado	44
2.4. Esquema de una triangulación de la renormalización pacman	45
2.5. Esquema de la renormalización primaria y la renormalización de sector en el disco unitario	48
2.6. Gráficas de la función R_{prm} y las ramas de sus inversas	49
3.1. Imagen de la autosimilaridad de \mathcal{M} alrededor del punto $c(1/\phi)$	63

En éste trabajo las imágenes del conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia se hicieron con el programa Mandel 5.17, de Wolf Jung, el cual puede descargarse en: <http://www.mndynamics.com/indexp.html>

Bibliografía

- [1] Beardon A. F. Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1991.
- [2] Blé G, Valdez R. Dinámica de los polinomios cuadráticos [Dynamics of quadratic polynomials]. México: Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 2006 Apr;12(1):1–25.
- [3] Branner B, Douady A. Holomorphic dynamics: Surgery on complex polynomials. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 1988. 11–72 p. DOI 10.1007/BFb0081395. MR980952
- [4] Carleson L, Gamelin T. Complex Dynamics. Springer-Verlag New York, Inc. 1993.
- [5] Douady A, Hubbard J. On the dynamics of polynomial-like mappings. Paris Ann Sci ENS. 1985,18(2):287-343. MR816367
- [6] Dudko D, Lyubich M. Local connectivity of the Mandelbrot set at some satellite parameters of bounded type. arXiv: Dynamical Systems(2018).
- [7] Dudko D, Lyubich M, Selinger N. Pacman Renormalization and self-similarity of the Mandelbrot set near Siegel parameters. Journal Amer Math Soc. 2020;33:653–733.
- [8] Hinkle B. Parabolic Limits of Renormalization. Ph. D. Thesis, SUNY at Stony Brook, 1998.
- [9] Hirsch M. W., Pugh C. C. and Shub M. Invariant manifolds, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. MR0501173
- [10] Inou H, Shishikura M. The renormalization for parabolic fixed points and their perturbations. 2008. 58 p. Located at: www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/pararenorm/ParabolicRenormalization.pdf
- [11] Irwin M. C. Smooth Dynamical Systems. Advanced Series in Non-Linear Dynamics, Volume 17. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. UK; 2001.

- [12] Lyubich M. Feigenbaum-Couillet-Tresser universality and Milnors hairiness conjecture. *Ann of Math.* 1999;149(2):319-420. DOI 10.2307/120968. MR1689333
- [13] Lyubich M. Renormalization ideas in conformal dynamics. 1995.
- [14] Lyubich M. Conformal geometry and dynamics of quadratic polynomials. 2023.700. Located at: www.math.stonybrook.edu/~mlyubich/book.pdf
- [15] McMullen C. *Complex Dynamics and Renormalization*. *Annals of Math. Studies* 135, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [16] McMullen C. Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets. *Acta Math.* 1998;180(2):247-292. MR1638776
- [17] Milnor J. *Dynamics in One Complex Variable*. (AM-160): Third Edition. Princeton University Press; 2011.
- [18] Valdez R. Self-similarity of the Mandelbrot set and parabolic bifurcation. Ph. D. Thesis, SUNY at Stony Brook, 2004.
- [19] Valdez R. Self-similarity of the Mandelbrot set for essentially bounded combinatorics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2006, 16(4): 897-922. doi: 10.3934/dcds.2006.16.897
- [20] Yampolsky M. Siegel disks and renormalization fixed points. *Holomorphic dynamics and renormalization*. Providence (RI): Fields Inst Commun: Amer Math Soc. 2008;53:377-393. MR2477430
- [21] Yampolsky M. Renormalization Horseshoe for Critical Circle Maps. *Communications in Mathematical Physics*. 2003;240, 7596.
- [22] Wid J. From the History of Continued Fractions. June 2012.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Posgrado en Ciencias



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas



Cuernavaca, Mor., a 6 de NOV de 2023

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: Renormalización Pacman en parámetros Siegel de tipo acotado, que presenta el alumno Carlos Antonio Marín Mendoza (10033394) para obtener el título de **Doctor en Ciencias**.

Director de tesis: Dr. Rogelio Valdez Delgado
Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Liudmila Lvovna Sabinina CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas IMATE-UNAM	APROBADO	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Juan Pablo Díaz González CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Emilio Marmolejo Olea IMATE-UNAM	APROBADO	
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC-UAEM	APROBADO	



**UA
EM**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2023-11-06 19:49:13 | Firmante

hGrpHCBrdxgfa5r3QcrcKpaGQtDqRW1HQ2GUAD0Gdb+KZAxsiQjpkZK6htGBIPHDJWmWP+2ArUNdgvv100QicWrzdsCthw0T9v3okf9Nqy+B+qaEVUriQQt/dfBul7Md35Wkuq4PTniG3jtjKMfOJdr5/ICTuNzES6O1arQU+x/MlIB2mL8G1quQVW/svMVVgnyXONmr3tV2jGDAAwY4z9sJP+00C6aQ2DQkmfVZl/UhCx9H8GYmgU9kvd8naGikJAwNebIq0j3NCowjNadOfv/4l6cT0bq7cXa5fyueWrcuVzXxllsHaqmWoXc/gzwl19iSfJOSiuwKCOgbv+K6Aw==

LIUDMILA LVOVNA SABININA | Fecha:2023-11-06 21:13:35 | Firmante

Te3wohAWzMOJf5orXBPpDmgknQcu5cVoalhV9VnzbOxii6bti6rt1wakXlmoJ/LacVHTFylc/X6HNYswpwW10K+p6A58IDPBZcmLkCbyVMMXmQU4YJ1sYeyTZsibwflUXidpNY9CgK6x11aNi5IPDMROGAUfQi3pQOfNc7aqXg6aApKl7rb57ayRmUI810gY/sJDgvynnB6noli/vNcB5std77HceM5SBTWc/6mBkShA9omScMh2rXQUFfZdxvvaofjPAcP5U2t2aHbUldF6raDJLQv9xG/Q/h9j85Db66PubAtN/sRpammelVfUSOjKEFGYJIsi8kkbodbpmg==

JUAN PABLO DIAZ GONZALEZ | Fecha:2023-11-07 09:09:35 | Firmante

SBNofLmBsLPRz7OI7nWglZkxVr5oxX2AxhcQ6NmuTfPFdUsgc1PK1kAJUbdmK15WgnvCQ7gn4Qqv1WcW4ITr6/z5VE0kJ/QUvzASf5+XP2D5g6LBfdg6m/zpunQyLo57AUHOYQV+1v8rFP8KOLplfnuxV0Qp7OkuJdYWWyVZ44LLnYdHc2UEWWIS8dq09O/piO6GdPKWft+R0O8UlsHC4GTwPdkU5KOITGbyqMwFF6d+lwqD79r1Y3+yRX3UzNhh7Aw+91K2ilfr4mH3EgmsknOK147HjvPAYgY8BHfWe/GBroLVUo5sflFdfsuKdBCrKYU4IHgLGzu8tp7vCPw==

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2023-11-07 10:00:24 | Firmante

HIVAuulQZcorq35pn9swuTUIYni0Ahcf1aARP6p/pT7dLuBUslYgnaXX0zrFrv5r0laLjEoj4aEI72fmCucCE5Bc2zkhZfwo96Bqz/3F+9yLuvacfMKEVusMJ3DaFbNjeWRFrd7VEQdYhSkqZvVlc56mvJiaVNIID7U7b79nBwZatsO1Xdcjlf8WGq3YXr0dphMHcwbRcdANcA2AW8ZrRHj2JKxjpDSiunS3HxPl2FL0paxK8KmRbZ0TX5c/LM85oBDOIPs7P2Y0+rdopyg2KfGzU3I+hOCTkCuezRa1L6B9NEZaLE+nt0VTaWkdv00SBaxiTYnZHHhP5yws0TwbDw==

EMILIO MARMOLEJO OLEA | Fecha:2023-11-07 11:18:58 | Firmante

uAHkS/st6B0yKrkmc0ZEoFSN8u7flnJluRD2Yk4hsoOat6eh+SmlzFIOE3elPmYAn3P4htKRWsTmEh1h1z4yooe4INOj8K/TE6DT08LMWreOmgmGJgzPWZcsGJd95Oub0ZgJklgLUhlyMTX717GZ0+cwweUsqYhr/4OyybGPF3BkAizw5gD7AtzWzU3qcYx/bZ4BbV+OBEi6KO2zLy85yk/bu7MmlG0dqttuUf3nklzsfCodVDY8tlLCHq+4lVq9gJQSNLm+Gu1ecFSI/krRuF6DqCAsI8XrNdNy0i8/UO0/fJj+7abpZtojqQofw6k1qG4nasT3xRz2NUQ==

CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS | Fecha:2023-11-07 11:47:44 | Firmante

c27uZHNmJmso0HnUZDDYUix9Lq2CPMCGmEtWxoB5cXTwSUnqrUx3rVK+gktARA5iu8Ky0Gap0iBL5f6TkPFBTKGwIRibLSGgoTSo4/oioJ84K6vrCE48sxq3Ddki0ViGnMhkQ7B8XEa+mc6o82b7B3IT4MXeVvZuv6i5OdE/wNUI8Zwd5AK8KHtsyd3MA7eMK7+s2Hn4c7JOZx4IT2skerQi5Ihb0ms3ru6u5cAFMv9GcSwJ+jmO8Ppgxn/D8BgLiWV/s0syKQpe0sm9p30p8yJN7WTTQBoB1dRCj2WkKTU/H8wA2m5dmdezDczWQztfRjUYEMmTieXbZ8617zw==

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2023-11-07 21:41:11 | Firmante

qXVP5Q62hx0NIHPKVqbTXve+LbabwDjOs+2iuLTpZoQJopPcXf1OLOesNLIFL8ltg+4LcGmgscCsdEF1uCuRzJvqTqWAXDDPID5BFQO7SunYU7pM4OaOWhOuck1/3l9MVCqP9J+s6/Jg6aqvd7MfcV7Z8q9WlaRk1KXnr0EPcLV28sMtGbCTuuRgPY8JJQsoh7NP13dRT8aNTlZrKxQyEcnMXQHIPheJKvH4CCSzbvFsV696KKj7nBp/BcnOf5OP/72l+Eqr1+sYS/BCUsCjrjzenJrO3ixdlitPWK9UvSdDjO98NxmN/n+aHvAUIM5O5DmWDA2QzlggE4pl7VA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



F7iy56KUV

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/wUuJbyUDKUI7LntF5t1jkpsZTqiaavfb>

