

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS**

**ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN DE LA LUZ EN  
HETEROESTRUCTURAS BASADAS EN MULTICAPAS DE  
ÓXIDOS METÁLICOS**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS**

PRESENTA

**MARCO ANTONIO TUN CARRILLO**

**DIRECTORES DE TESIS**

**Dr. MIGUEL EDUARDO MORA RAMOS  
DR. IGNACIO VICENTE PÉREZ QUINTANA**



Agradecimientos....



# Índice general

Contenido	Página
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Matriz de transferencia . . . . .	6
2.2. Formulación 4x4 . . . . .	7
2.3. Matrices de dispersión . . . . .	9
2.4. Transmisión, reflexión y vector de Poynting:	
Extracción de los campos . . . . .	11
2.4.1. Condiciones iniciales . . . . .	11
2.4.2. Parámetros de las capas . . . . .	12
2.4.3. Transmisión, reflexión y vector de Poynting . . . . .	13
<b>3. Simulación de la propagación de la luz en heteroestructuras dieléctricas híbridas</b>	<b>16</b>
3.1. Estructuras híbridas . . . . .	17
3.2. Secuencia Rudin-Shapiro . . . . .	18
3.3. Heteroestructuras híbridas PQP con espejos tipo Bragg . . . . .	20
3.3.1. Sistema: AB-RD-AB . . . . .	20
3.3.2. Sistema: ABC-RD-ABC . . . . .	26
3.4. Caso de los reflectores triperiódicos . . . . .	31
<b>4. Resultados experimentales. Obtención de multicapas de óxidos conductores</b>	<b>43</b>

4.1. Metodología Experimental . . . . .	43
4.2. Mediciones ópticas, eléctricas y de imagen . . . . .	45
4.3. Ajuste a la simulación . . . . .	49
<b>5. Conclusiones</b>	<b>54</b>
5.1. Conclusiones Teóricas . . . . .	54
5.2. Conclusiones Experimentales . . . . .	55
<b>A. Desarrollo del formalismo de Matrices de Dispersión</b>	<b>63</b>
A.1. Formulación 4x4 . . . . .	65
A.1.1. Ecuaciones de Maxwell en un medio IHL . . . . .	65
A.1.2. Solución para las componentes longitudinales . . . . .	67
A.1.3. Calculo de funciones sobre matrices. . . . .	69
A.2. Formulación PQ (matriz de propagación) . . . . .	71
A.2.1. Planteamiento inicial . . . . .	71
A.2.2. Relaciones para las matrices propias . . . . .	75
A.2.3. Matrices de propagación . . . . .	76
<b>B. Condiciones de frontera para una capa entre dos medios</b>	<b>86</b>
B.1. Matriz de dispersión . . . . .	87
B.2. Multiplicación Redheffer . . . . .	92
<b>C. Extracción de los campos</b>	<b>95</b>
C.1. Simplificación de las componentes . . . . .	95
C.2. Parámetros de entrada . . . . .	96



# Índice de figuras

2.1. Esquema de una capa rodeada por dos medios distintos . . . . .	9
3.1. Índices de refracción para los cinco materiales dieléctricos que se consideran.	17
3.2. Curva de reflexión para la secuencia RD, (a) con orden 4, (b) orden 5, (c) orden 6. . . . .	19
3.3. Curvas de reflexión para incidencia normal (modos TM). (a) en la secuencia original, (b) Secuencia con AB reducido, (c) Secuencia donde RD se elimina la letra A, (c)RD donde C se reemplaza por A (ver detalles en el texto); todas las secuencias hechas a $\lambda_0/4$ . . . . .	22
3.4. Diagrama de densidad para la transmisión de las estructuras PQP (modos TM), dependiendo de la amplitud del ángulo de incidencia. (a) Secuencia con AB reducido (caso 2), (b) Secuencia RD se elimina la letra A (caso 3), (c) RD donde C se reemplaza por A (caso 4) . . . . .	23
3.5. Espejo omnidireccional de heteroestructura híbrida AB-RD-AB, y la curva de reflexión en incidencia normal en la parte superior (modos TM). . . . .	24
3.6. Flujo de energía, vector de Poyting normalizado, (a) y transmisión (b) para una estructura AB-RD(4)-AB donde, en la secuencia cuasiperiódica de Rudin-Shapiro (16 capas), la capa C se reemplaza por la capa con el material A. Las gráficas corresponden a los modo TE y TM de transmisión a 1565 nm y 30° de incidencia. . . . .	25
3.7. Curva de reflexión y mapa de densidad para la transmisión de una estructura AB-RD-AB, donde a la secuencia RD se le elimina la letra A. El resultado .	25

3.8. Intensidad en los 2 modos que encierran al ancho de banda, así como el modo defecto a una incidencia de $30^\circ$ . (a) modo a 1187nm, (b) modo central a 1428nm y (c) modo a 1776nm . . . . .	26
3.9. Espectros de reflectancia de heteroestructuras híbridas periódico-Rudin-Shapiro- periódico con espejos de Bragg de tres componentes para los cuatro casos descritos en el texto. (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4. En to- dos los casos los cálculos se hacen para incidencia normal, con centro en en $\lambda_0 = 1500nm$ y espesores establecidos por la condición $\lambda_0/4$ para la secuencia RD y $\lambda_0/6$ para las secuencias periódicas ABC. . . . .	27
3.10. Mapas de densidad para la transmisión. (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4. Todos los casos centrados en $\lambda_0 = 1500nm$ y $\lambda_0/4$ para la secuencia RD y $\lambda_0/6$ para la secuencia ABC. . . . .	28
3.11. Curvas del flujo de energía dentro de la estructura para los casos de estructu- ras PQP con espejos de Bragg tricomponentes. (a)caso 1: 1696 nm, (b) caso 2: 1709 nm, (c) caso 3: 1328, (d) caso 4: 1281 nm. Todos los casos fueron calculados para un ángulo de incidencia de $30^\circ$ y tanto modos TM como TE.	29
3.12. Mapa de la distribución espacial de la intensidad normalizada del flujo de energía dentro de la estructura híbrida PQP, como función del ángulo de incidencia, para los modos de transmisión: (a)caso 1: 1696 nm, (b) caso 2: 1709 nm, (c) caso 3: 1328, (d) caso 4: 1281. . . . .	31
3.13. Curvas de transmisión para los casos de la sección 3.3.2, pero los reflectores ABC han sido reemplazados por espejos de Panyayev. . . . .	32
3.14. Mapas de densidad para la transmisión de los casos de la sección 3.3.2 imple- mentando reflectores de tipo Panyayev. . . . .	33
3.15. Modos más destacables para los casos de la sección 3.3.2 implementando es- pejos de Panyayev. . . . .	34
3.16. Espectro de transmisión para polarización TM(panel inferior) y mapa de den- sidad de transmitancia variando el ángulo de incidencia para: (a) el caso 1, (b) para el caso 2. Los espesores ópticos están determinados por $\lambda_0 = 1500 nm$ , empleando la condición $\lambda_0/4$ para las capas RS y el caso 1, y $\lambda_0/6$ para las partes periódicas ABC en el caso 2 . . . . .	35

3.17. (a) Espectro de transmisión del caso representado en la Fig. 3.16 (a). (b,c) Distribución de la intensidad relativa del flujo de energía para los dos modos resonantes de transmisión señalados en (a) con rectas discontinuas para una incidencia de 30°, modo central a (1535 nm, 1354 nm). . . . .	36
3.18. Curvas de transmisión para (a)-(c) caso PQP a 4, 8 y 16 periodos respectivamente; (d)-(f) caso Panyaev a 5,10 y 15 periodos respectivamente. . . . .	37
3.19. Representación de la distribución espacial del flujo de energía dentro de la estructura con celda unitaria PQP, dependiendo del número de periodos en la superred. En la izquierda para 1535nm y a la derecha para 1354nm.(a,d) 4 periodos; (b,e) 8 periodos y (c,f) 16 periodos. . . . .	37
3.20. Diagrama de bandas ((en unidades normalizadas) para ángulos de incidencia de 0° (a,c) y 70° (b,d), para los cristales fotónicos 1D con celda triperiódica (a,b), y celda periódico-cuasiperiódico-periódica con secuencia Rudin-Shapiro (c,d). En rojo, las bandas y brechas para el modo TE y en azul para el modo TM. . . . .	39
3.21. Mapas de densidad para el flujo de energía dentro de la estructuras PQP de Panyev (a-f) y PQP con RD. El lado izquierdo son los modos TE, y el derecho los modos TM. (a,b) para 1535nm, y (e,f) para 1354nm para el caso Panyaev; (c,d) para 1535nm, y (g,h) para 1354nm para el caso híbrido Rudin-Shapiro. . . . .	42
4.1. Índices de refracción reportados previamente para AZO e ITO respecto a la longitud de onda. . . . .	44
4.2. (a) Deposición mediante RF sputtering para la multicapa, (b) material AZO utilizado para la deposición. . . . .	45
4.3. Imagen SEM de la películaS AB de AZO e ITO, (a) sistema de 12 capas 1196 nm, (b) 24 capas 2325nm y (c) 48 capas 4717nm . . . . .	47
4.4. Medición de la transmisión tal cual lo arroja el equipo (a), y con los valores normalizados (b) . . . . .	48
4.5. Medición de XDR para un sistema de 36 capas. Se aprecian los picos característicos asociados al AZO e ITO. . . . .	48

4.6. (a) Transmisión medida para una capa de AZO e ITO, (b) índices de refracción obtenidos a partir de las curvas de transmisión . . . . .	50
4.7. Ajustes iniciales a la simulación para el caso de 12 capas AB. (a) usando los espesores teóricos, (b) usando espesores a partir de los índices medidos, (c) usando un promedio de los espesores medidos por imagen SEM, (d) espesores promediados, pero se ajusta el valor de la primera capa. . . . .	51
4.8. curvas de transmisión y absorción para las 12 capas, en azul y rojo para una capa individual de AZO e ITO respectivamente, en verde la absorción del sistema combinado. . . . .	52
4.9. Simulación V. dato experimental para 12, 24 y 48 capas tomando en cuenta el coeficiente de extinción $k$ . . . . .	53
B.1. Esquema de los coeficientes de propagación a través de una capa con grosor $L_i$ , rodeada por dos medios distintos. . . . .	87



# Capítulo 1

## Introducción

Las estructuras fotónicas unidimensionales son sistemas periódicos conformados por láminas de dos o más materiales con índices de refracción distintos. Su propósito es controlar la propagación de la luz incidente en un cierto rango de longitudes de onda. En su variante más común, estas estructuras se forman alternando los distintos índices siguiendo una secuencia ordenada, en donde los espesores de cada capa se calculan a partir de establecer un mínimo de difracción de la ley de Bragg para a una longitud de onda central,  $\lambda_0$ . Por ejemplo, cuando se distribuyen de manera consecutiva dos capas de materiales distintos A y B, y se repite periódicamente la celda elemental así construida se tiene lo que se conoce como un espejo de Bragg (en la literatura internacional, se le suele mencionar como "distributed Bragg reflector", DBR, o simplemente "Bragg mirror", BM). Tales estructuras tienen como propiedad esencial la aparición de un intervalo de longitudes de onda, con centro en  $\lambda_0$ , para el cual existe reflexión total de los correspondientes modos electromagnéticos. En otras palabras, esas señales no se propagan a través del sistema a lo largo de su dirección de crecimiento. Tal intervalo recibe el nombre de brecha fotónica o gap fotónico. La propuesta de esta clase de sistemas apareció en 1987, simultáneamente, en los trabajos de E. Yablonovitch y S. John [1, 2].

La presencia de esta clase de gap en las longitudes de onda, más la construcción periódica basada en unidades con contraste de índice de refracción derivó directamente en que, independientemente de tratar con una, dos o tres dimensiones espaciales, las heteroestructuras en cuestión se comenzaron a llamar como "cristales fotónicos" [3, 4]. Se conoce que, en el caso de

un reflector -o espejo- de Bragg bicomponente, la amplitud del gap fotónico puede controlarse mediante la manipulación del contraste óptico entre las dos capas,  $\Delta_n(i, i+1) = |n_{i+1} - n_i|$ , el cual determina igualmente los espesores de las capas involucradas a partir de la condición de Bragg  $d_i = \lambda_0/4n_i$ . Este tipo de cristales poseen un amplio uso de aplicaciones desde filtros ópticos, espejos omnidireccionales y guías de onda.

Otro elemento que modula la amplitud de dicho gap, en el caso de sistemas fotónicos en una dimensión es el ángulo de incidencia de la luz con respecto a la normal a las capas constituyentes [5]. Un espejo omnidireccional, entonces, es cuando la estructura presenta un rango del espectro en la cual refleja todo un intervalo de frecuencias de la luz para todos los ángulos posibles, entre cero (incidencia normal) y  $90^\circ$ .

En experimentos y cálculos del efecto polaritónico en las heteroestructuras cuánticas de materiales semiconductores, los DBR's se implementan para poder localizar la energía incidente en un rango reducido del espectro electromagnético y en una región espacial determinada, con el propósito de magnificar la interacción de la luz con las excitaciones elementales o las cuasipartículas (excitones, por ejemplo) del sistema [6, 7].

Hemos mencionado que la secuencia básica de la geometría de capas en un cristal fotónico 1D es una secuencia periódica. Cuando las propiedades dieléctricas de los materiales incorporados no dependen espacialmente, la descripción matemática del problema es prácticamente isomorfa con la del potencial de Krönig-Penney en mecánica cuántica. Sin embargo, existen casos donde la distribución utilizada no necesariamente tiene esa clase de ordenamiento. Desde los primeros momentos, la posibilidad de un desorden en las superredes dieléctricas fue considerada en el mencionado trabajo de S. John, apuntando hacia la localización espacial de los fotones correspondientes a ciertos modos electromagnéticos que se propagan en el sistema [2]. En años posteriores, empezaron a aparecer trabajos dedicados al diseño de las multicapas fotónicas siguiendo un ordenamiento determinado por sucesiones cuasiperiódicas, el cual no alcanza a convertirse en una distribución completamente desordenada o aleatoria sino que es generada mediante cierta regla de expansión a partir de una "semilla" dada, y el resultado carece -de hecho- de una simetría traslacional. De esta forma, se pueden mencionar heteroestructuras dieléctricas de Fibonacci (FB) [8, 9, 10, 11, 12], Cantor (CT) [13, 14], Thue-Morse (TM) [15, 16, 17, 18, 19] y Rudin-Shapiro (RS) [10, 20, 21, 22]. Con esto, se pasó a hablar también acerca de los quasicristales fotónicos unidimensionales (ver, por ejemplo, las

revisiones del tema publicadas en las refs. [23, 24]).

Una secuencia cuasiperiódica no desarrolla alguna clase de patrón a lo largo de esta. Aún más, conforme esta se expande tiende a hacerse más desordenada. Tal desorden se presenta, dentro de la curva de reflexión, en la forma de picos que rompen la tendencia dentro del ancho de la banda prohibida, reduciendo su amplitud. En consecuencia, estas heteroestructuras fotónicas no suelen resultar de mayor utilidad como filtros o como reflectores, comparados con los sistemas periódicos; aunque se ha demostrado que pueden generar intervalos de reflexión total omnidireccionales, como se ha estudiado en el caso de cuasicristales de Fibonacci [8] y de Thue-Morse [15, 17]. Sin embargo, estos picos dentro del gap, que son en realidad modos de transmisión, son útiles en el sentido que representan modos con una alta localización de la luz dentro de la estructura. Esta clase de localización resulta útil, por ejemplo, para diseñar sensores de moléculas orgánicas [12].

Una idea que apareció con el propósito de combinar las ventajas de ambas clases de sistemas, periódicos y cuasiperiódicos, es la de las **heteroestructuras híbridas**. En estos sistemas 1D, las multicapas se diseñan combinando secciones periódicas (normalmente, DBRs) y secciones cuasiperiódicas. Inicialmente, tal combinación se propuso usando la sucesión de Cantor en la forma BM-CT-BM, con la parte cuasiperiódica conteniendo diferentes generaciones y empleando dos materiales ( $\text{TiO}_2$ ,  $\text{SiO}_2$ ) [25]. Los autores muestran que toda la estructura tiene perspectivas de aplicación en la como un filtro policromático en el visible.

Posteriormente, la combinación de tipo FB-BM, empleando espejos de Bragg de tipo AB ( $\text{Si}$  y  $\text{SiO}_2$ ) y bloques constituidos por repeticiones de la segunda y tercera generaciones de la sucesión de Fibonacci, fue propuesta como un espejo omnidireccional de brecha amplia [26].

En los años siguientes, el diseño híbrido **periódico-cuasiperiódico-periódico (PQP)** para estructuras fotónicas ha aparecido en un cierto número de trabajos, concentrados en algunos grupos de investigación a nivel internacional. K. Pérez y colaboradores publicaron sobre la fabricación y caracterización de un sistema basado en silicio poroso (p-Si), empleando la sucesión de Fibonacci (FB), con el diseño BM-FB-BM [27]. Poco tiempo antes, el estudio teórico de la localización espacial selectiva de modos electromagnéticos en otra clase de sistemas híbridos BM-FB-BM de p-Si había sido presentado en la referencia [28]. Ahí también se destacó la ventaja de dicho esquema híbrido para conseguir buenos reflectores omnidirec-

cionales hasta ángulos de incidencia de hasta  $60^\circ$ .

Por otra parte, el análisis de las respuestas ópticas de una heteroestructura dieléctrica híbrida del tipo BM-AgM-BM, donde AgM representa a la llamada sucesión de media plateada ("silver mean"), se publicó en 2016 en [29]. Ese mismo año, Asmi *et al.* investigaron el fortalecimiento de la localización de la luz en el caso híbrido BM-TM-BM [30]. Posteriormente, BenAli presentó el diseño de filtros de Fabry-Perot policromáticos a partir de sistemas BM-FB-BM y BM-CT-BM, empleando como materiales dieléctricos al  $\text{SiO}_2$  y al  $\text{TiO}_2$  [31].

Una clase particular de superred fotónica con celda elemental constituida por una heteroestructura híbrida BM-RS-BM, fue propuesta en 2017 por integrantes de nuestro grupo de trabajo [32], con la particularidad de incluir en la parte cuasiperiódica capas de un material superconductor. A pesar de estarse considerando un sistema periódico, una localización espacial bastante alta de la intensidad del campo eléctrico -para algunos modos específicos- se pudo indentificar dentro del mismo.

Como hemos mencionado, en las estructuras fotónicas híbridas PQP, los elementos situados a ambos extremos son multicapas periódicas de tipo BM. Entre los años 2019 y 2021, el grupo de Dadoenkova, Panyaev y colaboradores publicaron trabajos sobre estructuras fotónicas periódicas complejas [33, 34, 35]. En esas investigaciones, se propusieron dos tipos de diseños. El primero, conocido como esquema bi-periódico comprende la repetición de una celda elemental del tipo  $(\text{TiO}_2 \text{ SiO}_2)^N \text{ Al}_2\text{O}_3$ , con  $N$  indicando un número de repeticiones [33]. En el segundo caso, la celda elemental que se repite en la estructura periódica es  $(\text{Al}_2\text{O}_3 \text{ SiO}_2)^N (\text{TiO}_2 \text{ ZrO}_2)^M$ , involucrando ahora cuatro dieléctricos transparentes en el infrarrojo ( $M$  es un entero positivo que indica número de repeticiones), en lo que dieron en llamar esquema tri-periódico [34, 35].

Con todo esto en mente, en la presente tesis vamos a investigar de manera teórica la propagación de la luz en sistemas fotónicos híbridos unidimensionales del tipo PQP, basados en los mismos materiales dieléctricos mencionados en el párrafo anterior. En el caso de la parte cuasiperiódica elegimos a la sucesión de Rudin-Shapiro que, al incluir cuatro elementos, se presta directamente para incorporar la información de tales materiales. El elemento adicional en nuestro diseño es el empleo de distintos tipos de espejos reflectores en la parte periódica. Así, podemos considerar espejos de tipo Bragg y espejos tri-periódicos como los propuestos por Panyaev *et al.*

A pesar de que el peso fundamental del trabajo recae en las simulaciones mencionadas, el proyecto fue concebido desde un inicio para intentar la realización experimental de heteroestructuras fotónicas basadas en óxidos dieléctricos. Sin embargo, en el caso de los materiales a utilizar, la disponibilidad práctica ha permitido únicamente trabajar con óxidos conductores transparentes, de los que usualmente se emplean para el diseño y fabricación de celdas fotovoltaicas: AZO (Aluminum-doped Zinc Oxide) e ITO (Indium Tin Oxide). El carácter conductor de estos materiales los aleja del propósito de encontrar gaps fotónicos en el infrarrojo. No obstante, se ha procedido a crecer estas multicapas y se han caracterizado óptica y eléctricamente, al tiempo que el esquema teórico empleado en las simulaciones de las estructuras híbridas se aplica para verificar la coincidencia con los resultados experimentales.

A modo de **resumen**, podemos decir que el **objetivo** de la presente tesis es el estudio de algunas propiedades de la propagación de la luz en heteroestructuras fotónicas basadas en óxidos metálicos. De acuerdo con esto, el trabajo se dividirá en dos grandes partes: una teórica y una experimental.

En la parte teórica nos proponemos investigar las características de la transmisión óptica y la localización espacial de modos en sistemas híbridos PQP en los que la parte cuasiperiódica está generada a partir de disponer las capas de los materiales involucrados en el orden asociado a una generación dada de la sucesión de Rudin-Shapiro. La parte periódica puede estar diseñada en la forma de un espejo de Bragg de dos (AB) o de tres componentes (ABC), o en la forma de un reflector triperiódico tipo Panyaev. Para esto se empleará como herramienta matemática el método de la matriz de dispersión y se analizará especialmente el efecto de variar el ángulo de incidencia de la señal electromagnética.

En la parte experimental, se tratará de construir heteroestructuras periódicas de tipo AB empleando capas policristalinas de óxidos metálicos conductores, de los que suelen emplearse como elementos conductor-transparente en la fabricación de celdas solares. La idea es, en primer lugar, probar el uso del método de crecimiento por pulverización y, luego de eso, emplear el método matricial de simulación para comparar la respuesta de transmisión de la luz calculada con la que se mide en el laboratorio.

# Capítulo 2

## Marco teórico

Un por ciento mayoritario del presente trabajo tiene que ver con la simulación de la propagación de una señal electromagnética a través de una estructura de multicapas dieléctricas constituidas por materiales con diferentes índices de refracción. Siendo este un problema matemático de carácter unidimensional, el formalismo de elección para el estudio es el que se conoce como "método de la matriz de transferencia" [5]. A continuación, exponemos los elementos básicos del enfoque aquí empleado, el cual se presenta con todo detalle en los apéndices A y B, al final de la tesis.

### 2.1. Matriz de transferencia

El formalismo de la matriz de transferencia  $M$ , es una formulación matemática que permite conocer los valores del campo eléctrico a la salida de un sistema fotónico como resultado de las propiedades dieléctricas de las capas que lo conforman. La forma clásica de la matriz, cuando se deriva a partir de la ecuación de onda de segundo orden en una dimensión es [36, 31, 22]:

$$M = \begin{bmatrix} \cos(n_i l_i f_n) & \frac{\sin(n_i l_i f_n)}{n_i f_n} \\ -n_i f_n \sin(n_i l_i f_n) & \cos n_i l_i f_n \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde

$$f_n = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{n_0 \sin \theta}{n_i}\right)^2}. \quad (2.2)$$

En esta expresión,  $\lambda$  representa a la longitud de onda de la luz incidente,  $n_0$  es el índice de refracción del medio por donde la luz se propaga antes de llegar al sistema,  $n_i$  es el índice de refracción del material de la capa de espesor  $l_i$ , y  $\theta$  es el ángulo que forma el vector de onda de la señal con respecto a la normal de la superficie de incidencia.

Entonces, un sistema completo o total, constituido por una sucesión de capas de materiales con distintas propiedades dieléctricas, será descrito por  $M_T$ , que se define como la multiplicación de las matrices asociadas a cada capa en orden inverso de aparición en la sucesión, por ejemplo para una estructura conformada por dos capas de materiales  $A$  y  $B$ , se tiene que  $M_T = M_B M_A$ .

## 2.2. Formulación 4x4

La variante mencionada en la sección anterior se acomoda muy bien a elecciones particulares de la polarización de la luz incidente, en el caso de capas con isotropía de las propiedades dieléctricas en el plano perpendicular a la dirección de propagación. En la situación donde esa isotropía no existe o se considera una orientación espacial arbitraria del vector de onda de incidencia, Teitler y Henvis presentaron, en 1970, la primera formulación basada en matrices  $4 \times 4$ , manteniendo dos variables de campo tanto eléctricas como magnéticas [37]. En 1972 Berreman desarrolló una formulación más general, que incluye a la de Teitler, partiendo de una matriz  $6 \times 6$  de la cual se derivan 16 elementos matriciales diferentes, permitiendo investigar una variedad más amplia de problemas [38].

En virtud de la clase de materiales que vamos a considerar, podemos centrarnos en sistemas homogéneos y lineales, descritos a partir del formalismo de matrices  $4 \times 4$  las cuales, a través de un estudio de sus auto-vectores y auto-valores, se pueden reducir a un caso  $2 \times 2$ . Dicha descripción permite representar de forma matricial las propiedades de un sistema óptico con un ordenamiento espacial orientado en una dirección específica, dado que las tres componentes de los campos quedan determinadas.

Luego de esto, el procedimiento a emplear recurre a la formulación de matrices de dispersión para considerar el caso cuando la onda cambia de medio. La razón de implementar el caso de dispersión, como se verá en la sección *Formulación PQ* del apéndice A, es evitar implementar varios sistemas de matrices para llevar a cabo el cálculo. Al mismo tiempo, se evitan problemas de imprecisión numérica que suelen estar asociados, por ejemplo, al empleo de la matriz (2.1) [36, 39]. El proceso completo se desarrolla en el apéndice mencionado.

Suponiendo que la parte temporal de la solución es de tipo armónico y que, espacialmente, ésta se puede proponer en la forma de una onda plana de vector de onda  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , el sistema a resolver para las componentes  $(x, y)$  de los campos se puede escribir matricialmente como

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} & \mu_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\epsilon_r} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_y^2}{\epsilon_r} - \mu_r & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} \\ \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} & \epsilon_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\mu_r} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{k}_y^2}{\mu_r} - \epsilon_r & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

La solución de la ecuación 2.3 se propone como un vector columna con las componentes de los campos. Luego de determinar los auto-valores y auto-vectores del sistema, uno puede plantear dicha solución, con componentes separadas  $\mathbf{W}$  para el campo eléctrico y  $\mathbf{V}$  para el campo magnético, en la forma

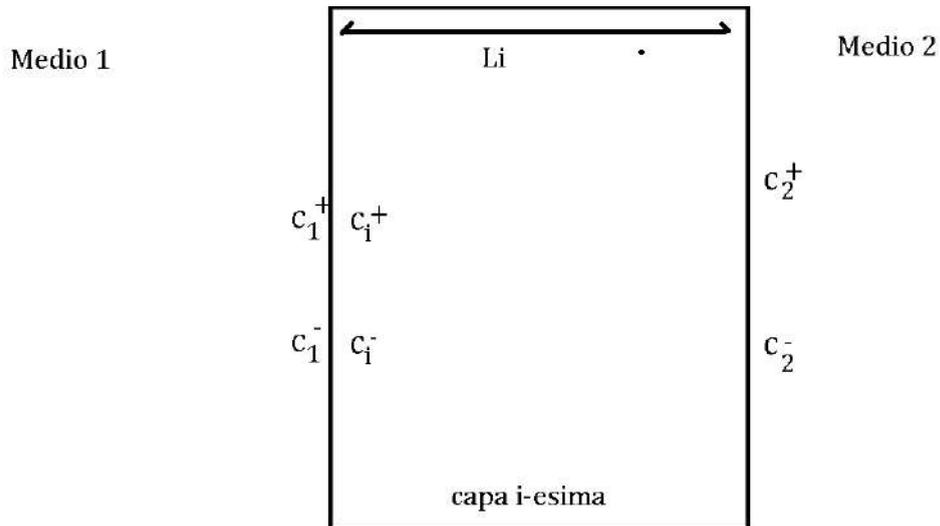
$$\Phi(z') = \begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \\ \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\Lambda z'} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 representa la solución para los campos en cada capa.  $\Lambda$  es la matriz de los autovalores del sistema, en tanto los coeficientes  $c^-$ ,  $c^+$  representan las amplitudes de propagación de los campos (hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente) en el extremo inicial de la capa en cuestión, cuando  $z' = 2\pi z/\lambda$  se toma igual a cero. La solución para el sistema laminado se implementa, entonces, mediante el acoplamiento de estos modos

en las intercaras entre los materiales y, de esta forma, se consigue propagar la solución de una capa a otra. En nuestro caso, tal proceso hará uso de la que se conoce como "matriz de dispersión". En la siguiente subsección haremos una breve descripción de esta herramienta, dado que los apéndices contienen el tratamiento detallado.

### 2.3. Matrices de dispersión

Supongamos una capa "i" de un material tal que esta está rodeada por dos medios distintos. Así, se crean dos interfaces sobre las cuales podemos plantear el equivalente de la relación (2.4). El planteamiento matricial que se formula relaciona las amplitudes de las componentes incidentes con las que corresponden a las componentes de salida (que se propagan alejándose del sistema en ambas direcciones). En el esquema de la Fig. 2.1, las componentes de salida serían  $c_2^+$  y  $c_1^-$ , mientras que las de entrada, o incidentes son  $c_1^+$  y  $c_2^-$ , con los supraíndices señalando la dirección (positiva o negativa) de propagación.



**Figura 2.1:** Esquema de una capa rodeada por dos medios distintos

En la intercara de la izquierda, podemos poner, sin pérdida de generalidad, que  $z' = 0$  convirtiendo a la matriz exponencial en una matriz identidad. Así

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 & -\mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Para el caso de la superficie a la derecha de la lámina, podemos considerar que, dado que el medio semiinfinito "2.º es homogéneo, la contribución de la matriz de exponenciales en el punto de la intercara a ese lado puede absorberse dentro de las amplitudes  $c^\pm$ . De esta manera, se elimina esa matriz de la ecuación y queda,

$$\mathbf{F}_i(k_0 L_i) = \mathbf{F}_2 \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda k_0 L_i} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda k_0 L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{V}_2 & -\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Como se detalla en el apéndice B, a través de una manipulación algebraica es posible llegar a una relación que conecta los coeficientes de propagación del medio 1 al medio 2.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{i1} & B_{i1} \\ B_{i1} & A_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-\lambda k_0 L_i} & 0 \\ 0 & e^{\lambda k_0 L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i2} & B_{i2} \\ B_{i2} & A_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La solución a este sistema de ecuaciones requiere de expandir cada uno de los términos y ordenar los coeficientes de entrada y salida a cada lado de la igualdad, el resultado final representa la matriz de dispersión junto con sus términos. Finalmente, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \end{bmatrix} = \mathcal{S}^{(i)} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (2.9a)$$

y cuyos elementos son:

$$S_{11} = (A_{i1} - X B_{i2} A_{i2}^{-1} X B_{i1})^{-1} (X B_{i2} A_{i2}^{-1} X A_{i1} - B_{i1}) \quad (2.9b)$$

$$S_{12} = (A_{i1} - X B_{i2} A_{i2}^{-1} X B_{i1})^{-1} X (A_{i2} - B_{i2} A_{i2}^{-1} B_{i2}) \quad (2.9c)$$

$$S_{21} = (A_{i2} - X B_{i1} A_{i1}^{-1} X B_{i2})^{-1} X (A_{i1} - B_{i1} A_{i1}^{-1} B_{i1}) \quad (2.9d)$$

$$S_{22} = (A_{i2} - X B_{i1} A_{i1}^{-1} X B_{i2})^{-1} (X B_{i1} A_{i1}^{-1} X A_{i2} - B_{i2}) \quad (2.9e)$$

donde  $X = e^{\lambda k_0 L_i}$

De esta manera, se obtienen las soluciones para los campos eléctrico y magnético en una heteroestructura hecha de capas de diferentes materiales. Este formalismo matricial es implementado en un código numérico escrito en Python. A partir del mismo se pueden obtener los espectros de transmisión y reflexión de las estructuras fotónicas para todo el rango de ángulos de incidencia. Así mismo, es posible representar la magnitud del flujo de energía (a través del vector de Poynting) y la intensidad relativa del campo eléctrico a lo largo del sistema.

## 2.4. Transmisión, reflexión y vector de Poynting: Extracción de los campos

En principio existen tres entidades que deben de ser calculadas: las condiciones iniciales para la fuente, la matriz de dispersión global y la matriz de dispersión de cada capa. Se describen los pasos que se deben de realizar para obtener los campos.

### 2.4.1. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales se refieren a las variables que en principio definen el medio original sobre el cual se propaga la onda (vacío para nuestro caso), así como a las matrices asociadas a estos.

#### Vectores de onda y polarización:

$$\tilde{k}_x = n_{inc} \sin \theta \cos \phi \quad (2.10)$$

$$\tilde{k}_y = n_{inc} \sin \theta \sin \phi \quad (2.11)$$

Para la polarización se tiene:

$$\vec{P} = P_{TE} \hat{a}_{TE} + P_{TM} \hat{a}_{TM} \quad |\vec{P}| = 1 \quad (2.12)$$

#### Parametros del material intermedio:

Una forma de facilitar el cálculo matemático, es considerar un medio ficticio de espesor nulo

que permite considerar cada capa como un ente individual, para mas información revisar el apéndice C.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & 1 + \tilde{k}_y^2 \\ -(1 + \tilde{k}_x^2) & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{V}_g = -i\mathbf{Q}_g \quad (2.14)$$

### Inicializar la matriz global:

Esta representa la matriz resultante de NO existir algún medio que se interponga en el camino de la luz, toma la forma.

$$\mathbf{S}^{(global)} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

### 2.4.2. Parámetros de las capas

Para cada i-esima capa se debe de calcular las propiedades asociadas.

#### Parámetros de la i-esima capa:

$$\tilde{k}_{z,i} = \sqrt{\mu_i \varepsilon_i - \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\mu_i} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_i \varepsilon_i - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_i \varepsilon_i & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{\Omega} = i\tilde{k}_{z,i}\mathbf{I} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega}^{-1} \quad (2.19)$$

#### Matriz asociada a cada capa

Generamos la matriz de dispersión asociada cada capa de la forma.

$$S_{11}^{(i)} = S_{22}^{(i)} = D^{-1}(X_i B_i A_i^{-1} X_i A_i - B_i) \quad (2.20)$$

$$S_{12}^{(i)} = S_{21}^{(i)} = D^{-1} X_i (A_i - B_i A_i^{-1} B_i) \quad (2.21)$$

#### Actualizar la matriz global:

Realizamos el producto estrella entre la i-esima matriz y la matriz global que se tiene del

sistema.

$$S^{(global)} = S^{(global)} \otimes S^{(i)} \quad (2.22)$$

### 2.4.3. Transmisión, reflexión y vector de Poynting

Una vez que hemos iterado sobre todas las capas que conforman la estructura debemos de extraer los campos magnéticos y eléctricos.

#### Conectar con las regiones exteriores:

Esto implica hacer una ultima multiplicación usando matrices que asocian el medio sobre el cual se refleja, y el medio sobre el cual se transmite.

$$S^{(global)} = S^{(ref)} \otimes S^{(global)} \quad (2.23)$$

$$S^{(global)} = S^{(global)} \otimes S^{(trn)} \quad (2.24)$$

#### Campos eléctricos:

Usando el vector de polarización como una fuente inicial se puede extraer las componentes  $x, y$  del campo eléctrico de la forma:

$$\begin{bmatrix} E_x^{(ref)} \\ E_y^{(ref)} \end{bmatrix} = S_{11} e_{src} \quad (2.25)$$

$$\text{donde } e_{src} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

luego.

$$E_x^{ref} = - \frac{\tilde{k}_x E_x^{ref} + \tilde{k}_y E_y^{ref}}{\tilde{k}_z^{ref}} \quad (2.27)$$

para el caso de la transmisión se aplica la misma lógica, pero se usa  $S_{21}$ . La razón de usar la reflexión es por flexibilidad en el cómputo siendo luego posible vincular la reflexión y transmisión como  $T + R = 1$ .

## Transmisión y reflexión

La transmisión y reflexión se calculan a partir de los coeficientes de reflexión y transmisión y como estos afectan a la incidencia original, sienta que trabajamos con cantidades normalizadas podemos decir que la incidencia original, definida como  $|E_{inc}|^2 = 1$ , lo que entonces nos permite decir.

$$R = |\vec{E}_{ref}|^2 \quad (2.28)$$

$$T = |\vec{E}_{trn}|^2 \frac{Re[k_z^{trn}/\mu_{r,trn}]}{Re[k_z^{trn}/\mu_{r,inc}]} \quad (2.29)$$

El modulo de los vectores del campo electrico se pueden calcular como:  $R = |E_{ref,x}|^2 + |E_{ref,y}|^2 + |E_{ref,z}|^2$ .

**vector de Poynting:** Para el caso del vector de Poynting, primero debemos de poder calcular los campos magnéticos, esto lo hacer a través de los campos eléctricos extraídos y las relaciones obtenidas en la matriz de propagación.

$$\tilde{H}_x(z') = -i \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_x(z'_0) + i \frac{\tilde{k}_x^2 - \mu_r \epsilon_r}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_y(z'_0) \quad (2.30)$$

$$\tilde{H}_y(z') = -i \frac{\tilde{k}_y^2 - \mu_r \epsilon_r}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_x(z'_0) - i \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_y(z'_0) \quad (2.31)$$

$$\tilde{H}_z(z') = \frac{i}{\mu_r} [\tilde{k}_y E_y - \tilde{k}_x E_x] \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Notar que los campos magnéticos y eléctricos, por defecto, son dependientes de la posición  $z'$ , entonces el flujo de energía del vector de Poynting corresponde al flujo por cada coordenada dentro de la estructura.

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(E_y H_z^* - E_z H_y^*) \quad (2.34)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(E_z H_x^* - E_x H_z^*) \quad (2.35)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) \quad (2.36)$$

Entonces, el módulo de este vector representa la intensidad de energía electromagnética que fluye a través de una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de la onda luminosa, en cada punto  $z'$  de la estructura.

De esta manera, se obtienen las soluciones para los campos eléctrico y magnético en una heteroestructura hecha de capas de diferentes materiales. Este formalismo matricial es implementado en un código numérico escrito en Python. A partir del mismo se pueden obtener los espectros de transmisión y reflexión de las estructuras fotónicas para todo el rango de ángulos de incidencia. Así mismo, es posible representar la magnitud del flujo de energía (a través del vector de Poynting) y la intensidad relativa del campo eléctrico a lo largo del sistema.

## Capítulo 3

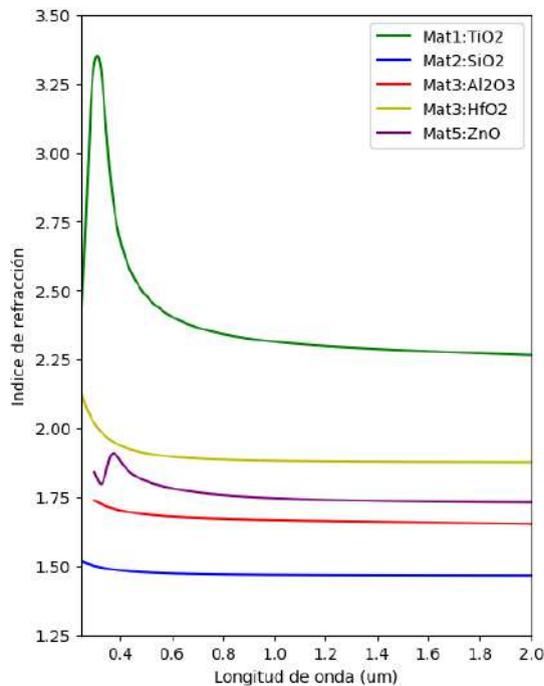
# Simulación de la propagación de la luz en heteroestructuras dieléctricas híbridas

El método de cálculo descrito en el capítulo anterior se emplea aquí para investigar las propiedades de la propagación de ondas electromagnéticas en sistemas fotónicos unidimensionales (1D) formados por capas de distintos materiales dieléctricos. En este contexto, de entre las diversas opciones que pueden considerarse, hemos decidido estudiar las heteroestructuras híbridas del tipo Bragg-Rudin-Shapiro-Bragg. Como puede notarse, para el diseño de las mismas se selecciona, como elemento cuasirregular (o cuasiperiódico) en el sistema, un arreglo de capas construido de acuerdo a la sucesión de Rudin-Shapiro, el cual se inserta entre espejos (estructuras periódicas) de distintas configuraciones para dar como resultado el objeto de estudio. El uso de la sucesión de Rudin-Shapiro para diseñar cuasi-cristales fotónicos en 1D tiene antecedentes en trabajos realizados dentro del grupo de investigación [20, 21, 32]. Su empleo en heteroestructuras dieléctricas híbridas constituye la novedad del presente trabajo.

### 3.1. Estructuras híbridas

Para este caso de modelado, se eligió trabajar con materiales dieléctricos puros, es decir, que se considera únicamente la parte real de la función del índice de refracción. Por su puesto, en la realidad el índice de refracción posee una parte imaginaria asociada a las pérdidas de absorción de la radiación EM en el material. Sin embargo, eligiendo apropiadamente un rango de longitudes de onda para las cuales el material en cuestión sea transparente, tal suposición se justifica plenamente, [40]. Este es el caso de algunos óxidos, como los que reportan en la Fig. 2. Todos ellos tienen parte imaginaria del índice de refracción nula en el rango  $\lambda \gtrsim 1200$  nm. la figura, entonces, muestra la dispersión de la parte real de n, como función de la longitud de onda hay que agregar la referencia de los datos con que se construyó esa figura.

Una segunda razón es la posibilidad de obtener altos contrastes ópticos  $\Delta_n(1, 2)$  entre los materiales, algo que, tal como se describe en el trabajo de Panyaev [35], brinda los mejores resultados para el caso periodico de los espejos de Bragg.



**Figura 3.1:** *Indices de refracción para los cinco materiales dieléctricos que se consideran.*

Complementa el diseño la elección de los espesores de las capas de estos materiales,

Material	$\lambda_0/4$ [nm]	$\lambda_0/6$ [nm]	$\lambda_0/8$ [nm]
Material 1: TiO <sub>2</sub>	164.27	109.51	82.13
Material 2: SiO <sub>2</sub>	255.84	170.56	127.92
Material 3: Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	255.98	150.65	112.99
Material 4: HfO <sub>2</sub>	199.69	133.12	99.84
Material 5: ZnO	216.17	144.11	108.08

**Tabla 1.** Grosos de los materiales centrados a  $\lambda_0 = 1500$  [nm].

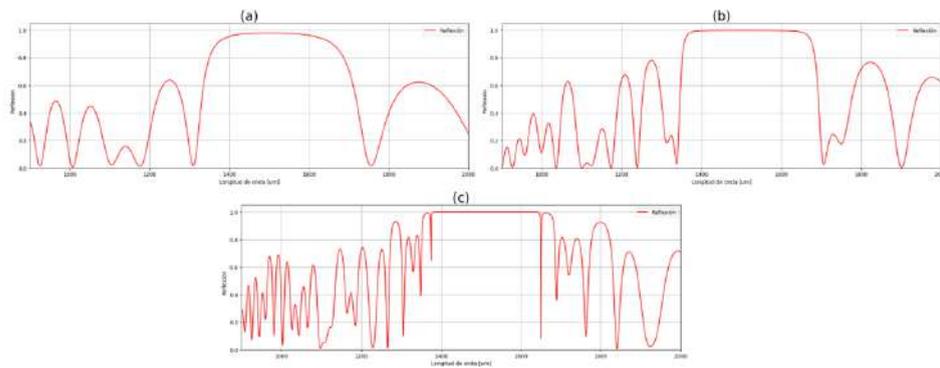
los cuales se calculan usando la relación  $\lambda_0/N$ , que toma como longitud de onda central a  $\lambda_0 = 1500$  nm. El caso en que  $N = 4$  constituye la condición de interferencia de Bragg que se utiliza normalmente en los espejos dieléctricos periódicos de dos componentes A y B. Esta garantiza la aparición de una brecha de transmisión centrada en  $\lambda_0$ . Sin embargo, en la construcción de las multicapas, también se han incluido otros valores de N, proporcionando un diferente espesor de las capas, principalmente en la región cuasiperiódica de la estructura (ver tabla ??)

## 3.2. Secuencia Rudin-Shapiro

La secuencia de Rudin-Shapiro, también llamada a veces Golay-Rudin-Shapiro [41], es una sucesión matemática nombrada en honor a Marcel Golay [42], Walter Rudin [43] y Harold S. Shapiro [44]. Dentro de la matemática, la secuencia fue estudiada inicialmente como resultado de considerar la norma de una función en el marco del análisis de Fourier. El trabajo de Golay es, esencialmente, de carácter físico y tiene que ver con la óptica de rejillas múltiples. Resulta sencillo ilustrar la construcción de esta sucesión a partir de establecer reglas de sustitución en un alfabeto de cuatro letras A, B, C, D, de acuerdo con el siguiente esquema:

$$A \rightarrow AC, B \rightarrow DC, C \rightarrow AB, D \rightarrow DB \quad (3.1)$$

La importancia de esta secuencia radica en la oportunidad de generar una estructura cuasi-periódica en base a cuatro posibles materiales. Desde el punto de vista óptico se puede observar en la figura 3.2 que, a medida que el orden de la secuencia aumenta, la curva de reflexión calculada con el método matricial descrito anteriormente, se vuelve más *aleatoria*, dentro del mismo intervalo de longitudes de onda. Esto puede considerarse como un indicio de la tendencia al desorden en el contraste entre índices de refracción, al incrementarse el orden de la generación resultado de volverse menos ordenada la secuencia.



**Figura 3.2:** Curva de reflexión para la secuencia RD, (a) con orden 4, (b) orden 5, (c) orden 6.

La figura 3.2 fue realizada con una longitud de onda de 1500 nm e implementando una relación de  $\lambda_0/4$ , para los materiales se utilizan los materiales 1,2,3 y 4 como A,B,C y D respectivamente. La morfología inicial de la curva a ordenes bajos es similar a la que se observaría en una secuencia AB periódica, esto es importante debido a que en principio se busca que el número total de capas para el "cristal" fotónico resultante sea el mínimo posible, de ahí la elección de un orden 4 o 5 es lo más conveniente. hay que mencionar que la elección del valor de la longitud de onda central está relacionado con el hecho de estar en el rango de interés para aplicaciones en el campo de las telecomunicaciones, a la vez que constituye una región del espectro para la cual se pueden despreciar las pérdidas por absorción en los materiales involucrados.

La idea de incluir la menor cantidad de capas posible, tal que nos permita revelar las clases de fenómenos que nos interesan, está ligada a la economía o eficiencia en el caso de una posible implementación práctica de estos sistemas. Claro está, siempre que se demuestre alguna ventaja para su uso a partir de nuestras simulaciones.

La explicación física para la aparición de los patrones de reflectancia de la Fig. 3.2, y de todos los que se presentan de aquí en adelante en este capítulo, radica en el fenómeno de refracción en las intercaras. Dentro de cada una de las capas tiene lugar, en principio, infinitos eventos de reflexión interna y de refracción hacia las capas vecinas más próximas [5]. Estas señales de luz reflejadas y refractadas en la estructura experimentan eventos de interferencia constructiva y destructiva que dependen de la longitud de onda (la condición  $\lambda_0/4$  corresponde, precisamente, a un mínimo de difracción de Bragg para dos capas). De esta manera, algunos de los modos electromagnéticos se ven reforzados y logran transmitirse mientras otros son aniquilados en el interior de la estructura y se reflejan totalmente (brechas fotónicas). La principal ventaja del método matricial es, como señalan Markos y Soukoulis, que evita tener que considerar, una por una, las contribuciones de todos esos procesos internos de reflexión-refracción y proporciona, directamente, la solución total para los campos [5].

### 3.3. Heteroestructuras híbridas PQP con espejos tipo Bragg

#### 3.3.1. Sistema: AB-RD-AB

En una primera aproximación se considera el caso  $(AB)^N$ -RD( $M$ )- $AB^N$ . Como se indica, las partes que actúan como reflectores periódicos son espejos de Bragg bicomponentes y la parte cuasiperiódica es la generación  $M$ -ésima de Rudin Shapiro. En este ejemplo, tomamos  $M = 4$  y  $N$  indica el número de repeticiones de la celda elemental AB en los espejos. Para añadir algo de variabilidad al estudio consideramos cuatro posibles casos, derivados del diseño mencionado:

**CASO 1: Secuencia original completa (48 capas en total),  $N = 8$ :**

$$(AB)^8 + RD(4) + (AB)^4$$

**CASO 2: Secuencia con AB reducido (32 capas) y  $N = 4$ :**

$$(AB)^4 + RD(4) + (AB)^8$$

**CASO 3: Secuencia RD con una letra eliminada y  $N = 4$  (28 capas):**

$$(AB)^4 + RD(4)_{\square, A} + (AB)^4$$

**CASO 4: Secuencia RD con dos materiales iguales ( $C=A$ ) y  $N = 4$  (32 capas):**

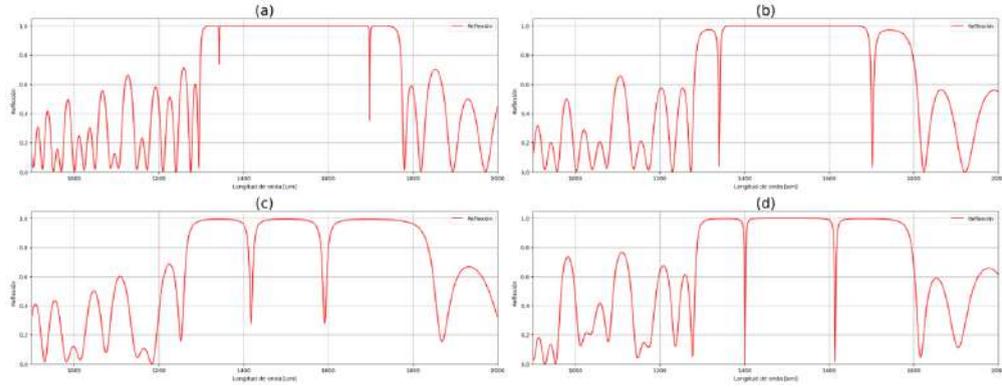
$$(AB)^4 + RD(4)_{C=A} + (AB)^4$$

En todos los casos, la polarización elegida para la luz incidente es la de tipo transversal magnético (modos TM), con el vector campo eléctrico en el plano de incidencia y el campo magnético perpendicular a este. Esto se hace atendiendo a que se conoce que las brechas fotónicas y la omnidireccionalidad de la reflexión suelen tener valores inferiores para esta clase de modos [5]. De manera que cualquier resultado positivo que se obtenga para los modos TM será, típicamente, mejor en los modos TE. Debe tenerse en mente que cualquier señal electromagnética, por ser solución de una ecuación de onda, puede escribirse como la superposición de dos modos: un modo TM y uno TE.

Para cada una de estas posibilidades es necesario añadir la posibilidad de modificar el espesor de las capas correspondientes a la secuencia RD. En principio se estudia la forma de las curvas de los espectros de reflexión, centrados en la  $\lambda_0$ , relacionados con cada una de las configuraciones descritas, considerando incidencia normal de la radiación (ver figura 3.3).

Lo que se aprecia en el caso de la secuencia original es un comportamiento similar al visto en la figura 3.2 pero con picos de transmisión menos pronunciados. Por otro lado al reducir la cantidad de capas AB se aprecia un leve ensanchamiento de la banda prohibida de transmisión, la cual se define más claramente. Sin embargo, los gaps secundarios, por encima y por debajo de esa brecha tienden a desaparecer al tener, al menos, un porcentaje de transmisión, como puede verse en la forma redondeada del borde de la curva. Esto es algo que debería esperarse dado que al disminuir el número de celdas en los espejos, el efecto de interferencia al que nos hemos referido se hace menos efectivo.

El papel relevante que juega la geometría de la configuración de una heteroestructura dieléctrica en su respuesta de propagación de la luz se pone de relieve en el ejemplo donde se elimina el material A de la secuencia RD y mantener un menor número de capas AB. En

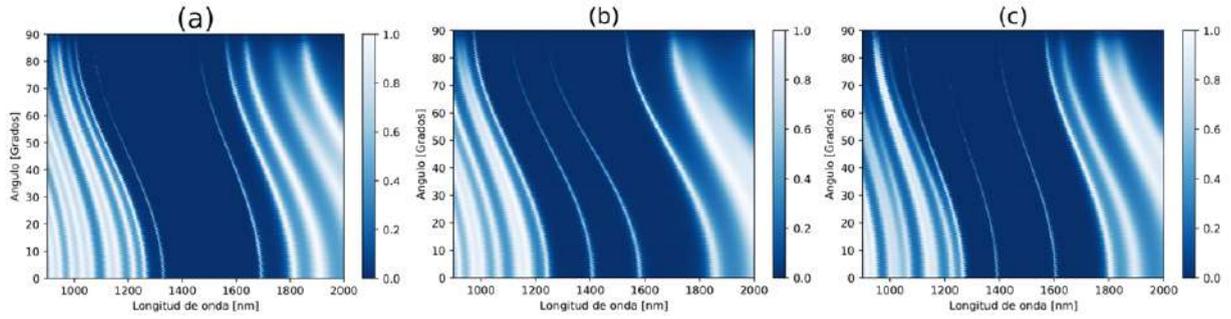


**Figura 3.3:** *Curvas de reflexión para incidencia normal (modos TM). (a) en la secuencia original, (b) Secuencia con AB reducido, (c) Secuencia donde RD se elimina la letra A, (d) RD donde C se reemplaza por A (ver detalles en el texto); todas las secuencias hechas a  $\lambda_0/4$*

este caso, los modos resonantes de transmisión se mueven acercándose a ambos lados de la longitud de onda central. Al mismo tiempo, tanto hacia interior de ese intervalo como hacia afuera de tales modos parecen brechas de anchos similares aunque no tan estrechas como los gaps secundarios de los dos casos anteriores. Los modos de transmisión tienen aproximadamente un 60 % de amplitud. Mientras tanto, la situación del caso 4 [Fig. 3.3(d)], muestra una respuesta de reflectancia parecida a la del caso anterior pero con una mayor definición de los picos resonantes de transmisión (que alcanzan casi el 100 %) y una reducción en la amplitud de los gaps secundarios, a expensas del ensanchamiento del principal.

Vamos a analizar, ahora, el comportamiento de la transmisión a distintos ángulos de incidencia para los casos (b),(c) y (d) de la figura anterior. Los resultados del cálculo aparecen en la Fig. 3.4.

En primera estancia se aprecia que en todos los casos las curvas de transmisión tienden a desplazarse hacia longitudes de onda menores conforme se incrementa el ángulo de incidencia. El carácter de este desplazamiento es consecuencia de la secuencia PQP específica. Por ejemplo, el caso que aparece en la Fig. 3.4(c) muestra un menor desplazamiento comparado con el caso 3.4(b). En cuanto a los modos, a distintos ángulos de incidencia se puede notar que existe la posibilidad de que estos disminuyan su amplitud de transmisión e, incluso, pue-

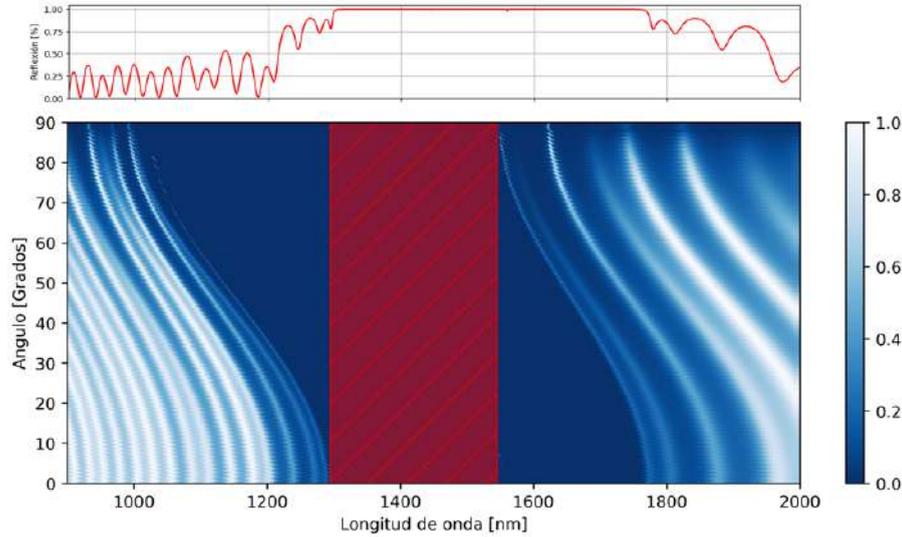


**Figura 3.4:** Diagrama de densidad para la transmisión de las estructuras PQP (modos TM), dependiendo de la amplitud del ángulo de incidencia. (a) Secuencia con AB reducido (caso 2), (b) Secuencia RD se elimina la letra A (caso 3), (c) RD donde C se reemplaza por A (caso 4)

dan llegar a extinguirse casi por completo como se ve en los casos 3.4(a) y 3.4(c), en donde el primer modo dentro del ancho de banda se extingue a ángulos de incidencia suficientemente grandes.

Podemos definir un espejo omnidireccional como aquel que es capaz de reflejar en su totalidad un cierto rango del espectro incidente en todo el intervalo de ángulos de incidencia posibles. Por ejemplo si tomamos una secuencia PQP del tipo AB-RD-AB, donde los espejos de Bragg bicomponentes, AB, son de orden 8 (16 capas) y RD corresponde a la secuencia de orden 4 (16 capas) en la cual la letra D se toma con el doble de espesor óptico, ( $\lambda/2$ ), se puede conseguir un espejo omnidireccional de alrededor de 255nm de ancho para la reflexión total dentro del rango de frecuencias de trabajo (ver figura 3.5). Este resultado indica una de las posibles ventajas para la aplicación de las estructuras PQP que estamos proponiendo.

Los modos de transmisión de tipo defecto que aparecen dentro de la región del gap fotónico suelen tener la propiedad de estar espacialmente localizados en cuanto a amplitud en ciertas regiones de la estructura [28]. Es decir, existen áreas dentro de ésta en donde la densidad de fotones es notablemente superior a la incidente. Tomemos por ejemplo la estructura (c) de la Fig. 3.4 a un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . Aquí, los modos de transmisión principales están en 1353 y 1565 nm. En la Fig. 3.6 se dibuja la dependencia espacial del flujo de energía calculado a partir del vector de Poynting normalizado del segundo modo de transmisión dentro de la estructura [Fig. 3.6(a)] así como la distribución espacial de la

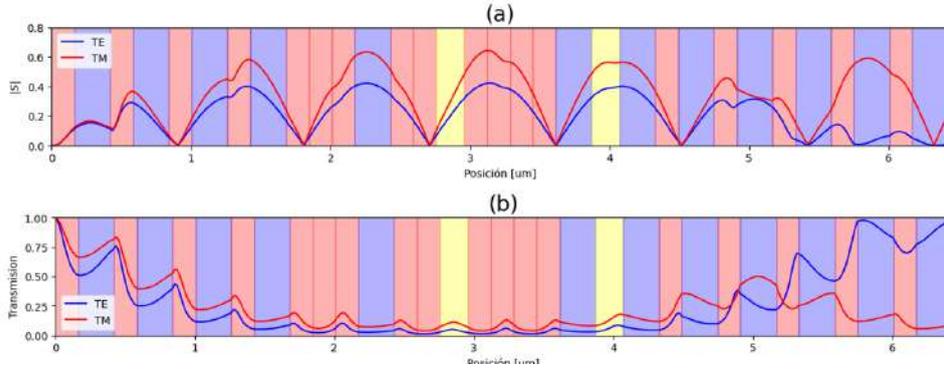


**Figura 3.5:** *Espejo omnidireccional de heteroestructura híbrida AB-RD-AB, y la curva de reflexión en incidencia normal en la parte superior (modos TM).*

transmisión [Fig. 3.6(b)], considerando tanto la polarización TM como la TE. Nos referimos a intensidad relativa para decir que se reporta el valor calculado en términos del que tiene la señal al incidir por la superficie izquierda de la estructura.

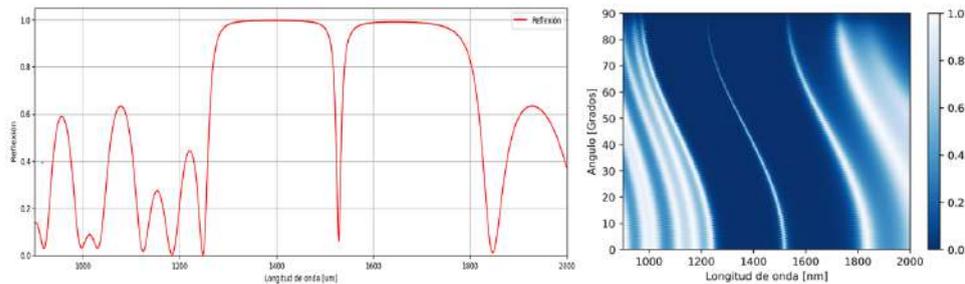
Se puede notar que, en general una baja transmisión dentro de la estructura se asocia a una alta localización de fotones dentro de esta. Por otra parte, se aprecia que la intensidad está distribuida en mayor o menor medida a lo largo de toda la estructura por lo que, apesar de haber picos en ciertas regiones de la misma, no se puede hablar de una localización espacial fuerte de la intensidad del campo eléctrico de la señal en alguna porción específica del sistema.

Investiguemos ahora otra situación dentro de las posibilidades de manipulación de los parámetros de entrada de las simulaciones. Dado que la estructura RD involucra cuatro capas distintas en cuanto a composición, determinemos los espesores ópticos de las mismas a partir de la condición de Bragg  $\lambda_0/8$ . Al mismo tiempo, procedamos como en el Caso No. 3 y eliminemos la capa A de la parte cuasiperiódica. La correspondiente curva de reflectancia para  $\theta = 30^\circ$  se muestra en la Fig. 3.7(a). En este caso, al no haber capa A en la región central de la heteroestructura híbrida, toda ella se comporta como un solo "defecto" en consecuencia observamos un único pico de transmisión (con una transmitancia cercana al 95 %) de tipo



**Figura 3.6:** Flujo de energía, vector de Poynting normalizado, (a) y transmisión (b) para una estructura AB-RD(4)-AB donde, en la secuencia cuasiperiódica de Rudin-Shapiro (16 capas), la capa C se reemplaza por la capa con el material A. Las gráficas corresponden a los modos TE y TM de transmisión a 1565 nm y 30° de incidencia.

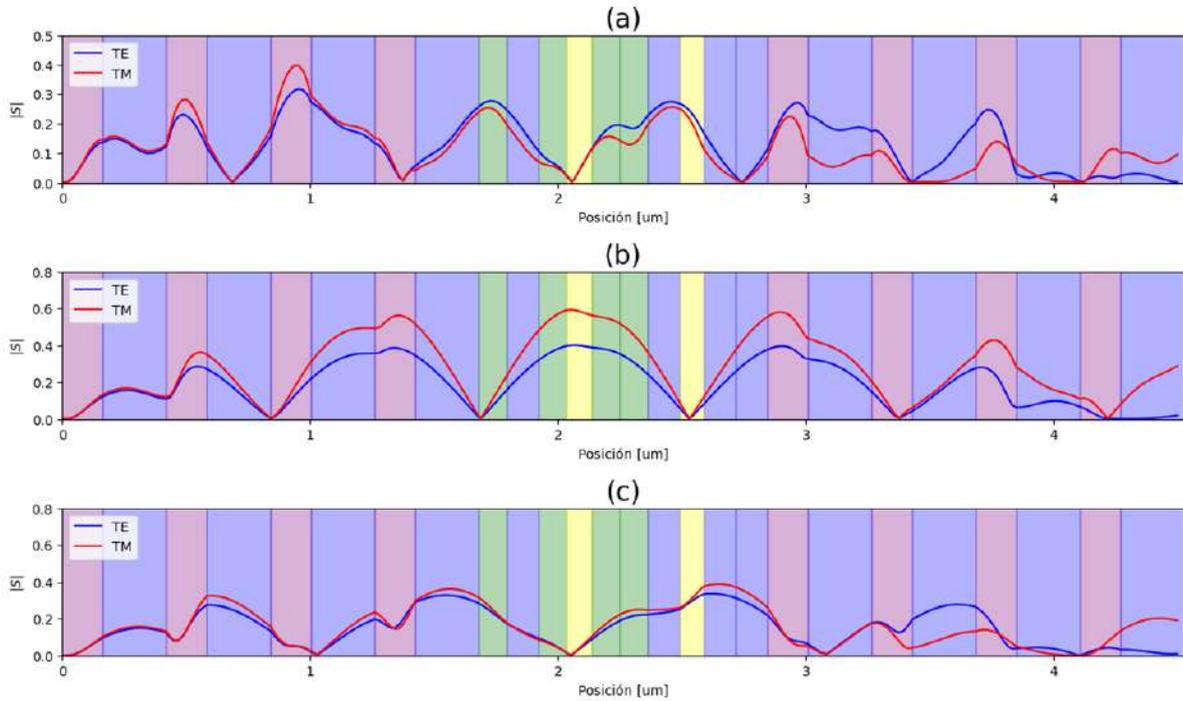
“cavidad óptica”. Esto último se corrobora dado que tal pico está centrado en  $\lambda = 1528\text{nm}$ , muy próximo a  $\lambda_0$ . El correspondiente mapa de densidad aparece dibujado en la Fig. 3.7(b). Puede notarse que, si bien con el incremento del ángulo de incidencia, este modo resonante de transmisión experimenta un corrimiento al azul bastante fuerte, su presencia es, prácticamente, omnidireccional.



**Figura 3.7:** Curva de reflexión y mapa de densidad para la transmisión de una estructura AB-RD-AB, donde a la secuencia RD se le elimina la letra A. El resultado

Notemos también que, hacia los extremos de la brecha en la Fig. 3.7(b), hay dos modos brillantes de transmisión. Vamos a representar en la Fig. 3.8 la distribución espacial del flujo normalizado del vector de Poynting, [gráficos (a) y (c)] junto con la del modo asociado al “defecto” RD [gráfico (b)]. Puede observarse que en este último caso, hay un pico en el flujo

de energía justo en la región quasiperiódica, mientras que los modos de borde de gap tienden a tener sus mayores contribuciones a la energía fuera de esa región



**Figura 3.8:** Intensidad en los 2 modos que encierran al ancho de banda, así como el modo defecto a una incidencia de  $30^\circ$ . (a) modo a  $1187\text{nm}$ , (b) modo central a  $1428\text{nm}$  y (c) modo a  $1776\text{nm}$

### 3.3.2. Sistema: ABC-RD-ABC

Seguiremos considerando un esquema PQP con espejos de Bragg en los extremos. Pero ahora vamos a tomar reflectores periódicos de tres componentes, ABC. Sobre la elección de los materiales que se incorporan en este caso tenemos  $A : \text{ZnO}$ ,  $B : \text{SiO}_2$ ,  $C : \text{TiO}_2$ . Para la creación de las secuencias híbridas de trabajo, tomamos la misma idea presentada en la subsección AB-RD (usaremos letras minúsculas en los espejos para resaltar la diferencia):

**CASO 1: Secuencia original (52 capas en total):**

$$(ABC)^6 + RD(4) + (ABC)^6$$

**CASO 2: Secuencia con reflector ABC reducido (34 capas):**

$$(ABC)^3 + RD(4) + (ABC)^3$$

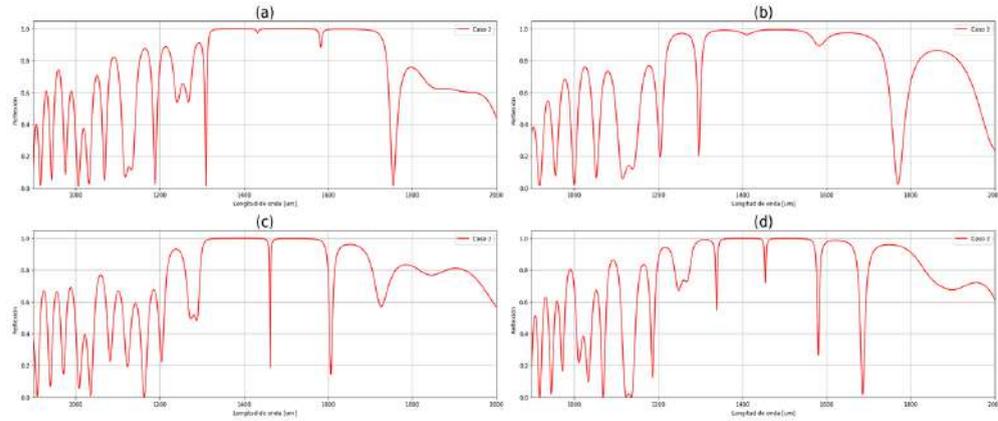
**CASO 3: Secuencia con reflector y RD con una letra eliminada (48 capas):**

$$(ABC)^6 + RD(4)_{\square,C} + (ABC)^6$$

**CASO 4: Secuencia con reflector y RD con dos materiales iguales (52 capas):**

$$(ABC)^6 + RD(4)_{C=A} + (ABC)^6$$

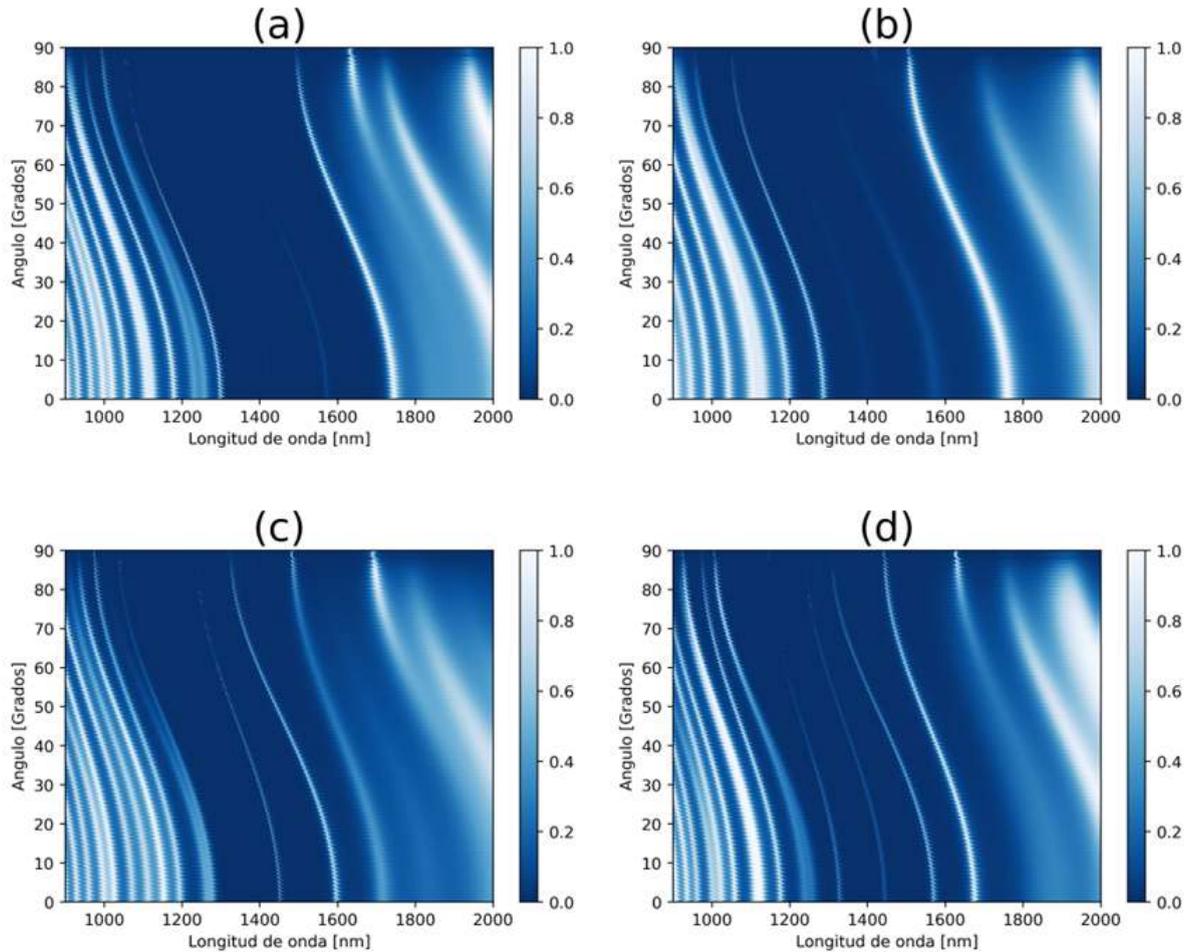
Para la secuencia ABC se implementa una repetición de orden 6, y para el caso reducido una de orden 3, en el caso de las secuencia RD nos mantenemos usando un orden 4; siendo la idea mantener el número de capas totales al mínimo.



**Figura 3.9:** Espectros de reflectancia de heteroestructuras híbridas periódico-Rudin-Shapiro-periódico con espejos de Bragg de tres componentes para los cuatro casos descritos en el texto. (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4. En todos los casos los cálculos se hacen para incidencia normal, con centro en  $\lambda_0 = 1500\text{nm}$  y espesores establecidos por la condición  $\lambda_0/4$  para la secuencia RD y  $\lambda_0/6$  para las secuencias periódicas ABC.

En la figura 3.9 se observan las curvas de reflexión para los posibles casos de estudios, como es de esperarse el caso 1 y 2 solo se diferencia en que tan definida esta la curva producto de los tamaños de los reflectores a los extremos. Por otro lado, el caso 3 muestra dos picos prominentes en las longitudes entre 1500 y 1600 nm, curiosamente no presenta picos de borde, siendo que este pareciera extenderse más allá de los 2000nm, sin embargo, ninguna de esas características alcanza una reflexión total en esos intervalos de longitudes de onda. El ultimo caso [Fig. 3.9 (d)] presenta dos picos en la región de 1600 y 1700nm, altamente

definidos y el último con alcanzando la transmisión total, de igual forma el gap pareciera extenderse más allá de los 2000 nm, para este caso la componente  $C$  se reemplaza por  $A$ , efectivamente reemplazando el material de menor índice por el de mayor.

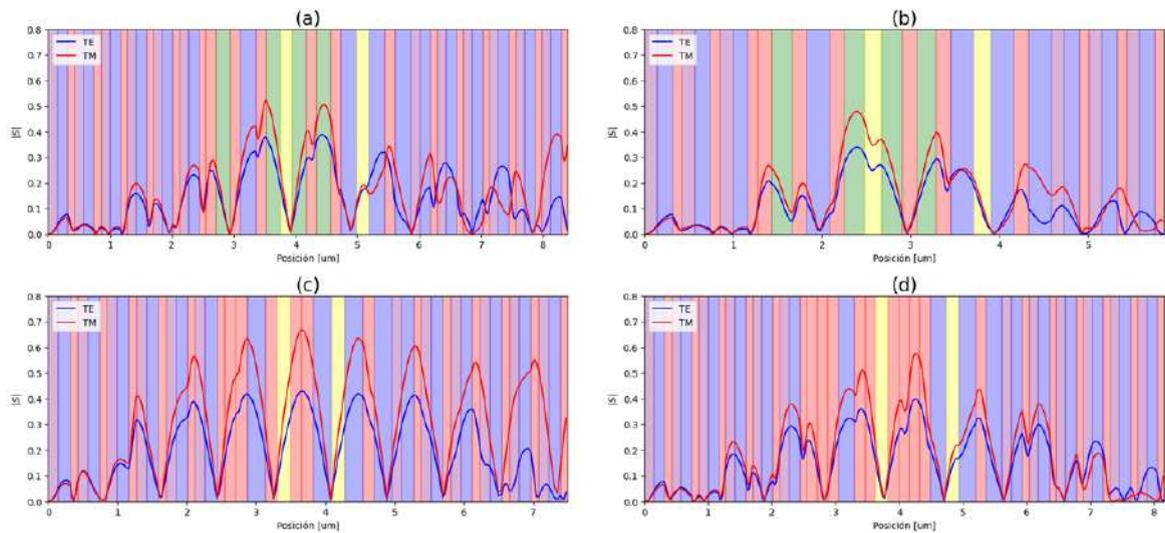


**Figura 3.10:** Mapas de densidad para la transmisión. (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4. Todos los casos centrados en  $\lambda_0 = 1500\text{nm}$  y  $\lambda_0/4$  para la secuencia  $RD$  y  $\lambda_0/6$  para la secuencia  $ABC$ .

Observando en la Fig. 3.10 el mapa de densidades como función del ángulo de incidencia se pueden notar pequeños intervalos de  $\lambda$  con omnidireccionalidad en la reflexión, en los casos (1,2) [Figs. (a,b)]. Además, se nota que para el caso 1, a longitudes de onda superiores a 1800 nm los picos de transmisión se definen menos lo que se ve como un difuminado en la figura, algo que en el caso 2 no se aprecia. En concordancia con las curvas de reflectancia en la Fig. 3.9, los casos 3 y 4 son los que presentan el mayor número de modos de transmisión,

y por tanto el ancho de banda menos claramente visible. El caso 4 [gráfico (d)], sin embargo, es el que presenta dichos modos mejor definidos, especialmente a longitudes superiores a 1600 nm, aparte de que podemos apreciar la tendencia de aparición de un gap centrado en 1800 nm, como ya comentamos en la figura anterior.

Vemos con esto que el uso de los espejos de Bragg tricomponentes no parece conducir a resultados particularmente relevantes desde el punto de vista de la reflexión/transmisión y de la formación de brechas fotónicas, al menos con los diseños de pocas capas que estamos considerando. Sin embargo, como lo que nos interesa principalmente con este tipo de estructuras es el análisis del comportamiento espacial de los modos de transmisión, vamos a estudiar lo que sucede con al menos un modo de transmisión de cada estructura. Los modos elegidos para esto son aquellos que estén mejor definidos o en su defecto aquellos que se encuentren dentro del ancho de banda prohibido, ver figura 3.11.

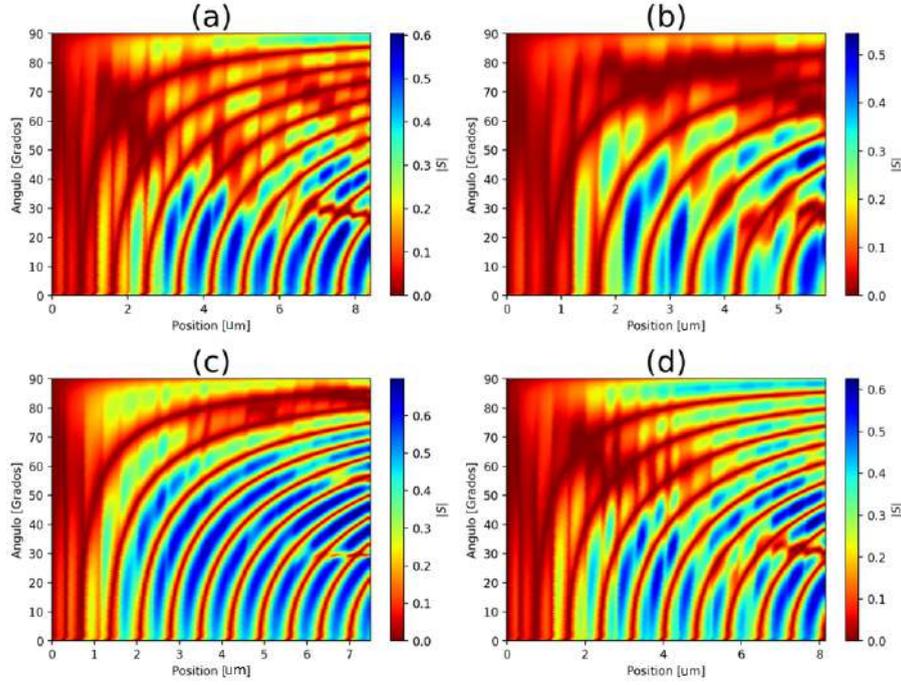


**Figura 3.11:** Curvas del flujo de energía dentro de la estructura para los casos de estructuras PQP con espejos de Bragg tricomponentes. (a) caso 1: 1696 nm, (b) caso 2: 1709 nm, (c) caso 3: 1328, (d) caso 4: 1281 nm. Todos los casos fueron calculados para un ángulo de incidencia de  $30^\circ$  y tanto modos TM como TE.

Puede observarse que en los casos 1 y 2 hay una mayor intensidad del flujo energético se localiza en la región cuasiperiódica de la estructura PQP. Curiosamente, atendiendo a que

la morfología de los casos 1 y 2 son iguales, la presencia de reflectores de menor generación en el caso 2 [Fig. 3.11 (b)] es favorable para mantener tal intensidad comparativamente baja en las regiones periódicas de la heteroestructura. Por otra parte, los casos 3 y 4 presentan los picos de intensidad normalizada con mayores amplitudes (modos TM particularmente), localizados precisamente en la región cuasiperiódica, notablemente el caso 4. Para la señal del caso 3, el modo TM presenta una serie de máximos de la intensidad de flujo a lo largo de casi toda la estructura; cosa que también exhibe el modo TE pero con una amplitud menos variable. El caso 4, por su parte presenta una situación interesante, en donde el flujo de energía se extingue casi por completo antes y después de la zona cuasiperiódica. Es decir, prácticamente toda la energía del modo se localiza en una región específica de la estructura. Es posible hablar, en este caso y para este modo, de una localización espacial selectiva del campo electromagnético en cuanto a su amplitud respecto a la que incide en la superficie ubicada en el origen.

También podemos analizar el efecto de localización espacial de estos modos en base al ángulo de incidencia. En la figura 3.12 se muestran los gráficos de densidad para el módulo del vector promediado de Poynting que corresponden, respectivamente, a las curvas de la figura anterior, para el caso de los modos TM. En ella se aprecia que las diversas estructuras presentan un mismo patrón común, sin embargo, en algunos casos se presentan áreas en donde la intensidad es mayor, y, más interesante aún, áreas en donde la intensidad se extingue por completo, variando su posición en la estructura en dependencia del ángulo de incidencia. Tal es el caso de 2 [gráfico (b)], en donde la señal se extingue por completo en ángulos superiores a  $60^\circ$ . También se puede observar que los picos de máxima intensidad relativa tienden a ubicarse más hacia el interior de la estructura (y casi al extremo final de la misma) en la medida que aumenta la amplitud del ángulo de incidencia. Otro fenómeno de interés es la presencia de una franja horizontal de intensidad casi nula, ubicada en la proximidad del ángulo de  $30^\circ$ . Debe notarse que dicha característica es mucho menos apreciable en el caso 3, en el cual la sucesión cuasiperiódica RS se rompe al eliminar una letra (material). Entonces, la geometría cuasiperiódica parece ser relevante para que se observe tal efecto con mayor definición.

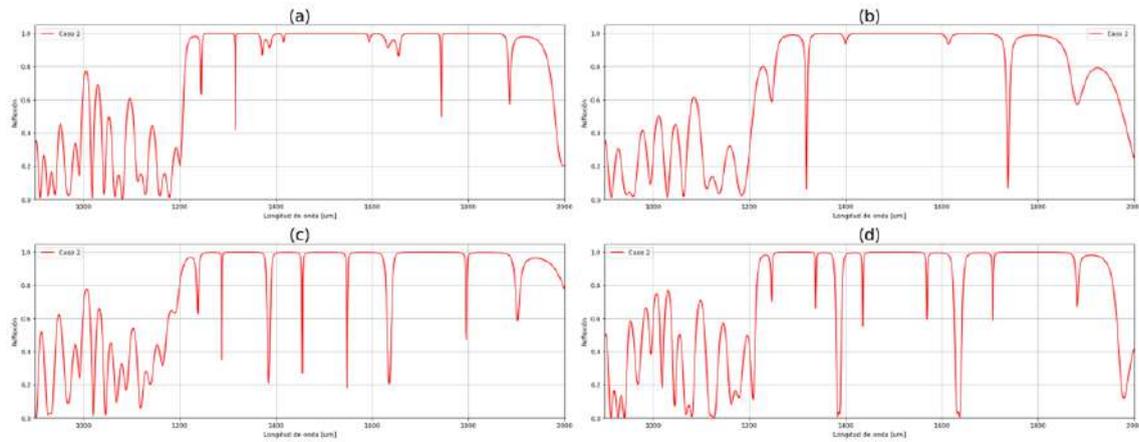


**Figura 3.12:** Mapa de la distribución espacial de la intensidad normalizada del flujo de energía dentro de la estructura híbrida PQP, como función del ángulo de incidencia, para los modos de transmisión: (a) caso 1: 1696 nm, (b) caso 2: 1709 nm, (c) caso 3: 1328, (d) caso 4: 1281.

### 3.4. Caso de los reflectores triperiódicos

Como se ha comentado previamente, en 2021 el grupo de trabajo de Panyaev publicó un estudio acerca del uso de sistemas triperiódicos de la forma  $[(\Delta_h)^n(\Delta_l)^m]^k$ , en donde  $\Delta_h$  y  $\Delta_l$  representan un contraste óptico alto y uno bajo [35]. En esta sección, investigaremos las características de la propagación de la señal electromagnética en heteroestructuras híbridas PQP en las cuales los reflectores periódicos son del tipo de Panyaev y la parte central es una generación RS.

En la fig.(3.13) se muestran las curvas de transmisión para los 4 casos presentados en la sección 3.3.2, donde los reflectores originales de la forma ABC han sido reemplazados por reflectores de estilo Panyaev de la forma  $[(AB)^n(CD)^m]^k$ ; donde  $A : TiO_2, B : SiO_2, C : Al_2O_3, D : HfO_2$ , y  $n = m = 3, k = 2$ , con la excepción del caso b, en donde  $K = 1$ . Tal como se esperaría este cambio, la morfología de las curvas se hace más *definida*. Algo de notar es la figura [fig.3.13(c)] en donde se aprecia la aparición de dos agrupaciones conformadas



**Figura 3.13:** *Curvas de transmisión para los casos de la sección 3.3.2, pero los reflectores ABC han sido reemplazados por espejos de Panyaev.*

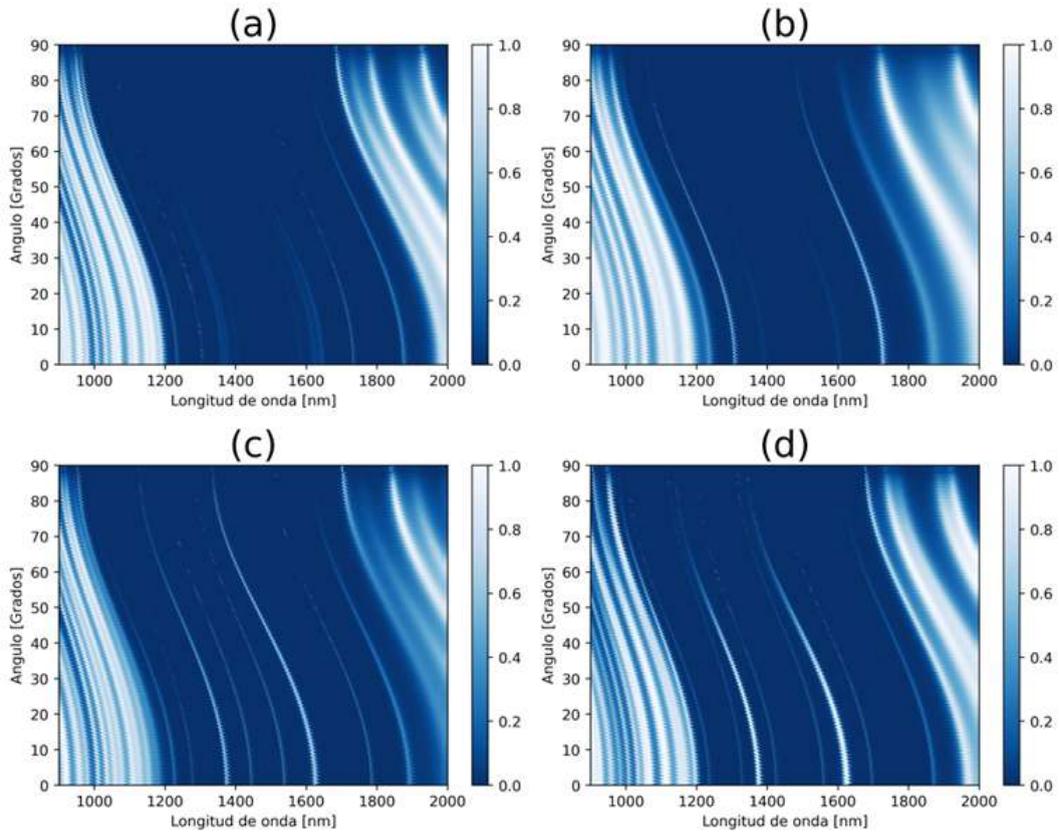
por tres picos muy cercanos entre sí, este es un comportamiento que más adelante se hace más evidente como característico de este tipo de reflectores.

A pesar de que los gráficos de transmisión parecieran indicar una mayor *definición* en la forma de la curva, el mapa de densidad para la transmisión, [fig.(3.14)], muestra que la mayoría de los modos de transmisión se extinguen rápidamente conforme se incrementa el ángulo de incidencia, algo que ya era presente antes de implementar los reflectores nuevos. El estudio de cada uno de los modos más sobresalientes no muestran algún resultado de alta localización que sea relevante para los efectos de esta tesis, [fig.(3.15)].

Sin embargo, hay que tener en cuenta que en las estructuras PQP juega un papel importante el tamaño de las mismas, fundamentalmente en relación con el número de espejos que se colocan a ambos lados de las mismas, el propio orden de la sucesión cuasiperiódica y el tipo de esta última. Por lo tanto, la realización de experimentos numéricos con espejos de Panyaev no está, para nada, agotada sino que requiere de estudios ulteriores.

Precisamente, como ejemplo de resaltar las ventajas de diseñar heteroestructuras dieléctricas híbridas, vamos, por último, a apartarnos un poco del tema estrictamente PQP discutido arriba.

Es bien conocido que en un cristal fotónico, al igual que en el caso de los espejos omnidireccionales, es deseable obtener una o varias brechas de propagación suficientemente



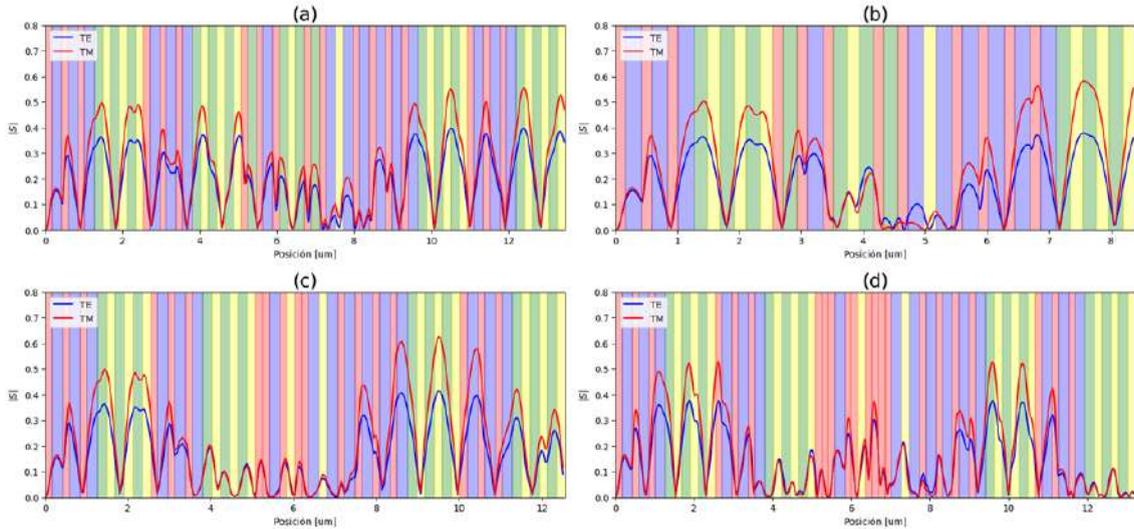
**Figura 3.14:** Mapas de densidad para la transmisión de los casos de la sección 3.3.2 implementando reflectores de tipo Panyaev.

amplias y permanentes ante la variación del ángulo de incidencia. Pensando en eso, vamos a proponer aquí un diseño de superred dieléctrica con celda unitaria híbrida, inspirados en la idea publicada en la referencia [32]. En este caso, la estructura híbrida PQ que servirá como elemento generador del sistema periódico contiene reflectores de Bragg de tipo ABC y una multicapa RS. Así, la secuencia de la estructura sería  $[(ABC)^n RS(m)]^k$ , que implica ensamblar  $n$  unidades de tipo ABC con la  $m$ -ésima generación de Rudin-Shapiro y repetir  $k$  veces ese elemento.

Con el fin de generar una comparativa vamos a considerar 2 casos:

**Caso 1: Superred de celda triperiódica según Panyaev (5 periodos):**

$$[(AB)^4(CD)^4]^5$$



**Figura 3.15:** Modos más destacables para los casos de la sección 3.3.2 implementando espejos de Panyev.

**Caso 2: Superred de celda PQP con ABC-RS (4 periodos):**

$$[(ABC)^4 RD(4)]^4$$

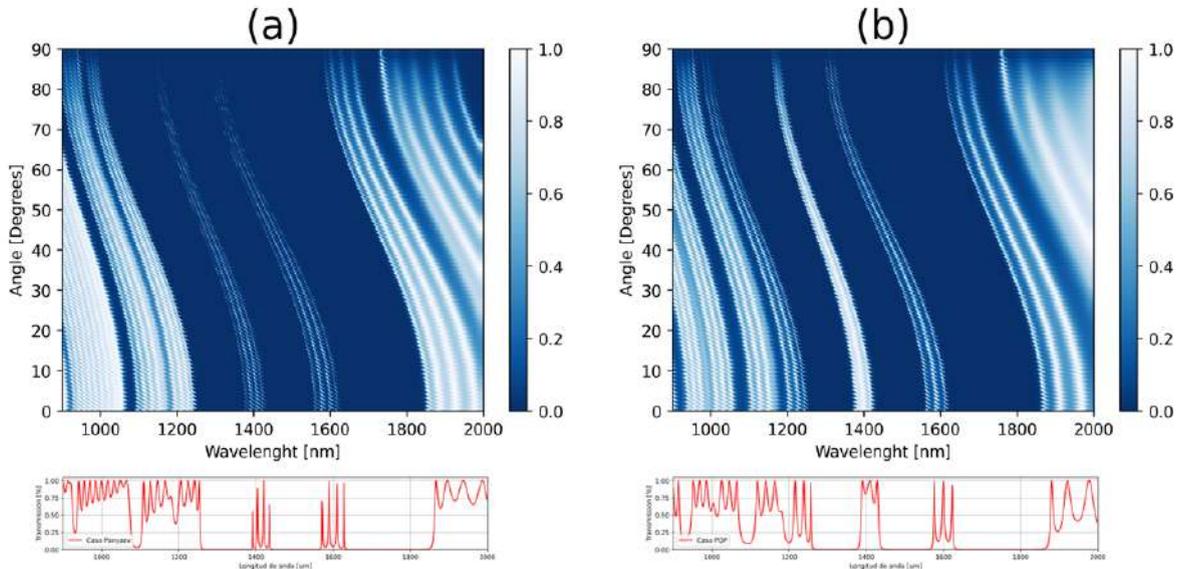
Para el caso 1 usamos  $TiO_2$  y  $SiO_2$  como la base del espejo de alto contraste. Para el de bajo contraste usamos  $Al_2O_3$  y  $HfO_2$ , ambos espejos son de orden 4 e inicialmente consideramos 5 periodos (80 capas). El caso 1 implementa la misma selección de materiales y disposiciones usadas en la sección 3.3.2.c Por otra parte, en el caso 2 el espejo ABC es de orden 4 al igual que la secuencia RS, pero sólo se consideran 4 periodos de la celda unitaria inicialmente.

En la figura [fig.3.16] se muestra la curva de transmisión a incidencia normal, abajo, y los mapas de densidad, arriba, para la transmisión de estos casos. Ambos casos están centrados en  $\lambda_0 = 1500$  nm. Debemos mencionar que, en el caso del trabajo de Panyev, cada tipo de espejo se centra en longitudes de onda distinta. Aquí, por simplicidad y facilidad de comparación se obvia esa parte.

Se aprecia que ambos casos presentan dos agrupaciones de picos de transmisión, uno cercano a 1400nm y otro cercano a 1600nm, de igual forma ambos presentan estos grupos de picos a lo largo de todo es rango de incidencia. Sin embargo, el caso 2 muestra una mayor

intensidad a lo largo de todo el rango, especialmente en ángulos mayores.

Algo interesante es lo que ocurre con el flujo de energía en los picos de transmisión. Para comentar sobre esto, vamos a considerar un ángulo de incidencia de  $30^\circ$  y estudiaremos dos modos particulares, compartidos por ambos casos: 1535nm y 1354nm, para el caso 2 estos son los picos centrales de las agrupaciones, para el caso 1 son los valles centrales de las agrupaciones, [fig. 3.17].

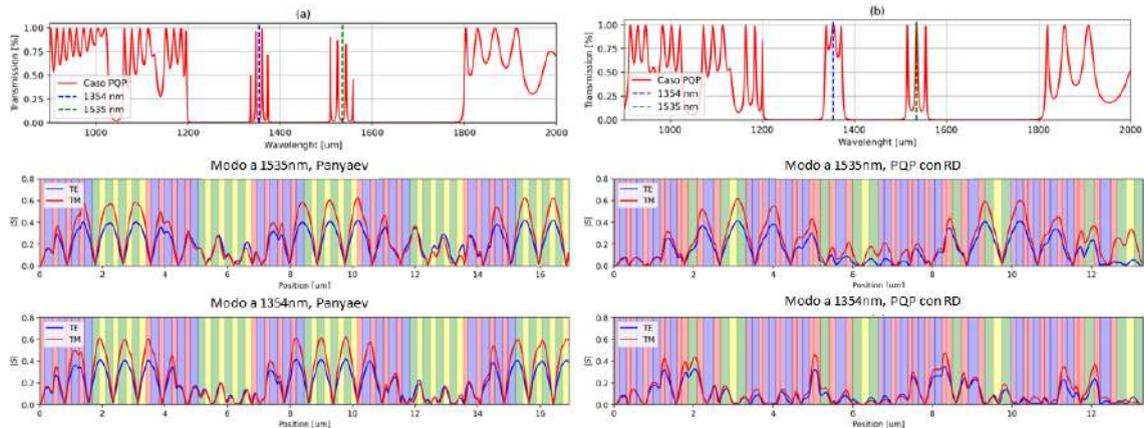


**Figura 3.16:** Espectro de transmisión para polarización  $TM$ (panel inferior) y mapa de densidad de transmitancia variando el ángulo de incidencia para: (a) el caso 1, (b) para el caso 2. Los espesores ópticos están determinados por  $\lambda_0 = 1500 \text{ nm}$ , empleando la condición  $\lambda_0/4$  para las capas  $RS$  y el caso 1, y  $\lambda_0/6$  para las partes periódicas  $ABC$  en el caso 2

En la [fig. 3.17 (a)] se aprecia que, para estos modos de transmisión, aparece una cierta localización con la aparición de nodos donde se localiza la energía rodeados de zonas donde esta se extingue, esto se ve amplificado en [fig. 3.17 (b)] donde el comportamiento se ve amplificado, para 1535nm la morfología de los picos se define mejor, más importante aún, ambos modos son distintos ahora; el caso a 1354nm presenta 4 nodos comparado al caso a 1535 donde se presentan 2 nodos.

Algo que podemos estudiar es el comportamiento de estos modos al incrementar el número

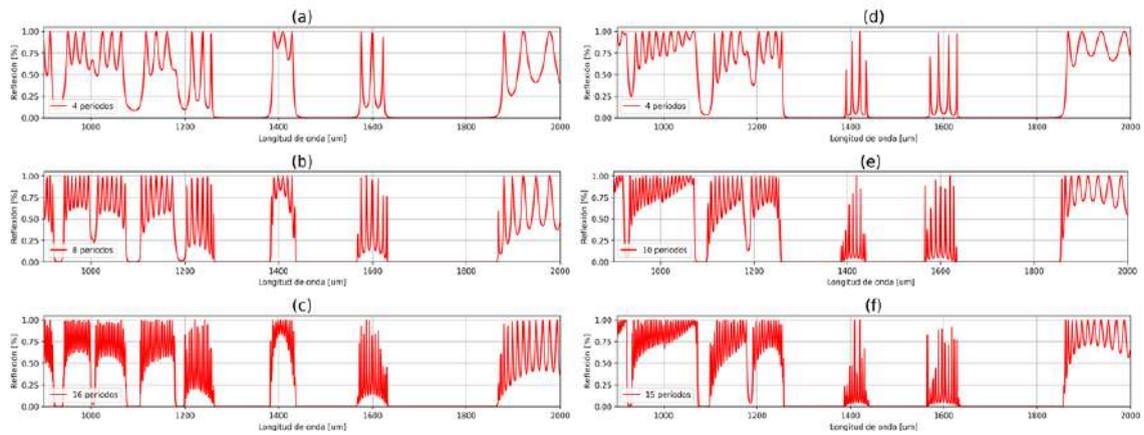
ro de periodos y aproximarnos, por ende, al caso periódico ideal del cristal. Para ello podemos ir duplicando la cantidad de repeticiones de la celda unitaria. En la fig.3.18 se muestra los efectos que esto tiene sobre la curva de transmisión.



**Figura 3.17:** (a) Espectro de transmisión del caso representado en la Fig. 3.16 (a). (b,c) Distribución de la intensidad relativa del flujo de energía para los dos modos resonantes de transmisión señalados en (a) con rectas discontinuas para una incidencia de  $30^\circ$ , modo central a (1535 nm, 1354 nm).

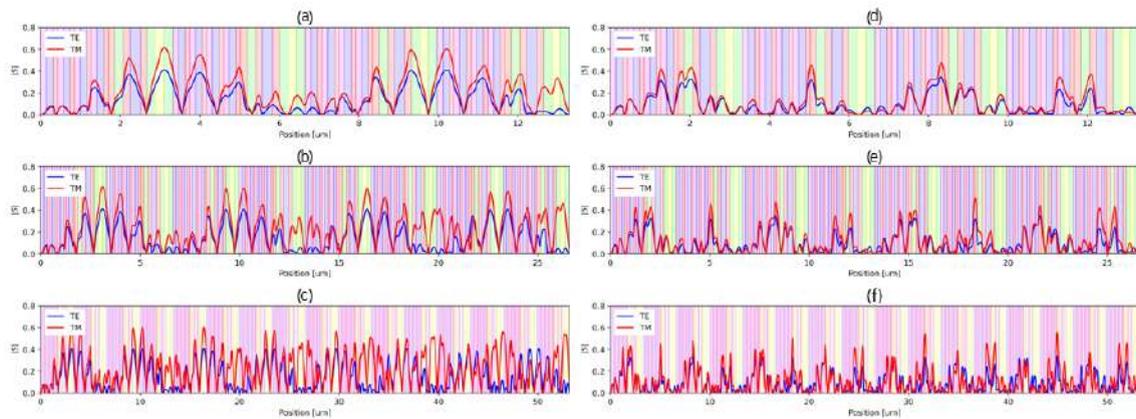
Se aprecia que conforme se incrementa la cantidad de periodos los efectos de interferencia se hacen mas presentes. Las agrupaciones de picos se mantienen centradas en la misma posición. Sin embargo, el número de picos que lo conforman se incrementa hasta cierto punto, perfilándose mejor. Es importante recalcar que en todos los casos las longitudes de onda de 1535 y 1354nm se mantienen presentes. Vamos a estudiar lo que sucede con el flujo de la energía para estos modos conforme aumenta el número de periodos.

En la fig. 3.19 se muestra el comportamiento del flujo de energía dentro del sistema para el caso 2. Se puede observar que el comportamiento de la curva es distinto para cada modo. Se tiene que, para 1535nm, en general aparecen  $k/2$  número de nodos, donde  $k$  es el número de periodos en que se repite la celda unitaria. Algo interesante es que el modo TM sufre una suerte de "cambio de fase" conforme se incrementan los periodos. Esto es, la posición que deberían ocupar los máximos y mínimos se invierten. Sin embargo, el modo TE no presenta



**Figura 3.18:** Curvas de transmisión para (a)-(c) caso PQP a 4, 8 y 16 periodos respectivamente; (d)-(f) caso Panyaev a 5,10 y 15 periodos respectivamente.

este comportamiento.



**Figura 3.19:** Representación de la distribución espacial del flujo de energía dentro de la estructura con celda unitaria PQP, dependiendo del número de periodos en la superred. En la izquierda para 1535nm y a la derecha para 1354nm. (a,d) 4 periodos; (b,e) 8 periodos y (c,f) 16 periodos.

Mientras tanto, para el modo a 1354nm aparecen una cantidad de nodos proporcionales a la cantidad de periodos de la celda unitaria. Específicamente, se observan cuatro formas características de máximos los cuales se aprecian en [fig. 3.19(d)]. Dichos nodos se repiten entonces a lo largo de la estructura. Contrario al otro modo, aquí no se presenta algún cambio de fase en la señal.

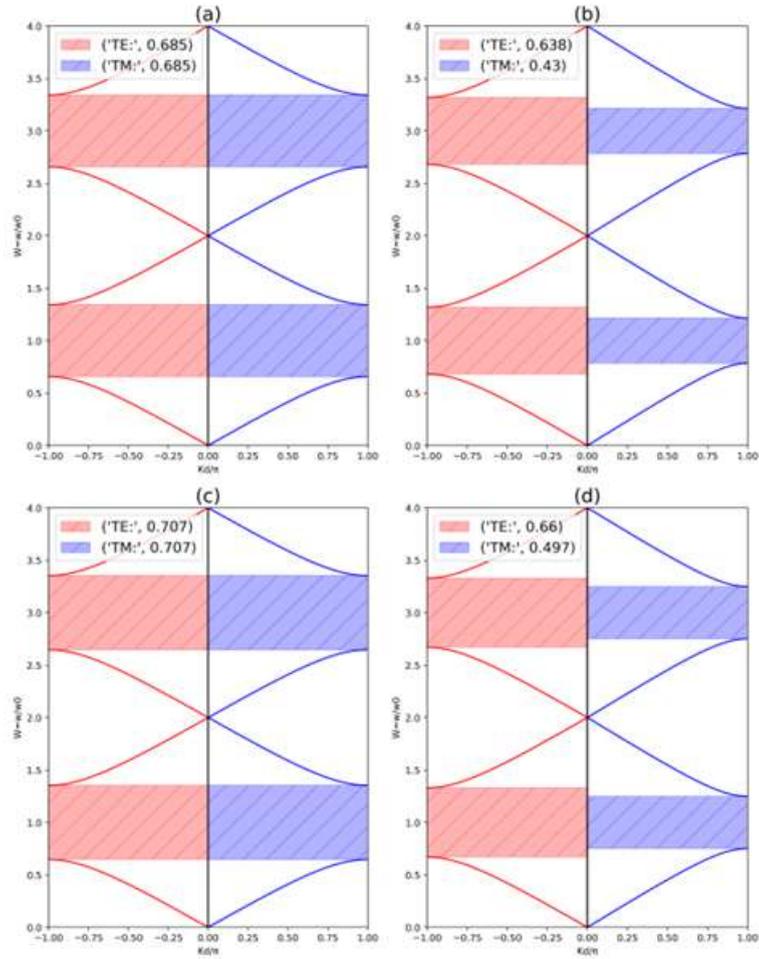
Previo a presentar el mapa de densidades para los flujos de energía de estas estructuras podemos analizar el diagrama de bandas asociados a los cristales fotónicos unidimensionales formados por la repetición de las dos clases de celdas unitarias discutidas: La triperiódica de tipo Panyaev y la PQP con espejos ABC y secuencia RS.

En virtud de la periodicidad de los sistemas considerados, es posible aplicar los resultados del teorema de Floquet-Bloch a partir de la traza de la matriz de transferencia total  $\mathbf{M}$ , correspondiente a un periodo de la superred. Entonces la relación de dispersión para el cristal fotónico  $1D$  resultante puede escribirse de forma implícita como:

$$[h] \cos qd = \frac{1}{2} \text{Tr}(M) \quad (3.2)$$

donde  $q$  es la magnitud del vector de onda  $1D$  asociado al cristal y  $d$  es el período de la superred. Hay que recordar que la frecuencia  $w$  de la señal aparece en los elementos de las matrices de transferencias de las capas involucradas. Esto hace que (3.2), sea una ecuación trascendente que solamente puede ser resuelta numéricamente. Por demas, hay que tener en mente que los elementos de la matriz de transferencia en cuestión se pueden obtener directamente a partir de los elementos correspondientes a la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  [5].

Observando la Fig. 3.20 podemos verificar que a incidencia normal no hay, como cabe esperar, distinción entre modos TE y TM. Al aumentar la amplitud del ángulo de incidencia, el ancho de las brechas fotónicas se reduce, y el mayor decrecimiento tiene lugar para el modo TM. Esto es también un hecho conocido y, en la situación que se analiza, contribuye a justificar la validez del esquema de cálculo. Cuando se analiza la región espectral de coincidencia entre las brechas TE y TM se identifica lo que se como *gap total (full gap)*. Llama la atención que, aunque en los trabajos de Panyaev y colaboradores no se reportan los esquemas de bandas, los cristales fotónicos multiperiódicos propuestos por ellos producen gap totales omnidireccionales de bastante buena amplitud. Sin embargo, podemos darnos cuenta que nuestra propuesta basada en una celda unitaria PQP avanta a las estructuras de celda triperiódica dado que el gap total omnidireccional es aún más ancho. Este resultado va-



**Figura 3.20:** Diagrama de bandas ((en unidades normalizadas) para ángulos de incidencia de  $0^\circ$  (a,c) y  $70^\circ$  (b,d), para los cristales fotónicos 1D con celda triperiódica (a,b), y celda periódico-cuasiperiódico-periódica con secuencia Rudin-Shapiro (c,d). En rojo, las bandas y brechas para el modo TE y en azul para el modo TM.

lida el estudio de las heteroestructuras dieléctricas híbridas con la sucesión de Rudin-Shapiro.

Ahora vamos a estudiar lo que sucede con el flujo de energía a distintos ángulos de incidencia para las estructuras PQP de Panyaev y PQP con RD. Para ello vamos a calcular el mapa de densidad del flujo de energía para ambos casos, y ambos modos de transmisión, por simplicidad de cálculo solo se consideran 4 periodos de la celda unitaria. Por un margen leve el caso con RD presenta un ancho de bandas más amplio.

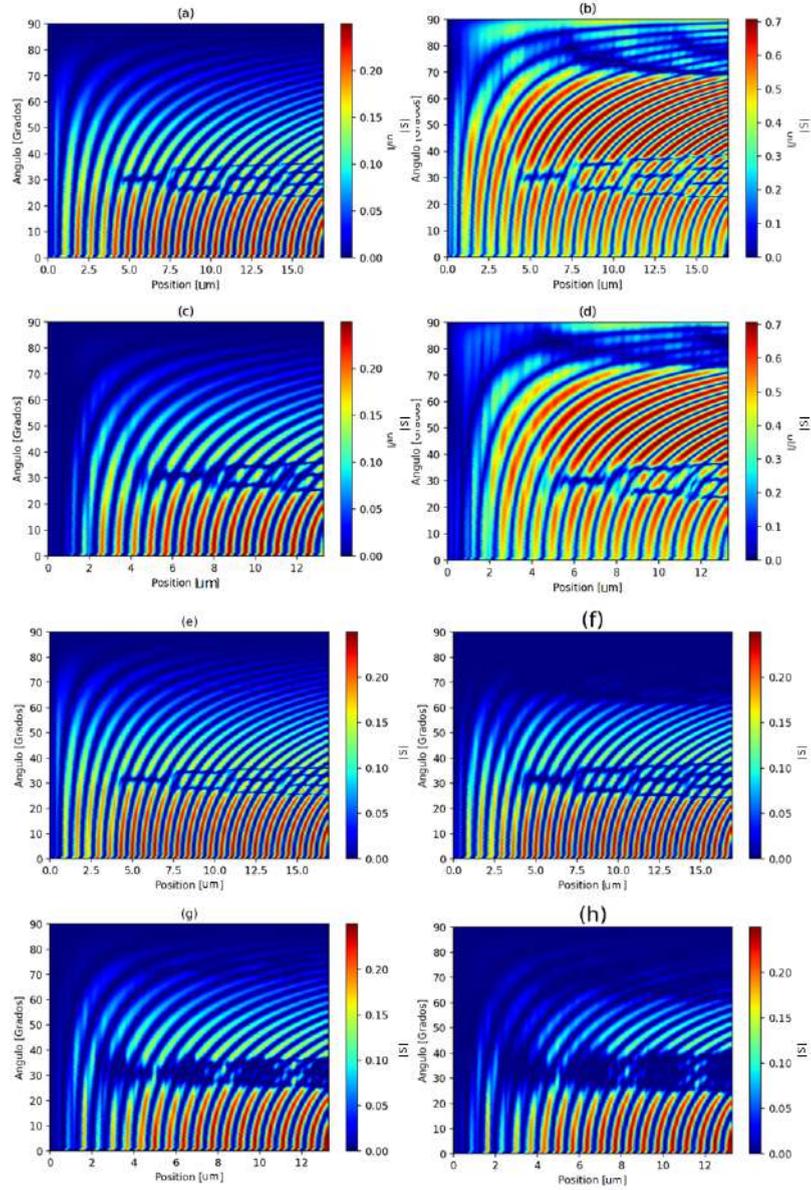
De la figura 3.21, se aprecia que para este tipo de estructuras se presentan áreas en donde la señal del flujo de energía se extingue por completo, en los casos del sistema de Panyaev esto se presenta en ambos modos como bandas estrechas centradas cerca de los  $30^\circ$ , dichas bandas se presentan, inicialmente, como una sola la cual posteriormente se bifurca en cuatro, para el caso de Panyaev [fig. 3.21(a,b,e,f)], y en tres para el caso con Rudin-Shapiro, 3.21(c,d)].

En general el caso con Rudín-Shapiro las zonas donde se extingue la señal son más amplias que en el caso normal. Especialmente para la señal del modo a 1354nm tanto en el modo TE como TM, [fig.3.21(g,h)] en donde las zonas rompen por completo la continuidad del mapa de densidad excepto por reducida zonas correspondientes a los nodos estudiados previamente.

La mayor diferencia entre el caso original planteado por Panyaev, y el caso implementado con Rudin-Shapiro yace entonces en la forma en la cual la energía se distribuye dentro de la estructura. En las secciones previas se mostró que en ciertos casos los modos de transmisión conllevan una localización de la energía dentro de la estructura, en el caso PQP original esta localización se encuentra dentro de los modos al medio de las agrupaciones que se observan en el diagrama de transmisión. Sin embargo, al implementar el caso con Rudín-Shapiro es posible resaltar más la forma de estos nodos, y para el caso del modo a 1354nm extinguir la señal intermedia entre los nodos de tal forma que la localización es casi absoluta.

Puede observarse también que, para los modos considerados, existe un patrón de distribución espacial de la intensidad de flujo del campo electromagnético dentro de las heteroes-

estructuras que presenta franjas de transmisión muy baja, o casi nula, para valores del ángulo de incidencia centrados alrededor de  $30^\circ$ . Esto aparece más débilmente en el caso triperiódico de Panyaev y resulta muy significativo en el caso del sistema híbrido. Aquí están jugando dos factores principales. Uno de ellos es la composición, dados los materiales dieléctricos involucrados. El otro, y más importante, es la geometría de la multicapa. Nuevamente, lo que se muestra en la Fig. 3.21 pone de manifiesto la particularidad de nuestra propuesta PQP.



**Figura 3.21:** Mapas de densidad para el flujo de energía dentro de la estructuras PQP de Panyev (a-f) y PQP con RD. El lado izquierdo son los modos TE, y el derecho los modos TM. (a,b) para 1535nm, y (e,f) para 1354nm para el caso Panyaev; (c,d) para 1535nm, y (g,h) para 1354nm para el caso híbrido Rudin-Shapiro.

# Capítulo 4

## Resultados experimentales. Obtención de multicapas de óxidos conductores

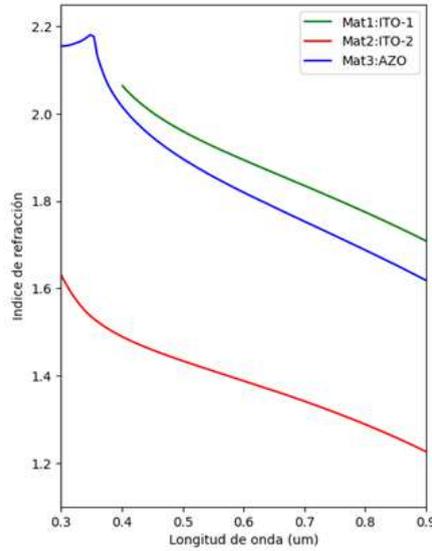
### 4.1. Metodología Experimental

Además del caso teórico se plantea la posibilidad de comprobar la veracidad del modelo usando un sistema de multicapas con al menos dos índices de refracción distintos. El crecimiento se realiza en los *laboratorios de nanoestructuras y nanomateriales* del CINVESTAV unidad Mérida a cargo del Dr. Román Castro Rodríguez.

La metodología consiste en un sistema multicapa AB, donde A: AZO y B:ITO, compuestos conductores transparentes comúnmente usados en el crecimiento de celdas solares. Las películas se crecen de forma planar usando un sistema de RF Sputtering, los tiempos de crecimiento se calculan usando el criterio de Bragg.

Se plantea el crecimiento de una película delgada conformada por dos materiales distintos A y B, los cuales se alternan de la forma ABAB... Dicha estructura es conocida como un espejo de Bragg. Inicialmente se plantean espesores teóricos en base a datos del índice de refracción reportados en trabajos previos. Estos espesores los obtenemos de la relación  $\lambda_0/4n$

Inicialmente usamos los valores obtenidos en *Refractive Index* para tener una idea del comportamiento de los índices de refracción de los materiales y proponer un espesor inicial.

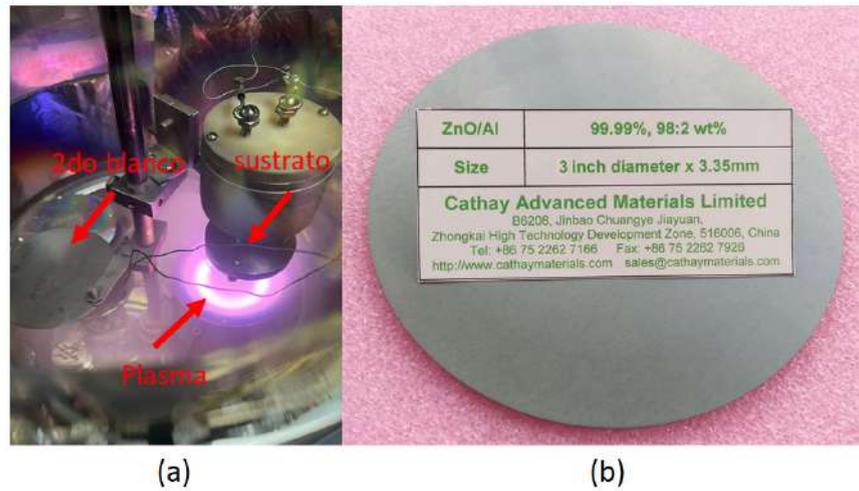


**Figura 4.1:** Índices de refracción reportados previamente para AZO e ITO respecto a la longitud de onda.

Para un espejo de Bragg es necesario que el contraste óptico  $\Delta_n$  que se forma entre los materiales sea lo más grande posible, por lo que se eligen los casos más idóneos. Centrando en  $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$  se tienen los siguientes espesores de  $d_{AZO} = 99.81 \text{ nm}$   $d_{ITO} = 130.44 \text{ nm}$

Para el crecimiento de la película delgada se optó por un método de RF Sputtering, la maquinaria del laboratorio permite tener hasta dos blancos distintos al mismo tiempo, lo que agiliza el crecimiento al no tener que romper vacío, [Fig. 4.2 (a)]. Por simplicidad cada capa es crecida de forma planar. Los materiales elegidos son: para el AZO:  $ZnO$  :  $Al$  blanco comercial de 75mm de diámetro con 2% de  $Al_2O_3$  a una pureza de 99.999%; y para el ITO se emplea un blanco comercial de 75mm de diámetro con 90% de  $In_2O_3$  y 10% de  $SnO_2$  con una pureza del 99.99%, ambos blancos son de la marca *Cathaway Advanced Materials Limited, China*[Fig. 4.2 (b)].

Las condiciones de crecimiento fueron las siguientes: el sustrato es vidrio pyrex de 1x1 cm, con una distancia al blanco de 5 cm, los tiempos de crecimiento para las muestras son de 5 minutos para el ITO (Material B) y 8 minutos para el AZO (Material A) a un régimen de potencia de 80 Watts. Para los casos de 24 y 48 capas, se añade 1 minuto extra a la primera capa de la estructura (AZO) con el fin de garantizar mayor homogeneidad en los espesores de las capas.



**Figura 4.2:** (a) Deposición mediante RF sputtering para la multicapa, (b) material AZO utilizado para la deposición.

## 4.2. Mediciones ópticas, eléctricas y de imagen

	AZO[nm]	ITO[nm]
CAPA 1	56.250	97.500
CAPA 2	86.250	110.625
CAPA 3	88.125	116.250
CAPA 4	88.125	112.500
CAPA 5	86.250	131.250
CAPA 6	80.250	125.625
PROM	80.93	115.625

**Tabla 2.** Grosos de los materiales medidos con imagen SEM, para el caso de 12 capas.

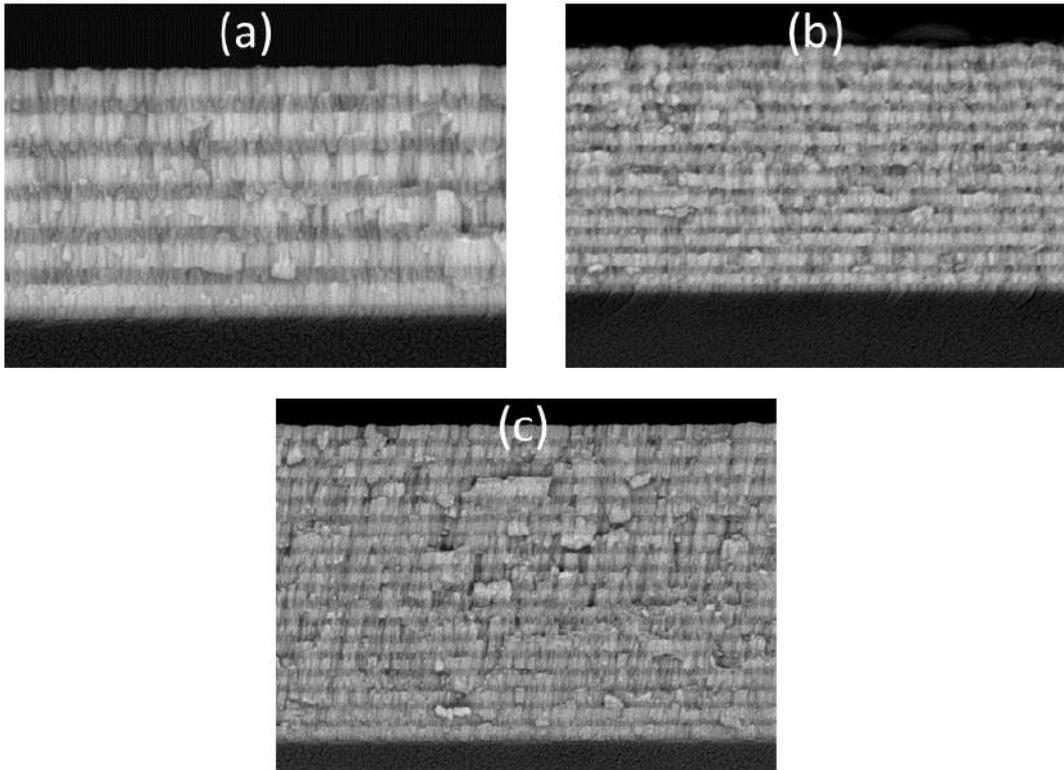
De la [fig.4.3) se puede deducir el espesor total de la películas, para las 12 capas es de 1196 nm, mientras que el espesor teórico es de 1381, para 24 capas el espesor medido es 2325 nm y para 48 capas es de 4717 nm. El grosor específico de cada capa, para las 12 capas, se muestra en la tabla 2, y en la Tabla 3 se muestran los espesores para el caso de 24 capas. Los espesores para el caso de 48 capas no fueron medidos en SEM, para los ajustes de simulación posteriores se implementan los valores obtenidos para 24 capas como medida promedio.

	AZO[nm]	ITO[nm]
CAPA 1	84.375	93.75
CAPA 2	78.125	103.125
CAPA 3	84.375	93.75
CAPA 4	84.375	100
CAPA 5	75	109.375
CAPA 6	84.375	93.75
CAPA 7	112.5	103.125
CAPA 8	84.375	109.375
CAPA 9	68.75	118.75
CAPA 10	78.125	109.375
CAPA 11	84.375	109.375
CAPA 12	87.5	112.5
PROM	83.854	104.687

**Tabla 3.** Grosos de los materiales medidos con imagen SEM para el caso de 24 capas.

Debido a fenómenos de nucleación, la primera capa que se crece siempre será menor que las subsiguientes. En este caso la primera capa es de AZO y presenta una gran diferencia comparado con las siguientes capas crecidas, para los casos de 24 y 48 capas esto se mitiga incrementando en 1 minuto el primer crecimiento.

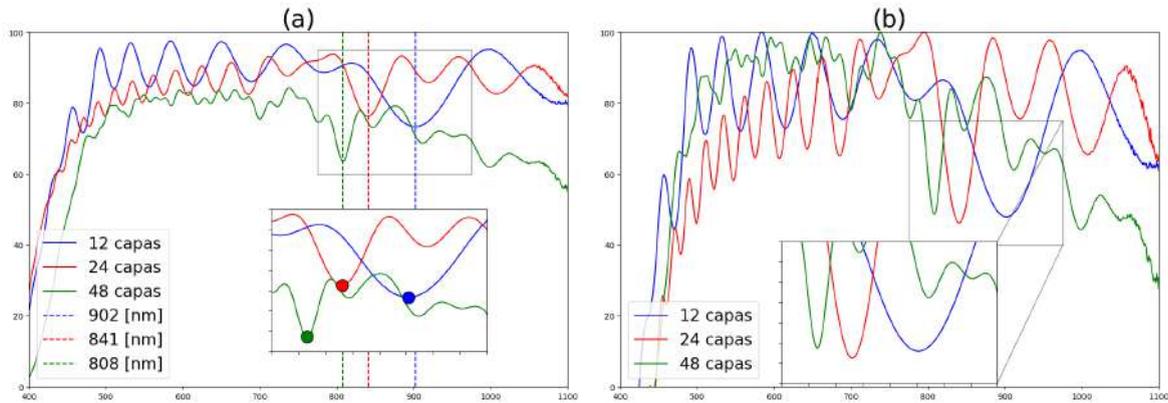
En la siguiente figura, [fig.(4.4)] se anexa el comportamiento de la transmisión tal como se recibe del equipo de medición [fig.4.4(a)], y con una normalización de la señal en el rango de trabajo de interés, [fig.4.4(b)]. Esta medición es hecha mediante un equipo de UV/VIS en el rango de 400 a 1100 nm. Importante notar que dos efectos ocurren de forma simultánea, la primera es el *desplazamiento* hacia el visible del pico de reflexión conforme aumenta la cantidad de capas, la segunda es que comparado con los casos de simulación hechos la morfología de la curva no es tan impresionante, siendo la razón principal la elección de los



**Figura 4.3:** Imagen SEM de la película S AB de AZO e ITO, (a) sistema de 12 capas 1196 nm, (b) 24 capas 2325nm y (c) 48 capas 4717nm

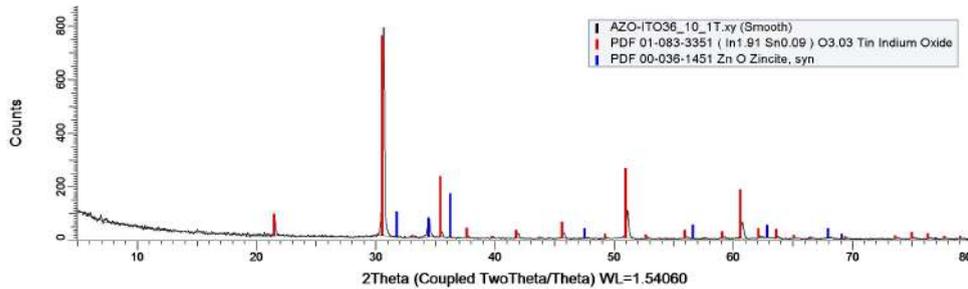
materiales. la aparición de los picos es indicativo que es debido a la superposición de los materiales, lo cual se comprueba al incrementar la cantidad de capas.

En el caso de las curvas normalizadas es importante notar que las proporciones en las caídas de los picos se mantienen, esto indica que incluso en el caso de 48 capas, en el cual se aprecia una caída considerable en la transmisión promedio de la señal, el pico es, en proporción, igual a los casos anteriores. Igualmente interesante, y de esperarse en sistemas periódicos, es el incremento en la calidad del pico; esto se aprecia en la contracción del ancho del pico en la base conforme se incrementa la cantidad de capas, respecto de la altura (reflexión) de este, el cual es similar en los tres casos, siendo entonces el caso de 48 el mayor factor de calidad.



**Figura 4.4:** Medición de la transmisión tal cual lo arroja el equipo (a), y con los valores normalizados (b)

Además se realizó una medición de XDR, ver [fig. 4.5]. El método consiste en dispersión de los rayos X por las nubes electrónicas que rodean a los átomos del cristal. Originándose así, una distribución no uniforme de las intensidades dispersadas, que se conoce como patrón de difracción. Este patrón de difracción contiene información sobre la estructura y la microestructura de la muestra. La medición del patrón de difracción permite deducir la distribución de átomos en un material. Esto permite dar certeza de la presencia de los materiales reportados, y la ausencia de contaminantes externos.



**Figura 4.5:** Medición de XDR para un sistema de 36 capas. Se aprecian los picos característicos asociados al AZO e ITO.

Finalmente, para medir de las propiedades eléctricas como: resistividad, movilidad y número de portadores de las películas se utilizó el método de Van der Pauw-Hall. Este método considera, en la muestra de películas delgadas, cuatro pequeños contactos colocados en la periferia de la película, como puntos para medidas de voltaje y corriente, tabla 3.

	Resistividad	No. Portadores	Mobilidad Por.	Coefficiente Hall
	$\rho/(\Omega \cdot \text{cm})$	$n_e/\text{cm}^{-3}$	$\mu \cdot \text{V} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$	$m^2/\text{C}$
AZO 1 CAPA	$1.87e^{-2}$	$-1.71e^{20}$	1.96	-0.036
ITO 1 CAPA	$5.086e^{-2}$	$-3.722e^{19}$	28.348	0.976
AB 12 CAPAS	$1.249e^{-2}$	$-1.751e^{20}$	2.854	-0.035
AB 24 CAPAS	$2.019e^{-2}$	$-1.325e^{20}$	2.335	-0.047
AB 48 CAPAS	$7.978e^{-3}$	$-1.217e^{20}$	6.478	-0.51

**Tabla 4. Propiedades eléctricas de los sistemas multicapa**

Por un lado se tiene que la resistividad eléctrica se hace menor conforme aumenta el número de capas, siendo el caso de 48 capas un orden de magnitud menor que el caso de 24. Sin embargo, es necesario destacar que los materiales empleados son conductores eléctricos por defecto; como se aprecia en la resistividad del AZO de 1 capa siendo mejor que el caso de 24 capas; a 48 capas se tiene casi 5 micrometros de espesor de material conductor, no es posible entonces atribuir por completo este comportamiento al sistema multicapa.

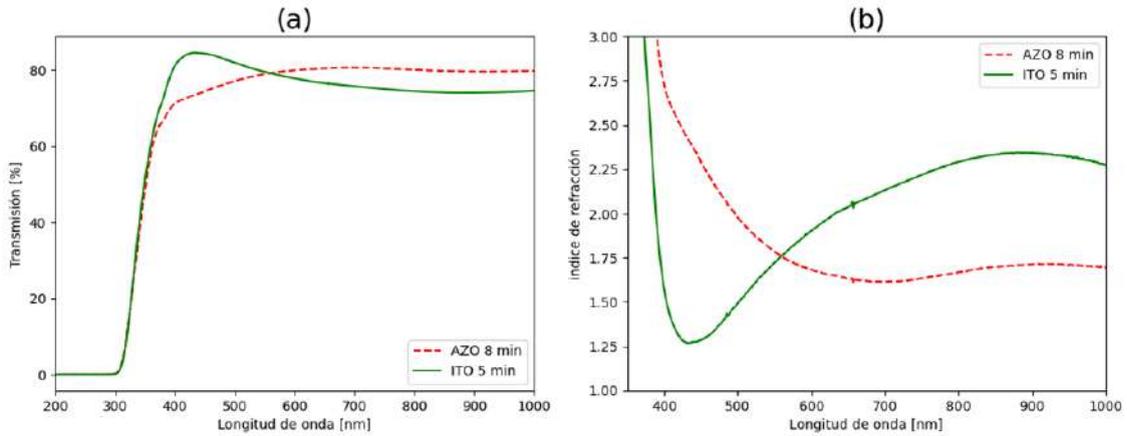
Es igualmente destacable el incremento en la movilidad de los portadores y el caso del coeficiente Hall. Sin embargo, el alcance y naturaleza de esta tesis, estudio de propiedades ópticas, limitan las inferencias y mayor desarrollo de las propiedades eléctricas, quedando como un ejercicio para el lector.

### 4.3. Ajuste a la simulación

Al realizar varios casos, aumentando el número de capas, se puede garantizar que el efecto observado es debido a la interferencia de la luz causado por el ordenamiento de los materiales, efecto que no se observa en los materiales de forma individual.

En el caso de las heteroestructuras, donde se encuentran múltiples capas de diferentes materiales, la interferencia puede surgir en las interfaces entre estas capas. La luz que incide

en estas interfaces se reflejará parcialmente y se transmitirá parcialmente a través de ellas. Si las ondas de luz reflejadas y transmitidas se encuentran nuevamente en una interfaz posterior, pueden interactuar y superponerse, lo que resulta en interferencia.

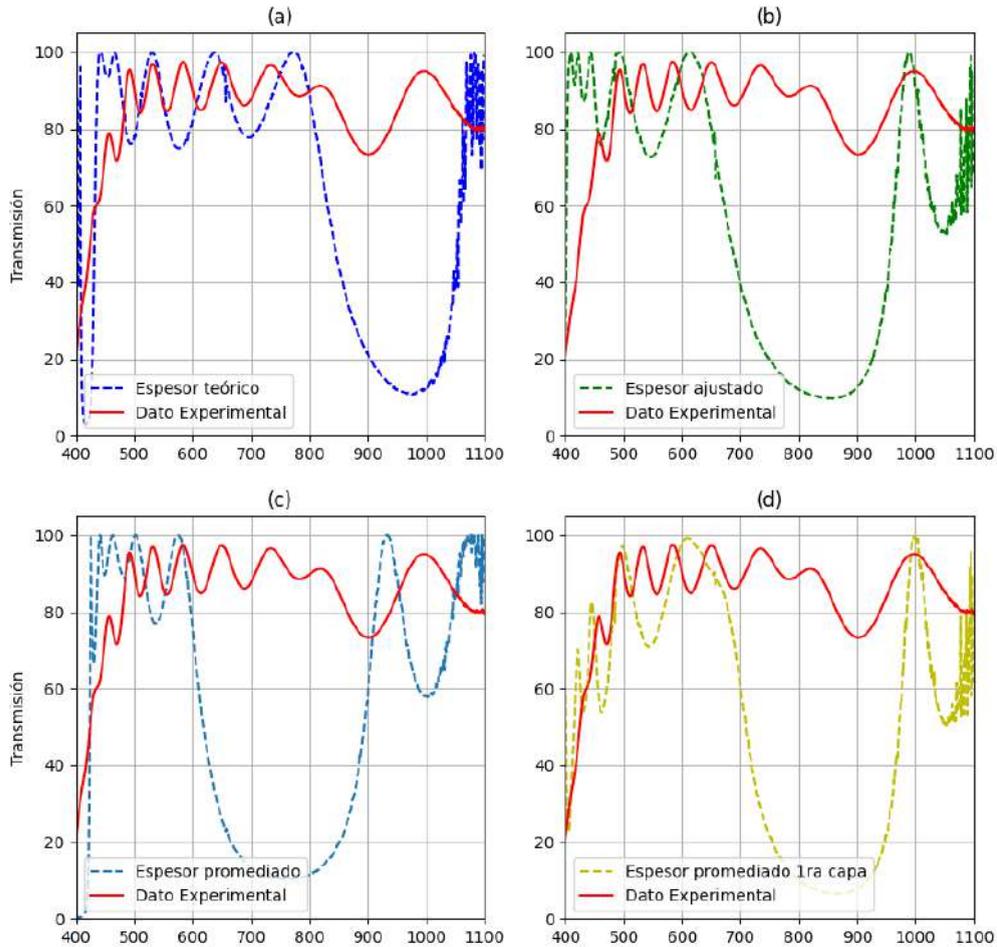


**Figura 4.6:** (a) Transmisión medida para una capa de AZO e ITO, (b) índices de refracción obtenidos a partir de las curvas de transmisión

En la [fig. (4.6)] se muestra la curva de transmisión medida para una sola capa de AZO y otra de ITO, crecidas al mismo espesor que las utilizadas en los sistemas multicapa. A partir de estas curvas se determina el índice de refracción que a su vez sirve para alimentar el programa de simulación.

Con el fin de hacer un ajuste inicial, tomamos el caso de 12 capas. Un primer acercamiento implica utilizar los espesores calculados usando la base de datos de *Refractive Index*, siendo  $d_{AZO} = 99.81$  nm  $d_{ITO} = 130.44$  nm, [fig.4.7 (a)]. El siguiente caso se basa en utilizar la regla de Bragg para calcular nuevos espesores usando los índices medidos en el laboratorio, [fig.4.7 (b)]. El tercer caso es utilizar un promedio ponderado de los espesores medidos mediante imagen SEM, [fig.4.7 (c)]. Finalmente se hace la consideración de que la primera capa es relativamente más pequeña, debido a problemas de nucleación, y se ajusta la simulación en base a esta, [fig.4.7 (d)].

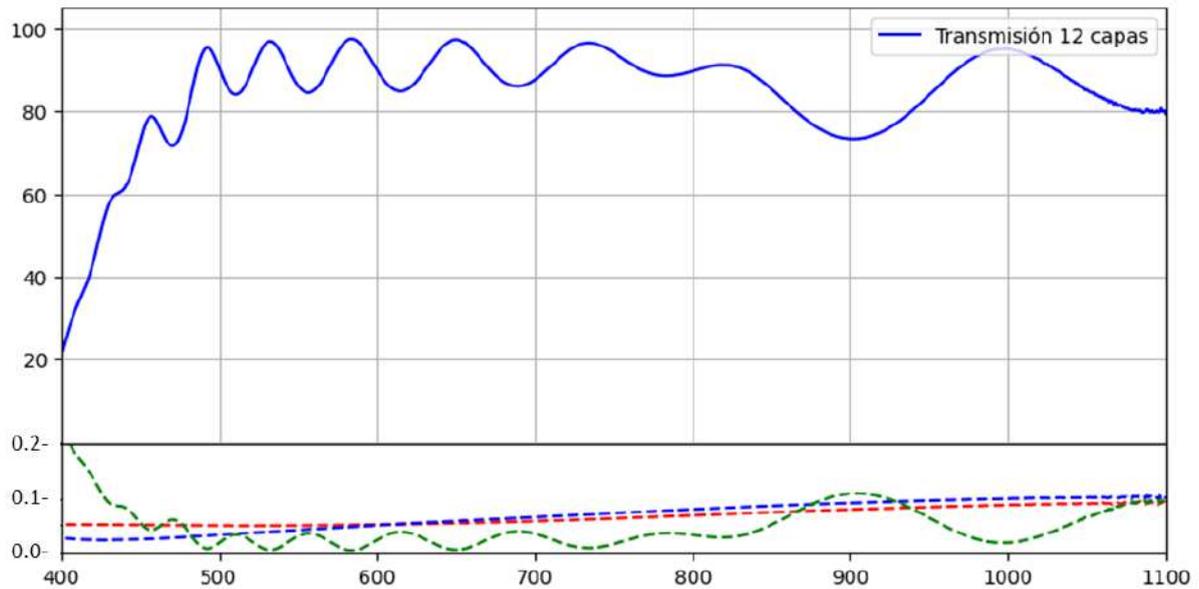
En un principio los primeros dos ajustes no varían mucho entre sí, siendo que los índices medidos están en el mismo rango. Por otro lado los espesores promediados y el ajuste hecho en la primera capa, muestran la susceptibilidad de los sistemas al presentar el cambio



**Figura 4.7:** Ajustes iniciales a la simulación para el caso de 12 capas AB. (a) usando los espesores teóricos, (b) usando espesores a partir de los índices medidos, (c) usando un promedio de los espesores medidos por imagen SEM, (d) espesores promediados, pero se ajusta el valor de la primera capa.

más drástico entre las dos. El caso donde se ajusta el espesor de la primera capa presenta la mejor concordancia con los valores medidos, especialmente en el régimen del espectro visible.

A pesar de ello, la mayor incongruencia entre la simulación y los valores medidos es la profundidad del valle. La razón principal es debido a la absorción de la luz en el material. En materiales como el  $TiO_2$  o el  $SiO_2$  el coeficiente de absorción del material puede ser despreciado, especialmente en el régimen infrarrojo, pero, para materiales de tipo TCO como son el AZO y el ITO este índice no es fácilmente despreciable, como se observa en [fig. (4.8)]



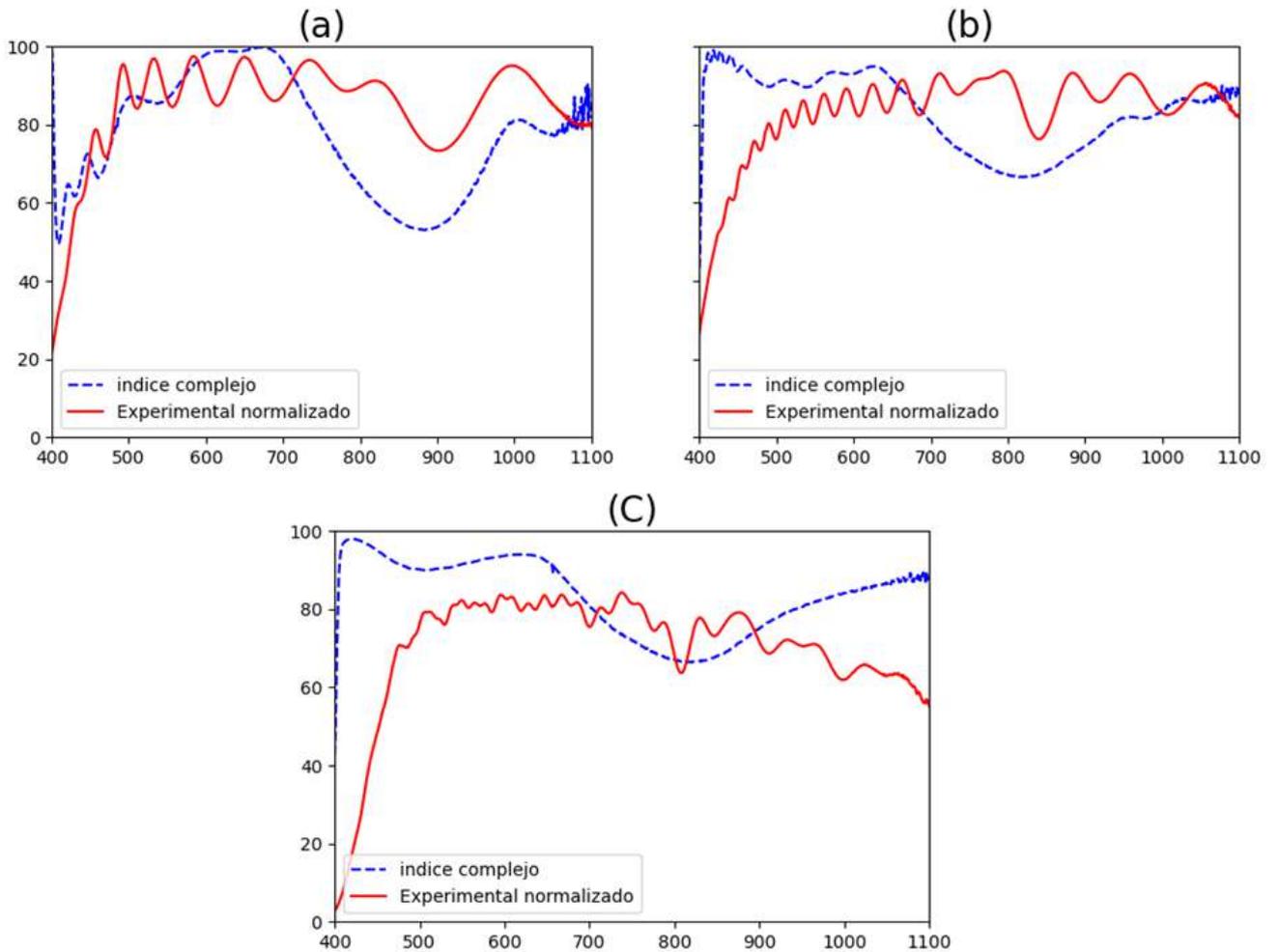
**Figura 4.8:** curvas de transmisión y absorción para las 12 capas, en azul y rojo para una capa individual de AZO e ITO respectivamente, en verde la absorción del sistema combinado.

El coeficiente de absorción  $k$  es obtenido a partir de las curvas de transmisión medidas, por tanto no es una medida directa de este, pero sirve como base para generar una idea de la importancia que tiene al momento de considerar estos sistemas multicapa.

En la [fig. (4.9)] se muestran las simulaciones para 12, 24 y 48 capas tomando en cuenta el coeficiente de absorción como la parte imaginaria del índice de refracción. Para el caso de 12 capas se ajusta la primera capa, para el caso de 24 capas se toman los valores promedio medido en SEM y se hace un ajuste en la capa 19, para el ultimo caso no hay medidas de los espesores individuales así que se utilizan los valores promedio del caso de 24 capas.

Al considerar la parte compleja del índice de refracción, la simulación se ajusta de forma más exacta a los datos experimentales, especialmente en los casos de 12 y 24 capas en donde hay datos exactos de los espesores de cada capa individual. En general se tiene que la simulación predice con exactitud la posición del valle y morfología de la transmisión medida.

Es igualmente interesante que para 24 y, especialmente, 48 capas, los patrones de interferencia se hacen nulos y cerca de los 400nm aparece un pico característico de los materiales



**Figura 4.9:** Simulación V. dato experimental para 12, 24 y 48 capas tomando en cuenta el coeficiente de extinción  $k$ .

TCO, algo que se puede observar en la [fig. 4.6(a)] en el caso de la capa de ITO. La posible razón de esto es en parte a la sensibilidad del material con respecto a los espesores de las capas. En segunda instancia son factores experimentales adicionales, el hecho es que este tipo de materiales, TCO's, no son los comúnmente usados en este tipo de trabajos, por ende, no es posible predecir el tipo de comportamiento que se pueda tener cuando se esta lidiando con un número de capas como es el nuestro. En este caso, al considerar los efectos del coeficiente de extinción encontramos que la simulación falla en predecir los efectos de interferencia en la señal, pero de no incluirlos, los efectos de la caída no mantendrían la proporción que se tienen en el laboratorio.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones Teóricas

El uso de la matriz de transferencia por matrices de dispersión permite conocer los valores de las componentes individuales de los campos, a través de estos uno puede conocer la densidad de flujo dentro de la estructura como función de la posición.

La secuencia RD es una secuencia cuasiperiódica poco estudiada para los casos ópticos. En general se tiene que esta secuencia en combinación con una secuencia AB o ABC brinda resultados diversos dependiendo de varias condiciones como son: el espesor de las capas, eliminar o duplicar letras en la secuencia, e incrementar el orden de la secuencia.

El caso AB-RD-AB brinda resultados interesantes en cuanto a las curvas de transmisión y reflexión consta, siendo posible crear un espejo omidireccional que abarca un rango considerable, [fig.(3.5)], con un reducido número de capas. A pesar de eso, el uso de secuencias AB no brinda algún resultado destacable en cuanto a los modos de transmisión o el flujo de energía dentro de la estructura respecta.

El caso ABC brinda mejores resultados, en general presenta más picos de transmisión de mayor calidad dentro del ancho de banda fotónico comparado con el caso AB. Más importante aún es la aparición de modos de localización dentro de la estructura, zonas donde el flujo

de energía pareciera concentrarse. Estas zonas son reducidas, centrándose principalmente en la secuencia RD la cual pareciera actuar como un defecto.

Es el caso de las estructura PQP donde se implementa la secuencia de Rudín-Shapiro como parte de una celda unitaria de la forma  $[(ABC)^n RD(m)]^k$ , mostró mejores resultados el momento de localizar el flujo de energía dentro de la estructura comparado con el caso original planteado por Panyaev, esto se aprecia como zonas amplias en el ángulo de incidencia donde la zona se extingue por completo, fuera de unas selectas secciones del cristal, para el modo a 1354nm. La aparición de estas zonas, en ambos casos, es indicativo de que este fenómeno es resultado de la periodicidad del sistema, la adición de la secuencia RD exacerbara los efectos que se obtendrían con los espejos normales y lleva a la pregunta ¿Qué efectos se obtendrían con otras secuencias?

## 5.2. Conclusiones Experimentales

El diseño y la fabricación de estas heteroestructuras de multicapas de óxidos metálicos requieren un conocimiento profundo de las propiedades ópticas de los materiales utilizados, así como de las técnicas de depósito y caracterización de películas delgadas. Algunos de estos fenómenos pueden ser controlados, en cierta medida, uno de ellos son los efectos de nucleación que llevan a que el primer deposito sea de menor grosor, algo que se alivia añadiendo tiempo de crecimiento. Y si bien se puede conseguir una media en los espesores similares, la consistencia en el espesor de las capas conlleva un error debido a fluctuaciones en la presión del gas, posicionamiento y error humanos.

La propagación de la luz en estos sistemas se rige por una serie de fenómenos ópticos, como la reflexión, la refracción y la interferencia, que se producen en las interfaces entre las capas de óxidos metálicos. Cada capa tiene propiedades ópticas distintas, como el índice de refracción y la absorción, que determinan cómo se comporta la luz al atravesar la heteroestructura.

El modelo teórico, en principio, solo toma en cuenta el índice de refracción como paráme-

tro principal de entrada, al considerar la parte negativa del índice se aprecia una gran mejoría en la correlación de la simulación y la medición experimental. Especialmente en materiales como TCO, donde el índice de absorción se hace más grande cercano al infrarrojo.

Algunos de las otras propiedades, como son la resistividad de las estructuras y su tendencia a disminuir conforme se incrementa el número de capas son explicadas en base a la cantidad de material que se ha depositado, para 48 capas se tiene casi 5 micras de espesor, otros autores coinciden en la relación entre la resistividad y la capacidad de transmitir la onda incidente en el material, [45, 46].

# Bibliografía

- [1] Eli Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2059–2062, 1987.
- [2] Sajeev John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2486–2489, 1987.
- [3] E Yablonovitch. Photonic band-gap crystals. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 5(16):2443, 1993.
- [4] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light (Second Edition)*. Princeton University Press, 2 edition, 2008.
- [5] *Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [6] R. Tao, K. Kamide, M. Arita, S. Kako, and Y. Arakawa. Room-temperature observation of trapped exciton-polariton emission in gan/algan microcavities with air-gap/iii-nitride distributed bragg reflectors. *ACS Photonics*, 3(7):1182–1187, 2016.
- [7] S. K. Shaid-Ur Rahman, Th. Klein, J. Gutowski, S. Klemmt, and K. Sebald. Tunable bragg polaritons and nonlinear emission from a hybrid metal-unfolded znse-based microcavity. *Scientific Reports*, 7(1):767, 2017.
- [8] D. Lusk, I. Abdulhalim, and F. Placido. Omnidirectional reflection from fibonacci quasi-periodic one-dimensional photonic crystal. *Optics Communications*, 198(4):273–279, 2001.

- [9] M. Tavakoli and Y. S. Jalili. One-dimensional fibonacci fractal photonic crystals and their optical characteristics. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 8(1):113, 2014.
- [10] Y. Trabelsi, Y. Bouazzi, N. Ben Ali, and M. Kanzari. Narrow stop band optical filter using one-dimensional regular fibonacci/rudin shapiro photonic quasicrystals. *Optical and Quantum Electronics*, 48(1):54, 2015.
- [11] N. B. Ali, S. Alshammari, Y. Trabelsi, H. Alsaif, O. Kahouli, and Z. Elleuch. Tunable multi-band-stop filters using generalized fibonacci photonic crystals for optical communication applications. *Mathematics*, 10(8), 2022.
- [12] B. K. Singh, P. S. Rajput, A. K. Dikshit, P. C. Pandey, and V. Bambole. Consequence of fibonacci quasiperiodic sequences in 1-d photonic crystal refractive index sensor for the blood plasma and cancer cells detections. *Optical and Quantum Electronics*, 54(11):766, 2022.
- [13] S. Sahel, R. Amri, L. Bouaziz, D. Gamra, M. Lejeune, M. Benlahsen, K. Zellama, and H. Bouchriha. Optical filters using cantor quasi-periodic one dimensional photonic crystal based on si/sio<sub>2</sub>. *Superlattices and Microstructures*, 97:429–438, 2016.
- [14] X. Chen, H. Ni, D. Zhao, and Y. Wang. Optical fractal resonances in cantor-like photonic crystals. *Appl. Opt.*, 61(26):7786–7792, 2022.
- [15] F. Qiu, R. W. Peng, X. Q. Huang, X. F. Hu, M. Wang, A. Hu, S. S. Jiang, and D. Feng. Omnidirectional reflection of electromagnetic waves on thue-morse dielectric multilayers. *Europhys. Lett.*, 68(5):658–663, 2004.
- [16] L. Moretti, I. Rea, L. Rotiroti, I. Rendina, G. Abbate, A. Marino, and L. De Stefano. Photonic band gaps analysis of thue-morse multilayers made of porous silicon. *Opt. Express*, 14(13):6264–6272, 2006.
- [17] H.-F. Zhang, Sh.-B Liu, and X.-K. Kong. Enlarged omnidirectional band gap in one-dimensional plasma photonic crystals with ternary thue–morse aperiodic structure. *Physica B: Condensed Matter*, 410:244–250, 2013.

- [18] H. Rahimi. Analysis of photonic spectra in thue-morse, double-period and rudin-shapiro quasiregular structures made of high temperature superconductors in visible range. *Optical Materials*, 57:264–271, 2016.
- [19] Chenxi Yue, Wei Tan, and Jianjun Liu. Photonic band gap properties of one-dimensional thue-morse all-dielectric photonic quasicrystal. *Superlattices and Microstructures*, 117:252–259, 2018.
- [20] V. Agarwal, M. E. Mora-Ramos, and B. Alvarado-Tenorio. Optical properties of multilayered period-doubling and rudin-shapiro porous silicon dielectric heterostructures. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, 7(2):63–68, 2009.
- [21] H. A. Gómez-Urrea, M. Toledo-Solano, M. E. Mora-Ramos, and E. Reyes-Gómez. Properties of plasmon-polariton modes in one-dimensional photonic superlattices made of rudin-shapiro bases. *Optical and Quantum Electronics*, 45(8):813–828, Aug 2013.
- [22] Y. Bouazzi, N. Ben Ali, H. Alsaif, A. Boudjemline, Y. Trabelsi, and A. Torchani. Computational modeling of quasi-periodic rudin-shapiro multilayered band gap structure. *Engineering, Technology and Applied Science Research*, 10(3):5603–5607, 2020.
- [23] W. Steurer and D. Sutter-Widmer. Photonic and phononic quasicrystals. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(13):R229, 2007.
- [24] L. Dal Negro and S.V. Boriskina. Deterministic aperiodic nanostructures for photonics and plasmonics applications. *Laser & Photonics Reviews*, 6(2):178–218, 2012.
- [25] M Kanzari and B Rezig. Optical polychromatic filter by the combination of periodic and quasi-periodic one-dimensional, dielectric photonic bandgap structures. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 3(6):S201, 2001.
- [26] J.-W. Dong, P. Han, and H.-Zh. Wang. Broad omnidirectional reflection band forming using the combination of fibonacci quasi-periodic and periodic one-dimensional photonic crystals. *Chinese Physics Letters*, 20(11):1963, 2003.

- [27] K. S. Perez, J. O. Estevez, A. Méndez-Blas, J. Arriaga, G. Palestino, and M. E. Mora-Ramos. Tunable resonance transmission modes in hybrid heterostructures based on porous silicon. *Nanoscale Research Letters*, 7(1):392, 2012.
- [28] J. Escorcia-García, C. A. Duque, and M. E. Mora-Ramos. Optical properties of hybrid periodic/quasiregular dielectric multilayers. *Superlattices and Microstructures*, 49(3):203–208, 2011.
- [29] Z. Baraket, J. Zaghdoudi, and M. Kanzari. Study of optical responses in hybrid symmetrical quasi-periodic photonic crystals. *Progress In Electromagnetics Research M*, 46:29–37, 2016.
- [30] R. Asmi, N. Ben Ali, and M. Kanzari. Enhancement of light localization in hybrid thue-morse/periodic photonic crystals. *Journal of Materials*, 2016:9471312, 2016.
- [31] N. Ben Ali. Optical fabry–perot filters using hybrid periodic, fibonacci and cantor photonic structures. *Nano Communication Networks*, 13:34–42, 2017.
- [32] H. A. Gómez-Urrea, J. Escorcia-García, C. A. Duque, and M. E. Mora-Ramos. Analysis of light propagation in quasiregular and hybrid rudin–shapiro one-dimensional photonic crystals with superconducting layers. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, 27:1–10, 2017.
- [33] N. N. Dadoenkova, Y. S. Dadoenkova, I. S. Panyaev, D. G. Sannikov, and I. L. Lyubchanskii. One-dimensional dielectric bi-periodic photonic structures based on ternary photonic crystals. *Journal of Applied Physics*, 123(4), 2018.
- [34] I. S. Panyaev, L. R. Yafarova, D. G. Sannikov, N. N. Dadoenkova, Y. S. Dadoenkova, and I. L. Lyubchanskii. One-dimensional multiperiodic photonic structures: A new route in photonics (four-component media). *Journal of Applied Physics*, 126(10):103–102, 2019.
- [35] Ivan S. Panyaev, Dmitry G. Sannikov, Nataliya N. Dadoenkova, and Yuliya S. Dadoenkova. Energy flux optimization in 1d multiperiodic four-component photonic crystals. *Optics Communications*, 489:126875, 2021.

- [36] *Transfer Matrix, Green Function and Related Techniques*. Publicacions de la Universitat Jaume I, Castelló de la Plana, 2004.
- [37] S. Teitler and B. W. Henvis. Refraction in stratified, anisotropic media. *Journal of the Optical Society of America*, 60(6):830, 1970.
- [38] D. W. Berreman. Optics in stratified and anisotropic media:  $4 \times 4$ -matrix formulation. *Journal of the Optical Society of America*, 62(4):502, 1972.
- [39] R. C. Rumpf. Computational electromagnetics, Feb 2022.
- [40] J. Escorcia-García and M. E. Mora-Ramos. Optical reflectivity and spatial mode localization of white-noise random dielectric oxide multilayers. *Optics Communications*, 432:1–7, 2019.
- [41] Brillhart J. and Morton P. A case study in mathematical research: The golay-rudin-shapiro sequence. *The American Mathematical Monthly*, 103(10):854–869, 1996.
- [42] Golay M.J.E. Static multislit spectrometry and its application to the panoramic display of infrared spectra. *J. Opt. Soc. America*, 41:468–472, 1951.
- [43] Rudin W. Some theorems on fourier coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:855–859, 1959.
- [44] Shapiro H.S. Extremal problems for polynomials and power series. Master’s thesis, MIT, 1951.
- [45] Wu Tang, Yipeng Chao, Xiaolong Weng, Longjiang Deng, and Kewei Xu. Optical property and the relationship between resistivity and surface roughness of indium tin oxide thin films. *Physics Procedia*, 32:680–686, 2012. The 18th International Vacuum Congress (IVC-18).
- [46] J.A. Mendez-Gamboa, R. Castro-Rodriguez, I.V. Perez-Quintana, R.A. Medina-Esquivel, and A. Martel-Arbelo. A figure of merit to evaluate transparent conductor oxides for solar cells using photonic flux density. *Thin Solid Films*, 599:14–18, 2016.
- [47] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., [S.l.], 2021.



# Apéndice A

## Desarrollo del formalismo de Matrices de Dispersión

El uso de una formulación matricial no es nueva en el ámbito de la óptica. Un caso simple es considerar la polarización sobre un único modo a la vez, en dicho caso se precisan de dos variables del campo como pueden ser las componentes ortogonales del campo eléctrico ( $E_x$ ,  $E_y$ ).

Sin embargo, para casos de baja simetría óptica, este tipo de formulaciones son imprácticas. En 1970 Teitler y Henvis desarrollaron la primera formulación basada en matrices de  $4 \times 4$ , manteniendo dos variables de campo tanto eléctricas como magnéticas. En 1972 Berreman desarrolló una formulación más general que incluye a la formulación de Teitler, partiendo de una matriz de  $6 \times 6$  de la cual se derivan 16 elementos matriciales diferentes, permitiendo comprender una variedad más amplia de problemas.

Por cuestiones de simplicidad, podemos centrarnos en materiales anisotrópicos, homogéneos y lineales, permitiendo mantenernos en un caso de matrices  $4 \times 4$ , las cuales a través de un estudio de sus auto-vectores y auto-valores se puede reducir a un caso  $2 \times 2$ . Dicho sistema posteriormente puede representar de forma matricial las propiedades de un sistema óptico que presenta un ordenamiento espacial en una dirección específica.

Finalmente se emplea una formulación de matrices de dispersión para poder considerar el caso cuando la onda cambia de medio. La razón de implementar el caso de dispersión, como se verá en la sección *Formulación PQ* es el evitar implementar varios sistemas de matrices para llevar a cabo el calculo.

Formalmente hablando TMM se refiere a cualquier formulación que permite obtener los valores de salida a partir de las condiciones de entrada, en ese aspecto estamos tratando con un método de matriz de transferencia por medio de matrices de dispersión.

## A.1. Formulación 4x4

Sobre todo este planteamiento se va a considerar un material isotrópico, homogéneo y lineal. Además, consideramos que la dirección de propagación es acorde a la dirección espacial  $z$ , misma sobre la cual consideramos que se construye el sistema óptico, es decir la dirección sobre la cual se presenta la periodicidad.

### A.1.1. Ecuaciones de Maxwell en un medio IHL

En un material isotrópico, homogéneo y lineal, obedeciendo la convención de signos para una onda viajando en la dirección  $+z$ , podemos escribir los campos como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{ikz} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 \vec{E}_0 e^{ikz} \quad (\text{A.2})$$

Sobre este desarrollo con el fin de tener el campo eléctrico y magnético en el mismo orden de magnitud, normalizamos el campo magnético como  $\vec{H} = +i\eta_0 \vec{H}$ , siendo  $\eta_0$  la impedancia del espacio libre. Para el caso de las componentes del campo eléctrico o magnético propagándose en la dirección  $\vec{k}$  tenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{H}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \quad (\text{A.4})$$

Para el caso de la derivada espacial sobre la dirección  $x$  para el caso eléctrico se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(\vec{r}) = ik_x \vec{E}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \quad (\text{A.5})$$

$$= ik_x \vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{A.6})$$

Esto implica que  $\partial/\partial x = ik_x$ , algo que se cumple de forma análoga para la dirección  $y$ , aún más, por analogía esto es igual para el campo magnético.

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{H}(\vec{r}) = ik_x \vec{H}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \quad (\text{A.7})$$

$$= ik_x \vec{H}(\vec{r}) \quad (\text{A.8})$$

Así

$$\frac{\partial}{\partial j} = ik_j \quad \text{con } j = x, y \quad (\text{A.9})$$

Sin embargo, en el contexto de una matriz de transferencia, El hecho es que la estructura se ordena sobre la dirección  $z$ , entonces, no podemos definir que lo anterior se cumpla para la parcial sobre esta coordenada.

$$\frac{\partial}{\partial z} \neq ik_z \quad (\text{A.10})$$

Tomamos y desarrollamos la ecuación de Faraday-Maxwell en su forma diferencial. Esta ecuación, usando el campo magnético normalizado, toma la forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = k_0 \mu_r \vec{H} \quad (\text{A.11})$$

Trabajamos sobre el producto vectorial.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = - \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (\text{A.12})$$

Si igualamos con el lado derecho de (A.11) componente con componentes, tendremos un set de tres ecuaciones.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = k_0 \mu_r \tilde{H}_x \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = k_0 \mu_r \tilde{H}_y \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = k_0 \mu_r \tilde{H}_z \quad (\text{A.15})$$

Por analogía, y considerando que no hay densidades de corriente de caga  $\vec{J} = 0$ , obtene-

mos otro set de ecuaciones usando la Ley de Ampere en su forma diferencial.

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = k_0 \epsilon_r E_x \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} = k_0 \epsilon_r E_y \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = k_0 \epsilon_r E_z \quad (\text{A.18})$$

En base a (A.9) podemos simplificar esta serie de ecuaciones para formar las 6 ecuaciones base sobre las cuales trabajar.

$$ik_y E_z - \frac{\partial E_y}{\partial z} = k_0 \mu_r \tilde{H}_x \quad ik_y \tilde{H}_z - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = k_0 \epsilon_r E_x \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - ik_x E_z = k_0 \mu_r \tilde{H}_y \quad \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - ik_x \tilde{H}_z = k_0 \epsilon_r E_y \quad (\text{A.20})$$

$$ik_x E_y - ik_y E_x = k_0 \mu_r \tilde{H}_z \quad ik_x \tilde{H}_y - ik_y \tilde{H}_x = k_0 \epsilon_r E_z \quad (\text{A.21})$$

Antes de continuar es necesario hacer notar que dentro de estas ecuaciones  $z$  es una variable independiente y por tanto la parcial sobre esta debe considerarse como una derivada ordinaria de ahora en adelante,  $\partial/\partial z = d/dz$ . Con el fin de normalizar todas las variables, normalizaremos el espacio y el vector de onda usando  $z' = k_0 z$  y  $\tilde{k}_j = k_j/k_0$  con  $j = x, y$ .

$$i\tilde{k}_y E_z - \frac{dE_y}{dz'} = \mu_r \tilde{H}_x \quad i\tilde{k}_y \tilde{H}_z - \frac{d\tilde{H}_y}{dz'} = \epsilon_r E_x \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{dE_x}{dz'} - i\tilde{k}_x E_z = \mu_r \tilde{H}_y \quad \frac{d\tilde{H}_x}{dz'} - i\tilde{k}_x \tilde{H}_z = \epsilon_r E_y \quad (\text{A.23})$$

$$i\tilde{k}_x E_y - i\tilde{k}_y E_x = \mu_r \tilde{H}_z \quad i\tilde{k}_x \tilde{H}_y - i\tilde{k}_y \tilde{H}_x = \epsilon_r E_z \quad (\text{A.24})$$

### A.1.2. Solución para las componentes longitudinales

Trabajamos sobre el set de ecuaciones de (A.24), lo que nos permite tener expresiones para las componentes de los campos en  $z$ .

$$\tilde{H}_z = \frac{i}{\mu_r} (\tilde{k}_x E_y - \tilde{k}_y E_x) \quad (\text{A.25})$$

$$E_z = \frac{i}{\epsilon_r} (\tilde{k}_x \tilde{H}_y - \tilde{k}_y \tilde{H}_x) \quad (\text{A.26})$$

(A.25)y(A.26) podemos usarlas en los pares de ecuaciones (A.22)-(A.23). De ahí usamos algo de manipulación algebraica para simplificar las expresiones.

**Para el campo magnético**

$$i\tilde{k}_y \left[ \frac{i}{\mu_r} (\tilde{k}_x E_y - \tilde{k}_y E_x) \right] - \frac{d\tilde{H}_y}{dz'} = \epsilon_r E_x \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{d\tilde{H}_x}{dz'} - i\tilde{k}_x \left[ \frac{i}{\mu_r} (\tilde{k}_x E_y - \tilde{k}_y E_x) \right] = \epsilon_r E_y \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{k}_y^2 E_x - \tilde{K}_y \tilde{k}_x E_y - \mu_r \frac{d\tilde{H}_y}{dz'} = \mu_r \epsilon_r E_x \quad (\text{A.29})$$

$$\mu_r \frac{d\tilde{H}_x}{dz'} - \tilde{k}_x \tilde{k}_y E_x + \tilde{k}_x^2 E_y = \mu_r \epsilon_r E_y \quad (\text{A.30})$$

Re-ordenamos

$$\frac{d\tilde{H}_x}{dz'} = \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} E_x + \left( \epsilon_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\mu_r} \right) E_y \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{d\tilde{H}_y}{dz'} = \left( \frac{\tilde{k}_y^2}{\mu_r} - \epsilon_r \right) E_x - \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} E_y \quad (\text{A.32})$$

**Para el campo eléctrico**

$$i\tilde{k}_y \left[ \frac{i}{\epsilon_r} (\tilde{k}_x \tilde{H}_y - \tilde{k}_y \tilde{H}_x) \right] - \frac{dE_y}{dz} = \mu_r \tilde{H}_x \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{dE_x}{dz} - i\tilde{k}_x \left[ \frac{i}{\epsilon_r} (\tilde{k}_x \tilde{H}_y - \tilde{k}_y \tilde{H}_x) \right] = \mu_r \tilde{H}_y \quad (\text{A.34})$$

$$\tilde{k}_y^2 \tilde{H}_x - \tilde{K}_y \tilde{k}_x \tilde{H}_y - \mu_r \frac{dE_y}{dz} = \mu_r \epsilon_r \tilde{H}_x \quad (\text{A.35})$$

$$\mu_r \frac{dE_x}{dz} - \tilde{k}_x \tilde{k}_y \tilde{H}_x + \tilde{k}_x^2 \tilde{H}_y = \mu_r \epsilon_r \tilde{H}_y \quad (\text{A.36})$$

Reordenando.

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} \tilde{H}_x + \left( \mu_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\epsilon_r} \right) \tilde{H}_y \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{dE_y}{dz} = \left( \frac{\tilde{k}_y^2}{\epsilon_r} - \mu_r \right) \tilde{H}_x - \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} \tilde{H}_y \quad (\text{A.38})$$

De las ecuaciones (A.31)-(A.32) y (A.37)-(A.38), podemos escribir su forma matricial como sigue.

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} & \mu_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\epsilon_r} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_y^2}{\epsilon_r} - \mu_r & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} \\ \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} & \epsilon_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\mu_r} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{k}_y^2}{\mu_r} - \epsilon_r & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Con el fin de presentar de forma más elegante esta formulación podemos englobar la matriz de términos del campo como  $\Phi(z')$  y la matriz de elementos de onda la podemos definir como  $\Omega$ , así.

$$\boxed{\frac{d}{dz'} \Phi = \Omega \Phi \rightarrow \frac{d}{dz'} \Phi - \Omega \Phi = 0} \quad (\text{A.40})$$

### A.1.3. Cálculo de funciones sobre matrices.

La relación obtenida al resolver para las componentes longitudinales (A.40), no es más si no una ecuación diferencial. Ignorando momentáneamente el hecho de que los términos presentados son matrices, si resolviéramos esta ecuación diferencial se tendría la solución general dada como:

$$\Phi(z') = \exp[\Omega z'] \Phi(0) \quad (\text{A.41})$$

$\Phi(0)$  representa el caso en la frontera entre las capas de la estructura.  $\exp[z' \Omega]$  nos indica como los modos se propagan en función de  $z'$ .

Una función cual sea actuando sobre una matriz  $A$  obedece que:

$$f(A) = \mathbf{v} \cdot f(D) \cdot \mathbf{v}^{-1} \quad (\text{A.42})$$

donde  $v$  es la matriz de vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ , y  $\mathbf{D}$  es la matriz de valores propios de  $\mathbf{A}$ . Estas dos nuevas matrices toman la forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1M} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M1} & v_{M2} & \cdots & v_{MM} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_M \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Entonces tenemos:

$$f(D) = \begin{bmatrix} f(D_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_2) & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(D_M) \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Entonces para nuestro caso la solución general queda como

$$\exp[z'\boldsymbol{\Omega}] = \mathbf{W} \exp[\boldsymbol{\lambda}z']\mathbf{W}^{-1} \quad (\text{A.45})$$

Donde  $\boldsymbol{\lambda}$  son los valores propios de la matriz de transferencia. Ingresando sobre la solución general y usando  $c = \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Phi}(0)$  para simplificar términos tendríamos entonces

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(z') = \mathbf{W} \exp[\boldsymbol{\lambda}z']c} \quad (\text{A.46})$$

## A.2. Formulación PQ (matriz de propagación)

Vamos a partir de la ecuación que tenemos en (A.40), específicamente sobre la parte  $\Omega$ .

$$\frac{d}{dz'} \Phi = \Omega \Phi \quad (\text{A.47})$$

donde

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} & \mu_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\epsilon_r} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_y^2}{\epsilon_r} - \mu_r & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\epsilon_r} \\ \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} & \epsilon_r - \frac{\tilde{k}_x^2}{\mu_r} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{k}_y^2}{\mu_r} - \epsilon_r & \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

Vamos a realizar un estudio sobre esta matriz, y los auto valores y auto-vectores que la conforman. Inicialmente, dado que las soluciones están asociadas a los modos en los que se propagan las ondas dentro del material podemos separar esta matriz en dos conjuntos.

### A.2.1. Planteamiento inicial

Estamos suponiendo que tratamos con un sistema homogéneo en el plano  $xy$ , con propiedades  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$ . Dada la estructura de este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, es posible separarlo en dos conjuntos de ecuaciones en forma matricial.

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \epsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \epsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \epsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \epsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

Los elementos de las matrices no son funciones de  $z'$  si consideramos también la homogeneidad en esa dirección. Por tanto, observar (A.49) y (A.50) con respecto a  $z'$  obtendremos.

$$\frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} \quad \text{usando (A.50)} \quad (\text{A.51})$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.52})$$

De forma análoga.

$$\frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad \text{usando (A.49)} \quad (\text{A.53})$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

Con lo que se aprecia que los campos eléctricos y magnéticos obedecen, por separado, sendas ecuaciones de 2do orden.

$$\frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathbf{PQ} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \mathbf{QP} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \mathbf{PQ} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

Llamamos  $\boldsymbol{\delta}^2 = \mathbf{PQ}$ . Con lo que se llega a una ecuación de ondas matricial. De forma ilustrativa, tomamos el caso eléctrico.

$$\frac{d^2}{dz'^2} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} - \boldsymbol{\delta}^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

La solución formal de esta ecuación es:

$$\begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \end{bmatrix} = e^{\Omega z'} \vec{\alpha}^+ + e^{\Omega z'} \vec{\alpha}^- \quad (\text{A.58})$$

donde  $\vec{\alpha}^+$  es el vector de proporcionalidad asociado a la onda viajando hacia  $+z$ , y  $\vec{\alpha}^-$  el vector asociado a la onda viajando hacia  $-z$ .

$bm\delta$  es una matriz tal que  $\delta \times \delta = \delta^2$  que aparece en la ecuación de onda para el caso eléctrico, una *matriz raíz cuadrada* se podría decir.

En la ecuación (A.58) se tiene una función matricial  $e^{\pm\delta z'}$ . Aquí, nuevamente, apelamos a la diagonalización.

En primer lugar, sea  $\mathbf{W}$  la matriz construida con los auto-vectores de  $\delta$  como columnas y llamemos  $bm\lambda^2$  a los correspondientes auto-valores. Sabemos que, en esa nueva representación, la matriz  $\delta^2$  pasará a escribirse en forma diagonal a través de la transformación de semejanza.

$$\mathbf{W}^{-1}\delta^2\mathbf{W} = \Lambda^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

esa misma transformación permite diagonalizar a la *matriz raíz cuadrada* de  $\delta^2$ .

$$\mathbf{W}^{-1}\delta\mathbf{W} = \Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

Si despejamos, matricialmente hablando, a  $\delta$  de (A.60) se tiene.

$$\delta = \mathbf{W}\Lambda\mathbf{W}^{-1} \quad (\text{A.61})$$

Es entonces posible escribir.

$$e^{\pm\delta z'} = \mathbf{W}\Lambda\mathbf{W}^{-1} \quad (\text{A.62})$$

recordando que.

$$e^{\pm\Lambda z'} = \begin{bmatrix} e^{\pm\sqrt{\lambda_1^2}z'} & 0 \\ 0 & e^{\pm\sqrt{\lambda_2^2}z'} \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

Así que la solución general se puede escribir como.

$$\begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{W}e^{\Lambda z'}\mathbf{W}\vec{\alpha}^+ + \mathbf{W}e^{-\Lambda z'}\mathbf{W}\vec{\alpha}^- \quad (\text{A.64})$$

Los vectores columna  $\vec{\alpha}^+, \vec{\alpha}^-$  son constantes que aún no han sido determinadas. Entonces, podemos definir unas nuevas constantes.

$$c^+ = \mathbf{W}^{-1} \vec{\alpha}^+ \quad (\text{A.65a})$$

$$c^- = \mathbf{W}^{-1} \vec{\alpha}^- \quad (\text{A.65b})$$

Entonces, escribir la solución general para estos componentes del campo eléctrico toma la forma.

$$\begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{W} e^{\Lambda z'} c^+ + \mathbf{W} e^{-\Lambda z'} c^- \quad (\text{A.66})$$

Vamos a trabajar ahora con el campo magnético. La solución es similar, pero con su propia matriz de *auto-vectores*, la cual denominamos  $\mathbf{V}$ . Así.

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{V} e^{\Lambda z'} c^+ - \mathbf{V} e^{-\Lambda z'} c^- \quad (\text{A.67})$$

El signo negativo en el segundo término para el caso magnético se elije por conveniencia, como veremos a la hora de derivar con respecto a  $z'$ .

Con esto.

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{V} \Lambda e^{\Lambda z'} c^+ + \mathbf{V} \Lambda e^{-\Lambda z'} c^- \quad (\text{A.68})$$

Ahora los signos son iguales para los campos eléctricos y magnéticos. Como los campos están acoplados y son independientes, debemos ser capaces de averiguar quien es  $\mathbf{V}$  a partir de  $\mathbf{W}$ . Siendo:

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \end{bmatrix} \quad \text{además} \quad \begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{W} e^{\Lambda z'} c^+ + \mathbf{W} e^{-\Lambda z'} c^- \quad (\text{A.69})$$

Combinando con la relación (A.68) tendremos.

$$\mathbf{V} \Lambda e^{\Lambda z'} c^+ + \mathbf{V} \Lambda e^{-\Lambda z'} c^- = \mathbf{Q} \mathbf{W} e^{\Lambda z'} c^+ + \mathbf{Q} \mathbf{W} e^{-\Lambda z'} c^- \quad (\text{A.70})$$

Mediante comparar los términos se obtiene.

$$\mathbf{V} \Lambda = \mathbf{Q} \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{Q} \mathbf{W} \Lambda^{-1} \quad (\text{A.71})$$

De modo que.

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^{-1}e^{\mathbf{\Lambda}z'}c^+ - \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^{-1}e^{-\mathbf{\Lambda}z'}c^- \quad (\text{A.72})$$

Este formalismo nos permite poner la solución para  $\Phi(z')$  como el cuadvivector de las componentes transversales de los campos en una forma matricial.

$$\Phi(z') = \begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \\ \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{\Lambda}z'} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{\Lambda}z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

A esta expresión habría que volver después para poder determinar las matrices de transferencia.

### A.2.2. Relaciones para las matrices propias

Continuamos tratando de averiguar algo más sobre  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{\Lambda}$ . Iniciando con la relación fundamental.

$$\mu_r \varepsilon_r = \tilde{k}_x + \tilde{k}_y + \tilde{k}_z \quad (\text{A.74})$$

Multiplicamos por la relación  $\delta^2 = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ .

$$\delta^2 = \frac{1}{\mu_r \varepsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

$$= \frac{1}{\mu_r \varepsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 + (\mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2)(\tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r) & \tilde{k}_x \tilde{k}_y (\mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r + \tilde{k}_y^2) \\ \tilde{k}_x \tilde{k}_y (\tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_y^2 + \mu_r \varepsilon_r) & (\tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r)(\mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2) + \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

$$= \frac{1}{\mu_r \varepsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 - \mu_r^2 \varepsilon_r^2 - \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 + \mu_r \varepsilon_r (\tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2) & 0 \\ 0 & -\mu_r^2 \varepsilon_r^2 - \tilde{k}_x \tilde{k}_y + \mu_r \varepsilon_r (\tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_x^2) + \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.77})$$

Usando la relación (A.74) podemos reducir la expresión anterior.

$$= \begin{bmatrix} -\mu_r \varepsilon_r + \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 & 0 \\ 0 & -\mu_r \varepsilon_r + \tilde{k}_x^2 \tilde{k}_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.78})$$

$$\boldsymbol{\delta}^2 = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_z^2 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

Esto significa que, al ser  $\boldsymbol{\delta}^2$  una matriz diagonal, sus elementos diagonales son, precisamente, sus auto-valores. Por consiguiente, la matriz formada con los auto-vectores para realizar la transformación de semejanza es la *matrix identidad*:

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (\text{A.80})$$

Esto tiene gran trascendencia. Significa que la matriz de los auto-valores que aparecen en (A.59) es.

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 = \boldsymbol{\delta}^2 \quad (\text{A.81})$$

y, tomando en cuenta el valor de  $\boldsymbol{\delta}^2$ , va a resultar que.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} i\tilde{k}_z & 0 \\ 0 & i\tilde{k}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

Lo que lleva a.

$$e^{\boldsymbol{\Lambda}z'} = \begin{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z z'} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{k}_z z'} \end{bmatrix} \quad (\text{A.83})$$

Con esto en mente podemos volver a la ecuación (A.73) y veremos que hacer para determinar a los vectores de proporcionalidad, sobre los cuales podemos obtener relaciones entre los campos y la posibilidad de conocer el vector de Poynting más adelante.

### A.2.3. Matrices de propagación

Empezamos definiendo que en un cierto punto  $z' = z'_0$ , conocemos con certeza el valor de las componentes  $x, y$  de los campos eléctricos y magnéticos. Para simplificar un poco

definimos.

$$\mathcal{F}(z'_0) = \begin{bmatrix} E_x(z'_0) \\ E_y(z'_0) \\ \tilde{H}_x(z'_0) \\ \tilde{H}_y(z'_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.84})$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación (A.73) se tiene.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\Lambda z'_0} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda z'_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix} \quad (\text{A.85})$$

como ya sabemos  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ , entonces  $\mathbf{V}$  será igual a  $\mathbf{Q}\Lambda^{-1}$ , pero de momento mantendremos la notación actual. Realizando el primer producto de matrices a la derecha tendremos.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda z'_0} & e^{-\Lambda z'_0} \\ \mathbf{V}e^{\Lambda z'_0} & -\mathbf{V}e^{-\Lambda z'_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix} \quad (\text{A.86})$$

vamos a llamar.

$$\mathbf{G}_0^{-1} = \mathbf{G}(z'_0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda z'_0} & e^{-\Lambda z'_0} \\ \mathbf{V}e^{\Lambda z'_0} & -\mathbf{V}e^{-\Lambda z'_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.87})$$

Nuestros vectores de proporcionalidad quedan determinados por la relación matricial.

$$\begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix} = \mathbf{G}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.88})$$

Siendo  $\mathbf{G}_0$  la matriz inversa de la que aparece a la derecha en (A.87). Dicha matriz es una matriz de bloques  $2 \times 2$  todos ellos inversibles. Es decir.

$$c^+ = \mathbf{G}_0^{(11)} \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{G}_0^{(12)} \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \quad (\text{A.89})$$

$$c^- = \mathbf{G}_0^{(21)} \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{G}_0^{(22)} \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \quad (\text{A.90})$$

Sin embargo, resulta posible llevar esto a un forma aún más conveniente. Para ello, vamos a recurrir, inicialmente, a las ecuaciones de Maxwell-Heaviside por componentes. Para

el caso de una onda plana monocromática en el medio  $\mu_r \varepsilon_r$  se tienen las expresiones.

$$\nabla \times \vec{E} = \mu_r k_0 \vec{H} \quad (\text{A.91})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_r k_0 \vec{E} \quad (\text{A.92})$$

Al suponer soluciones de la forma  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  en la parte espacial se tiene.

$$i\tilde{k}_y E_z - i\tilde{k}_z E_y = \mu_r \tilde{H}_x \quad (\text{A.93})$$

$$i\tilde{k}_z E_x - i\tilde{k}_x E_z = \mu_r \tilde{H}_y \quad (\text{A.94})$$

$$i\tilde{k}_x \tilde{H}_y - i\tilde{k}_y \tilde{H}_x = \mu_r E_z \quad (\text{A.95})$$

Trabajando sobre (A.95) y sustituyendo el valor de  $E_z$  es las dos previas ecuaciones se obtiene la siguiente relación matricial.

$$\frac{i}{\tilde{k}_z \varepsilon_r} \begin{bmatrix} -\tilde{k}_x \tilde{k}_y & \tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r \\ \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_y^2 & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.96})$$

Este no es sí no un sistema de ecuaciones que se puede resolver para  $H_{x,y}$  en términos de  $E_{x,y}$  en forma Croniana.

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.97})$$

Siendo  $\mathbf{K}$  la matriz inversa de la matriz del sistema, con la forma.

$$\mathbf{K} = -\frac{i\tilde{k}_z \varepsilon_r}{\mu_r \varepsilon_r (-\mu_r \varepsilon_r + \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2)} \begin{bmatrix} -\tilde{k}_x \tilde{k}_y & \tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r \\ \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_y^2 & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.98})$$

$$= \frac{i}{\mu_r \tilde{k}_z} \begin{bmatrix} -\tilde{k}_x \tilde{k}_y & \tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r \\ \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_y^2 & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.99})$$

Entonces, cuando tenemos el punto  $z' = z'_0$  correspondiendo al medio en cuestión. Podemos escribir la relación entre los campos magnéticos y eléctrico en la forma.

$$\tilde{\mathbf{H}}^{(0)} = \mathbf{K} \mathbf{E}^{(0)} \quad (\text{A.100})$$

esta relación nos permite re-escribir los vectores de proporcionalidad de tal forma que solamente dependen del campo eléctrico en  $z' = z'_0$ .

$$c^+ = [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)}\mathbf{K}]\mathbf{E}^{(0)} \quad (\text{A.101})$$

$$c^- = [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)}\mathbf{K}]\mathbf{E}^{(0)} \quad (\text{A.102})$$

Empleando esto en las ecuaciones (A.66) y (A.67) se tiene la relación para los campos.

$$\vec{E}(z') = \mathbf{W}e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)}\mathbf{K}]\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{W}e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)}\mathbf{K}]\mathbf{E}^{(0)} \quad (\text{A.103})$$

$$\vec{H}(z') = \mathbf{V}e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)}\mathbf{K}]\mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{V}e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)}\mathbf{K}]\mathbf{E}^{(0)} \quad (\text{A.104})$$

Con el fin de simplificar la ecuación, empleamos  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ .

$$\vec{E}(z') = \left\{ e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)}\mathbf{K}] + e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)}\mathbf{K}] \right\} \mathbf{E}(z'_0) \quad (\text{A.105})$$

$$\vec{H}(z') = \mathbf{V} \left\{ e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)}\mathbf{K}] - e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)}\mathbf{K}] \right\} \mathbf{E}(z'_0) \quad (\text{A.106})$$

Estas relaciones nos permiten conectar las componentes  $x,y$  del campo eléctrico en el punto  $z'$ , con las componentes en el punto  $z' = z'_0$ .

$$\mathbf{E}(z') = \mathbf{M}(z', z'_0)\mathbf{E}(z'_0) \quad (\text{A.107})$$

y

$$\boxed{\mathbf{M}(z', z'_0) = e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)}\mathbf{K}] + e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)}\mathbf{K}]} \quad (\text{A.108})$$

Ésta última ecuación es la *Matriz de propagación*. La solución para  $\vec{H}(z')$  no contiene, propiamente hablando, una matriz de transferencia que conecte  $\vec{H}(z')$  con  $\vec{H}(z'_0)$  de forma explícita. Sin embargo, podremos ver más adelante como (A.106) resulta conveniente para referir a las componentes del vector de Poynting a una sola cantidad incidente  $|\mathcal{E}_0|$ , el módulo del campo en la superficie de incidencia. De forma general.

$$\vec{H}(z') = \mathbf{T}(z', z'_0)\mathbf{E}(z'_0) \quad (\text{A.109})$$

donde.

$$\mathbf{T}(z', z'_0) = \mathbf{V} \left\{ e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)} \mathbf{K}] - e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)} \mathbf{K}] \right\} \quad (\text{A.110})$$

$$= \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^{-1} \left\{ e^{\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(11)} + \mathbf{G}_0^{(12)} \mathbf{K}] - e^{-\Lambda z'} [\mathbf{G}_0^{(21)} + \mathbf{G}_0^{(22)} \mathbf{K}] \right\} \quad (\text{A.111})$$

Podemos avanzar un poco en establecer quien es la matriz  $\mathbf{G}_0$ .

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} e^{\Lambda z'_0} & e^{-\Lambda z'_0} \\ \mathbf{V} e^{\Lambda z'_0} & -\mathbf{V} e^{-\Lambda z'_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.112})$$

Existe un resultado general de la teoría de matrices que nos permite determinar la inversa de una matriz cuadrada de bloques  $2x2$ . Dr. Bernstei, *Matrix mathematics* 2nd Edition, Princeton University Press, 2009.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A.113})$$

sea  $\mathbf{L}$  una matriz en la cual, tanto  $A$  como  $D$  son invertibles y  $C, D$  son adecuadamente conformables, tales que  $\mathbf{L}$  sea cuadrada, teniendo en cuenta los ordenes de  $A$  y  $D$ . Entonces

$$\mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -BD^{-1} \\ -CA^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.114})$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz de identidad de orden igual al de  $A$  (arriba) y  $D$  (abajo).

En nuestro caso, todas las componentes de la matriz a invertir son matrices cuadradas  $2x2$  y las matrices diagonales son, sin problema, invertibles. Así, para nosotros  $A = e^{\Lambda z'_0}$ ;  $B = e^{-\Lambda z'_0}$ ;  $C = \mathbf{V} e^{\Lambda z'_0}$  y  $D = -\mathbf{V} e^{-\Lambda z'_0}$ . Por consiguiente.

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} (e^{\Lambda z'_0} + e^{-\Lambda z'_0} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} e^{\Lambda z'_0}) & 0 \\ 0 & (-\mathbf{V} e^{-\Lambda z'_0} - \mathbf{V} e^{\Lambda z'_0} e^{-\Lambda z'_0} e^{-\Lambda z'_0})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.115})$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & e^{-\Lambda z'_0} e^{\Lambda z'_0} \mathbf{V}^{-1} \\ -\mathbf{V} e^{\Lambda z'_0} e^{-\Lambda z'_0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.116})$$

$$(\text{A.117})$$

$$= \begin{bmatrix} (2e^{\Lambda z'_0})^{-1} & 0 \\ 0 & -(2e^{-\Lambda z'_0})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{V}^{-1} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.118})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{V}^{-1} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.119})$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0} & \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1} \\ \frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0} & -\frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.120})$$

Recordando  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Ahora podemos identificar.

$$\mathbf{G}_0^{(11)} = \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0} \quad ; \quad \mathbf{G}_0^{(12)} = \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1} \quad (\text{A.121})$$

$$\mathbf{G}_0^{(21)} = \frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0} \quad ; \quad \mathbf{G}_0^{(22)} = -\frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1} \quad (\text{A.122})$$

Entonces, podemos representar la matriz de transferencia como.

$$\mathbf{M}(z', z'_0) = e^{\Lambda z'} \left[ \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0} + \frac{1}{2}e^{-\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} \right] + e^{-\Lambda z'} \left[ \frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0} - \frac{1}{2}e^{\Lambda z'_0}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} \right] \quad (\text{A.123})$$

Simplificando.

$$\mathbf{M}(z', z'_0) = \frac{1}{2}e^{\Lambda(z'-z'_0)} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} \right] + \frac{1}{2}e^{-\Lambda(z'-z'_0)} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} \right] \quad (\text{A.124})$$

$$= \frac{1}{2} \left[ e^{\Lambda(z'-z'_0)} + e^{-\Lambda(z'-z'_0)} \right] + \frac{1}{2} \left[ e^{\Lambda(z'-z'_0)} - e^{-\Lambda(z'-z'_0)} \right] \mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} \quad (\text{A.125})$$

Esto puede representarse simbólicamente, mediante el uso de identidades hiperbólicas.

$$\boxed{\mathbf{M}(z', z'_0) = \cosh[\Lambda(z' - z'_0)] + \sinh[\Lambda(z' - z'_0)]\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K}} \quad (\text{A.126})$$

donde las funciones hiperbólicas de matrices se definen a partir de las componentes de funciones exponenciales.

Podemos proceder análogamente con la matriz  $\mathcal{T}(z', z'_0)$ , simbólicamente

$$\boxed{\mathbf{T}(z', z'_0) = \mathbf{V} \left\{ \sinh[\Lambda(z' - z'_0)] + \cosh[\Lambda(z' - z'_0)]\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} \right\}} \quad (\text{A.127})$$

Llegados a este punto vamos a tratar de particularizar un poco. Analizaremos, primeramente las funciones matriciales involucradas:

$$e^{\mathbf{\Lambda}(z'-z'_0)} = \begin{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.128})$$

$$e^{-\mathbf{\Lambda}(z'-z'_0)} = \begin{bmatrix} e^{-i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & e^{-i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.129})$$

entonces.

$$\frac{1}{2}[e^{\mathbf{\Lambda}(z'-z'_0)} + e^{-\mathbf{\Lambda}(z'-z'_0)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} + e^{-i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} + e^{-i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.130})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos[\tilde{k}_z(z' - z'_0)] & 0 \\ 0 & \cos[\tilde{k}_z(z' - z'_0)] \end{bmatrix} \quad (\text{A.131})$$

$$= \cosh[\mathbf{\Lambda}(z' - z'_0)] \quad (\text{A.132})$$

de forma análoga.

$$\frac{1}{2}[e^{\mathbf{\Lambda}(z'-z'_0)} - e^{-\mathbf{\Lambda}(z'-z'_0)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} - e^{-i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} - e^{-i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.133})$$

$$= \begin{bmatrix} i \sin[\tilde{k}_z(z' - z'_0)] & 0 \\ 0 & i \sin[\tilde{k}_z(z' - z'_0)] \end{bmatrix} \quad (\text{A.134})$$

$$= \sinh[\mathbf{\Lambda}(z' - z'_0)] \quad (\text{A.135})$$

De forma mas conveniente.

$$\cosh[\mathbf{\Lambda}(z' - z'_0)] = \cos[\tilde{k}_z(z', z'_0)]\mathbf{I} \quad (\text{A.136a})$$

$$\sinh[\mathbf{\Lambda}(z' - z'_0)] = i \sin[\tilde{k}_z(z', z'_0)]\mathbf{I} \quad (\text{A.136b})$$

Vamos a recordar quien es  $\mathbf{K}$  y evaluar  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}^{-1}$ . En primer lugar.

$$\mathbf{K} = \frac{i}{\mu_r \tilde{k}_z} \begin{bmatrix} -\tilde{k}_x \tilde{k}_y & \tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r \\ \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_y^2 & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.137})$$

Comparando con la primera introducción de la matriz  $\mathcal{Q}$ , resulta ser.

$$\mathbf{K} = \frac{i}{\tilde{k}_z} \mathbf{K} \quad (\text{A.138})$$

como  $\mathbf{V} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$ , entonces podemos formular.

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \left( -\frac{i}{\tilde{k}_z} \mathbf{Q} \right) = \frac{i}{\tilde{k}_z} \mathbf{\Lambda} = \frac{1}{i\tilde{k}_z} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I} \quad (\text{A.139})$$

Las expresiones para las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{T}$  pueden ser reescritas como.

$$\mathbf{M}(z', z'_0) = \cosh[\mathbf{\Lambda}(z' - z'_0)] + \sinh[\mathbf{\Lambda}(z' - z'_0)]\mathbf{I} \quad (\text{A.140})$$

Así

$$\boxed{\mathbf{M}(z', z'_0) = \begin{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix}} \quad (\text{A.141})$$

Algo que es posible considerar, previo a continuar con la matriz  $\mathcal{T}$ , es corroborar que la matriz de transferencia compleja posee un módulo unitario. Esto es

$$\det[\mathbf{M}(z', z'_0)] = e^{2i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \quad (\text{A.142})$$

Cuyo valor absoluto es  $\sqrt{\cos^2[2\tilde{k}_z(z'-z'_0)] + \sin^2[2\tilde{k}_z(z'-z'_0)]} = 1$ , esto comprueba que la matriz  $\mathcal{M}$  tiene determinante de módulo unitario. En cuanto a la matriz  $\mathcal{T}$  tenemos, de acuerdo con lo que hemos visto que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{M} \quad (\text{A.143})$$

Calculando.

$$\mathbf{T}(z', z'_0) = \frac{1}{\mu_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i\tilde{k}_z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\tilde{k}_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.144})$$

$$= \frac{1}{\mu_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{\tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.145})$$

$$\mathbf{T}(z', z'_0) = -\frac{i}{\mu_r \tilde{k}_z} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \quad (\text{A.146})$$

Ahora podemos escribir por separado los elementos matriciales de cada función.

$$M_{11} = M_{22} = e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \quad (\text{A.147})$$

$$M_{12} = M_{21} = 0 \quad (\text{A.148})$$

Para la segunda matriz.

$$T_{11} = T_{22} = -\frac{i}{\mu_r \tilde{k}_z} \tilde{k}_x \tilde{k}_y e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \quad (\text{A.149})$$

$$T_{12} = \frac{i}{\mu_r \tilde{k}_z} (\tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r) e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \quad (\text{A.150})$$

$$T_{21} = -\frac{i}{\mu_r \tilde{k}_z} (\tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r) e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} \quad (\text{A.151})$$

Sea, entonces un sistema dieléctrico con una intercara que lo separa del vacío ubicada en  $z' = z'_0$ .

En un punto  $z'$ , hemos de tener, de acuerdo con la formulación anterior.

$$E_x(z') = M_{11} E_x(z'_0) = e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_x(z'_0) \quad (\text{A.152})$$

$$E_y(z') = M_{22} E_y(z'_0) = e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_y(z'_0) \quad (\text{A.153})$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x(z') &= T_{11} E_x(z'_0) + T_{12} E_y(z'_0) \\ &= -i \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_x(z'_0) + i \frac{\tilde{k}_x^2 - \mu_r \varepsilon_r}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_y(z'_0) \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y(z') &= T_{21} E_x(z'_0) + T_{22} E_y(z'_0) \\ &= -i \frac{\tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_x(z'_0) - i \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_r \tilde{k}_z} e^{i\tilde{k}_z(z'-z'_0)} E_y(z'_0) \end{aligned} \quad (\text{A.155})$$

A estas ecuaciones podemos volver posteriormente para obtener el campo magnético a partir del campo eléctrico.

# Apéndice B

## Condiciones de frontera para una capa entre dos medios

Supondremos el caso de una capa de material dieléctrico rodeado, por la izquierda por un medio 1, y por la derecha por un medio 2, ver figura 1. En un estudio clásico, como se presenta en los ejercicios del capítulo 7 de *Classical Electrodynamics* [47], se puede apreciar que para conocer la transmisión final se debe de partir de conocer las condiciones de frontera.

En este primer caso sencillo se tiene que para cada interfaz se cumple la relación.

$$\vec{E}_{\perp 1} = \vec{E}_{\perp 2} \quad (\text{B.1a})$$

$$\vec{H}_{\perp 1} = \vec{H}_{\perp 2} \quad (\text{B.1b})$$

Para el caso de un sistema más general, como es él de la matriz de transferencia, donde la incidencia no necesariamente es normal y la polarización de los campos no es necesariamente la tradicional, hace falta implementar un esquema más riguroso para plantear las condiciones de frontera. Dicho esto, a través de plantear la formulación para la matriz PQ se llega a una serie de coeficientes para los modos de propagación.

$$c^+ = \mathbf{W}\vec{\alpha}^+ \quad (\text{B.2a})$$

$$c^- = \mathbf{W}\vec{\alpha}^- \quad (\text{B.2b})$$

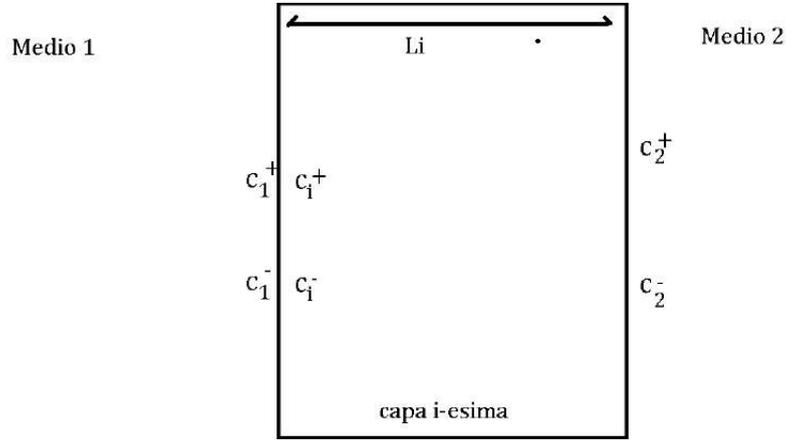
$\vec{\alpha}^+, \vec{\alpha}^-$  son vectores columna de constantes desconocidas y  $\mathbf{W}$  es la matriz de auto-

vectores del campo eléctrico. Regresando al caso PQ, la función que relaciona los campos de entrada con los de salida es.

$$\mathbf{F}(z') = \begin{bmatrix} E_x(z') \\ E_y(z') \\ \tilde{H}_x(z') \\ \tilde{H}_y(z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda z'} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

## B.1. Matriz de dispersión

La matriz de dispersión nos permite conocer los coeficientes de propagación a la salida de un medio en base a los coeficientes de entrada.



**Figura B.1:** Esquema de los coeficientes de propagación a través de una capa con grosor  $L_i$ , rodeada por dos medios distintos.

Dentro de la capa se cumple:

$$\mathbf{F}_i(z') = \begin{bmatrix} E_x(z'_i) \\ E_y(z'_i) \\ \tilde{H}_x(z'_i) \\ \tilde{H}_y(z'_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda z'_i} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda z'_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

En la frontera con el primer medio se cumple.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i \quad (\text{B.5})$$

El lado izquierdo a esta frontera, el medio 1, podemos considerar que es independiente de la coordenada  $z'$  siendo entonces posible eliminar la matriz exponencial. Para el lado derecho, supondremos que  $z' = 0$  convirtiendo a la matriz exponencial en una matriz identidad. Así

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 & -\mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Para el caso de la segunda intercara no es posible reducir en gran medida las matrices, para el caso del medio 2 si suponemos que es seminfinito es posible cancelar la matriz exponencial, fuera de eso se tiene.

$$\mathbf{F}_i(k_0L_i) = \mathbf{F}_2 \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda k_0 L_i} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda k_0 L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{V}_2 & -\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A partir de (B.6) y (B.8) podemos plantear las siguientes relaciones.

$$\begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 & -\mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda k_0 L_i} & 0 \\ 0 & e^{\lambda k_0 L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{V}_2 & -\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Previo a continuar, vamos a simplificar las expresiones anteriores. Para ello vamos a considerar la multiplicación de dos matrices de la forma.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ B_1 & -B_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \\ B_2 & -B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A_1} & \frac{1}{2B_1} \\ \frac{1}{2A_1} & -\frac{1}{2B_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \\ B_2 & -B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{A_2 B_1 + A_1 B_2}{A_1 B_1} & \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 B_1} \\ \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 B_1} & \frac{A_2 B_1 + A_1 B_2}{A_1 B_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_1^{-1} A_2 + B_1^{-1} B_2 & A_1^{-1} A_2 - B_1^{-1} B_2 \\ A_1^{-1} A_2 - B_1^{-1} B_2 & A_1^{-1} A_2 + B_1^{-1} B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Entonces, para nuestro caso, podemos plantear la siguiente identidad.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i & -\mathbf{V}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_j & \mathbf{W}_j \\ \mathbf{V}_j & -\mathbf{V}_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & A_{ij} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

donde  $A_{ij}, B_{ij}$  son cantidades auxiliares que nos permiten unir los auto-vectores de los medios con los de la capa, y representan matrices complejas 2x2.

$$A_{ij} = \mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{W}_j + \mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{V}_j \quad (\text{B.14a})$$

$$B_{ij} = \mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{W}_j - \mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{V}_j \quad (\text{B.14b})$$

De tal manera que las ecuaciones (B.9) y (B.10) pueden ser reducidas, de igual forma podemos igualar ambas expresiones para dar con una expresión que vincula el medio 1 con el medio 2.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{i1} & B_{i1} \\ B_{i1} & A_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-\lambda k_0 L_i} & 0 \\ 0 & e^{\lambda k_0 L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i2} & B_{i2} \\ B_{i2} & A_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{bmatrix} A_{i1} & B_{i1} \\ B_{i1} & A_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i2} & B_{i2} \\ B_{i2} & A_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

donde  $X = e^{\lambda k_0 L_i}$ . A partir de aquí lo que prosigue es expandir ambos lados de la expresión, lo que da como lugar dos expresiones que podemos manipular y re-ordenar los elementos de las matrices. Entonces, se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_{i1}c_1^+ + B_{i1}c_1^- \\ B_{i1}c_1^+ + A_{i1}c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{i2}X^{-1} & B_{i2}X^{-1} \\ B_{i2}X & A_{i2}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{i2}X^{-1}c_2^+ + B_{i2}X^{-1}c_2^- \\ B_{i2}Xc_2^+ + A_{i2}Xc_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Entonces, tenemos un sistema de dos ecuaciones.

$$A_{i1}c_1^+ + B_{i1}c_1^- = A_{i2}X^{-1}c_2^+ + B_{i2}X^{-1}c_2^- \quad (\text{B.18a})$$

$$B_{i1}c_1^+ + A_{i1}c_1^- = B_{i2}Xc_2^+ + A_{i2}Xc_2^- \quad (\text{B.18b})$$

La razón de re-ordenar los elementos, es poner de un lado los términos que representan las entradas a la capa y por el otro lado los elementos que salen de esta, ver figura 3.

Estructurando el sistema de ecuaciones se tiene.

$$B_{i1}c_1^- - A_{i2}X^{-1}c_2^+ = -A_{i1}c_1^+ + B_{i2}X^{-1}c_2^- \quad (\text{B.19a})$$

$$A_{i1}c_1^- - B_{i2}Xc_2^+ = -B_{i1}c_1^+ + A_{i2}Xc_2^- \quad (\text{B.19b})$$

Al devolverlo a la forma matricial se tiene la siguiente expresión.

$$\begin{bmatrix} B_{i1} & -A_{i2}X^{-1} \\ A_{i1} & -B_{i2}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{i1} & B_{i2}X^{-1} \\ -B_{i1} & A_{i2}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Ahora, procedemos a realizar álgebra y obtener una única matriz que relacione de forma directa los coeficientes.

$$\begin{bmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{i1} & -A_{i2}X^{-1} \\ A_{i1} & -B_{i2}X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{i1} & B_{i2}X^{-1} \\ -B_{i1} & A_{i2}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

$$= \frac{1}{A_{i1}A_{i2} - B_{i1}B_{i2}X^2} \begin{bmatrix} -B_{i2}X^2 & A_2 \\ -A_{i1}X & B_{i1}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{i1} & B_{i2}X^{-1} \\ -B_{i1} & A_{i2}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$= \frac{1}{A_{i1}A_{i2} - B_{i1}B_{i2}X^2} \begin{bmatrix} -A_{i2}B_{i1} + A_{i1}B_{i2}X^2 & A_{i2}^2X - B_{i2}^2X \\ A_{i1}^2X - B_{i1}^2X & -A_{i1}B_{i2} + A_{i2}B_{i1}X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Vamos a analizar término por término y simplificar en la medida de lo posible.

**Término 1,1:**

$$\frac{A_{i1}B_{i2}X^2 - A_{i2}B_{i1}}{A_{i1}A_{i2} - B_{i1}B_{i2}X^2} = \frac{A_{i2}}{A_{i2}} \frac{A_{i1}A_{i2}^{-1}B_{i2}X^2 - B_{i1}}{A_{i1} - A_{i2}^{-1}B_{i1}B_{i2}X^2} \quad (\text{B.24})$$

$$= (A_{i1} - XB_{i2}A_{i2}^{-1}XB_{i1})^{-1}(XB_{i2}A_{i2}^{-1}XA_{i1} - B_{i1}) \quad (\text{B.25})$$

**Término 1,2:**

$$\frac{A_{i2}^2X - B_{i2}^2X}{A_{i1}A_{i2} - B_{i1}B_{i2}X^2} = \frac{A_{i2}}{A_{i2}} \frac{X(A_{i2} - B_{i2}^2A_{i2}^{-1})}{A_{i1} - A_{i2}^{-1}B_{i1}B_{i2}X^2} \quad (\text{B.26})$$

$$= (A_{i1} - XB_{i2}A_{i2}^{-1}XB_{i1})^{-1}X(A_{i2} - B_{i2}A_{i2}^{-1}B_{i2}) \quad (\text{B.27})$$

**Término 2,1:**

$$= \frac{A_{i1}^2 X - B_{i1}^2 X}{A_{i1} A_{i2} - B_{i1} B_{i2} X^2} = \frac{A_{i1}}{A_{i1}} \frac{X(A_{i1} - B_{i1}^2 A_{i1}^{-1})}{A_{i2} - A_{i1}^{-1} B_{i1} B_{i2} X^2} \quad (\text{B.28})$$

$$= (A_{i2} - X B_{i1} A_{i1}^{-1} X B_{i2})^{-1} X (A_{i1} - B_{i1} A_{i1}^{-1} B_{i1}) \quad (\text{B.29})$$

**Término 2,2:**

$$\frac{A_{i2} B_{i1} X^2 - A_{i1} B_{i2}}{A_{i1} A_{i2} - B_{i1} B_{i2} X^2} = \frac{A_{i1}}{A_{i1}} \frac{A_{i2} A_{i1}^{-1} B_{i1} X^2 - B_{i2}}{A_{i2} - A_{i1}^{-1} B_{i1} B_{i2} X^2} \quad (\text{B.30})$$

$$= (A_{i2} - X B_{i1} A_{i1}^{-1} X B_{i2})^{-1} (X B_{i1} A_{i1}^{-1} X A_{i2} - B_{i2}) \quad (\text{B.31})$$

Entonces, finalmente podemos describir nuestra matriz de dispersión para los modos de propagación como.

$$\begin{bmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \end{bmatrix} = \mathcal{S}^{(i)} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{B.32a})$$

y cuyos elementos son:

$$S_{11} = (A_{i1} - X B_{i2} A_{i2}^{-1} X B_{i1})^{-1} (X B_{i2} A_{i2}^{-1} X A_{i1} - B_{i1}) \quad (\text{B.32b})$$

$$S_{12} = (A_{i1} - X B_{i2} A_{i2}^{-1} X B_{i1})^{-1} X (A_{i2} - B_{i2} A_{i2}^{-1} B_{i2}) \quad (\text{B.32c})$$

$$S_{21} = (A_{i2} - X B_{i1} A_{i1}^{-1} X B_{i2})^{-1} X (A_{i1} - B_{i1} A_{i1}^{-1} B_{i1}) \quad (\text{B.32d})$$

$$S_{22} = (A_{i2} - X B_{i1} A_{i1}^{-1} X B_{i2})^{-1} (X B_{i1} A_{i1}^{-1} X A_{i2} - B_{i2}) \quad (\text{B.32e})$$

Es importante recordar una vez más, que la matriz de dispersión de cada capa depende de los medios adyacentes a dicha capa. En ese sentido podemos asumir que cada capa esta rodeada por el mismo medio, el espacio libre, y dicho medio tiene un grosor de cero. Físicamente en un sistema óptico de diversas capas, lo que esto implica no es muy significativo excepto por el hecho de que entre capas existe un espacio libre de grosor cero. Matemáticamente, sin embargo, esto implica una reducción en el cálculo de las variables. Los elementos se reducen a:

$$S_{11} = (A_i - XB_iA_i^{-1}XB_i)^{-1}(XB_iA_i^{-1}XA_i - B_i) \quad (\text{B.33a})$$

$$S_{12} = (A_i - XB_iA_i^{-1}XB_i)^{-1}X(A_i - B_iA_i^{-1}B_i) \quad (\text{B.33b})$$

$$S_{21} = S_{12} \quad (\text{B.33c})$$

$$S_{22} = S_{11} \quad (\text{B.33d})$$

Y las variables auxiliares toman la forma:

$$A_i = \mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{W}_g + \mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{V}_g \quad (\text{B.34a})$$

$$B_i = \mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{W}_g - \mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{V}_g \quad (\text{B.34b})$$

donde las expresiones con sufijo  $g$  representan al medio que rodea a las capas, por simplicidad se elige el espacio libre lo que reduce en mayor medida el cálculo.

## B.2. Multiplicación Redheffer

Contrario al uso de matrices convencionales, como es el caso de la matriz de transferencia  $M$ , para el caso de las matrices de dispersión, puesto que las entradas y salidas corresponden a los elementos combinados de las capas adyacentes debemos de implementar una multiplicación de *Redheffer* o producto estrella, proceso mostrado en las ecuaciones (B.18a).

Matriz de transferencia:

$$M_T = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \dots \quad (\text{B.35})$$

Matriz de dispersion:

$$S^{(T)} = S^{(1)} \otimes S^{(2)} \otimes S^{(3)} \dots \quad (\text{B.36})$$

Este producto especial se hace implementando.

$$S^{(AB)} = S^{(A)} \otimes S^{(B)} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(AB)} & S_{12}^{(AB)} \\ S_{21}^{(AB)} & S_{22}^{(AB)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

donde.

$$S_{11}^{(AB)} = S_{11}^{(A)} + S_{12}^{(A)} [I - S_{11}^{(B)} S_{22}^{(A)}]^{-1} S_{11}^{(B)} S_{21}^{(A)} \quad (\text{B.38})$$

$$S_{12}^{(AB)} = S_{12}^{(B)} [I - S_{11}^{(B)} S_{22}^{(A)}]^{-1} S_{12}^{(B)} \quad (\text{B.39})$$

$$S_{21}^{(AB)} = S_{21}^{(B)} [I - S_{22}^{(A)} S_{11}^{(B)}]^{-1} S_{21}^{(A)} \quad (\text{B.40})$$

$$S_{22}^{(AB)} = S_{22}^{(B)} + S_{21}^{(B)} [I - S_{22}^{(A)} S_{11}^{(B)}]^{-1} S_{22}^{(A)} S_{12}^{(B)} \quad (\text{B.41})$$

Con el fin de obviar el hecho de que hemos considerado que las capas están rodeadas de un medio, que aunque tiene espesor cero, debemos de considerar a la matriz de transferencia global de la forma.

$$\mathcal{S}^{(global)} = S^{(ref)} \otimes S^{(1)} \otimes S^{(2)} \otimes \dots \otimes S^{(N)} \otimes S^{(trn)} \quad (\text{B.42})$$

donde  $S^{(ref)}$  y  $S^{(trn)}$  representan la reflexión y la transmisión reales del sistema óptico, formadas por capas de espesor cero y que conectan con los medios reales que envuelven al dispositivo, para casos reales esto medio no es sino aire o vacío.

Para el lado que refleja.

$$S_{11}^{(ref)} = -A_{ref}^{-1} B_{ref} \quad (\text{B.43})$$

$$S_{12}^{(ref)} = 2A_{ref}^{-1} \quad (\text{B.44})$$

$$S_{21}^{(ref)} = 0.5(A_{ref} - B_{ref} A_{ref}^{-1} B_{ref}) \quad (\text{B.45})$$

$$S_{22}^{(ref)} = B_{ref} A_{ref}^{-1} \quad (\text{B.46})$$

donde

$$A_{ref} = \mathbf{W}_g^{-1} \mathbf{W}_{ref} + \mathbf{V}_g^{-1} \mathbf{V}_{ref} \quad (\text{B.47})$$

$$B_{ref} = \mathbf{W}_g^{-1} \mathbf{W}_{ref} - \mathbf{V}_g^{-1} \mathbf{V}_{ref} \quad (\text{B.48})$$

Y para el lado que transmite.

$$S_{11}^{(ref)} = B_{trn} A_{trn}^{-1} \quad (\text{B.49})$$

$$S_{12}^{(ref)} = 0.5(A_{trn} - B_{trn} A_{trn}^{-1} B_{trn}) \quad (\text{B.50})$$

$$S_{21}^{(ref)} = 2A_{trn}^{-1} \quad (\text{B.51})$$

$$S_{22}^{(ref)} = -A_{trn}^{-1} B_{trn} \quad (\text{B.52})$$

donde

$$A_{trn} = \mathbf{W}_g^{-1} \mathbf{W}_{trn} + \mathbf{V}_g^{-1} \mathbf{V}_{trn} \quad (\text{B.53})$$

$$B_{trn} = \mathbf{W}_g^{-1} \mathbf{W}_{trn} - \mathbf{V}_g^{-1} \mathbf{V}_{trn} \quad (\text{B.54})$$

Por supuesto, que dado el caso en donde se elija al medio que rodea a las capas individuales como el medio real que envuelve al sistema total, se hace innecesario realizar las capas de reflexión y transmisión. Convirtiendo entonces a la matriz global en la multiplicación de las capas.

# Apéndice C

## Extracción de los campos

### C.1. Simplificación de las componentes

Para poder extraer la información de los campos y sus componentes, inicialmente debemos tener en cuenta que se pueden realizar una serie de simplificaciones. Tomemos por ejemplo la relación de dispersión con un vector de onda normalizado como:

$$\mu_r \varepsilon_r = \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2 \quad (\text{C.1})$$

Con esto se puede simplificar la ecuación para  $\Omega^2$ , con algo de álgebra se obtiene.

$$\Omega^2 = PQ = \frac{1}{\mu_r \varepsilon_r} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_z^2 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_z^2 \end{bmatrix} = -\tilde{k}_z^2 \mathbf{I} \quad (\text{C.2})$$

como se tiene que  $\mathbb{K}^2$  es una matriz diagonal se puede definir que:

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} \rightarrow \lambda = \begin{bmatrix} j\tilde{k}_z & 0 \\ 0 & j\tilde{k}_z \end{bmatrix} \rightarrow e^{\lambda z'} = \begin{bmatrix} e^{j\tilde{k}_z z'} & 0 \\ 0 & e^{j\tilde{k}_z z'} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\therefore \lambda^2 = \Omega^2 \quad (\text{C.4})$$

tenemos, entonces, tres expresiones las cuales nos permiten simplificar el resto de ecuaciones auxiliares.

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{\Omega}_i = j\tilde{k}_{z,i}\mathbf{I} \quad (\text{C.6})$$

$$\lambda_i = \mathbf{\Omega}_i \quad (\text{C.7})$$

Las expresiones para los auto vectores asociados a los campos magnéticos,  $\mathbf{V}$ , queda reducido a:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{W}_i \lambda_i^{-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{\Omega}_i^{-1} \quad (\text{C.8})$$

Y las ecuaciones auxiliares, de igual forma, se reducen a:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{W}_i^{-1} \mathbf{W}_g + \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_g = \mathbf{I} + \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_g \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{W}_i^{-1} \mathbf{W}_g - \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_g = \mathbf{I} - \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_g \quad (\text{C.10})$$

Ahora, podemos definir las componentes de los campos y los valores de los elementos de la matriz de dispersión por el coeficiente de propagación inicial, definido a partir de la polarización, para efectos prácticos consideramos  $\vec{E}_{inc} = \vec{P}$ . Entonces:

$$c_{inc} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E_x^{ref} \\ E_y^{ref} \end{bmatrix} = S_{11} c_{inc}, \quad \begin{bmatrix} E_x^{trn} \\ E_y^{trn} \end{bmatrix} = S_{21} c_{inc} \quad (\text{C.11})$$

## C.2. Parámetros de entrada

En principio la matriz de dispersión debe de transmitir el total de la energía cuando no existe presencia de material. Es decir que  $S_{12} = S_{21}$  la parte asociada a la transmisión debería ser igual a  $\mathbf{I}$  y la parte relacionada a la reflexión nula. Esto es:

$$\left[ S^{global} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \right] \quad (\text{C.12})$$

Vamos a considerar la ecuación asociada a cada medio como:

$$\mathbf{Q}_g = \frac{1}{\mu_{r,g}} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & \mu_r \varepsilon_r - \tilde{k}_x^2 \\ \tilde{k}_y^2 - \mu_r \varepsilon_r & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

De la ecuación de dispersión se tiene  $\tilde{k}_{z,g} = \mu_{r,g} - \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2$ , con el fin de evitar el caso cuando  $\tilde{k}_{z,g} = 0$ , podemos considerar  $\mu_{r,g} = 1, \varepsilon_{r,g} = 1 + \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2$ , reduciendo la ecuación original a

$$\mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \tilde{k}_y & 1 + \tilde{k}_x^2 \\ -(1 + \tilde{k}_y^2) & -\tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

finalmente, los vectores iniciales asociados a la polarización son:

$$\vec{k}_{inc} = k_0 n_{inc} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

con un vector unitario normal a la superficie.

$$\hat{n} = \hat{a}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

El vector de polarización lo definimos como:

$$\vec{P} = P_{TE} \hat{a}_{TE} + P_{TM} \hat{a}_{TM} \quad (\text{C.17})$$

donde:

$$\hat{a}_{TE} = \begin{cases} \hat{a}_y & \theta = 0^\circ \\ \frac{\hat{n} \times \vec{k}_{inc}}{|\hat{n} \times \vec{k}_{inc}|} & \theta \neq 0^\circ \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

$$\hat{a}_{TM} = \frac{\vec{k}_{inc} \times \hat{a}_{TE}}{|\vec{k}_{inc} \times \hat{a}_{TE}|} \quad (\text{C.19})$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



**DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO**  
**COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS**  
Presente

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: **“ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN DE LA LUZ EN HETEROESTRUCTURAS BASADAS EN MULTICAPAS DE ÓXIDOS METÁLICOS”**, que presenta el alumno **Marco Antonio Tun Carrillo** (10055024) para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Director de tesis: Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos  
Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Rolando Pérez Álvarez CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Outmane Oubram FCQel - UAEM	APROBADO	
Dr. Juan Carlos Martínez Orozco U.A. de Física - UAZ	APROBADO	
Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Luis Germán Daza Casiano F. de I.- UADY	APROBADO	





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**MIGUEL EDUARDO MORA RAMOS | Fecha:2023-09-06 18:38:28 | Firmante**

SP9Q/5iKmlQboaeiU72crXf/gzC3aFTsQPDDJxKs9ufYXXyYmLnH4kr5EgCh0e8yBERyD2kpXErnk0pkVLifZTBHwF3W+X3z6HRh+7dykIINYMErFXN4rTLZHhktSLVU+v8Umo0aydCvuFxFtDvVux/Vp0U7QjS6TROUu2bqJTALDeBVTub15cHoM5tFKeUulFoSvCS7JLCGLYwno+i+k+qROmZ682KPiicrLAW9dGd4SHQHPzrEck5Ea9kJlpQB9JTvLs6hx9Od5aya0PWl/64KahTwnhGkv4FTisYz3LusLDzZQwqU4qPYwk7PHKYKT4DrXfkXx/9PFbp4valRw==

**ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2023-09-06 19:06:42 | Firmante**

FnyAba3Q5qdXvIk6B4UCmHb/PaChCRtSwP/IQY+llmsHE8Yq1tNR1dAAhkkQa6j8vQP71W0xbRnSpy7/CDr02bN2GdneHEr4/+fpx2jiCpbWO6Xu1ThGyXR6WMMiNynG26GXi8UISpGaESv59u215OaDe4bcTylHI7Xm37t20TFH9Vsync414NG+f1uVdTBff03E4FHIGaNTSkwFba2oIWbDv9Bh5CrvtX36muLP0LxaSiNwFq07SIGS6v8MTVwN0qp/WmPaF/hcp4OGVpEtbE+vwE17G6yilaQHsgtUdhY31PRTUGnllz2AlwLU6xuuTt/QjOp0AptJKiSBq6pog==

**LUIS GERMÁN DAZA CASIANO | Fecha:2023-09-06 19:13:12 | Firmante**

Gs3NC05+ayc9uZYRdVYdw0psKzK/KWQv3PjTOFUM4wOKPT8rz29KzvUe9RG1ck2GGT8tq+X95bEkl6nzyOagi8dwsqZCMwn/yLod23ZZ5f13hic+0onGqVOoDndGiqzrZnr5hSnlxalizznJ4jrFoy5HzNORPcV39YB1hkYDypfw1o1htjM5KEJtIFDsUbNDbwQeN+71TizMydthjq1to8pUMLr6xfBmyL/tvdsPLOS8aTWWJLlv8bJsyozP5ua6IEltS3XuyijyxBcJatDmirK7A8ZyB0v42X8PLogoSb3NdrXRw14z0xP1M0EHwWgrIttS06v1zNWpL5pZ3w==

**OUTMANE OUBRAM | Fecha:2023-09-06 22:54:46 | Firmante**

qr/H/M9bSmZHBhyoXWltCBvskAj8zsswkDA91b111MOQYb6tjIWeoup41DLRI2/1D0f3zzli2FD6sG2wMjbLnmMWXJ3VUXDliFurejS+8wWD+RWIGcQBynStepV4il6RbY1KCgpf9ScYGP3dZBhJ0Q4Cp/hc6CIBjo3Xkeu5LMwOrVh/thjFcY8HGsjVI2Mka201qge6kgI5bodGYxGO4B6K4pwZp5vC+/IpA2Nym+JRkAFnawXPb1fWW6G3ud2QvX0ZHuYDB4IEUyZfZpYVGEs6Uj5JKHLzYmsBy7yglO94Tc1Qd1KGxVKqwTVZCTArNnPiSYn7/9zGO1qGBBY7g==

**JUAN CARLOS MARTÍNEZ OROZCO | Fecha:2023-09-07 07:17:40 | Firmante**

TlxqAtu+8YrHI13nZZaluVvd1sKiS+WvVLoW3ybdIEJ/Mf+0mB3k8feejzWW4AtCUVxK6Kyc8T7pJzFwTHCUEi3ktrLVqS1pKwWOKldzb5UW7cqR42z41PBnYA4UadRYBVnbC0bD+LipICHbXbOi7c8E6lla47z76p7GLpAy1nExVqH9pzlge+b/7ln0xY9g7hlg5kkOM6cmf/+PrZVVxU2ZDewrvfiLF5vQf9WjRmmDLjtgGw2JTORtaP9yiu9sEDAXvPZAs+qclHOF/Znt3AMxlaMY1piyUlqxSxYO9cye1YbS/+MVBldXwiJwpEjjkRbRtlvtU7Jmn451w==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



**RXKWYzhN4**

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/Eho1QrHD5linCXzi8okodzWUpp3ePPdn>

