



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS  
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y  
APLICADAS  
Área terminal de física

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA CONVECCIÓN  
TÉRMICA EN EL GRAN OCÉANO DE LA LUNA  
EUROPA

TESIS

QUE PRESENTA:

**Fernando Alexis Morales Garzón**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**Licenciado en Ciencias (Física)**

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Aldo Figueroa Lara

(Centro de Investigación en Ciencias, UAEM.)

Cuernavaca, Morelos

14 de Enero de 2019



*Dedicado a mis padres,  
quienes me enseñaron  
la fórmula más importante:  
Meta = Sueño + Fecha.*





## AGRADECIMIENTOS

A mi familia, especialmente mis primos: Claudia, Lalo, Moises, Yannick, por su amor y apoyo en los primeros semestres de mi carrera.

Al Dr. Federico Vázquez quien fue el primero en confiar en mí y en abrirme las puertas del trabajo.

Al Dr. Aldo Figueroa por su apoyo incondicional y por sus grandes enseñanzas en el área de simulaciones de fluidos.

A la Dra. Gloria Koenigsberger por su apoyo incondicional, por otorgarme la beca CONACYT de nivel licenciatura y por sus enseñanzas en el área de astrofísica.

A mis compañeros de laboratorio de medios continuos: Iván, Saúl, Jaziel, José, Joel, James, Verónica, por compartir conmigo sus invaluable conocimientos en esta área.

A mis compañeros de generación: Merari, Josue, David, Jairo, Gerson, Karim, Brandon, Tapia, por todas las risas y ayudas en las materias cursadas.

A la Ing. Lourdes Fernández por motivarme a estudiar esta carrera.

A CONACYT por el apoyo al Proyecto de Ciencia Básica Num. 252499 y al Sistema Nacional de Investigadores por el apoyo de ayudante de nivel III.

This research was supported by CONACYT, México, under project 258623.



## RESUMEN

Este trabajo es un estudio numérico sobre la dinámica del gran océano de la luna Europa. Las fuerzas de mareas provocadas por la presencia de Júpiter, calientan el manto rocoso de Europa bajo cierta distribución de temperatura, y éste, a su vez, calienta el océano, provocando movimiento mecánico por convección térmica. Se presenta el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica del sistema a partir de las leyes de conservación de masa, momento y energía. Se resuelven las ecuaciones gobernantes de los termo-fluidos considerando incompresible al fluido, en régimen laminar, haciendo uso de la aproximación de Boussinesq para conocer el perfil de velocidades y de temperatura en el océano. Se presenta el algoritmo numérico para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales a través del método de diferencias finitas en tres dimensiones. Se simulan varios casos de interés bajo parámetros distintos, como la variación de la profundidad del océano.



# ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	VI
Resumen	VIII
Índice general	X
<b>I. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>II. Marco teórico</b>	<b>5</b>
§ 1. Conservación de Masa .....	5
§ 2. Conservación de Momento .....	7
§ 3. Conservación de Energía .....	9
§ 4. Ecuación de transporte de Energía.....	11
§ 5. Aproximación de Boussinesq .....	13
§ 6. Ecuaciones gobernantes .....	13
6.1. Adimensionalización.....	14
<b>III. El método de Diferencias Finitas</b>	<b>16</b>
§ 7. Fórmulas de discretización.....	17
§ 8. Tratado discreto de las ecuaciones gobernantes .....	19
8.1. Discretización de las ecs. de Navier-Stokes y Energía .....	21
8.2. Condiciones de frontera.....	24
8.3. Estabilidad numérica.....	26
§ 9. Algoritmo numérico .....	27
§ 10. Celdas de Rayleigh-Benard .....	28
<b>IV. Convección térmica en el océano</b>	<b>32</b>
§ 11. Tratado del problema .....	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	X
§ 12. Casos de estudio .....	35
12.1. Temperatura del manto rocoso uniforme .....	36
12.2. Temperatura del manto rocoso no uniforme .....	39
<b>V. Conclusiones</b>	47
<b>A. Teoremas</b>	51
<b>B. Discretización de los términos convectivos</b>	52
<b>C. Condiciones de frontera numéricos</b>	55

# Capítulo I



## INTRODUCCIÓN

Europa [yur-ROH-pah] es uno de los 79 satélites naturales de Júpiter. Las más grandes fueron descubiertas por Galileo Galilei: Ganímedes, Ío, Calixto y Europa, en orden descendente a su tamaño, también llamado sistema joviano. Europa es la luna que más intriga a la comunidad científica, su superficie es de las más brillosas del sistema solar debido a la reflexión del Sol sobre su capa de hielo. La observación sobre este sistema comenzó en el siglo XVII, sin embargo, recientemente se ha comenzado a aprender sobre ellos [1].

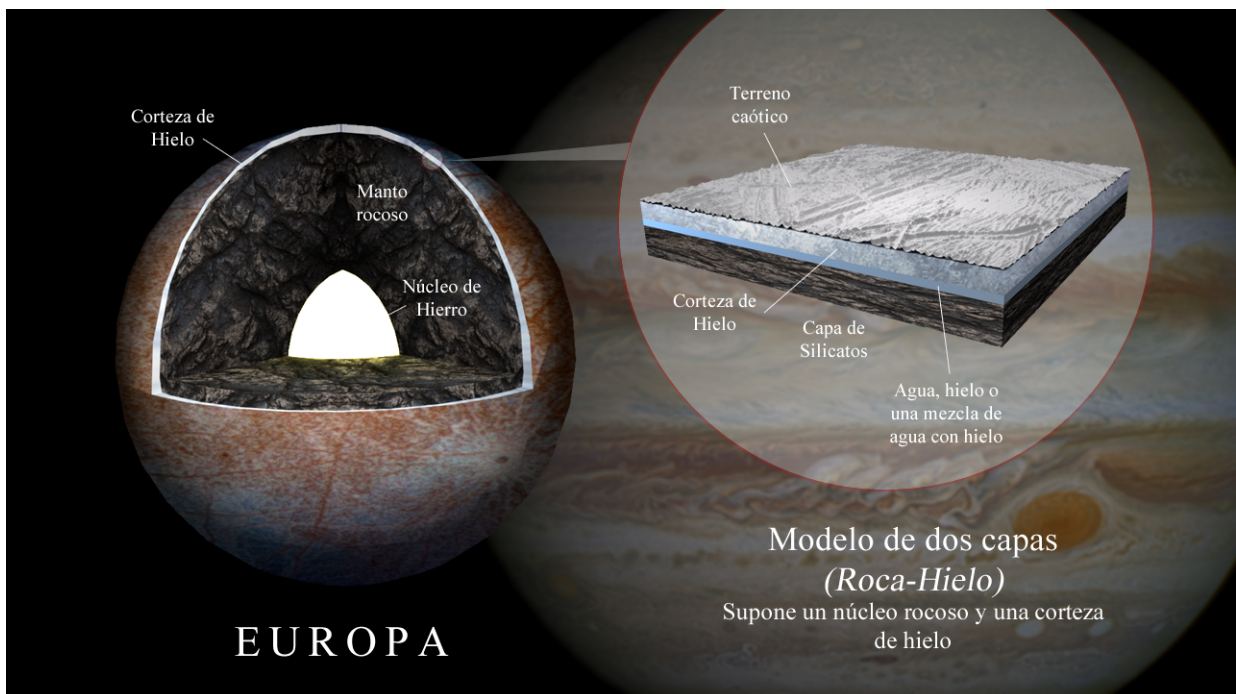


Figura 0.1: Esquema de la estratificación de la luna Europa.

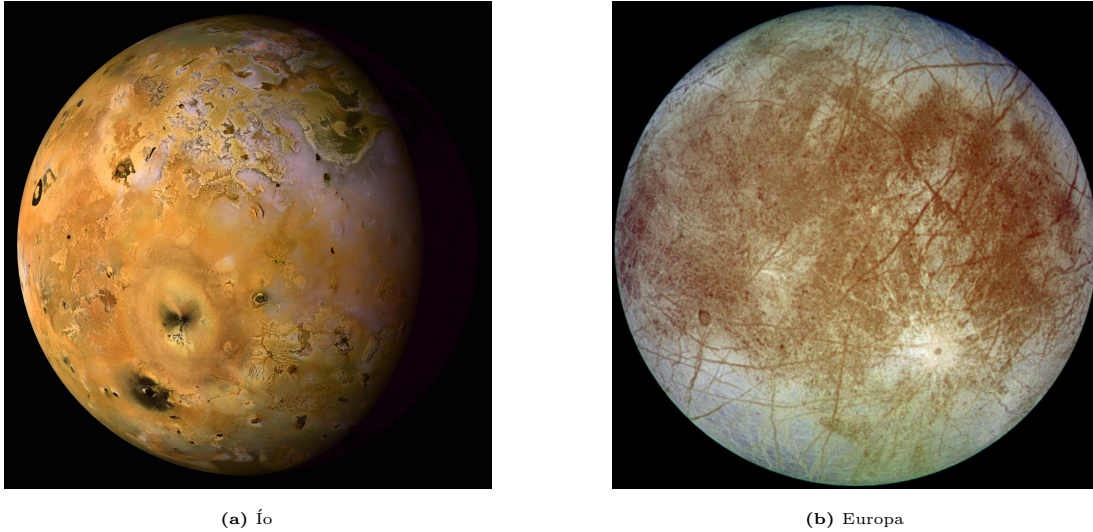
El 20 de agosto de 1977 la misión Voyager 2 comenzó su travesía rumbo a Júpiter, llegó a

éste el 9 de julio de 1979, dos semanas después, el 5 de septiembre de 1977, fue lanzado el Voyager 1 que llegó a Júpiter el 6 de enero de 1979, ambas sondas se convirtieron en las primeras en obtener imágenes de 800 x 800 pixeles mostrando a detalle la superficie de Júpiter, Saturno y algunos de sus respectivos satélites naturales. A raíz de las evidencias, se propuso una nueva misión exclusivamente sobre el sistema joviano. Así la sonda Galileo puso rumbo a Júpiter el 18 de octubre de 1989 llegando el 7 de diciembre de 1995, en esta ocasión se tomaron fotos de mayor calidad hasta 6 m/pixel en los sobrevuelos a Europa, los cuales mostraron que en la superficie de Europa y Ganímedes existen cuarteaduras o patrones de quebraduras que intrigaron a la comunidad científica, Ío dejó ver fumarolas de la actividad volcánica en su interior y Calixto mostró ser el satélite natural más golpeado por meteoritos del sistema solar. La sonda espacial Galileo contaba con 16 sofisticadas herramientas de medición, algunos de ellos incluían un magnetómetro, espectrómetro, un instrumento de plasmas para detectar partículas cargadas de altas y bajas energías y un detector de polvo cósmico [3]. Es importante señalar que la sonda Galileo detectó en Europa un campo magnético inducido por la variación en el campo magnético de Júpiter lo que sugiere una capa interna conductiva, *a priori*; la posibilidad de encontrar agua salada en estado líquido debajo de la superficie congelada de Europa.

La figura 0.1 muestra la posible estructura interna de Europa, el cual se cree que posee por el mosaico de imágenes captados por la astronave Voyager en 1979 [1] y por los datos gravitacionales y de campo magnético medidos por la astronave Galileo en 1995 [3]. Su estructura interna infiere un núcleo metálico de hierro o níquel dibujado de amarillo pálido/blanco, el manto rocoso está compuesto principalmente de silicatos, lo rodea una capa de agua en estado líquido o una mezcla de agua y hielo que, a su vez, está cubierto por una capa de hielo. La morfología de la superficie de Europa es caótica, debido quizás a los efectos de convección que mueven las placas de hielo y hacen emerger hielo joven [1].

En diciembre de 2012, el telescopio espacial Hubble capturó el espectro ultravioleta de Europa en búsqueda de emisiones de plumas de vapor, encontraron actividad de moléculas características del agua en el hemisferio sur de Europa, estiman que las plumas de vapor





**Figura 0.2:** Imágenes tomadas por la astronave Voyager 2 en 1970's. **(a)**. Las áreas marrones están cubiertas probablemente por azufre, mientras que las áreas oscuras son calderas volcánicas con secciones de hasta 200 km. [2]. **(b)**. Las zonas cafés oscuras son material rocoso que emergen del interior o por fuentes externas, las demás zonas es hielo, largos patrones de quebraduras se muestran en esta costra de hielo. Destaca en uno de los hemisferios un impacto por meteoro de 50 km de diámetro. [1]

alcanzaron una altura de 200 km sobre la capa de hielo, las plumas se presentaron cuando Europa estaba cerca de su apocentro y no fueron detectadas en su pericentro, afirma Lorenz Roth [4].

Este último artículo nos habla de una fuerte actividad geotérmica en el interior de Europa, pero ¿de dónde viene esa energía que transforma al agua líquida en vapor de agua? Existen modelos físicos que explican este fenómeno, la más acertada es el modelo de la influencia gravitacional de Júpiter sobre sus lunas que da lugar a las fuerzas de mareas que producen la energía suficiente para el proceso de evaporación. Una evidencia contundente de la disipación de energía por fuerzas de mareas producidas por Júpiter es la actividad volcánica en la estructura interna de Ío, véase figura 0.2-(a), una estimación de la cantidad de energía disipada en éste es de aproximadamente  $2.25 \text{ Wm}^{-2}$  [5,6], con un radio de 1822 km y suponiendo una distribución de flujo uniforme lo cual implica una luminosidad de  $9.39 \times 10^{18} \text{ ergs s}^{-1}$ , si se encuentra en equilibrio térmico, esta tasa de pérdida de energía deber ser lo suficiente para calentar el material rocoso y así producir, por mareas, el magma

volcánico. Lo que lleva a los astrónomos a indagar que esta misma actividad volcánica pueda producirse en la última capa del manto rocoso de Europa, es decir, producir el calor suficiente para derretir, no solo la roca, sino también la corteza de hielo, y así formar el gran océano de la luna Europa.

En este trabajo se hace un estudio de la dinámica del océano de la luna Europa resolviendo las ecuaciones gobernantes de los fluidos laminares e incompresibles, obteniendo sus propiedades físicas tales como la velocidad, presión y temperatura y adaptando las condiciones de frontera del sistema físico al sistema de ecuaciones que describen ese sistema. Se resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales parciales con la implementación del método de diferencias finitas, se establecerá un algoritmo para su implementación en cualquier lenguaje de programación. Bajo este modelo, los objetivos particulares son:

- Conocer el perfil de temperatura en el océano bajo condiciones de fronteras en acuerdo a modelos de fuerzas de mareas.
- Saber si existe transporte de temperatura por convección térmica hacia los polos de la luna.
- Conocer el campo de velocidades del océano.
- Encontrar las zonas de máxima velocidad de fluido, esto es, conocer las zonas cuyas corrientes marinas son rápidas.
- Obtener resultados bajo parámetros distintos.

## Capítulo II



# MARCO TEÓRICO

Este capítulo es un compendio de la teoría necesaria para el estudio de la convección térmica en fluidos incompresibles. Un estudio teórico y completo puede consultarse principalmente en [7] y complementariamente en [8] y [9].

### § 1. Conservación de Masa

Si se toma una pequeña cantidad de fluido y se observa su comportamiento mientras transcurre el tiempo, éste puede cambiar de forma pero su masa permanece constante, lo que da lugar al principio de conservación de masa el cual matemáticamente es expresado como colocar la derivada material  $D/Dt$ , donde  $t$  es el tiempo, de una masa de fluido contenido en un volumen  $V$ , el cual es  $\int_V \rho dV$ , igual a cero, donde  $\rho$  es su densidad, esto se traduce como

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (1.1)$$

Usando el teorema de Reynolds, Apéndice A, la ec. (1.1) es equivalente a,

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad (1.2)$$

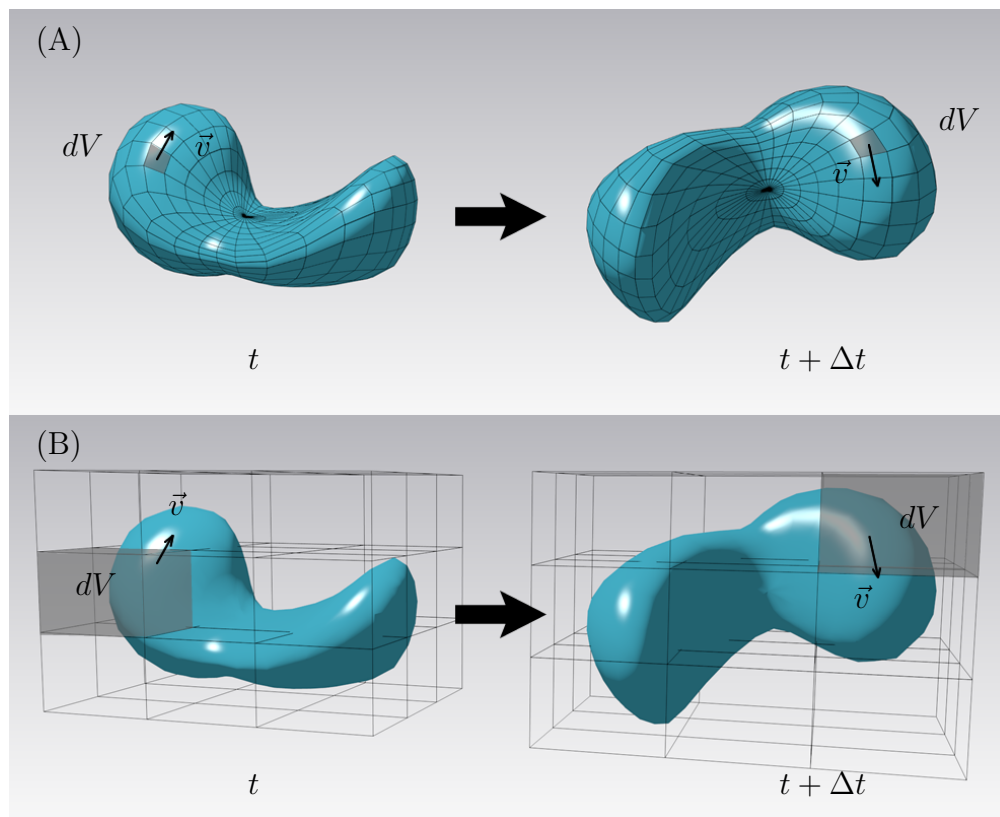
donde  $\vec{u}$  es el vector velocidad asociado a la masa de fluido  $m$  contenido en  $V$  medido desde el sistema Euleriano, véase figura 1.1,  $\nabla \cdot$  es la divergencia y sus derivadas están definidas en el sistema Euleriano. Como el volumen de control  $dV$  se eligió arbitrariamente, la única solución para la ec. (1.2) es que el integrando sea colocado como cero,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.3)$$

Si la densidad de masa de una cantidad de fluido permanece aproximadamente constante  $\rho(\vec{r}, t) \approx \text{cte}$  –¡pero distinto de cero!–, también su volumen  $V$  permanecerá constante, a este tipo de fluido se le conoce como *incompresible* y satisface, usando (1.3),

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.4)$$

a esta última expresión se le conoce como *ecuación de continuidad*.



**Figura 1.1:** Comparativa de dos sistemas de medición para un fluido de masa  $m$  a un tiempo  $t$  y, posteriormente, a un tiempo  $t + \Delta t$ . **(A).** *Lagrangiano*. En este sistema de referencia, la malla es colocada en el fluido, por lo tanto se mueve con el fluido; es deformable. **(B).** *Euleriano*. La malla está fija en el espacio, el fluido se mueve a través de las celdas  $dV$  (volúmenes de control); es indeformable. Los flujos de masa, momento y energía son simulados en las caras de las celdas.

## § 2. Conservación de Momento

Se considera una cantidad de masa de fluido desde un sistema de referencia Lagrangiano, la tasa de cambio de su momento de inercia será la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre la masa de fluido, tales como fuerza gravitacional, electromagnética, de flotación, entre otros. Si el vector  $\vec{f}$  representa la fuerza de cuerpo por unidad de masa, la fuerza neta actuando sobre una masa de volumen  $V$  será

$$\vec{F}_{ext} = \int_V \rho \vec{f} dV. \quad (2.1)$$

Además, se considera las fuerzas de superficie, como son la fricción, si  $\vec{P}$  es un vector de superficie que representa la fuerza superficial resultante por unidad de área, la fuerza neta superficial externa actuando sobre la superficie  $S$  contenida en  $V$  es

$$\vec{F}_{sup} = \int_S \vec{P} dS. \quad (2.2)$$

De acuerdo a lo establecido arriba, la suma de las fuerzas resultantes es igual a la tasa de cambio de momento. La masa por unidad de volumen es  $\rho$  y su momento es  $\rho \vec{u}$ , así que el momento contenido en un volumen  $V$  es  $\int_V \rho \vec{u} dV$ . Por lo tanto, la expresión matemática resultante de la ley de conservación de momento es

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV &= \vec{F}_{sup} + \vec{F}_{ext}, \\ &= \int_S \vec{P} dS + \int_V \rho \vec{f} dV. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si el volumen de control es un paralelepipedo de volumen  $dV = dx dy dz$ , el vector  $P$  puede ser escrito como el producto del *tensor de esfuerzos* por la normal de cada una de las caras del volumen de control, es decir  $\vec{P} = \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \hat{n}$ . Usando el teorema de Gauss, Apéndice A, el primer término del lado derecho de (2.3) es escrito en un sistema Euleriano como

$$\int_V \left[ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \odot \vec{u}) \right] dV = \int_V \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} dV + \int_V \rho \vec{f} dV, \quad (2.4)$$

donde  $\vec{u} \odot \vec{u} \equiv (u_1 u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_3, u_2 u_1 + u_2 u_2 + u_2 u_3, u_3 u_1 + u_3 u_2 + u_3 u_3)$ . Igualando el integrando, se tiene

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u} \odot \vec{u}) = \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} + \rho\vec{f}, \quad (2.5)$$

reescribiendo el lado izquierdo de la ec. (2.5)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} + \rho \vec{f}, \quad (2.6)$$

por lo tanto, usando la ec. (1.3), la ec. de conservación de momento en un sistema euleriano queda

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} + \rho \vec{f}. \quad (2.7)$$

Para un fluido newtoniano, véase [7, pag. 26-29], el tensor de esfuerzos está relacionando con el *tensor de esfuerzos cortantes*  $\overset{\leftrightarrow}{\tau}$  como

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = -p\overset{\leftrightarrow}{\delta} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}, \quad (2.8)$$

donde  $p \equiv p(x, y, z, t)$  es la presión,  $\overset{\leftrightarrow}{\delta} \equiv \delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\overset{\leftrightarrow}{\tau}$  está definido como

$$\overset{\leftrightarrow}{\tau} \equiv \tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.9)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} &\equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -p\delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right], \end{aligned}$$

si se considera un fluido incompresible, se cumple que, por (1.4),  $\nabla \cdot \vec{u} \equiv \partial u_\alpha / \partial x_\alpha = 0$ , la divergencia del tensor de esfuerzos queda entonces

$$\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (2.10)$$

Sustituyendo la ec. (2.10) en la ec. (2.7) se obtiene

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}, \quad (2.11)$$

que es la conocida *ecuación de Navier-Stokes*, el cual se utiliza en casi todos los problemas en la dinámica de fluidos. Nótese que la ec. (2.11) no contiene un tensor de esfuerzos explícito, en su lugar una nueva variable  $p$  es encontrada. La ec. de Navier-Stokes consta de tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales –una para cada componente de la velocidad–. Esta ausencia de linealidad se puede notar en el segundo término del lado izquierdo el cual es llamado el *término convectivo* de la velocidad, esto se traduce a que una porción de fluido se transporta por el propio movimiento del fluido, mientras que el segundo término del lado derecho es conocido como el *término difusivo* de la velocidad.

### § 3. Conservación de Energía

Un sistema termodinámico en equilibrio es gobernando por la primera ley de la termodinámica. Sin embargo, una cantidad de masa de fluido en un sistema lagrangiano, en general, no es un sistema termodinámico en reposo –mucho menos en equilibrio–, por lo tanto la primera ley de la termodinámica es considerado a ser la suma de la energía interna por unidad de masa  $e$  y su energía cinética  $\frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{u}$  [7]. De esta manera la energía total  $E_T$  contenida en un volumen  $V$  es

$$E_T = \int_V (\rho e + \frac{1}{2}\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) dV, \quad (3.1)$$

de esta forma, se tratar el principio de conservación de energía en un fluido. Hay tres aspectos que se deben considerar que contribuyen con la energía interna del sistema, el trabajo realizado por esfuerzos sobre la superficie del volumen de control por unidad de tiempo  $W_{stress}$ , el trabajo realizado por fuerzas de cuerpo por unidad de tiempo  $W_f$  y el calor que sale del volumen de control por unidad de tiempo  $Q_{out}$ .

$$W_{stress} = \int_S \vec{u} \cdot \vec{P} dS, \quad (3.2)$$

$$W_f = \int_V \vec{u} \cdot \rho \vec{f} dV, \quad (3.3)$$

$$Q_{out} = - \int_S \vec{q} \cdot \hat{n} dS, \quad (3.4)$$

donde  $\vec{P}$  es el vector de esfuerzos por unidad de área,  $\vec{f}$  es el vector de la fuerza de cuerpo por unidad de masa y  $\vec{q}$  denota el flujo de calor conductivo cuya magnitud es calor por unidad de tiempo por unidad de área,  $\hat{n}$  representa el vector de superficie en las caras externas del volumen de control. La tasa de cambio de la energía total, para una masa del fluido arbitraria, es igual a la tasa de trabajo realizado por la masa – por esfuerzos y por fuerza de cuerpo – más la tasa de calor que abandona la masa, esto es

$$\frac{D}{Dt}E_T = W_{stress} + W_f + Q_{out},$$

que por la ec. (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4),

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u}) dV = \int_S \vec{u} \cdot \vec{P} dS + \int_V \vec{u} \cdot \rho \vec{f} dV - \int_S \vec{q} \cdot \hat{n} dS. \quad (3.5)$$

Aplicando el teorema de Reynolds, Apéndice A con  $\alpha = \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u}$  a (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) + \nabla \cdot \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \right\} dV \\ &= \int_S \vec{u} \cdot \vec{P} dS + \int_V \vec{u} \cdot \rho \vec{f} dV - \int_S \vec{q} \cdot \hat{n} dS. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Recordar que el vector  $\vec{P}$  está relacionado con el tensor de esfuerzos  $\vec{P} = \overleftrightarrow{\sigma} \hat{n}$  visto en (2.4). Si se considera esta última relación y se aplica el teorema de Gauss, Apéndice A, para el primer y tercer término del lado derecho de (3.6), se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) + \nabla \cdot \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \right\} dV \\ &= \int_V \left\{ \nabla \cdot (\vec{u} \overleftrightarrow{\sigma}) + \vec{u} \cdot \rho \vec{f} - \nabla \cdot \vec{q} \right\} dV. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dado que  $V$  es arbitraria, la igualdad se cumple para el integrando de ambos lados dejando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) + \nabla \cdot \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \\ &= \nabla \cdot (\vec{u} \overleftrightarrow{\sigma}) + \vec{u} \cdot \rho \vec{f} - \nabla \cdot \vec{q}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Después de algo de algebra y aplicando conservación de masa (1.3) a (3.8), ésta última ecuación puede ser reescrita como



$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)e + \rho \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \\
& = \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}) + (\overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \rho \vec{f} - \nabla \cdot q.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nótese que en (3.9) si se aplica la conservación de momento (2.7) en producto punto con el vector  $\vec{u}$ , el tercer y cuarto término del lado izquierdo se cancela con el primer y tercer término del lado derecho, el cual nos lleva a la *ecuación de energía*

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)e = (\overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot q, \tag{3.10}$$

esta ecuación representa el balance de la energía térmica del fluido, el lado izquierdo representa la tasa de cambio de la energía interna y el transporte de energía por convección, mientras que el lado derecho trata con la causa de la generación de la energía interna, como es la tasa producida por esfuerzos sobre las caras de los volúmenes de control y la tasa de energía que sale de estos por conducción. Si se relaciona nuevamente el tensor de esfuerzos con el tensor de esfuerzos cortantes como en la ec. (2.8) en la ec. (3.10) asumiendo un fluido newtoniano, la ec. de la energía es reescrita como

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)e = -p \nabla \cdot \vec{u} + (\overset{\leftrightarrow}{\tau} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot q. \tag{3.11}$$

#### § 4. Ecuación de transporte de Energía

En esta sección, se quiere saber los efectos que tiene el cambio de la temperatura dentro del mismo fluido. Cuando una porción de masa dentro del fluido, en presencia de un campo gravitacional, se calienta, aumenta su volumen y su densidad disminuye, haciendola más ligera y forzandola a subir, en contraste, si la porción de masa se enfría, su volumen disminuye y su densidad aumenta, el cual la hace más pesado causando su hundimiento, a este efecto se le conoce por *convección térmica* [7, 8]. Las fuerzas de cuerpo del tipo flotación se caracterizan por ser cambios en la densidad del fluido. Sin embargo, aunque la ec. de continuidad y de Navier-Stokes tiene explícitamente incorporada la densidad  $\rho$ , no constituyen un conjunto completo de ecuaciones para conocer los efectos de la fuerza de flotación, es necesario introducir la ec. de transporte de energía para conocer el campo de

temperatura  $T$  del fluido. Para obtener una ec. de la temperatura  $T$ , se aplica la definición de entalpía  $h$ ,

$$h = e + p/\rho,$$

en la ec. (3.11) para un fluido incompresible en el que se satisface la ecuación de continuidad (1.4), entonces se obtiene

$$\rho \frac{\partial(h - p/\rho)}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)(h - p/\rho) = (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q}, \quad (4.1)$$

de esta forma se usa la suposición de Tannehill [10], asume que el fluido es un gas calóricamente perfecto en el cual existe la siguiente relación

$$h = c_p T, \quad (4.2)$$

donde  $c_p$  es el *calor específico a presión constante*, así se incorpora la relación (4.2) en la ec. (4.1) para obtener,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\vec{u} \cdot \nabla) T = (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q}. \quad (4.3)$$

Finalmente, Tannehill asume la ley de Fourier para la transferencia de calor y escribe el vector  $\vec{q}$  como

$$\vec{q} = -k \nabla T, \quad (4.4)$$

donde  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica, dejando a la ec. (4.3) como,

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right) - \nabla \cdot (k \nabla T) = (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}, \quad (4.5)$$

que se llamará *ecuación de transporte de energía*, en ella se encuentra un término fuente para la temperatura derivado de esfuerzos mecánicos, un término convectivo que transporta la temperatura con la propia velocidad del fluido y un término de difusión de temperatura.

### § 5. Aproximación de Boussinesq

En este punto, se aplica la aproximación de Boussinesq, el cual dice que la densidad del fluido permanece constante excepto en el término de flotación; todas las demás propiedades del fluido permanecen constantes, adicionalmente se desprecian las contribuciones del término de esfuerzos cortantes y la conductividad térmica  $k$  es constante. De esta forma se conserva la incompresibilidad de la ec. de continuidad (1.4) y que, en la ec. de Navier-Stokes (2.11), la densidad varía sólo en la fuerza de cuerpo. Bajo esta suposición, en la ec. de Navier-Stokes se modifica el último término del lado derecho para tomar la forma

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho(T) \vec{g}, \quad (5.1)$$

en donde

$$\rho(T) = \rho[1 - \beta(T - T_\infty)], \quad (5.2)$$

en el cual  $T_\infty$  es la temperatura característica del fluido y  $\beta$  es el *coeficiente de expansión térmica*. La ec. de transporte de energía (4.5) toma la forma

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T, \quad (5.3)$$

el cual carece de un término fuente para la temperatura  $T$ . El rango de validez de la aproximación de Boussinesq puede ser consultado en [8, pag. 130].

### § 6. Ecuaciones gobernantes

Se definen las ecuaciones gobernantes para tratar con problemas en donde la temperatura del fluido es relevante. Se cuenta con cinco ecuaciones diferenciales parciales derivadas de las leyes de conservación, para encontrar las cinco incógnitas  $\vec{u}, p, T$ ; una ec. de continuidad, tres ecs. para la conservación de momento en cada una de las direcciones y una ec. para la temperatura, respectivamente. Dicho sistema de ecs. se resume en

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (1 - \beta(T - T_\infty)) g_x, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (1 - \beta(T - T_\infty))g_y, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (1 - \beta(T - T_\infty))g_z, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (6.5)$$

donde  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  es la *difusividad térmica*, en principio, el sistema puede tener solución bajo las condiciones de fronteras e iniciales adecuadas y explícitamente dadas.

### 6.1. Adimensionalización

En el proceso de adimensionalización se introducen magnitudes características del fluido, su finalidad es la reducción o amplificación de las dimensiones físicas, por lo general, siempre se busca una reducción en las dimensiones del problema a tratar. Además, tratar con números adimensionales beneficia al ámbito computacional en la representación de grandes números de la simulación [9]. Cada magnitud física tiene su propia –pero no única– adimensionalización, se introducen las siguientes cantidades adimensionales

$$\begin{aligned} \vec{x}^* &= \frac{\vec{x}}{L}, & \vec{u}^* &= \frac{\vec{u}}{u_\infty}, & t^* &= \frac{u_\infty}{L} t, & p^* &= \frac{p - p_\infty}{\rho u_\infty^2}, & \beta^* &= (T_H - T_C)\beta, \\ T^* &= \frac{T - T_\infty}{T_H - T_C}, & \vec{g}^* &= \frac{L}{u_\infty^2} \vec{g}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $L$  es una longitud característica,  $u_\infty$  es una velocidad característica y  $p_\infty$  es una presión característica del sistema, mientras que  $T_H$  y  $T_C$  son las temperaturas en el fluido más altas y más bajas respectivamente. Introduciendo las cantidades adimensionales (6.6) en el sistema de ecuaciones (6.1)-(6.5) y después de un poco de algebra, el sistema se reescribe como

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) + (1 - \beta^* T^*) g_x^*, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) + (1 - \beta^* T^*) g_y^*, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) + (1 - \beta^* T^*) g_z^*, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right), \quad (6.11)$$

donde  $Re = \frac{L u_\infty}{\nu}$  es el número de Reynolds y  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  es el número de Prandtl. El número de Reynolds se define como la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas presentes en el fluido, por su parte, el número de Prandtl se define como la relación entre la velocidad de difusión de movimiento y la velocidad de difusión de calor [11, 12]. Ambos números permiten variar los efectos de convección y difusión en el fluido, por ejemplo, cuando el número de Reynolds es grande, el término difusivo en la ec. de Navier-Stokes y la ec. de temperatura es despreciable y los efectos convectivos son notables. Las ecs. diferenciales parciales adimensionales que conforman el sistema (6.7)-(6.11) serán llamadas, de aquí en adelante, las *ecuaciones gobernantes* de la dinámica de los termo-fluidos.

## Capítulo III



# EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

En general, el sistema de ecuaciones (6.7)-(6.11) no se puede resolver de forma analítica, es decir no es posible encontrar una expresión matemática que proporcione toda la información sobre  $\vec{u}$ ,  $p$  y  $T$ . Sin embargo existen muchos métodos numéricos para aproximar la solución del sistema de ecuaciones gobernantes con un error bajo, entre estos métodos se encuentra el *método de diferencias finitas*. El método consiste en aproximar el valor de una derivada que está evaluada en un punto discreto<sup>1</sup> en el espacio o en el tiempo a través de una serie de Taylor. Truncar la serie de Taylor hasta orden  $l + 1$  dará al método la precisión requerida, generalmente se toman los términos de orden  $l = 2, 3$ , es por esta razón que el método de diferencias finitas es de bajo orden. En particular, la ecuación diferencial se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas donde el valor de su solución es conocida en los puntos discretos. Para más información del método de diferencias finitas consúltese [13]. En este capítulo se dará a conocer el procedimiento numérico para resolver el sistema de ecuaciones (6.7)-(6.11), empezando por la discretización del operador derivada por series de Taylor hasta el método del mallado escalonado. Se dan las condiciones de estabilidad que aseguran la convergencia hacia la solución, construyo el algoritmo y, después, se podrá escribir en algún lenguaje de programación. Se presenta algunos ejemplos que se obtuvieron como resultados de la implementación del método de diferencias finitas y su contraste analítico-experimental, validando así el código numérico.

---

<sup>1</sup>La discretización se refiere a pasar de un problema en el continuo a considerar un número finito de puntos.

### § 7. Fórmulas de discretización

Si se hace uso del teorema de Taylor, Apéndice A, para aproximar una función  $f$  a través de un polinomio de grado  $l = 2$ , al rededor de  $a_0 = x_i$  un punto arbitrario en  $[0, a]$  y se quiere conocer el valor de la función en el punto  $x = x_i + \delta x \equiv x_{i+1}$ .<sup>2</sup> El valor de este polinomio está dado por

$$f(x_i + \delta x) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_i + \delta x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_i + \delta x - x_i)^2,$$

si se despeja la derivada  $f'(x_i) \equiv \frac{df_i}{dx}$  se encuentra que su valor discreto es

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} - \frac{\delta x}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2},$$

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_i^f := \frac{f_{i+1} - f_i}{\delta x}. \quad (7.1)$$

Que por notación está definida como (7.1). El error local de truncamiento está definido como

$$O(\delta x) = -\frac{\delta x}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}.$$

A la definición (7.1) se le conoce como *derivada progresiva*.

Si se escoge  $x = x_i - \delta x \equiv x_{i-1}$ , entonces

$$-\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{\delta x} - \frac{\delta x}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2},$$

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_i^b := \frac{f_i - f_{i-1}}{\delta x}, \quad (7.2)$$

el cual se conoce como *derivada regresiva*. El error local es

$$O(\delta x) = \frac{\delta x}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}.$$

---

<sup>2</sup>Debido a que los subintervalos son de igual tamaño, por notación, se define  $x_i + \delta x \equiv x_{i+1}$ . Así una función  $f(x_i + \delta x) \equiv f(x_{i+1}) \equiv f_{i+1}$ .

Si se quiere un polinomio de Taylor con  $l = 3$  y se escoge  $x = x_i + \delta x$  y  $x = x_i - \delta x$ , se tiene

$$f(x_i + \delta x) \approx f(x_i) + \delta x \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{\delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} + \frac{\delta x^3}{3!} \frac{d^3 f(x_i)}{dx^3}, \quad (7.3)$$

y

$$f(x_i - \delta x) \approx f(x_i) - \delta x \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{\delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} - \frac{\delta x^3}{3!} \frac{d^3 f(x_i)}{dx^3}, \quad (7.4)$$

restando la ec. (7.3) y ec. (7.4), se tiene

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\delta x} + \frac{\delta x^2}{3!} \frac{d^3 f(x_i)}{dx^3},$$

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_i^c := \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\delta x}, \quad (7.5)$$

a esta identidad se le llama *derivada centrada*, el error de truncamiento local de segundo orden es

$$O(\delta x^2) = \frac{\delta x^2}{3!} \frac{d^3 f(x_i)}{dx^3}.$$

Nótese que este error es más pequeño comparado con el error local de las obtenidas en las aproximaciones anteriores. Las identidades (7.1) y (7.2) son muy importantes cuando se trata con condiciones de frontera de tipo Neumann, mientras que (7.5) es utilizada en los puntos internos de la malla numérica debido a su bajo error. Para obtener el valor numérico de la segunda derivada de la función  $f''(x_i)$  basta con sumar la ec. (7.3) y (7.4), se obtiene

$$\left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_i := \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\delta x^2}. \quad (7.6)$$

Análogamente se pueden obtener los valores discretos de las derivadas para  $\left[ \frac{df}{dy} \right]_j$ ,  $\left[ \frac{df}{dz} \right]_k$ ,  $\left[ \frac{d^2 f}{dy^2} \right]_j$  y  $\left[ \frac{d^2 f}{dz^2} \right]_k$ .

Hasta aquí se ha tratado el valor numérico de las derivadas espaciales, ahora se debe considerar una función  $f(x, t)$ . Éstas funciones dependientes del tiempo añaden una coordenada



más, al igual que las espaciales, esta coordenada también puede ser discretizada en un intervalo de tiempo  $[0, t_{end}]$  con subintervalos  $[n\delta t, (n+1)\delta t]$  donde  $n = 1, 2 \dots t_{end}/\delta t - 1$ .<sup>3</sup> Nuevamente usando el teorema de Taylor, se tiene

$$\frac{df(x_i, t_n)}{dt} \approx \frac{f(x_i, t_n + \delta t) - f(x_i, t_n)}{\delta t} - \frac{\delta t}{2!} \frac{d^2 f(x_i, t_i)}{dt^2},$$

$$\left[ \frac{df}{dt} \right]_i^{(n)} := \frac{f_i^{(n+1)} - f_i^{(n)}}{\delta t}, \quad (7.7)$$

que se conoce como *método de Euler*. Si las derivadas espaciales de  $f$  en una ecuación diferencial dependiente del tiempo son evaluadas al tiempo  $(n)$ , se podrá conocer el valor de  $f$  al tiempo siguiente  $(n+1)$ , a este procedimiento se le conoce como *método explícito*.

### § 8. Tratado discreto de las ecuaciones gobernantes

Un conjunto de puntos  $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y] \times [0, l_z] \subset \mathbb{R}^3$  es dividido en  $i_{max}, j_{max}, k_{max}$  subintervalos de igual tamaño  $\delta x := l_x/i_{max}, \delta y := l_y/j_{max}, \delta z := l_z/k_{max}$  formando así un conjunto finito de puntos llamado *malla numérica*. Un vector  $\vec{r} = (x, y, z) \in \Omega$  es definido en la malla como

$$\vec{r}_{i,j,k} := (x_i, y_j, z_k) = (i\delta x, j\delta y, k\delta z), \quad (8.1)$$

con  $i = 0, 1, 2 \dots i_{max}, j = 0, 1, 2 \dots j_{max}$  y  $k = 0, 1, 2 \dots k_{max}$ . En esta malla se quiere encontrar las incógnitas  $\vec{u}_{i,j,k}^{(n+1)}, p_{i,j,k}^{(n+1)}$  y  $T_{i,j,k}^{(n+1)}$  del sistema de ecuaciones diferenciales (6.7)-(6.11) de acuerdo al método de diferencias finitas. Se resuelven las ecuaciones gobernantes en una malla numérica llamada *red escalonada*, en el cual las variables desconocidas no son localizadas en el centro de la celda numérica, sino en las caras de la celda, como se muestra en la figura 8.1. La celda  $(i, j, k)$  ocupa la región espacial  $[(i-1)\delta x, i\delta x] \times [(j-1)\delta y, j\delta y] \times [(k-1)\delta z, k\delta z]$ , y el índice correspondiente  $(i, j, k)$  es asignado a la presión y a la temperatura en el centro de la celda. Si no se hace, supóngase el siguiente ejemplo, se tiene un fluido incompresible unidimensional, la ec. de continuidad (1.4) es

<sup>3</sup>En un principio el valor de  $\delta t$  es desconocido, este valor debe ser determinado de acuerdo a las reglas de estabilidad numérica. Véase relación (8.18).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (8.2)$$

la solución analítica de la ec. (8.2) es una constante, sin embargo, haciendo uso de la definición (7.5) para un punto  $i$  del dominio discreto queda

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_i^c = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0. \quad (8.3)$$

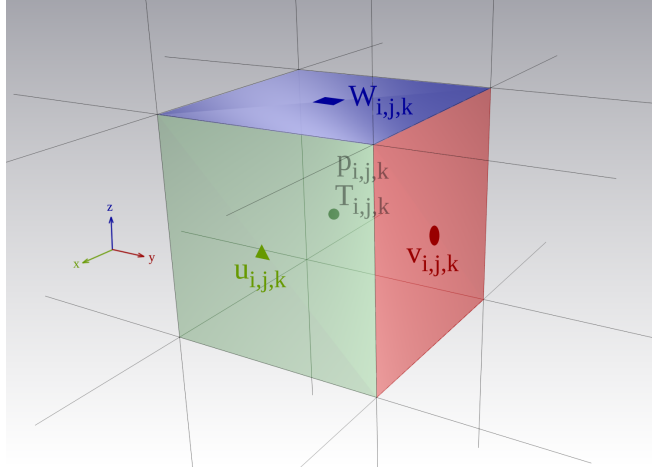
Nótese que  $u_i$  no aparece en la expresión y, en esta ocasión, podría tener un valor arbitrario, el problema ocurre si  $u$  posee valores alternos como, por ejemplo,

$$u_i = \begin{cases} 5 & \text{si } i \text{ es par,} \\ 10 & \text{si } i \text{ es impar,} \end{cases} \quad (8.4)$$

el cual corresponde a un campo de velocidad altamente no lineal. Evaluando la expresión (8.3) para  $i$  par, el resultado será cero, si se evalúa para  $i$  impar el resultado también será cero, a este problema se le conoce como *desacople par-impar* [9, 14]. Como solución se propone usar los operadores que consideran al vecino inmediato de la celda numérica, como la derivada progresiva o regresiva, pero ¿qué implicaciones tiene tratar con estos operadores? Considere la siguiente demostración con el uso de la derivada progresiva (7.1) y la función discreta (8.4),

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_i^p &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \neq 0 \\ &= \frac{u_{i+1/2+1/2} - u_{i-1/2+1/2}}{2(\Delta x/2)} \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2}^c, \end{aligned} \quad (8.5)$$

donde  $\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2}^c$  es la derivada centrada para el índice  $i + 1/2$  sobre una malla el doble de fina, esto es, con tamaño de paso  $\Delta x/2$ , lo cual significa que si se recorre la velocidad la mitad de la celda, y se evalúa la derivada centrada para este punto, su valor discreto será distinto de cero. Esta es la razón por la cual se usa una red escalonada el cual desplaza las velocidades hacia las caras de las celdas y evita el problema del desacople par-impar.



**Figura 8.1:** Esquema en 3D de la red escalonada. La presión  $p_{i,j,k}$  y la temperatura  $T_{i,j,k}$  son colocados en el centro de la celda numérica. Las componentes del vector velocidad  $\vec{u}_{i,j,k}$  son colocados en las caras de la celda.

### 8.1. Discretización de las ecs. de Navier-Stokes y Energía

Las ecs. de Navier-Stokes y Energía cuentan con términos difusivos y convectivos que deben ser calculados en la malla escalonada. El término difusivo  $\nabla^2 u$  puede ser discretizada usando (7.6), el operador Laplaciano está determinado en la malla escalonada como

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_{i,j,k} &= \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]_{i,j,k} \\ &= \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\delta y^2} \\ &\quad + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\delta z^2}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

para  $\nabla^2 v$ ,  $\nabla^2 w$  y  $\nabla^2 T$  el procedimiento es análogo. La discretización del término convectivo  $(\vec{u} \cdot \nabla)u$ , sin embargo, posee algunas dificultades, entre ellas la inestabilidad numérica por ser un término no lineal, Griebel *et al.* [8, pag. 24] proponen reescribir el término convectivo con el uso de la ecuación de continuidad, se puede demostrar que  $(\vec{u} \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (u\vec{u})$  si  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , esto facilita su tratado en la malla escalonada, entonces las derivadas  $\frac{\partial(u^2)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$  y  $\frac{\partial(uw)}{\partial z}$  son discretizadas como

$$\left[ \frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta x} \left( \left( \frac{u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{2} \right)^2 - \left( \frac{u_{i-1,j,k} + u_{i,j,k}}{2} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma \frac{1}{\delta x} \left( \frac{|u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}|}{2} \frac{(u_{i,j,k} - u_{i+1,j,k})}{2} - \frac{|u_{i-1,j,k} + u_{i,j,k}|}{2} \frac{(u_{i-1,j,k} - u_{i,j,k})}{2} \right), \\
\left[ \frac{d(uv)}{dy} \right]_{i,j,k} & := \frac{1}{\delta y} \left( \frac{(v_{i,j,k} + v_{i+1,j,k})}{2} \frac{(u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k})}{2} - \frac{(v_{i,j-1,k} + v_{i+1,j-1,k})}{2} \frac{(u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k})}{2} \right) \\
& +\gamma \frac{1}{\delta y} \left( \frac{|v_{i,j,k} + v_{i+1,j,k}|}{2} \frac{(u_{i,j,k} - u_{i,j+1,k})}{2} - \frac{|v_{i,j-1,k} + v_{i+1,j-1,k}|}{2} \frac{(u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k})}{2} \right), \\
\left[ \frac{d(uw)}{dz} \right]_{i,j,k} & := \frac{1}{\delta z} \left( \frac{(w_{i,j,k} + w_{i+1,j,k})}{2} \frac{(u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1})}{2} - \frac{(w_{i,j,k-1} + w_{i+1,j,k-1})}{2} \frac{(u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k})}{2} \right) \\
& +\gamma \frac{1}{\delta z} \left( \frac{|w_{i,j,k} + w_{i+1,j,k}|}{2} \frac{(u_{i,j,k} - u_{i,j,k+1})}{2} - \frac{|w_{i,j,k-1} + w_{i+1,j,k-1}|}{2} \frac{(u_{i,j,k-1} - u_{i,j,k})}{2} \right). \tag{8.7}
\end{aligned}$$

El parámetro  $\gamma$  es un parámetro de peso el cual toma valores entre 0 y 1. Las identidades para  $\nabla \cdot (v\vec{u})$ ,  $\nabla \cdot (w\vec{u})$  y  $\nabla \cdot (T\vec{u})$  se encuentran en el Apéndice B.

Al inicio  $t = 0$  los valores  $\vec{u}$ ,  $p$  y  $T$  son conocidos, el tiempo es incrementado en  $\delta t$  sobre cada paso de tiempo hasta alcanzar un tiempo  $t_{end}$ , al tiempo  $t_n$  todas las variables son conocidas y así para el tiempo  $t_{n+1}$  deben ser computadas. Entonces, siguiendo este esquema, la ec. de continuidad, la ec. de Navier-Stokes y la ec. de transporte de energía son discretizadas en la malla escalonada, introduciendo las abreviaciones

$$\begin{aligned}
F_{i,j,k}^{(n)} & := u_{i,j,k}^{(n)} + \delta t \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n)}, \\
G_{i,j,k}^{(n)} & := v_{i,j,k}^{(n)} + \delta t \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(vu)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n)}, \\
L_{i,j,k}^{(n)} & := w_{i,j,k}^{(n)} + \delta t \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(wu)}{\partial x} - \frac{\partial(wv)}{\partial y} - \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n)}, \tag{8.8}
\end{aligned}$$

son

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n)} = 0 \quad (8.9)$$

$$u_{i,j,k}^{(n+1)} = F_{i,j,k}^{(n)} + \delta t(1 - \beta T_{i,j,k}^{(n+1)})g_x - \delta t \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j,k}^{(n+1)}, \quad (8.10)$$

$$v_{i,j,k}^{(n+1)} = G_{i,j,k}^{(n)} + \delta t(1 - \beta T_{i,j,k}^{(n+1)})g_y - \delta t \left[ \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j,k}^{(n+1)}, \quad (8.11)$$

$$w_{i,j,k}^{(n+1)} = L_{i,j,k}^{(n)} + \delta t(1 - \beta T_{i,j,k}^{(n+1)})g_z - \delta t \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n+1)}, \quad (8.12)$$

$$T_{i,j,k}^{(n+1)} = T_{i,j,k}^{(n)} + \delta t \left[ \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(Tu)}{\partial x} - \frac{\partial(Tv)}{\partial y} - \frac{\partial(Tw)}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n)}. \quad (8.13)$$

La razón por la cual el último término del lado derecho de (8.10), (8.11) y (8.12) está evaluado en  $(n+1)$  es porque se está siguiendo un esquema *explícito* para las velocidades e *implícito* para la presión y temperatura, como en (7.7), es decir, el campo de velocidades al tiempo  $t_{n+1}$  es computada una vez que la presión y temperatura correspondiente es conocida.

El segundo término del lado derecho de las ec. (8.10), (8.11) y (8.12), es de tipo flotación, es decir, una fuerza de cuerpo que puede estar considerada implícitamente dentro de  $F_{i,j,k}$ ,  $G_{i,j,k}$  y  $L_{i,j,k}$ , sin embargo, esto no se hace debido a que la temperatura es evaluada en el centro de la celda numérica mientras que  $F$ ,  $G$  y  $L$  están discretizadas en las caras de las celdas, entonces se puede reescribir éstas haciendo una media para la temperatura de tal forma que se conozca en las caras, entonces se tiene

$$\tilde{F}_{i,j,k} = F_{i,j,k} + \delta t[1 - \beta(T_{i,j,k}^{(n+1)} + T_{i+1,j,k}^{(n+1)})/2]g_x,$$

$$\tilde{G}_{i,j,k} = G_{i,j,k} + \delta t[1 - \beta(T_{i,j,k}^{(n+1)} + T_{i,j+1,k}^{(n+1)})/2]g_y,$$

$$\tilde{L}_{i,j,k} = L_{i,j,k} + \delta t [1 - \beta(T_{i,j,k}^{(n+1)} + T_{i,j,k+1}^{(n+1)})/2] g_z. \quad (8.14)$$

Para conocer la presión al tiempo  $t_{n+1}$ , se sustituyen las ec. de momento-presión con términos reescritos (8.14) en la ecuación de continuidad (8.9) evaluada al tiempo  $t_{n+1}$  y se obtiene

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n+1)} &= \frac{\partial \tilde{F}_{i,j,k}^{(n)}}{\partial x} - \delta t \frac{\partial^2 p_{i,j,k}^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{G}_{i,j,k}^{(n)}}{\partial y} - \delta t \frac{\partial^2 p_{i,j,k}^{(n+1)}}{\partial y^2} \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{L}_{i,j,k}^{(n)}}{\partial z} - \delta t \frac{\partial^2 p_{i,j,k}^{(n+1)}}{\partial z^2} = 0, \\ \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right]_{i,j,k}^{(n+1)} &= \frac{1}{\delta t} \left[ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{(n)}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

que es la ecuación de Poisson para la presión el cual debe ser resuelta.

## 8.2. Condiciones de frontera

Para que el sistema discretizado (8.9)-(8.13) tenga solución, se debe dar valores a la frontera para  $\vec{u}$ ,  $p$  y  $T$ , esto es, se conocen los valores de la velocidad, presión y temperatura en el límite de la región  $\Omega$ , *i.e.*  $\partial\Omega$ , cada condición toma una forma determinada en el mallado escalonado y de acuerdo a la física que expresa, para las velocidades las condiciones son:

- **No deslizamiento.** La pérdida de velocidad por fricción es total. Las velocidades deben ser cero en la frontera, es decir

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

- **Deslizamiento libre.** No hay pérdida por fricción en la componente de la velocidad tangencial. La componente normal a la frontera debe ser cero junto con la derivada de la componente tangencial respecto a la normal, esto es, por ejemplo, para la frontera  $x = 0$ ,

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

- **Flujo saliente.** El flujo abandona la región  $\Omega$  en la dirección normal a la frontera, en otras palabras, la velocidad no cambia en la dirección normal a la frontera, esto es, para  $x = x_{i_{max}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

- **Flujo entrante.** Se les da valores numéricos a las componentes de la velocidad, se fijan valores a lo largo de la superficie de la frontera.
- **Periodicas.** Para una condición tipo periodica en la dirección de  $x$ , los valores de la velocidad, presión y temperatura coinciden en el lado izquierdo y el lado derecho de la frontera.

$$u(0, y, z) = u(a, y, z), \quad v(0, y, z) = v(a, y, z), \quad w(0, y, z) = w(a, y, z)$$

$$p(0, y, z) = p(a, y, z), \quad T(0, y, z) = T(a, y, z).$$

Para la temperatura existen dos condiciones de frontera:

- **Dirichlet.**

$$T = T_0.$$

La temperatura es conocida en toda la frontera, ya sea como una constante o como una función.

- **Neumann.**

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_w.$$

Aquí  $n$  representa la dirección normal a la frontera,  $k$  es la conductividad térmica del fluido y  $q_w$  es el flujo de calor a través de la frontera. Esta condición describe cuánto calor pasa a través de la frontera, si  $q_w = 0$  entonces no hay un intercambio de calor con el exterior (pared aislante).

La ec. de Poisson para la presión (8.15) también requiere condiciones a la frontera para ser resuelta. Usando el *método de proyección de Chorin* desarrollado por Chorin [15], el cual

consiste en multiplicar las ec. (8.10), (8.11) y (8.12) con términos reescritos (8.14), con el vector normal unitario exterior  $\vec{n} := (n_1, n_2, n_3)$  en la frontera  $\partial\Omega$ , dejando así

$$\begin{aligned} \nabla p^{(n+1)} \cdot \vec{n} &= \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x} n_1 + \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y} n_2 + \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial z} n_3 \\ &= -\frac{1}{\delta t} \left( (u^{(n+1)} - \tilde{F}^{(n)}) n_1 + (v^{(n+1)} - \tilde{G}^{(n)}) n_2 + (w^{(n+1)} - \tilde{L}^{(n)}) n_3 \right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Para la frontera izquierda  $\vec{n} = (-1, 0, 0)$  ( $i = 0$ ) y discretizando la derivada del gradiente de la presión como una derivada regresiva (7.2) la expresión es

$$\frac{p_{0,j,k}^{(n+1)} - p_{1,j,k}^{(n+1)}}{\delta x} = \frac{1}{\delta t} (u_{0,j,k}^{(n+1)} - \tilde{F}_{0,j,k}^{(n)}), \quad (8.17)$$

si se sustituye en la ec. de Poisson (8.15) para  $i = 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{p_{2,j,k}^{(n+1)} - p_{1,j,k}^{(n+1)}}{(\delta x)^2} + \frac{p_{1,j+1,k}^{(n+1)} - 2p_{1,j,k}^{(n+1)} + p_{1,j-1,k}^{(n+1)}}{(\delta y)^2} + \frac{p_{1,j,k+1}^{(n+1)} - 2p_{1,j,k}^{(n+1)} + p_{1,j,k-1}^{(n+1)}}{(\delta z)^2} \\ &= \frac{1}{\delta t} \left( \frac{\tilde{F}_{1,j,k}^{(n)} - u_{0,j,k}^{(n+1)}}{\delta x} + \frac{\tilde{G}_{1,j,k}^{(n)} - \tilde{G}_{1,j-1,k}^{(n)}}{\delta y} + \frac{\tilde{L}_{1,j,k}^{(n)} - \tilde{L}_{1,j,k-1}^{(n)}}{\delta z} \right), \end{aligned}$$

lo cual nos dice que esta ecuación no depende de  $\tilde{F}_{0,j,k}^{(n)}$  y por lo tanto su valor puede ser escogido arbitrariamente, lo más sencillo es escoger  $\tilde{F}_{0,j,k}^{(n)} = u_{0,j,k}^{(n+1)}$ , el cual, por (8.17) deja a la presión  $p_{0,j,k}^{(n+1)} = p_{1,j,k}^{(n+1)}$ . Usando este procedimiento de forma análoga, se pueden encontrar las condiciones de frontera para las otras caras, véase Apéndice C.

### 8.3. Estabilidad numérica

En la literatura [8] se puede encontrar cuatro condiciones para evitar oscilaciones derivadas de inestabilidades numéricas, los cuales son:

$$\begin{aligned} \frac{2\delta t}{Re} &< \left( \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2} \right)^{-1}, & \frac{2\delta t}{RePr} &< \left( \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2} \right)^{-1}, \\ |u_{max}| \delta t &< \delta x, & |v_{max}| \delta t &< \delta y, & |w_{max}| \delta t &< \delta z. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Esto se puede traducir a que ninguna partícula de fluido debe viajar una distancia más grande que el tamaño de una celda del mallado  $\delta x \times \delta y \times \delta z$  en un tiempo  $\delta t$ , el cual se



debe seleccionar de acuerdo a lo impuesto en las condiciones (8.18), un paso en el tiempo constante es utilizado de acuerdo a

$$\delta t := \tau \min \left[ \frac{Re}{2} \left( \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2} \right)^{-1}, \frac{RePr}{2} \left( \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2} \right)^{-1}, \frac{\delta x}{|u_{max}|}, \frac{\delta y}{|v_{max}|}, \frac{\delta z}{|w_{max}|} \right], \quad (8.19)$$

donde  $\tau < 1$  para garantizar la convergencia del método.

### § 9. Algoritmo numérico

La implementación en Fortran90 del método se da a conocer en el Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Resolución de las ec. gobernantes 3D.

---

- 1: Dar valores a las constantes  $Re, Pr, \gamma, g_x, g_y, g_z, \beta$ .
  - 2:  $n \leftarrow 0$
  - 3:  $u^{(n)} \leftarrow 0, v^{(n)} \leftarrow 0, w^{(n)} \leftarrow 0, p^{(n)} \leftarrow 0$  y  $T^{(n)} \leftarrow 0$
  - 4: Seleccionar  $\delta t$  de acuerdo a (8.19).
  - 5: **para**  $t = 1$  hasta  $t_{end}$  **hacer**
  - 6: Colocar los valores a la frontera para  $u, v, w$  y  $T$ .
  - 7: Computar  $T^{(n+1)}$  de acuerdo a (8.13).
  - 8: Computar  $F^{(n)}, G^{(n)}$  y  $L^{(n)}$  de acuerdo a (8.8).
  - 9: Colocar los valores a la frontera de  $F^{(n)}, G^{(n)}$  y  $L^{(n)}$ .
  - 10: Computar  $\tilde{F}^{(n)}, \tilde{G}^{(n)}$  y  $\tilde{L}^{(n)}$  de acuerdo a (8.14).
  - 11: Resolver la ec. de Poisson para la presión (8.15) haciendo uso del Algoritmo 2 (Subrutina).
  - 12: Computar  $u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$  y  $w^{(n+1)}$  de acuerdo a (8.10), (8.11) y (8.12).
  - 13:  $n \leftarrow n + 1$
  - 14: **fin para**
- 

Debido a la forma diagonal de la matriz  $[\nabla^2 p]_{i,j,k}$  con variables  $p_{i,j,k}$  en la ecuación de Poisson para la presión, se puede resolver el sistema algebraico (8.15) con un método

iterativo; se usó el *método iterativo de Jacobi* [16, pag. 59], el cual consiste en construir el residuo  $R_{i,j,k}^{(k)}$  como

$$R_{i,j,k}^{(k)} := \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\delta t} \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^{(k)}, \quad (9.1)$$

donde  $k$  es el índice iterativo del método de Jacobi, ¡el cual no hay que confundir con el índice  $n$  del método de Euler!, y encontrar el valor para  $p^{(k+1)}$  de la forma

$$p_{i,j,k}^{(k+1)} = p_{i,j,k}^{(k)} + \delta\tau(R_{i,j,k}^{(k)}) \quad k = 1, 2 \dots N_p, \quad (9.2)$$

donde  $\delta\tau$  es el paso en el tiempo ficticio de evolución (parecido al del método de Euler). Este proceso se hace en  $N_p$  iteraciones suficientemente grandes, ya que si  $N_p \rightarrow \infty$  entonces  $R_{i,j,k}^{(k)} \rightarrow 0$ , en este punto se ha alcanzado la solución para  $p_{i,j,k}$ . El algoritmo 2 resume este procedimiento.

---

**Algoritmo 2** (Subrutina) Resolución de la ec. de Poisson para la presión por el método iterativo de Jacobi.

---

**Entrada:**  $n, p^{(n)}, \tilde{F}^{(n)}, \tilde{G}^{(n)}$  y  $\tilde{L}^{(n)}$ .

**Salida:**  $p^{(n+1)}$ .

- 1:  $\delta\tau \leftarrow 1 \times 10^{-6}, N_p \leftarrow 100$ .
  - 2: Colocar los valores a la frontera para  $p_{i,j,k}^{(n)}$ .
  - 3: **para**  $k = 1$  hasta  $N_p$  **hacer**
  - 4:   Computar  $\left[ p_{i,j,k}^{(n)} \right]^{(k+1)}$  de acuerdo a (9.2).
  - 5: **fin para**
  - 6:  $p_{i,j,k}^{(n+1)} \leftarrow \left[ p_{i,j,k}^{(n)} \right]^{(N_p+1)}$
- 

## § 10. Celdas de Rayleigh-Benard

Se les llama *celdas de Rayleigh-Bénard* a las estructuras circulares formadas por las líneas de corrientes debido a la convección térmica del fluido, el cual está bajo un gradiente de temperatura. El estudio de las celdas Rayleigh-Bénard es muy amplio en conocimientos, para más información se puede consultar [17]. En esta sección se hará una comparación

cualitativa de los resultados de la simulación con resultados experimentales.

En 1986, R. Kirchartz, describe en [18] convección estacionaria en una caja rectangular calentada por debajo, calculan líneas de corrientes en las estructuras tridimensionales para número de Prandtl 0.7 –característico de los gases–, presentan resultados experimentales. El experimento consiste en un gas encerrado en una estructura tridimensional de la geometría de una caja, con radio de aspecto 4:2:1, la pared inferior, es decir la pared cuya cara ve hacia la mesa de laboratorio, es calentada mientras que la superior es enfriada<sup>4</sup>, evidentemente estas paredes son conductoras y siempre están en contacto con el baño térmico, las paredes restantes son aisladas. La gravedad actúa en dirección a la pared inferior. Los resultados de este experimento pueden verse en la figura 10.1-(A).

Para obtener los resultados numéricos se usó el algoritmo 1 con una malla de  $8 \times 64 \times 16$  celdas con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \text{Re}=4,350, & \quad \text{Pr}=0.7, & \quad \text{Gamma}=0.9, & \quad \text{Beta}=3.5\text{e-}3, \\ \text{gx}=0.0, & \quad \text{gy}=0.0, & \quad \text{gz}=-6.432\text{e-}1, & \quad \text{dt}=2.0\text{e-}2, & \quad \text{Tmax}=8.0\text{e}4, \\ \text{lx}=0.5, & \quad \text{ly}=4.0, & \quad \text{lz}=1.0, & \quad \text{dx}=6.25\text{e-}2, & \quad \text{dy}=6.25\text{e-}2, & \quad \text{dz}=6.25\text{e-}2. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera impuestas en la simulación fueron;

$$\text{No deslizamiento,} \quad u=0, v=0, w=0, \quad \text{para la cara en} \quad x=0, \quad x=l_x.$$

$$\text{No deslizamiento,} \quad u=0, v=0, w=0, \quad \text{para la cara en} \quad y=0, \quad x=l_y.$$

$$\text{No deslizamiento,} \quad u=0, v=0, w=0, \quad \text{para la cara en} \quad z=0, \quad x=l_z.$$

$$\text{Dirichlet,} \quad T=1.0, \quad \text{para la cara en} \quad z=0.$$

$$\text{Dirichlet,} \quad T=0.0, \quad \text{para la cara en} \quad z=l_z.$$

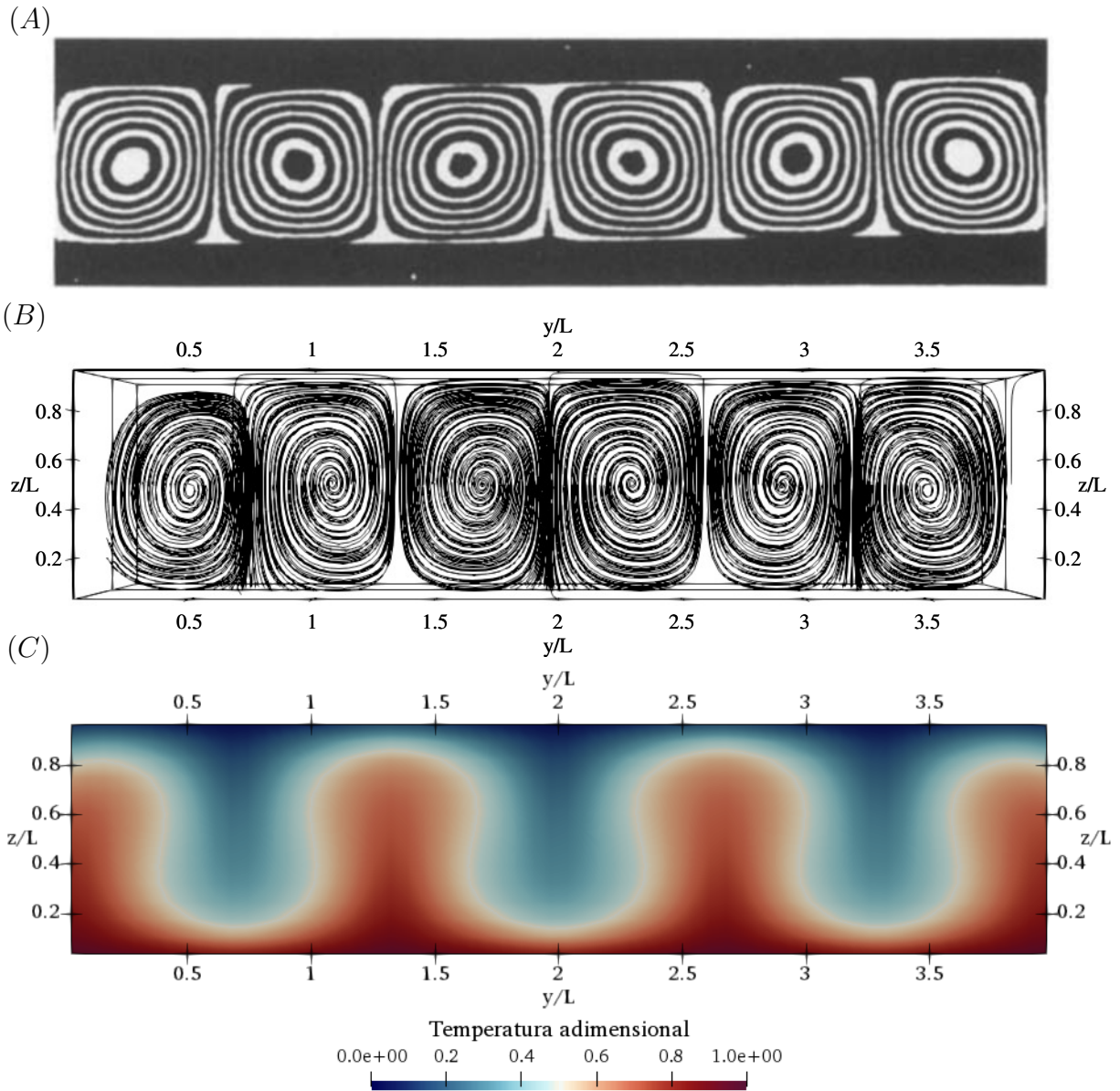
$$\text{Neumann,} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \text{para la cara en} \quad x=0, \quad x=l_x.$$

$$\text{Neumann,} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{para la cara en} \quad y=0, \quad y=l_y.$$

---

<sup>4</sup>El autor no especifica la temperatura.

Los resultados pueden verse en la figura 10.1-(B)-(C). La fotografía capturada por Kirchartz en 1986, muestra un corte vertical del experimento cuyas líneas de corriente dibujan círculos, a diferencia de lo obtenido por la simulación en donde las líneas de corriente dibujan espirales, esto se debe a que el cálculo de éstas considera la coordenada  $x$  de la velocidad. La figura (10.1) nos muestra la importancia que tiene la fuerza de flotación en el fluido, aunque no haya movimiento mecánico del exterior hacia el fluido, éste se mueve por acción del gradiente de temperatura a la cual está sometido y en presencia del campo gravitacional, que para este caso fue una constante en dirección  $-\hat{z}$ . Además, el perfil de temperatura del fluido se deforma graficando valles y crestas, lo cual nos habla de que los efectos no lineales en el transporte de la energía son dominantes debido al alto número de Reynolds utilizado.



**Figura 10.1:** Resultados numérico-experimental de las celdas de Rayleigh-Bénard. (A) Fotografía tomada por Kirchartz, 1986. Usando la técnica de interferograma diferencial, capturó las líneas de corrientes que se muestran en color blanco para un plano vertical. (B) Líneas de corrientes calculados a partir de los resultados de la simulación numérica para el plano  $x=0.25$ , graficado con *ParaView*, de la misma manera su correspondiente (C) campo de temperatura.

## Capítulo IV



# CONVECCIÓN TÉRMICA EN EL OCÉANO

En este capítulo se plantea el problema del transporte de temperatura por convección en el gran océano de la luna Europa, empezando por definir el espacio geométrico para resolver las ecuaciones gobernantes de los termo-fluidos. Posteriormente, se discretiza correctamente las ecuaciones obtenidas como consecuencia de adaptar las ec. diferenciales a la geometría del problema, después se calculan todos los parámetros que se requieren para el método de solución por diferencias finitas, se hace uso del algoritmo 1 para resolver el sistema de ecuaciones y se presentan los resultados.

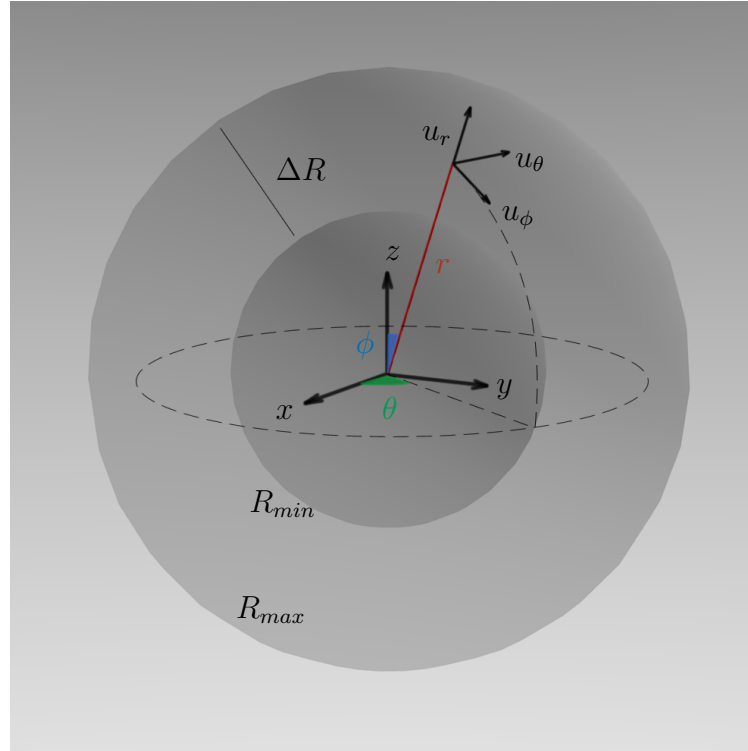
### § 11. Tratado del problema

Se aproxima la forma de la capa de agua de Europa a través de una esfera hueca lisa, esto es, sin valles o crestas en las interfaces manto-agua y agua-hielo, de grosor  $\Delta R$  constante<sup>1</sup>, cuyo radio interno es  $R_{min}$  y su radio externo es  $R_{max}$ , tal que  $\Delta R = R_{max} - R_{min}$ . Por lo tanto, para este sistema la región  $\Omega$  está descrito por el conjunto  $\Omega = [0, 2\pi] \times [R_{min}, R_{max}] \times [0, \pi]$ , como se muestra en la figura 11.1. En donde el sistema de referencia  $xyz$  es colocado en el centro de la esfera hueca, la velocidad  $u_\phi \equiv w$  está definida en dirección sur, es decir el lado positivo apunta hacia el polo sur.

Las transformaciones correspondientes al cambio de coordenada quedan definidas de la siguiente manera:

---

<sup>1</sup>Se ha calculado indirectamente que este grosor, es decir, la profundidad del océano mide entre 30-60 km. Véase [19].



**Figura 11.1:** Esquema 3D del sistema de esferas concéntricas usado como región para la simulación. El sistema de referencia  $xyz$  es colocado en el centro de las esferas, tal que el plano ecuatorial de la luna coincide con el plano  $xy$  del sistema de referencia, la dirección  $z$  positivo apunta al polo norte. Aquí  $u_\theta = u$ ,  $u_r = v$ ,  $u_\phi = w$ .

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin(\theta) \cos(\phi), \\
 y &= r \sin(\theta) \sin(\phi), \\
 z &= r \cos(\theta),
 \end{aligned}
 \tag{11.1}$$

donde  $R_{min} \leq r \leq R_{max}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Bajo estas transformaciones los operadores diferenciales, tales como el Laplaciano y divergencia, toman formas distintas con términos adicionales, por lo tanto las ecuaciones gobernantes (6.7)-(6.11) en su forma adimensional deben ser reescritas como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi w) = 0,
 \tag{11.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial(uv)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(wv)}{\partial \phi} - \frac{u^2 + w^2 - 2v^2}{r} + \frac{wv}{r} \cot \phi = \\ - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 v - \frac{2}{r^2} v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \cot \phi - \frac{2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + (1 - \beta T) g_r, \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial(u^2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(wu)}{\partial \phi} + \frac{3vu}{r} + \frac{(2wu)}{r} \cot \phi = \\ - \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 u + \frac{2}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2 \sin^2 \phi} \right) + (1 - \beta T) g_\theta, \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(vw)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial(uw)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w^2)}{\partial \phi} + \frac{3vw}{r} + \frac{(w^2 - u^2)}{r} \cot \phi = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{Re} \left( \nabla^2 w + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{w}{r^2 \sin^2 \phi} - \frac{2 \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + (1 - \beta T) g_\phi, \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(Tv)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial(Tu)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(Tw)}{\partial \phi} + \frac{2Tv}{r} + \frac{Tw}{r} \cot \phi = \frac{1}{RePr} \nabla^2 T, \quad (11.6)$$

$$\text{donde } \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

El sistema (11.2)-(11.6) es resuelto numéricamente usando el algoritmo 1 para encontrar los valores  $\vec{u}_{i,j,k}^{(n+1)}$ ,  $p_{i,j,k}^{(n+1)}$  y  $T_{i,j,k}^{(n+1)}$  en una malla sobre la región  $\Omega$ , subdividida en intervalos  $i_{max}$ ,  $j_{max}$  y  $k_{max}$ , tal que el tamaño de paso espacial  $\delta\theta = 2\pi/i_{max}$ ,  $\delta r = \Delta R/j_{max}$  y  $\delta\phi = \pi/k_{max}$ .



## § 12. Casos de estudio

Para todos los casos de estudio se usarán los siguientes parámetros para la temperatura. Las temperaturas  $T_C$  y  $T_H$  fueron elegidas arbitrariamente;  $T_\infty$  fue elegida como la temperatura más fría ( $T_C$ ) para que adimensionalmente el problema tenga un rango numérico de  $0 \leq T \leq 1$ . La viscosidad cinemática  $\nu$ , la difusividad térmica  $\alpha$  y el coeficiente de expansión térmica  $\beta$  fueron elegidos considerando agua a  $20^\circ \text{C}$  ( $\sim 290 \text{ K}$ ). El número de Prandtl característico del agua es 7, se puede demostrar calculando  $\nu/\alpha$ . El valor de la gravedad corresponde al valor teórico en la superficie de Europa, sin embargo la variación de la gravedad por la profundidad del océano será discutido más adelante.

$T_C$ [K]	$T_H$ [K]	$T_\infty$ [K]	$\nu$ [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]	$\alpha$ [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]	$\beta$ [1/K]	Pr	$\ \vec{g}\ $ [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]
100	354	100	$1.05 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-4}$	7.0	1.314

En todos los resultados se usaron  $10 \times 60 \times 40$  celdas numéricas, esto es 10 elementos en  $r$ , 60 en  $\theta$  y 40 en  $\phi$ . Las magnitudes características, tales como la velocidad y longitud, se escogieron como  $u_\infty = 500 \text{ m/s}$  y la longitud como  $L = 5 \times 10^5 \text{ m}$ . El orden de magnitud del número de Reynolds resultante se ubica en  $\sim 10^{14}$ , sin embargo para la simulación y fines prácticos, se utilizó un orden de  $\sim 10^3$ . El radio de Europa es  $R_{max} = 1,560 \text{ km}$  que adimensionalmente corresponde a  $r_{max}=3.12$ , la profundidad del océano puede variar entre  $100 \text{ km}$  ó  $500 \text{ km}$  según sea el caso, que adimensionalmente corresponden a  $dr=0.2$  ó  $dr=1.0$ , dejando al radio interno como  $r_{min}=2.92$  ó  $r_{min}=2.12$  respectivamente.

## 12.1. Temperatura del manto rocoso uniforme

El estudio se inicia con el caso más sencillo de simular, una temperatura uniforme en toda la esfera interna, esto es que el calor generado es el mismo en cualquier punto de la esfera  $r = R_{min}$  adimensionalmente esto se traduce a  $T = 1$ , mientras que la temperatura en la esfera externa se mantiene fría,  $T = 0$ . La gravedad actúa uniformemente hacia el centro de las esferas concéntricas, se espera que aparezcan celdas del tipo Rayleigh-Benard.

Los siguientes parámetros fueron introducidos en el algoritmo 1 para su implementación,

$$\begin{aligned} \text{Re}=4,580, & \quad \text{Pr}=7.0, & \quad \text{Gamma}=0.85, & \quad \text{Beta}=0.05334, \\ \text{gphi}=0.0, & \quad \text{gth}=0.0, & \quad \text{gr}=-2.628, & \quad \text{dt}=0.005, & \quad \text{Tmax}=1.8e5, \\ \text{lth}=6.28318, & \quad \text{lphi}=3.14159, & \quad \text{lr}=0.2, & \quad \text{rmin}=2.92, & \quad \text{rmax}=3.12, \\ & \quad \text{dth}=0.1047, & \quad \text{dphi}=0.0785, & \quad \text{dr}=0.02. \end{aligned}$$

Con las siguientes condiciones de frontera,

$$\text{No deslizamiento,} \quad u=0, v=0, w=0, \quad \text{para la cara en } r = R_{min}, \quad x = R_{max}.$$

$$\text{Periodica,} \quad \text{para la cara en } \theta = 0, \quad \theta = 2\pi.$$

$$\text{Flujo saliente,} \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0, \quad \text{para la cara en } \phi = 0, \quad \phi = \pi.$$

$$\text{Dirichlet,} \quad T=1.0, \quad \text{para la cara en } r = R_{min}.$$

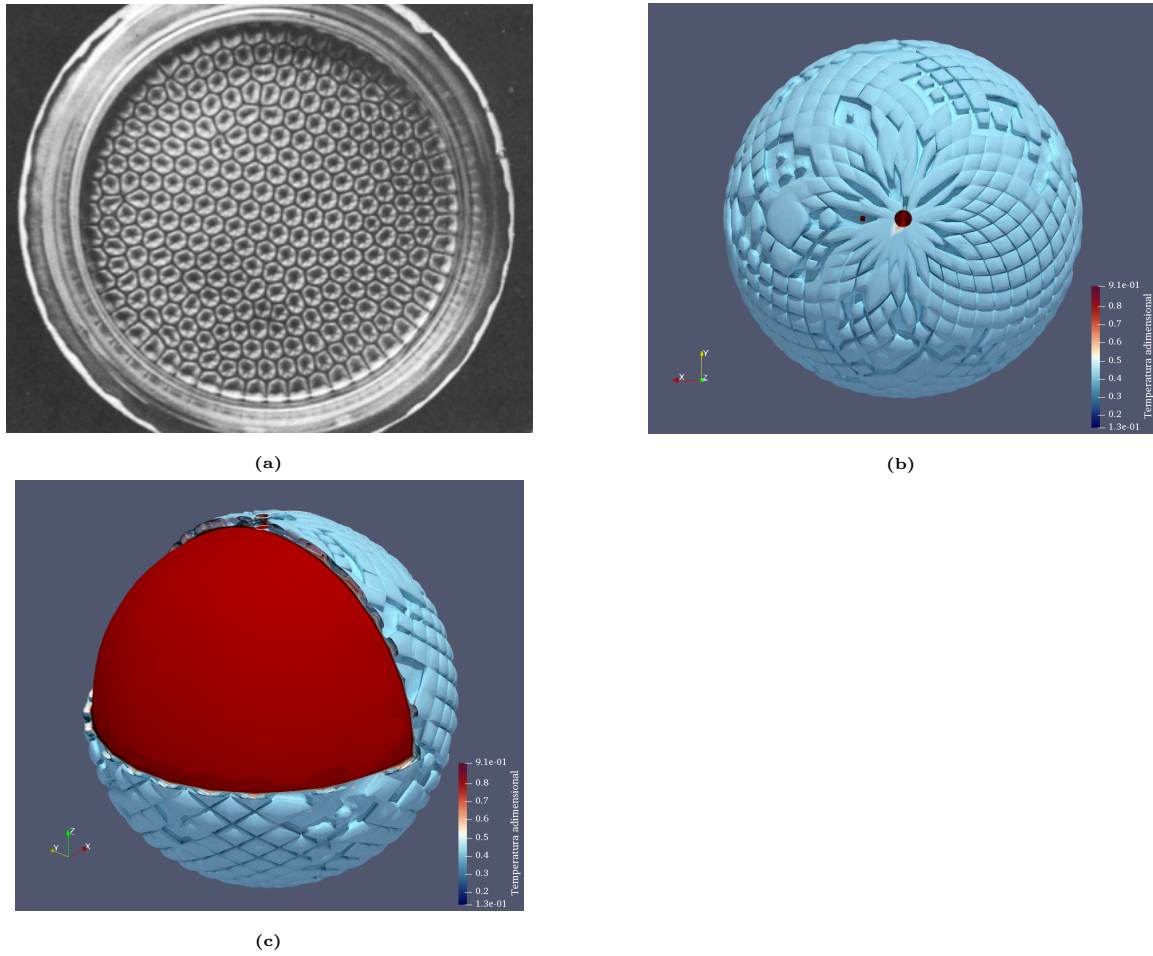
$$\text{Dirichlet,} \quad T=0.0, \quad \text{para la cara en } r = R_{max}.$$

$$\text{Neumann,} \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, \quad \text{para la cara en } \phi = 0, \quad \phi = \pi.$$

$$\text{Periodica,} \quad \text{para la cara en } \theta = 0, \quad \theta = 2\pi.$$

Los resultados se pueden ver en la figura 12.1. En 1974, Koshcmieder [20], obtuvo resultados experimentales sobre convección térmica horizontal en capas muy delgadas de fluidos; en un recipiente circular de diámetro 200 mm de cristal cerrado se calentó uniformemente por debajo una capa muy delgada de aceite de silicón, su volumen no ocupó todo el volumen del recipiente, se dejó una capa de aire por encima de éste, la delgadez de la capa fue de 5.15 mm bajo un gradiente de  $\Delta T = 24^\circ\text{C}$  entre la capa de aire y el fondo del recipiente. Cuando

los efectos convectivos aparecen, la superficie libre del aceite de silicón se deforma, la luz reflejada por los focos del laboratorio deja visualizar una estructura tipo “panal de abeja”, celdas convectivas hexagonales, figura 12.1-(a). A esta inestabilidad se le conoce como *inestabilidad de Rayleigh-Benard-Marangoni* o bien *estructuras convectivas de Benard-Marangoni*, un estudio numérico de esta inestabilidad se puede consultar en [21]. Resultados semejantes fueron obtenidos en este caso de estudio para una capa de grosor adimensional  $1r=0.2$ . Celdas cuadradas fueron visualizadas para las iso-superficies de temperatura adimensional  $0.3 < T < 0.7$ . Aunque esta simulación no considera dos materiales como silicon-aire reportado por Koshcmieder y no se compara con su superficie libre, se presentan estructuras geométricas en la dinámica del fluido simulado derivados de efectos convectivos en un capa muy delgada, figura 12.1-(b) y (c).



**Figura 12.1:** (a) Fotografía tomada por Koshcmieder en 1974, experimento de las estructuras convectivas de las celdas de Benard-Marangoni, se visualiza la superficie libre del aceite de silicón. (b) Resultados numéricos para las iso-superficies de temperatura adimensional, se muestra la capa para  $T = 0.4$  vista desde arriba del polo norte del sistema. (c) Se visualizan las iso-superficies de temperatura en la región  $\Omega - \{[90, 270] \times [R_{min}, R_{max}] \times [0, \pi/2]\}$  hasta  $T = 0.4$ , además de la capa  $r = 2.94$  con temperatura uniforme  $T = 1.0$ .

## 12.2. Temperatura del manto rocoso no uniforme

En un estudio para el cálculo de la disipación de energía por fuerzas de mareas en la luna Ío realizado por Segatz *et. al.* [6] se describe que la energía liberada por fuerzas de mareas no es uniforme en la superficie de la capa de deformación. Para la superficie de la capa rocosa de Europa –interfase roca-agua– y bajo la descripción de Segatz, la energía disipada por las mareas debido a Júpiter no tiene un perfil uniforme, de acuerdo a Galindo *et. al.* [22], ésta debe ser como se describe en la figura 12.2-(a).

Si se supone que no hay pérdida de energía por radiación y toda la energía disipada se transforma en calor, la función  $T(\theta, \phi)$  (12.1), aproxima el perfil de temperatura resultante, véase figura 12.2-(b), bajo este perfil se quiere conocer su transporte a través del océano por convección térmica. La condición de frontera para la temperatura en la esfera interna será una función  $T(\theta, \phi)$ , descrita analíticamente por

$$T(\theta, \phi) = \frac{1}{0.4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\phi-\pi/2)^2}{2(0.4)^2}} (1 - \cos^2(2\theta))^2. \quad (12.1)$$

Los siguientes parámetros fueron introducidos en el algoritmo 1 para su implementación,

$$\begin{aligned} \text{Re}=6,530, & \quad \text{Pr}=7.0, & \quad \text{Gamma}=0.85, & \quad \text{Beta}=0.05334, \\ \text{gphi}=0.0, & \quad \text{gth}=0.0, & \quad \text{gr}=-2.628, & \quad \text{dt}=0.005, & \quad \text{Tmax}=1.8e5, \\ \text{lth}=6.28318, & \quad \text{lphi}=3.14159, & \quad \text{lr}=0.2 \text{ ó } \text{lr}=1.0, \\ \text{rmin}=2.92 \text{ ó } \text{rmin}=2.12, & \quad \text{rmax}=3.12, \\ \text{dth}=0.1047, & \quad \text{dphi}=0.0785, & \quad \text{dr}=0.02 \text{ ó } \text{dr}=0.1. \end{aligned}$$

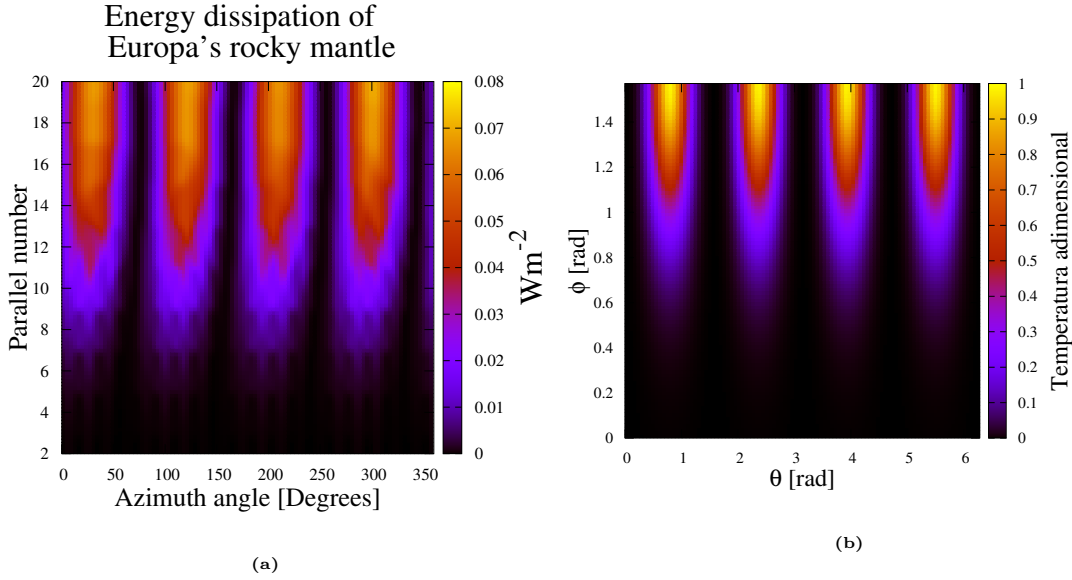
Con las siguientes condiciones de frontera,

$$\text{No deslizamiento,} \quad u=0, v=0, w=0, \quad \text{para la cara en } r = R_{min}, \quad x = R_{max}.$$

$$\text{Periodica,} \quad \text{para la cara en } \theta = 0, \quad \theta = 2\pi.$$

$$\text{Flujo saliente,} \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0, \quad \text{para la cara en } \phi = 0, \quad \phi = \pi.$$

$$\text{Dirichlet,} \quad T = T(\theta, \phi), \quad \text{para la cara en } r = R_{min}.$$

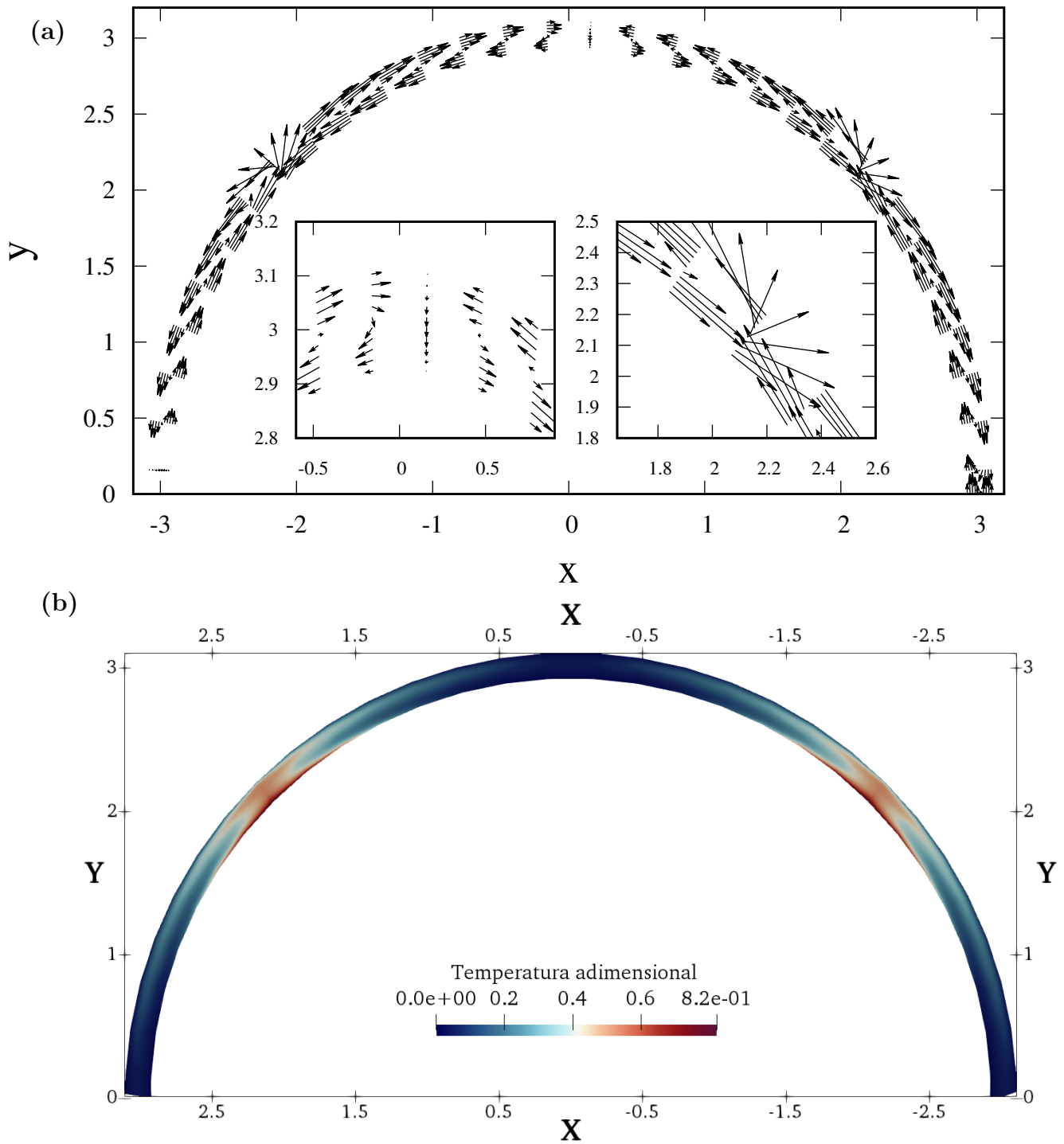


**Figura 12.2:** Mapa cartesiano de los perfiles de calor por mareas en el manto rocoso de la luna Europa; se visualiza media esfera en coordenadas cartesianas. (a). Perfil de energía disipada obtenido por E. Galindo [22], se modeló media esfera por simetría norte-sur; el paralelo 20 corresponde al ecuador y el 2 es un círculo polar, el ángulo azimutal 0 corresponde al meridiano que está en dirección a Júpiter. (b) Perfil de temperatura adimensional aproximado por una función analítica  $T(\theta, \phi)$ .

$$\begin{aligned}
 &\text{Dirichlet,} & T=0.0, & \text{para la cara en } r = R_{max}. \\
 &\text{Neumann,} & \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, & \text{para la cara en } \phi = 0, \quad \phi = \pi. \\
 &\text{Periodica,} & & \text{para la cara en } \theta = 0, \quad \theta = 2\pi.
 \end{aligned}$$

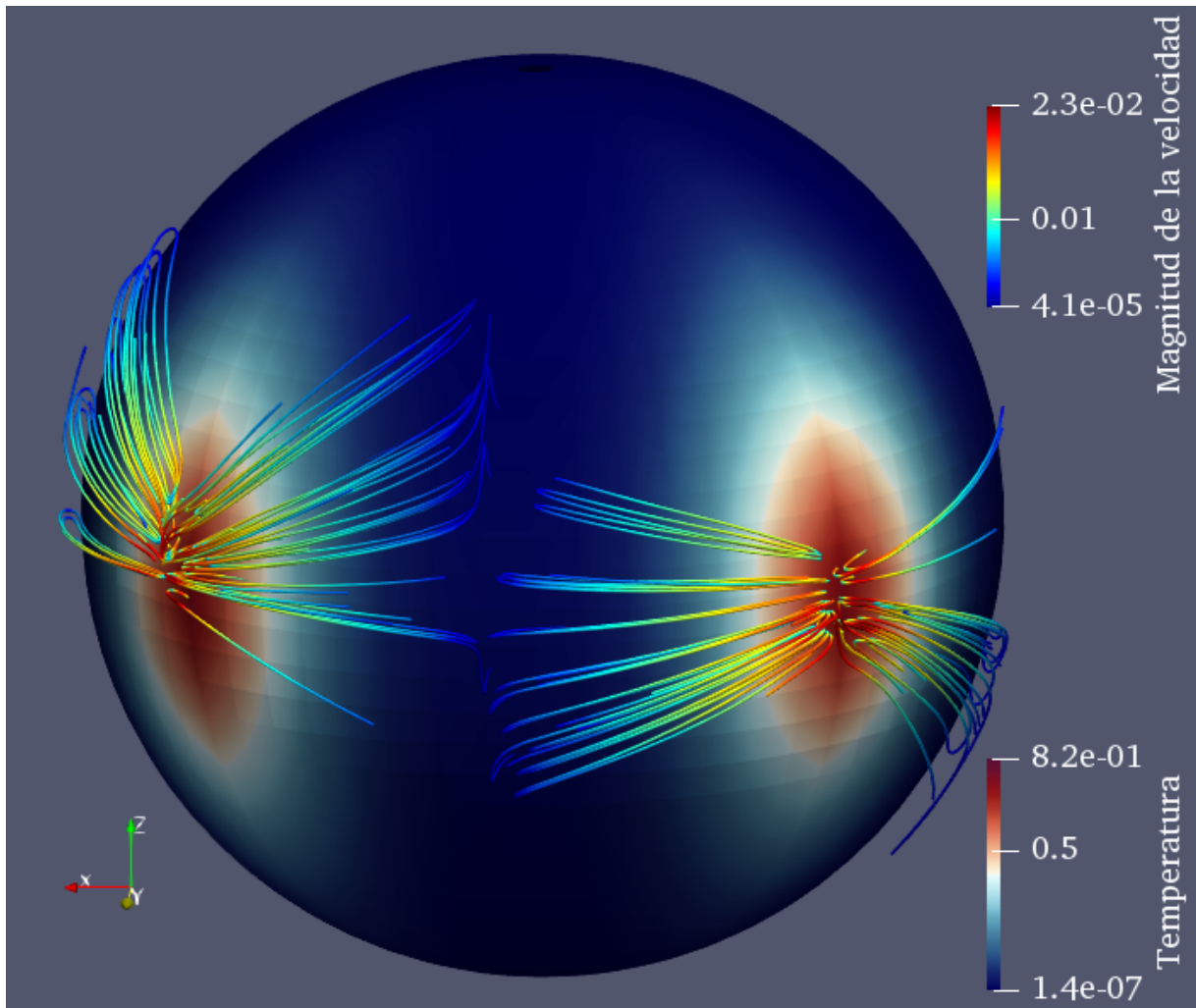
En la figura 12.3 se muestran los resultados obtenidos de la simulación para una capa oceánica de 100 km que corresponde al valor numérico  $lr=0.2$ . Nótese que la región simulada en la dirección radial es muy pequeña, se tiene un acercamiento en la figura (12.3)-(a) para las zonas de ascenso y descenso de fluido. En las zonas de ascenso se puede encontrar aquellos puntos donde la función (12.1) tiene su máximo valor, la energía liberada en esta zona se transforma en energía mecánica que mueve al fluido hacia la interfase hielo-agua; la magnitud de la velocidad en esta zona es máxima, posteriormente, por conservación de masa, el fluido desarrolla una corriente marina en dirección opuesta a la fuente y muy cerca de la interfase hielo-agua, cuando la corriente se aleja de la fuente térmica su energía cinética baja y su temperatura, al igual que su volumen, disminuye haciéndola caer por gravedad hasta llegar al fondo oceánico, finalmente el fluido que ha salido de la fuente produce una ausencia de material en ese punto, ahora el fluido que se alejó de la fuente se

$$\Delta R = 100 \text{ km } (l_r = 0.2)$$



**Figura 12.3:** Corte de la región  $\Omega$  para  $z = 0$  (plano ecuatorial) que, a su vez, se muestran valores para  $y \geq 0$ , la mitad del plano. (a) Campo de velocidad reescalados por un factor  $\Gamma = 10$  y su correspondiente (b) perfil de temperatura.

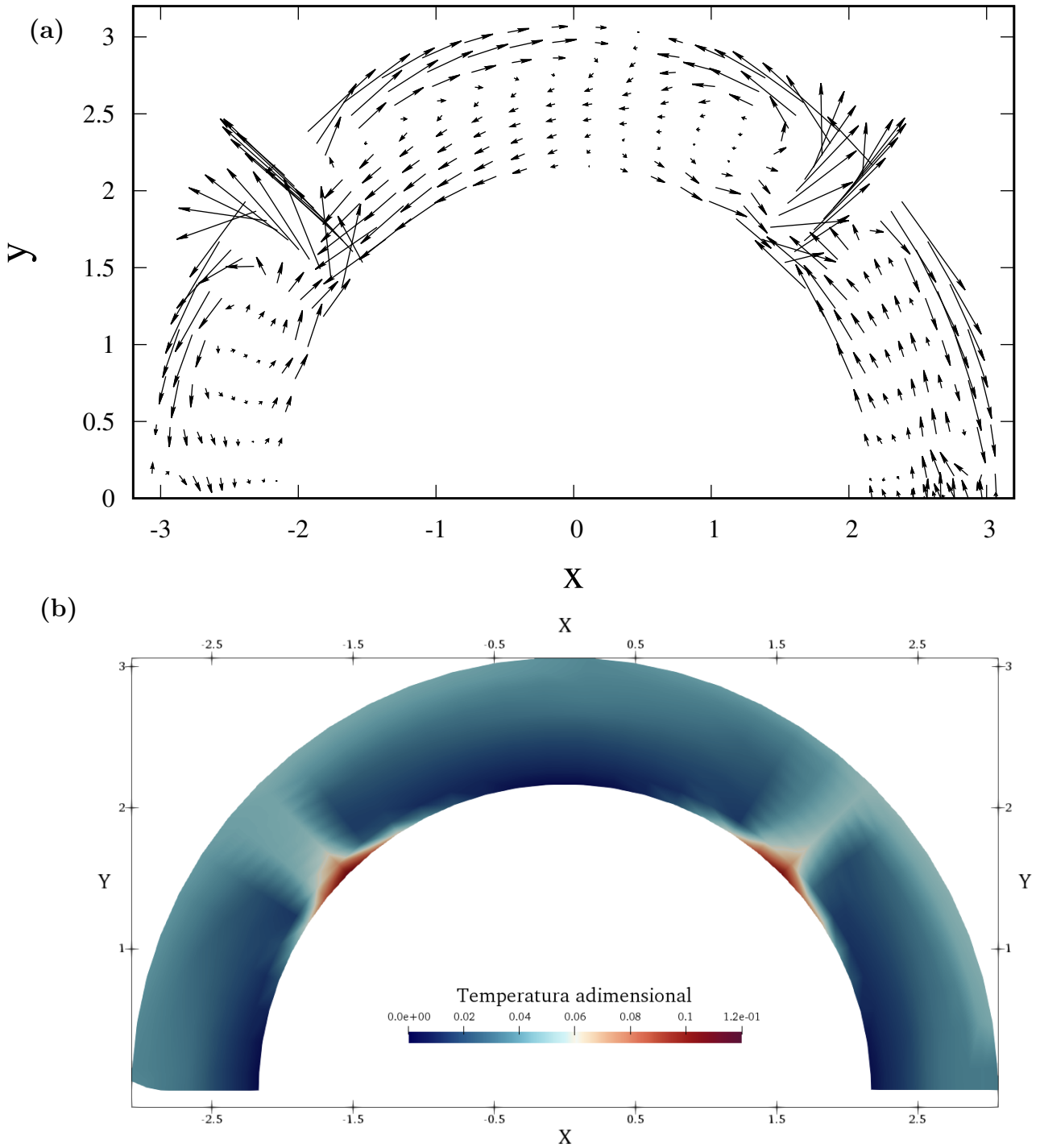
$$\Delta R=100 \text{ km } (l_r=0.2)$$



**Figura 12.4:** Líneas de corriente calculados a partir del campo de velocidades obtenidos de la simulación, se calculó en algunos puntos principalmente en las zonas de máxima temperatura, se usó *forward stream tracer* en *ParaView*. También se visualiza el campo de temperatura para  $r = 2.94$ .

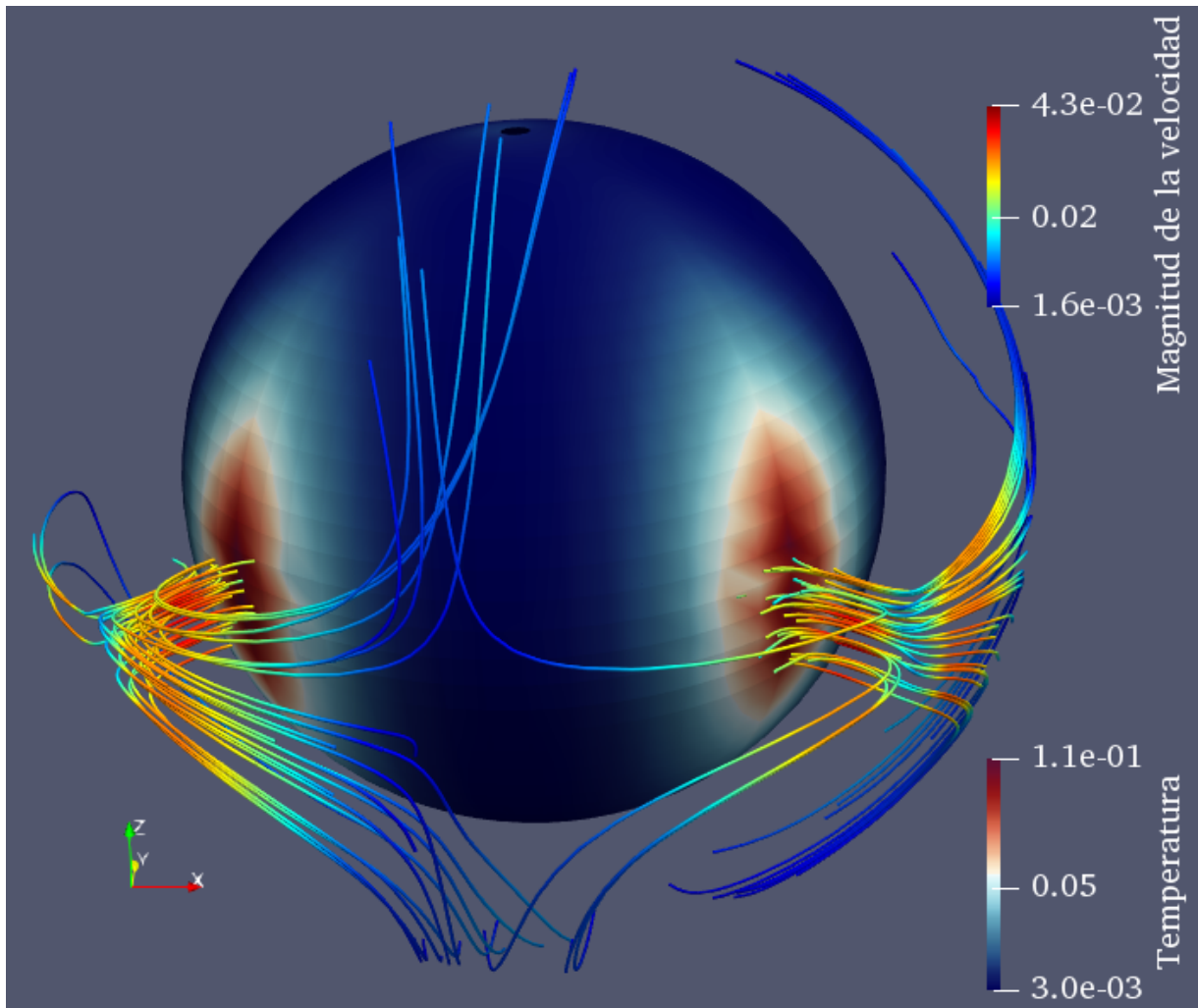


$$\Delta R = 500 \text{ km } (l_r = 1.0)$$



**Figura 12.5:** Corte de la región  $\Omega$  para  $z = 0$  (plano ecuatorial) que, a su vez, se muestran valores para  $y \geq 0$ , la mitad del plano. (a) Campo de velocidad reescalados por un factor  $\Gamma = 10$  y su correspondiente (b) perfil de temperatura.

$$\Delta R=500 \text{ km } (l_r=1.0)$$

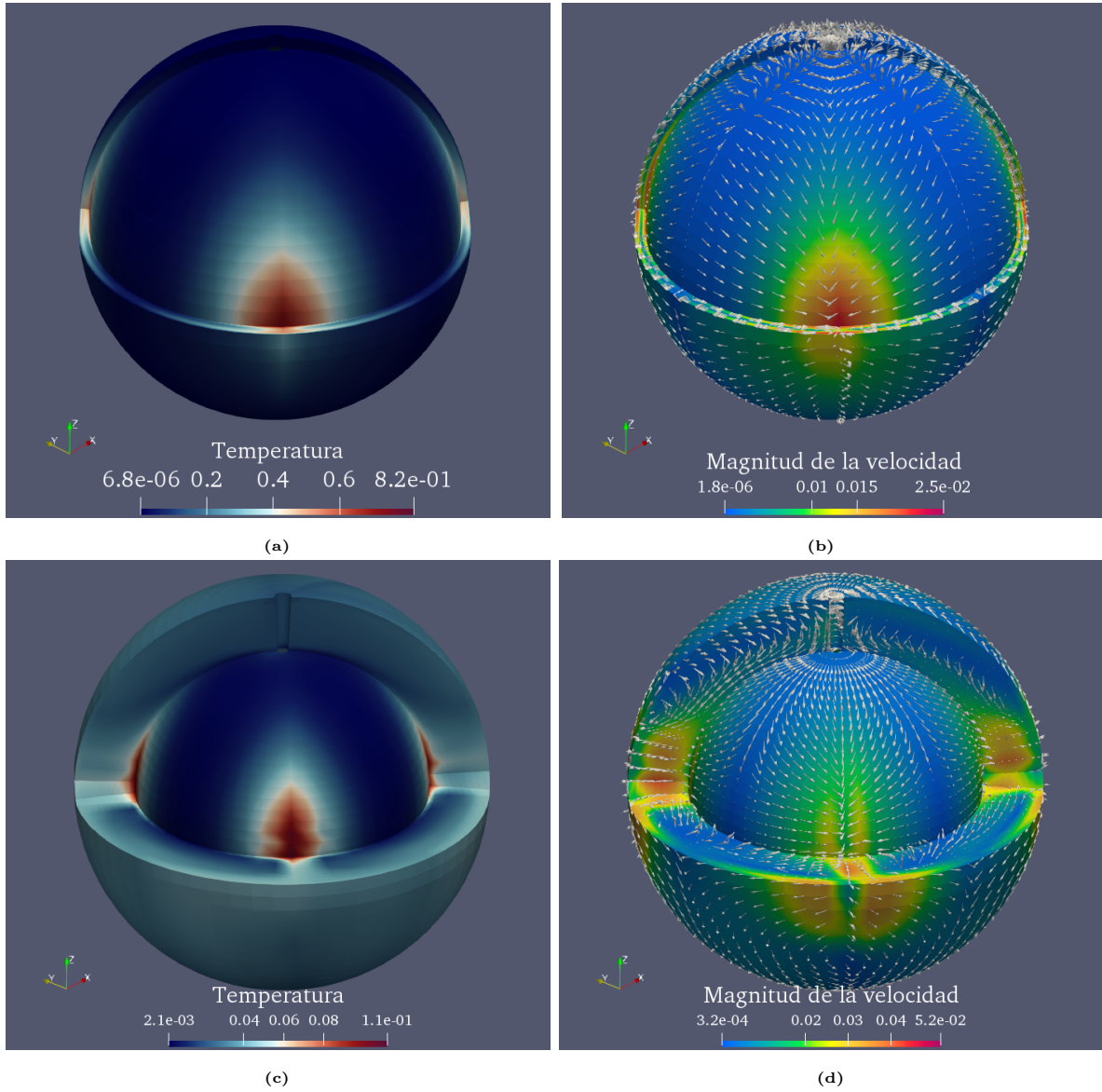


**Figura 12.6:** Líneas de corriente calculados a partir del campo de velocidades obtenidos de la simulación, se calculó en algunos puntos principalmente en las zonas de máxima temperatura, se usó *forward stream tracer* en *ParaView*. También se visualiza el campo de temperatura para  $r = 2.18$ .

mueve de regreso a la fuente en cumplimiento con el principio de conservación de masa, la corriente marina que regresa se encuentra cerca de la interfase agua-roca. Las líneas de corriente resultante de ese recorrido se pueden ver en la figura 12.4.

Un segundo caso fue simulado para un océano con profundidad de 500 km que corresponde a  $1r=1.0$  y  $dr=0.1$ , el campo de velocidad y el campo de temperatura resultante se muestra en la figura 12.5. En esta ocasión, el sistema tiene más espacio para desarrollarse y se nota una dinámica semejante a la anterior, las dos fuentes de momento se pueden observar en el mismo lugar, esto corresponde al lugar donde se desarrollan las plumas térmicas, el fluido asciende hasta la interfase agua-hielo y es desplazado a través del ecuador, encontrando otra corriente marina semejante que lo obliga a desplazarse hacia los polos, en ese punto, el fluido pierde mayormente su energía cinética y disminuye su temperatura, cae al fondo oceánico y regresa a la fuente por conservación de masa.

Una visualización en tres dimensiones de los resultados obtenidos para cada caso se muestra en la figura 12.7. Nótese que para cualquier caso, las zonas de máxima temperatura actúan como sumidero para la primera capa simulada, es decir, el campo de velocidades apunta hacia el origen de la pluma térmica, mientras que para la última capa actúa como fuente, es decir en dirección contraria. La magnitud de la velocidad es máxima en estos puntos.



**Figura 12.7:** Vista en 3D de los resultados, se visualiza la región  $\Omega - \{[135, 315] \times [R_{min}, R_{max}] \times [0, \pi/2]\}$ , también se presenta la primera capa simulada, esto es para  $r = 2.18$  para el caso 500 km y  $r = 2.98$  para el caso 100 km.  $\Delta R = 100$  km; **(a)** campo de temperatura adimensional en su representación volumétrica. **(b)** Campo de velocidades no escalado y magnitud de la velocidad adimensional.  $\Delta R = 500$  km; **(c)** campo de temperatura adimensional en su representación volumétrica. **(d)** Campo de velocidades no escalado y magnitud de la velocidad adimensional.

## Capítulo V



# CONCLUSIONES

En todos los casos, la convección térmica es muy importante en la dinámica del fluido simulado, tanto para el estudio de inestabilidades como para el transporte de material y temperatura en los océanos. Aunque estas grandes dimensiones espaciales de simulación se pueden tratar adimensionalmente, los resultados presentados en el capítulo anterior consideran un fluido laminar e incompresible y no considera turbulencia en su dinámica; ello aparece generalmente cuando el orden de magnitud del número de Reynolds  $Re$  es muy grande –como simular el océano de la luna Europa  $Re \sim 10^{14}$ –, en otras palabras, los resultados presentados en este trabajo son la primera aproximación de la dinámica del fluido el cual se basa en las leyes de conservación de masa, momento y energía sin tomar en cuenta efectos como la turbulencia.

Numéricamente, tratar con un número de Reynolds alto es complicado, computacionalmente, se debe considerar la precisión doble ó 64 bits en los cálculos, el cual cuesta mucho tanto al procesador como a la memoria. El método de diferencias finitas tiene un límite definido por este número de Reynolds, el cual se notó a partir de  $\sim 10^4$ , se reporta que el método funciona en un rango de  $10^{-1} < Re < 10^3$  a precisión simple ó 32 bits. De acuerdo a las ecs. (6.7)-(6.11) si el número de Reynolds es grande; el término difusivo es muy pequeño y los términos convectivos aparecen, es decir el sistema es altamente no lineal, haciendo que oscilaciones aparezcan, esto implica puntos en el sistema donde los gradientes, tanto para la velocidad como para la temperatura, son muy grandes cuya representación requiere precisión doble.

- **Temperatura del manto rocoso uniforme** En el caso más sencillo de simular, se presentó la inestabilidad que da lugar a las celdas de Rayleigh-Benard como en la figura 10.1, pero esta vez el número de celdas convectivas superó las 30 unidades en el sistema, esto se debe a que la altura de la capa de fluido simulada es mucho menor a las otras dos dimensiones, es decir  $lr \ll l_\theta, l_\phi$ , además con el alto número de Reynolds  $Re = 4,580$  tiene el espacio suficiente para desarrollar un perfil de temperatura y un campo de velocidades altamente oscilante en dirección  $\theta$  y  $\phi$ . La comparación numérico-experimental mostró que los resultados son lo esperado para capas de fluidos muy pequeñas en convección térmica.
- **Temperatura del manto rocoso dependiente de los ángulos azimutal ( $\theta$ ) y colatitud ( $\phi$ ).** La razón por la cual se usó diferentes profundidades del océano, se debe sólo a la visualización de los datos. En un principio se tenía en cuenta sólo una corrida del algoritmo 1 por caso, esto es para  $\Delta R = 60$  km, que es valor promedio donde la mayoría de los autores estiman la altura de la capa oceánica en Europa, sin embargo capas muy delgadas no permitían la correcta visualización de, por ejemplo, el campo de velocidades y la temperatura, se decidió aumentar el tamaño de la capa a 100 km y posteriormente a 500 km. Variar la altura nos permitió visualizar y comparar la dinámica del sistema entre ellas.

El tiempo físico simulado para el océano en ambas alturas corresponde a  $9 \times 10^5$  seg ( $\sim 10$  días terrestres); esta conversión se puede realizar haciendo uso de las cantidades adimensionales (6.6), que corresponde aproximadamente tres periodos orbitales de Europa sobre Júpiter<sup>1</sup>. Sin embargo los estudios de la disipación de energía en la luna Europa por las mareas predice que el perfil de temperatura  $T(\theta, \phi)$ , (12.1), no es independiente del tiempo, la dinámica del océano presentada en este trabajo corresponde a un punto en la orbita de Europa donde la disipación de energía es máxima, aquí se requiere modificar el algoritmo 1 para considerar condiciones de

---

<sup>1</sup>El periodo orbital de Europa sobre Júpiter es de 3.55 días terrestres, véase [1]

frontera dependientes del tiempo.

El campo de temperatura mostró una notable diferencia cuantitativamente para ambos casos, la temperatura máxima en el fluido para  $\Delta R = 100$  km fue de 308.28 K, que representan  $\sim 87\%$  de la temperatura generada por las mareas en la interfase roca-agua, muy cerca de las zonas de máxima disipación, esto es a  $\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  y  $\phi = \pi/2$  respecto al sistema de referencia descrito en la figura 11.1, el promedio de la temperatura en el océano fue de 123.36 K  $\sim 35\%$ . Mientras que para  $\Delta R = 500$  km la máxima fue de 127.94 K,  $\sim 36\%$  del generado por mareas en las mismas zonas del caso anterior, la temperatura oceánica promedio se ubicó en 106.85 K  $\sim 30\%$ . Bajo este modelo, el transporte de temperatura hacia los polos debido a las mareas es casi nulo. La temperatura transportada directamente en dirección  $r$  desde la fuente hacia la capa de hielo es considerable, es posible que en estos puntos una segunda convección térmica se lleve a cabo en la capa de hielo, una evidencia útil para explicar los patrones de quebraduras encontrados por la sonda Voyager en la superficie de Europa y del hielo parcialmente joven [22].

Para ambos casos el perfil de velocidades presentan la misma dinámica, el material saliente de las fuentes de temperatura es movido por flotación hacia la interfase hielo-agua, posteriormente es transportado en dirección opuesta a la fuente muy cerca de esta interfase, después su energía cinética baja al igual que su temperatura, cae al fondo oceánico y es desplazado de regreso a la fuente muy cerca de la interfase roca-agua, tal y como se muestra en las líneas de corriente para la figura 12.4 y 12.6. En la figura 12.3-(a), para  $\Delta R = 100$  km, se observan dos perfiles parabólicos para la componente  $u(r)$  de la velocidad, uno en dirección contraria a la otra, si el número de Reynolds aumenta y  $\Delta R$  disminuye, el gradiente de velocidades a lo largo del eje  $r$ ,  $du(r)/dr$ , será demasiado grande, en este escenario, se predice la aparición de la *inestabilidad de Kelvin-Helmholtz*, un estudio numérico de este fenómeno fue realizado por Fatehi en 2013 [23] y experimentalmente por Thorpe [24]. La máxima velocidad encontrada en la simulación fue de 12.0 m/seg ( $\sim 43$  km/h) para el caso

de 100 km y 21.5 m/seg ( $\sim 77$  km/h) para el caso de 100 km.

En conclusión, existe la convección térmica en el océano de la luna Europa, cuyas plumas térmicas son generadas en las zonas donde la energía disipada en el manto rocoso es máxima, bajo el modelo de un fluido incompresible y en un régimen laminar, se obtuvo cualitativamente el perfil de temperatura cuya energía asociada fue transportada a través del océano, se encontró que en el ecuador de Europa una segunda convección térmica puede generarse en la capa de hielo.

De acuerdo a los modelos gravitatorios, un tercer caso se realizó bajo el título de “Gravedad no uniforme”, su objetivo fue variar el valor de la gravedad respecto al radio de Europa y se dejó el perfil de temperatura en la esfera interna como no uniforme descrita por la función (12.1), sin embargo, no se encontró diferencia considerable en los datos obtenidos por el algoritmo 1.

A futuro, se busca considerar más fenómenos que contribuyan a la dinámica del océano, como es la atracción gravitatoria de Júpiter sobre el océano, considerar el efecto de Coriolis o modificar el algoritmo 1 para considerar la turbulencia.



## Apéndice A



### TEOREMAS

- **Teorema del transporte de Reynolds.**

El teorema de transporte de Reynolds relaciona un sistema de referencia Lagrangiano y Euleriano a través de

$$\frac{D}{Dt} \int_v \alpha dV = \int_v \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dV,$$

donde  $\alpha$  es cualquier propiedad del fluido como densidad o momento,  $V$  es un volumen de control y  $D/Dt$  es la derivada material desde un sistema Lagrangiano.

- **Teorema de Taylor.** El teorema de Taylor aproxima localmente a una función alrededor de un punto a través de un polinomio.

Sea  $l \geq 1$  un numero entero y  $f$  una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable  $l$  veces en el punto  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces el polinomio de Taylor de orden  $l$  es

$$f(x) = f(a) + f'(a_0)(x - a_0) + \frac{f''(a_0)}{2!}(x - a_0)^2 + \dots + \frac{f^{(l)}(a_0)}{l!}(x - a_0)^l.$$

- **Teorema de Gauss.**

$$\int_S \vec{a} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{a} dV,$$

donde  $V$  es cualquier volumen y  $S$  es la superficie que contiene a  $V$ , el vector unitario normal a  $S$  es  $\hat{n}$  y  $\vec{a}$  es cualquier vector.

## Apéndice B



# DISCRETIZACIÓN DE LOS TÉRMINOS CONVECTIVOS

▪  $\nabla \cdot (v\vec{u}) \equiv \left[ \frac{\partial(vu)}{\partial x} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right]_{i,j,k}$  donde

$$\left[ \frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta y} \left( \left( \frac{v_{i,j,k} + v_{i,j+1,k}}{2} \right)^2 - \left( \frac{v_{i,j-1,k} + v_{i,j,k}}{2} \right)^2 \right)$$

$$+ \gamma \frac{1}{\delta y} \left( \frac{|v_{i,j,k} + v_{i,j+1,k}|}{2} \frac{(u_{i,j,k} - v_{i,j+1,k})}{2} - \frac{|v_{i,j-1,k} + v_{i,j,k}|}{2} \frac{(v_{i,j-1,k} - v_{i,j,k})}{2} \right),$$

$$\left[ \frac{\partial(vu)}{\partial x} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta x} \left( \frac{(u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k})}{2} \frac{(v_{i,j,k} + v_{i+1,j,k})}{2} - \frac{(u_{i-1,j,k} + u_{i-1,j+1,k})}{2} \frac{(v_{i-1,j,k} + v_{i,j,k})}{2} \right)$$

$$+ \gamma \frac{1}{\delta x} \left( \frac{|u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}|}{2} \frac{(v_{i,j,k} - v_{i+1,j,k})}{2} - \frac{|u_{i-1,j,k} + u_{i-1,j+1,k}|}{2} \frac{(v_{i-1,j,k} - u_{i,j,k})}{2} \right),$$

$$\left[ \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta z} \left( \frac{(w_{i,j,k} + w_{i,j+1,k})}{2} \frac{(v_{i,j,k} + v_{i,j,k+1})}{2} - \frac{(w_{i,j,k-1} + w_{i,j+1,k-1})}{2} \frac{(v_{i,j,k-1} + v_{i,j,k})}{2} \right)$$

$$+ \gamma \frac{1}{\delta z} \left( \frac{|w_{i,j,k} + w_{i,j+1,k}|}{2} \frac{(v_{i,j,k} - v_{i,j,k+1})}{2} - \frac{|w_{i,j,k-1} + w_{i,j+1,k-1}|}{2} \frac{(v_{i,j,k-1} - v_{i,j,k})}{2} \right).$$

$$\blacksquare \nabla \cdot (w\vec{u}) \equiv \left[ \frac{\partial(wu)}{\partial x} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial(wv)}{\partial y} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right]_{i,j,k} \text{ donde}$$

$$\left[ \frac{\partial(wu)}{\partial x} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta x} \left( \frac{(u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1})(w_{i,j,k} + w_{i+1,j,k})}{2} - \frac{(u_{i-1,j,k} + u_{i-1,j,k+1})(w_{i-1,j,k} + w_{i,j,k})}{2} \right)$$

$$+ \gamma \frac{1}{\delta x} \left( \frac{|u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}|(w_{i,j,k} - w_{i+1,j,k})}{2} - \frac{|u_{i-1,j,k} + u_{i-1,j,k+1}|(w_{i-1,j,k} - w_{i,j,k})}{2} \right),$$

$$\left[ \frac{\partial(wv)}{\partial y} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta y} \left( \frac{(v_{i,j,k} + v_{i,j,k+1})(w_{i,j,k} + w_{i,j+1,k})}{2} - \frac{(v_{i,j,k-1} + v_{i,j,k})(w_{i,j,k-1} + w_{i,j+1,k-1})}{2} \right)$$

$$+ \gamma \frac{1}{\delta y} \left( \frac{|v_{i,j,k} - v_{i,j,k+1}|(w_{i,j,k} + w_{i,j+1,k})}{2} - \frac{|v_{i,j,k-1} - v_{i,j,k}|(w_{i,j,k-1} + w_{i,j+1,k-1})}{2} \right),$$

$$\left[ \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right]_{i,j,k} := \frac{1}{\delta z} \left( \left( \frac{w_{i,j,k} + w_{i,j,k+1}}{2} \right)^2 - \left( \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k}}{2} \right)^2 \right)$$

$$+ \gamma \frac{1}{\delta z} \left( \frac{|w_{i,j,k} + w_{i,j,k+1}|(w_{i,j,k} - w_{i,j,k+1})}{2} - \frac{|w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k}|(w_{i,j,k-1} - w_{i,j,k})}{2} \right).$$

$$\blacksquare \nabla \cdot (T\vec{u}) \equiv \left[ \frac{\partial(Tu)}{\partial x} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial(Tv)}{\partial y} \right]_{i,j,k} + \left[ \frac{\partial(Tw)}{\partial z} \right]_{i,j,k} \text{ donde}$$

$$\left[ \frac{\partial(Tu)}{\partial x} \right]_{i,j,k} = \frac{1}{\delta x} \left( u_{i,j,k} \frac{(T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k})}{2} - u_{i-1,j,k} \frac{(T_{i-1,j,k} + T_{i,j,k})}{2} \right)$$

$$+ \frac{\gamma}{\delta x} \left( |u_{i,j,k}| \frac{(T_{i,j,k} - T_{i+1,j,k})}{2} - |u_{i-1,j,k}| \frac{(T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k})}{2} \right),$$

$$\left[ \frac{\partial(Tv)}{\partial y} \right]_{i,j,k} = \frac{1}{\delta y} \left( v_{i,j,k} \frac{(T_{i,j,k} + T_{i,j+1,k})}{2} - v_{i,j-1,k} \frac{(T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k})}{2} \right)$$

$$+ \frac{\gamma}{\delta y} \left( |v_{i,j,k}| \frac{(T_{i,j,k} - T_{i,j+1,k})}{2} - |v_{i,j-1,k}| \frac{(T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k})}{2} \right),$$

$$\left[ \frac{\partial(Tw)}{\partial z} \right]_{i,j,k} = \frac{1}{\delta z} \left( w_{i,j,k} \frac{(T_{i,j,k} + T_{i,j,k+1})}{2} - w_{i,j,k-1} \frac{(T_{i,j,k-1} + T_{i,j,k})}{2} \right)$$

$$+ \frac{\gamma}{\delta w} \left( |w_{i,j,k}| \frac{(T_{i,j,k} - T_{i,j,k+1})}{2} - |w_{i,j,k-1}| \frac{(T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k})}{2} \right).$$

## Apéndice C



# CONDICIONES DE FRONTERA NUMÉRICOS

- No deslizamiento

En $x = 0$ ó $x = l_x$ para todo $j = 1, \dots, j_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{0,j,k} = 0$ , $v_{0,j,k} = -v_{1,j,k}$ , $w_{0,j,k} = -w_{1,j,k}$ .
$u_{i_{max},j,k} = 0$ , $v_{i_{max}+1,j,k} = -v_{i_{max},j,k}$ , $w_{i_{max}+1,j,k} = -w_{i_{max},j,k}$ .

En $y = 0$ ó $y = l_y$ para todo $i = 1, \dots, i_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{i,0,k} = -u_{i,1,k}$ , $v_{i,0,k} = 0$ , $w_{i,0,k} = -w_{i,1,k}$ .
$u_{i,j_{max}+1,k} = -u_{i,j_{max},k}$ , $v_{i,j_{max},k} = 0$ , $w_{i,j_{max}+1,k} = -w_{i,j_{max},k}$ .

En $z = 0$ ó $z = l_z$ para todo $i = 1, \dots, i_{max}$ , $j = 1, \dots, j_{max}$
$u_{i,j,0} = -u_{i,j,1}$ , $v_{i,j,0} = -v_{i,j,1}$ , $w_{i,j,0} = 0$ .
$u_{i,j,k_{max}+1} = -u_{i,j,k_{max}}$ , $v_{i,j,k_{max}+1} = -v_{i,j,k_{max}}$ , $w_{i,j,k_{max}} = 0$ .

- Deslizamiento libre

En $x = 0$ ó $x = l_x$ para todo $j = 1, \dots, j_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{0,j,k} = 0$ , $v_{0,j,k} = v_{1,j,k}$ , $w_{0,j,k} = w_{1,j,k}$ .
$u_{i_{max},j,k} = 0$ , $v_{i_{max}+1,j,k} = v_{i_{max},j,k}$ , $w_{i_{max}+1,j,k} = w_{i_{max},j,k}$ .

En $y = 0$ ó $y = l_y$ para todo $i = 1, \dots, i_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{i,0,k} = u_{i,1,k}$ , $v_{i,0,k} = 0$ , $w_{i,0,k} = w_{i,1,k}$ .
$u_{i,j_{max}+1,k} = u_{i,j_{max},k}$ , $v_{i,j_{max},k} = 0$ , $w_{i,j_{max}+1,k} = w_{i,j_{max},k}$ .

En $z = 0$ ó $z = l_z$ para todo $i = 1, \dots, i_{max}$ , $j = 1, \dots, j_{max}$
$u_{i,j,0} = u_{i,j,1}$ , $v_{i,j,0} = v_{i,j,1}$ , $w_{i,j,0} = 0$ .
$u_{i,j,k_{max}+1} = u_{i,j,k_{max}}$ , $v_{i,j,k_{max}+1} = v_{i,j,k_{max}}$ , $w_{i,j,k_{max}} = 0$ .

## ■ Flujo saliente

En $x = 0$ ó $x = l_x$ para todo $j = 1, \dots, j_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{0,j,k} = u_{1,j,k}$ , $v_{0,j,k} = v_{1,j,k}$ , $w_{0,j,k} = w_{1,j,k}$ .
$u_{i_{max},j,k} = u_{i_{max}-1,j,k}$ , $v_{i_{max}+1,j,k} = v_{i_{max},j,k}$ , $w_{i_{max}+1,j,k} = w_{i_{max},j,k}$ .
En $y = 0$ ó $y = l_y$ para todo $i = 1, \dots, i_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{i,0,k} = u_{i,1,k}$ , $v_{i,0,k} = v_{i,1,k}$ , $w_{i,0,k} = w_{i,1,k}$ .
$u_{i,j_{max}+1,k} = u_{i,j_{max},k}$ , $v_{i,j_{max},k} = v_{i,j_{max}-1,k}$ , $w_{i,j_{max}+1,k} = w_{i,j_{max},k}$ .
En $z = 0$ ó $z = l_z$ para todo $i = 1, \dots, i_{max}$ , $j = 1, \dots, j_{max}$
$u_{i,j,0} = u_{i,j,1}$ , $v_{i,j,0} = v_{i,j,1}$ , $w_{i,j,0} = w_{i,j,1}$ .
$u_{i,j,k_{max}+1} = u_{i,j,k_{max}}$ , $v_{i,j,k_{max}+1} = v_{i,j,k_{max}}$ , $w_{i,j,k_{max}} = w_{i,j,k_{max}-1}$ .

## ■ Periódicas

En $x = 0$ ó $x = l_x$ para todo $j = 1, \dots, j_{max}$ , $k = 1, \dots, k_{max}$
$u_{0,j,k} = u_{i_{max}-1,j,k}$ , $u_{i_{max},j,k} = u_{1,j,k}$ , $u_{i_{max}+1,j,k} = u_{2,j,k}$ ,
$v_{0,j,k} = v_{i_{max}-1,j,k}$ , $v_{i_{max},j,k} = v_{1,j,k}$ , $v_{i_{max}+1,j,k} = v_{2,j,k}$ ,
$w_{0,j,k} = w_{i_{max}-1,j,k}$ , $w_{i_{max},j,k} = w_{1,j,k}$ , $w_{i_{max}+1,j,k} = w_{2,j,k}$ ,
$p_{1,j,k} = p_{i_{max},j,k}$ , $T_{1,j,k} = T_{i_{max},j,k}$ .

## ■ Dirichlet

$$T_{0,j,k} = 2T_0(0, y, z) - T_{1,j,k} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i_{max}+1,j,k} = 2T_0(l_x, y, z) - T_{i_{max},j,k} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i,0,k} = 2T_0(x, 0, z) - T_{i,1,k} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i,j_{max}+1,k} = 2T_0(x, l_y, z) - T_{i,j_{max},k} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i,j,0} = 2T_0(x, y, 0) - T_{i,j,1} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad j = 1, \dots, j_{max}$$

$$T_{i,j,k_{max}+1} = 2T_0(x, y, l_z) - T_{i,j,k_{max}} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad j = 1, \dots, j_{max}$$

## ■ Neumann

$$T_{0,j,k} = \delta x T_0(0, y, z) + T_{1,j,k} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i_{max}+1,j,k} = \delta x T_0(l_x, y, z) + T_{i_{max},j,k} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i,0,k} = \delta y T_0(x, 0, z) + T_{i,1,k} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i,j_{max}+1,k} = \delta y T_0(x, l_y, z) + T_{i,j_{max},k} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max}$$

$$T_{i,j,0} = \delta z T_0(x, y, 0) + T_{i,j,1} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad i = 1, \dots, i_{max}$$

$$T_{i,j,k_{max}+1} = \delta z T_0(x, y, l_z) + T_{i,j,k_{max}} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad i = 1, \dots, i_{max}$$

Donde  $T_0$  es la función temperatura conocida en la frontera correspondiente.

Para la presión las siguientes condiciones de frontera deben ser impuestas para todos los casos anteriores,

$$p_{0,j,k}^{(n+1)} = p_{1,j,k}^{(n+1)} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max},$$

$$p_{i_{max}+1,j,k}^{(n+1)} = p_{i_{max},j,k}^{(n+1)} \quad \text{para } j = 1, \dots, j_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max},$$

$$p_{i,0,k}^{(n+1)} = p_{i,1,k}^{(n+1)} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max},$$

$$p_{i,j_{max}+1,k}^{(n+1)} = p_{i,j_{max},k}^{(n+1)} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad k = 1, \dots, k_{max},$$

$$p_{i,j,0}^{(n+1)} = p_{i,j,1}^{(n+1)} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad j = 1, \dots, j_{max},$$

$$p_{i,j,k_{max}+1}^{(n+1)} = p_{i,j,k_{max}}^{(n+1)} \quad \text{para } i = 1, \dots, i_{max}, \quad j = 1, \dots, j_{max}.$$


## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Visitar el sitio web <http://solarviews.com/eng/europa.htm>.
- [2] Visitar el sitio web <http://solarviews.com/eng/io.htm>.
- [3] Visitar el sitio web [https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo\(spacecraft\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo(spacecraft))
- [4] L. Roth, J. Saur, K. D. Retherford, D. F. Strobel, P. D. Feldman, M. A. McGrath, F. Nimmo. *Transient Water Vapor at Europa's South Pole*. 2013. Science, 343 (6167), 171-174. DOI: 10.1126/science.
- [5] Rathbun, J. A. *et al.* *Mapping of Io's thermal radiation by the Galileo photopolarimeter-radiometer (PPR) instrument*. *Icarus* (2004)
- [6] Segatz, M., Spohn, T., Ross, M. N., Schubert, G., *Tidal Dissipation, Surface Heat Flow, and Figure of Viscoelastic Models of Io*. University of California (1987).
- [7] I. G. Currie. *Fundamental Mechanics of fluids.*, 1993 - 2ª Edición, McGraw-Hill. University of Toronto, Canada. ISBN 0-8247-0886-5.
- [8] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoffer. *Numerical simulation in fluid dynamics; a practical introduction.*, 1998 - 1ª Edición, SLAM monographs on mathematical modeling and computation, Germany. ISBN 0-89871-398-6.
- [9] W. Malalasekera, H. K. Versteeg. *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. 1ª Edición, 1995. Longman Scientific and Technical. ISBN 0-582-21884-5




- [10] J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. 2ª Edición 1997. Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences. ISBN 1-56032-046-X.
- [11] Visitar la página <https://es.wikipedia.org/wiki/Número-de-Reynolds>.
- [12] Visitar la página <https://es.wikipedia.org/wiki/Número-de-Prandtl>.
- [13] A. C. Ledesma, K. I. González, O. M. Bernal. *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*, 2018 - 1ª Edición, Trabajo en línea. Facultad de Ciencias, UNAM. Trabajo en línea <http://www.mmc.geofisica.unam.mx/acl/MDF/>.
- [14] Visitar la página <http://www.imm.dtu.dk/pcha/Projekter/Shock/main/node17.html>
- [15] Chorin, A. *Numerical solution of the Navier-Stokes-equations*. 1968. Artículo. Math. Comp., 22, 745-762.
- [16] J. D. Hoffman. *Numerical methods for engineers and scientists*. 1992, 2ª Edición. Marcel Dekker, Inc. ISBN 0-8247-0443-6.
- [17] A. V. Getling. *Rayleigh-Bénard convection: Structures and dynamics*. 1ª Edición 1997. World scientific. ISBN 9810226578
- [18] K. R. Kirchatz, H. Oertel. *Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes*. Institut für Stromungslehre und Stromungsmaschinen, Universität (TH) Karlsruhe, West Germany. Oct 22, 1986. J. Fluid Mech. (1988), vol. 192, pp. 249-286.
- [19] Y. Ashkenazy. *The surface temperature of Europa*. Department of solar energy and environmental physics, BIDR. 2017. arXiv: 1608.07372v4.
- [20] E. Koschmieder, G. Pallas. *Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer*. 1974. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 17, pp. 991-1002. Pergamon Press 1974
- [21] M. Medale, B. Cochelin. *A parallel computer implementation of the Asymptotic Numerical Method to study thermal convection instabilities*. Elsevier 2009. Journal of Computational Physics 228 (2009) 8249–8262.

- [22] E. Galindo. *Estudio de las interacciones por fuerza de marea en el sistema Júpiter-Europa*. Tesis de maestría, 2016. Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [23] R. Fatehi, M. S. Shadloo, M. T. Manzari. *Numerical investigation of two-phase secondary Kelvin–Helmholtz instability*. Journal of mechanical engineering science, 2013. DOI: 10.1177/0954406213512630.
- [24] S. A. Thorpe. *Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids*. J . Fluid Mech. (1971), vol. 46, part 2, pp. 299-319. DOI: 10.1017/s0022112071000557



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS



Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS**

---

Control Escolar de Licenciatura

**VOTOS DE APROBATORIOS**

Presidente del Consejo Directivo del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.  
**Presente.**

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la C. Fernando Alexis Morales Garzón

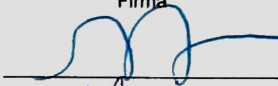
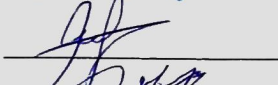

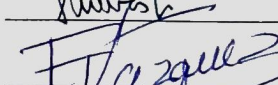
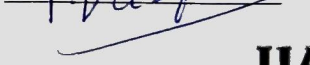
Con número de matrícula 20124004079 cuyo título es:

Simulación Numérica de la Conversión Térmica en el gran Océano de la Luna Europa

Consideramos que si reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de Licenciado Ciencias con Área Terminal de **Bioquímica y Biología Molecular**

Atentamente  
 "Por una humanidad culta"

Cuernavaca, Morelos, a 28 de Febrero de 2020.

	Firma
Grado, Nombre y Apellidos completos del jurado	
PRESIDENTE: DRA. GLORIA KOENIGSBERGER HOROWITZ	
SECRETARIO: DR. FREDERIC MASSET	
VOCAL: DR. ALDO FIGUEROA LARA	
PRIMER SUPLENTE: DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA	
SEGUNDO SUPLENTE: DR. FEDERICO VÁZQUEZ HURTADO	

Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, Cuernavaca Morelos, México, 62209.  
 Tel. (777) 329 70 00, Ext. 3270 / correo IICBA@uaem.mx

