



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**DESARROLLO DE VARIOS MÉTODOS NUMÉRICOS SOBRE GPUS Y
SU APLICACIÓN EN ENTORNOS ASTROFÍSICOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

DAVID AARÓN VELASCO ROMERO

DIRECTOR DE TESIS

DR. FRÉDÉRIC SYLVAIN MASSET



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**DESARROLLO DE VARIOS MÉTODOS NUMÉRICOS SOBRE GPUS Y
SU APLICACIÓN EN ENTORNOS ASTROFÍSICOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

DAVID AARÓN VELASCO ROMERO

DIRECTOR DE TESIS

DR. FRÉDÉRIC SYLVAIN MASSET

Jurado

El jurado revisor de esta tesis está constituido por los siguientes investigadores:

- Dr. Gennaro D'Angelos, Los Alamos National Laboratory.
- Dr. Alejandro Ramírez Solís, CInC-UAEM.
- Dr. Francisco Javier Sánchez Salcedo, IA-UNAM.
- Dr. Jose Alejandro Esquivel Salazar, ICN-UNAM.
- Dr. Fabio De Colle, ICN-UNAM.
- Dr. Aldo Figueroa Lara, CInC-UAEM.
- Dr. Frédéric Sylvain Masset. ICF-UNAM.

Publicaciones

El trabajo presente refleja el contenido de los artículos publicados durante el doctorado, los cuales listo a continuación en orden cronológico:

- Masset, F. S., Velasco Romero, D. A. (2017), 'Dynamical friction on hot bodies in opaque, gaseous media', publicado en *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Fung, J., Masset, F., Lega, E., Velasco, D. (2017), 'Planetary Torque in 3D Isentropic Disks', publicado en *Astronomical Journal*.
- Velasco Romero, D. A., Han Veiga, M., Teyssier, R., Masset, F. S. (2018), 'Planet- disc interactions with discontinuous Galerkin methods using GPUs', publicado en *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Veiga, M. H., Romero Velasco, D. A., Abgrall, R., Teyssier, R. (2018), 'Capturing near-equilibrium solutions: a comparison between high-order discontinuous Galerkin methods and well-balanced schemes', aceptado para publicación en *Communications in Computational Physics*.
- Velasco Romero, D. A., Masset, F. S. (2019), 'Numerical study of dynamical friction with thermal effects - I. Comparison to linear theory', publicado en *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Velasco Romero, D. A., Masset, F. S. (2019), 'Numerical study of dynamical friction with thermal effects - II. High resolution study of the subsonic regime', en vías de ser enviado a *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.

También refleja el contenido de las siguientes memorias de congreso:

- Masset, F. S., Eklund, H., Velasco Romero, D. A. (2017), 'Eccentricity and inclination evolution of hot protoplanetary embryos in protoplanetary discs', publicado en la *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica Conference Series*.
- Masset, F. S., Velasco Romero, D. A. y Eklund, H. (2018), 'Dynamical friction on hot bodies in gaseous, opaque media, and application to embedded protoplanets', publicado en el *Journal of Physics Conference Series*.

Resumen

El presente trabajo muestra la implementación de distintos métodos numéricos para la descripción computacional de la dinámica de fluidos en entornos astrofísicos. Dichas implementaciones fueron diseñadas de manera que pudiesen ser ejecutadas sobre múltiples unidades de procesamiento gráfico (GPUs). Primeramente mostramos la implementación de un código Cartesiano $2D$ haciendo uso del método espectral de Galerkin discontinuo DG para aproximaciones de alto orden a la solución de las ecuaciones de Euler. Hicimos uso del problema de interacción disco-planeta para comparar el comportamiento de este nuevo código con el comportamiento de FARGO3D con malla polar. Hicimos uso de la dependencia temporal de la torca impartida por el disco sobre el planeta, como un medio para cuantificar la viscosidad numérica del código. Encontramos que para órdenes cuarto y quinto del esquema DG , podemos alcanzar viscosidades numéricas en la descripción del flujo Kepleriano tan bajas como las obtenidas mediante FARGO3D con malla polar. Estos resultados sugieren aplicabilidad del esquema DG en escenarios más complejos del problema disco-planeta que no puedan ser capturados por mallas polares o esféricas. En segunda instancia mostramos la implementación de un sistema de mallas anidadas realizada sobre el código FARGO3D, así como la utilización del código resultante para el estudio numérico de la fuerza ejercida sobre un perturbador masivo y luminoso que se desplaza a velocidad constante en un medio constituido por un gas homogéneo y opaco. En este escenario tomamos en cuenta la difusión térmica del gas y la retroalimentación del calor impartido por el perturbador. La fuerza que surge en respuesta al calor liberado por el perturbador, o fuerza de calentamiento, está dirigida a lo largo de la dirección de movimiento del perturbador, induciendo por tanto una aceleración en este. Comparamos el valor de esta fuerza con la estimación analítica tanto en el régimen de bajo como alto número de Mach, encontrando un acuerdo preciso en ambos. Además de esto, encontramos que la fuerza de arrastre percibida por un perturbador no luminoso es significativamente distinta a la observada para el caso sin difusión térmica. En el límite en el que la velocidad tiende a cero, encontramos analíticamente que esta fuerza tiende a un valor finito e independiente del valor del coeficiente para la difusión térmica, lo cual también corroboramos mediante simulaciones numéricas. Encontramos el umbral en la luminosidad que permite tener una aceleración neta para el perturbador, observando que en general resulta ser mucho más pequeño que la luminosidad percibida en embriones planetarios de baja masa.

Abstract

This work presents the implementation of different numerical methods for the computational description of fluid dynamics as well as their application to astrophysical environments. These implementations were designed as to be executed over multiple graphics processing units (GPUs). First we present a 2D Cartesian code for the numerical solution of the Euler equations making use of high order discontinuous Galerkin methods *DG*. We make use of a planet-disc setup in order to compare the behaviour of this code against the behaviour of the **FARGO3D** code with a polar mesh. We extract an estimate for the numerical viscosity of the code via the time dependence of the torque felt by the planet. We find that for fourth and fifth order *DG* schemes it is possible for the Keplerian flux description, to achieve numerical viscosities as low as the ones obtained with **FARGO3D** and a polar mesh. Although for a single disc problem a solution of low numerical viscosity can be obtained at lower computational cost with **FARGO3D** (which is nearly an order of magnitude faster than a fifth order method), discontinuous Galerkin methods appear promising to obtain solutions of low numerical viscosity in more complex situations where the flow cannot be captured on a polar or spherical mesh concentric with the disc. Then we present the implementation of a nested meshes hierarchy for the **FARGO3D** code, as well as the implementation of the resulting code in the numerical study of the dynamical friction exerted over a massive and luminous perturber moving at constant velocity in an opaque and homogeneous gas medium. In this scenario, we consider the thermal diffusion of the gas and the feedback of the heat emitted by the perturber. The force that arises in response to the heat irradiated by the perturber, dubbed heating force, is directed along the direction of motion of the perturber, therefore inducing an acceleration on it. We compared the value of said force with the analytic estimates in the low and high Mach number limits, and found an accurate match. The drag force exerted on a non-luminous perturber in a thermally diffusive medium is significantly different from the drag force of the adiabatic case. In the limit of a vanishing velocity, this drag force tends to a finite value which we determine using linear perturbation theory and corroborate with numerical simulations. We find a threshold in the luminosity needed to get a net acceleration of the perturber and find it to be generally much smaller than the luminosity of accreting low-mass planetary embryos embedded in a gaseous protoplanetary disc.

A mis padres, mi hermana y mi abuelita ...

Agradecimientos

Tengo demasiado que agradecer a mi tutor, Frédéric Masset, primeramente por haber confiado en mí, y haber hecho todo lo posible para que yo pudiese ingresar al doctorado bajo su tutela. Le agradezco todo el tiempo que dedicó a mi formación, todo el conocimiento que me impartió, su constante apoyo y la siempre buena actitud con la que lo realizó. A Romain Teyssier por haberme dado la oportunidad de asistir a la Universidad de Zúrich, por haberme asesorado durante mi estancia, y por permitirme participar en excelente proyecto. A mi tutor de maestría, Hernán Larralde, por su apoyo en momentos cruciales. A los miembros de mi comité tutor, Aldo Figueroa y a Alejandro Ramirez por sus contribuciones y exhortos. A Seb por su amistad y buenos consejos.

Agradezco a familia, a mi madre por su perpetuo apoyo y motivación, a mi padre y a mi hermana por su constante aliento, a mi abue, mi cuatacha.

A Carlos, Adri, Ricardo, Tanu, Raksha, Luisi y Arturo por ser mi familia en Cuernavaca. A Mr. M, mi amigo de más de media vida. A mis amigos y comparañeros del basket: Héctor, Paulino, César y Moy. A muchas amistades más: Andrea, Lucila, Boru, Diego, Haileen, Yonatan, Bertha, Mayra, Paquito, Moni, Eri, Diana, Braulio, Susana, Cristina, Jaz, Remi, Yoab.

A mis amigos en Suiza: Maria, San Gyu, Tom, Valentin, Fulvio, Beppe, Valentina, Nico, Julia, Michael, Tomas, Philipp, Pedro, Onur y Ermis.

A mis eternas amigas en Guadalajara: Licha, Yabne y Ana.

Agradezco al CONACyT por haber hecho posible todo esto mediante el apoyo económico de la beca de manutención No. 412604. Al programa de becas de excelencia del gobierno de Suiza que me permitió realizar una estancia en este país. A la Fundación Marcos Moshinsky y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) No.IN101616.

Índice general

Jurado	I
Publicaciones	II
Resumen	III
Abstract	IV
Agradecimientos	VI
1. Preliminares del contexto astrofísico	1
1.1. Formación de planetas	1
1.1.1. El escenario de interacción disco-planeta	1
1.1.2. Migración tipo I	2
1.1.3. Migración tipo II	5
1.1.4. Migración tipo III	6
1.2. El escenario de la fricción dinámica	6
1.3. Dinámica de fluidos	7
2. Preliminares sobre los métodos numéricos	9
2.1. El código FARGO3D	9
2.1.1. Técnica de separación de operadores	10
2.1.2. Etapa fuente	12
2.1.3. Etapa de transporte	14
2.1.4. Conservación de los momentos	15

2.2.	Esquemas de Galerkin discontinuos.	16
2.2.1.	Ecuaciones gobernantes	16
2.2.2.	Método de Galerkin discontinuo	17
2.2.3.	Cálculo del paso de tiempo	20
2.2.4.	Limitadores de la solución	20
2.3.	Cómputo en paralelo	21
2.3.1.	Paralelización de grano grueso	21
2.3.2.	Paralelización de grano fino	22
3.	Un código 2D de Galerkin Discontinuo en GPUs	24
3.1.	Introducción	24
3.2.	Implementación	26
3.2.1.	Estructura de datos	27
3.2.2.	Partición del dominio para múltiples procesos	27
3.2.3.	Descripción del algoritmo	28
3.2.4.	Peculiaridades de la implementación sobre GPUs	29
3.2.5.	Desempeño del código sobre múltiples GPUs	31
3.3.	Problemas de prueba	32
3.3.1.	Vórtice isentrópico	33
3.3.2.	Vórtice de Gresho	35
3.4.	Disco protoplanetario	38
3.4.1.	Setup	38
3.4.2.	Comparación de resultados	40
3.4.3.	Estimación de la viscosidad numérica	46
3.5.	Conclusiones	49
4.	FARGO3D multi-malla	50
4.1.	Introducción	50
4.2.	Programando el paso de tiempo	51
4.3.	Comunicación entre niveles	51
4.3.1.	Llenado de celdas fantasmas del nivel fino: <code>CommUp</code>	51

4.3.2. Sobrescribir celdas gruesas: <code>CommMean</code>	53
4.3.3. Empalmar los flujos: <code>CommFlux</code>	53
4.4. Sub-ciclos y organización de las comunicaciones	55
5. Fricción dinámica con difusión térmica	57
5.1. Introducción	57
5.2. Descripción del problema	59
5.2.1. Ecuaciones gobernantes	59
5.2.2. Convenciones a utilizar	60
5.3. Resumen de resultados analíticos	61
6. Estudio numérico en el régimen lineal	63
6.1. Introducción	63
6.2. Implementación del sistema para la fricción dinámica	64
6.3. Resultados	66
6.3.1. Fuerza de calentamiento	67
6.3.2. Fricción dinámica con difusión térmica	73
6.3.3. Fuerza neta en el caso general	82
6.4. Discusiones y conclusiones	84
7. Estudio numérico del régimen no lineal	90
7.1. Introducción	90
7.2. Implementación numérica	91
7.2.1. Mallas cilíndricas y Cartesianas	91
7.2.2. Difusión térmica realista	92
7.2.3. Desprendimiento de calor	93
7.2.4. Trazado del gas	94
7.3. Resultados	95
7.3.1. Fuerza neta	95
7.3.2. Eficiencia de la fuerza de calentamiento	96
7.3.3. Fuerza de enfriamiento	97

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
7.3.4. Fuerza de calentamiento	98
7.3.5. Dinámica en la esfera de Bondi	100
7.4. Discusión	101
8. Apéndice	104
.1. Coeficientes del método Runge-Kutta	104

Capítulo 1

Preliminares del contexto astrofísico

1.1. Formación de planetas

El modelo estándar de formación estelar describe que las estrellas se forman a partir de una nube gigante de gas en rotación que colapsa al superar la fuerza de gravedad a las fuerzas repulsivas del medio (fuerza centrífuga, presión térmica y presión magnética). Gran parte del material colapsado no cae directamente sobre el núcleo estelar, sino que forma un disco circundante a la estrella o se fragmenta en múltiples sistemas estelares. Los planetas tienen origen en estos discos de gas y polvo que surgen en el proceso de formación estelar. El proceso de formación de planetas está fuertemente influenciado por la interacción entre el planeta y el disco constituido de gas y polvo en el que se encuentra inmerso. A continuación presentamos una breve descripción de la interacción entre disco y planeta que dicta la formación y evolución de planetas.

1.1.1. El escenario de interacción disco-planeta

Empecemos por caracterizar tanto el disco como el planeta que se encuentra inmerso en este. Consideremos un planeta de M_p que gira en torno a una estrella de masa M_* a un radio r_p con frecuencia angular Ω_p . Consideremos la simplificación en la que el disco que circunda a la estrella consiste de un gas ideal con ecuación de estado

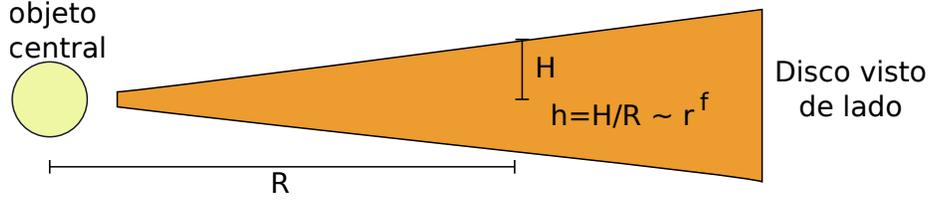


Figura 1.1: Caricatura de la estrella y su respectivo disco circundante.

$c_s^2 = \gamma k_B T / \mu m_H$, donde c_s es la velocidad del sonido, γ es el índice adiabático, T es la temperatura, k_B es la constante de Boltzmann y m_H la masa del átomo de hidrógeno. Este disco tiene una densidad superficial $\Sigma \propto r^{-\alpha}$ y una temperatura promediada verticalmente $T \propto r^{-\beta}$. La relación de aspecto del disco es $h = H/r$, donde H es la escala de altura del disco. Esta escala de altura es la longitud dada por la relación entre la velocidad del sonido c_s y la frecuencia orbital del gas Ω :

$$H = \frac{c_s}{\Omega}. \quad (1.1)$$

Con esta ecuación y la ecuación de estado, podemos ver que si la temperatura es una ley de potencia del radio, entonces también la relación de aspecto lo es $h \propto r^f$, donde $\beta = 1 - 2f$.

El planeta en formación es capaz de generar estructuras asimétricas en dicho disco, estas estructuras a su vez generan una torca neta no nula sobre el planeta, resultando esto en el fenómeno descrito como migración planetaria (Goldreich & Tremaine 1979). Existen tres escenarios o tipos de esta migración dependiendo de la masa del planeta; la migración de tipo I para planetas de baja masa (Goldreich & Tremaine 1979), la migración de tipo II para planetas de gran masa (Goodman & Rafikov 2001), y la migración de tipo III para planetas de masa intermedia en discos masivos (Masset & Papaloizou 2003).

1.1.2. Migración tipo I

La migración de tipo I presentada por Goldreich & Tremaine (1979), describe el efecto de la interacción entre disco y un planeta de baja masa en órbita circular. La torca que actúa sobre un planeta con dichas características puede descomponerse en

dos componentes distintas: la torca diferencial de Lindblad y la torca de co-rotación. La torca diferencial de Lindblad surge a partir de la interacción con el material que pasa cerca del planeta a velocidades supersónicas, este material es desviado por el planeta, intercambiando así momento angular y energía con éste. La torca de co-rotación surge a partir del material que se encuentra en co-rotación con el planeta, material que deriva lentamente con respecto al planeta.

Torca diferencial de Lindblad

La torca que el planeta ejerce sobre el disco es capaz de generar estelas de densidad llamados brazos espirales, la torca diferencial de Lindblad es debida al cambio de momento angular entre estos brazos espirales y el planeta (figura 1.2). El brazo interno ejerce una torca positiva sobre el planeta, en contraste, el brazo externo ejerce una torca negativa sobre el planeta, estas torcas son nombradas respectivamente torcas interna y externa de Lindblad. De esta forma la torca interna de Lindblad promueve una migración al exterior mientras que la torca externa de Lindblad promueve una migración al interior. La torca diferencial de Lindblad surge entonces de la asimetría en el balance entre estas torcas interna y externa.

Torca de co-rotación

La torca de co-rotación está ligada al arrastre en la llamada región herradura. La región herradura consiste del material constreñido a viajar con respecto al planeta en líneas de flujos con forma de herradura, como se muestra en la figura 1.3. Dentro de esta región herradura, el material externo que es más lento que el planeta es alcanzado por este, al ser alcanzado, el material intercambia momento angular con el planeta, siendo trasladado a una órbita más interna que la del planeta y por tanto con mayor velocidad angular. Eventualmente el material alcanzará al planeta volviendo a intercambiar momento angular, terminando en este caso en una órbita más externa y eventualmente volviendo a repetir el mismo proceso. El llamado arrastre de herradura es la torca que resulta de la interacción del planeta con todo el material constreñido a este movimiento en herradura.

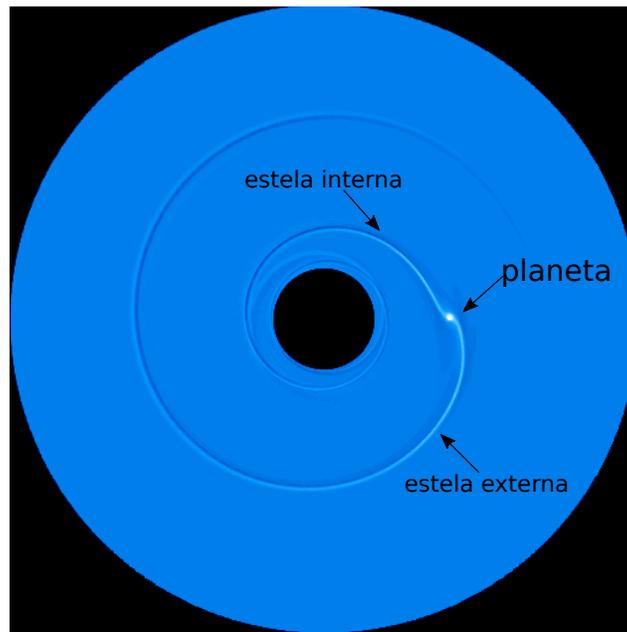


Figura 1.2: Visualización de los brazos espirales creados por la perturbación del planeta sobre el disco.

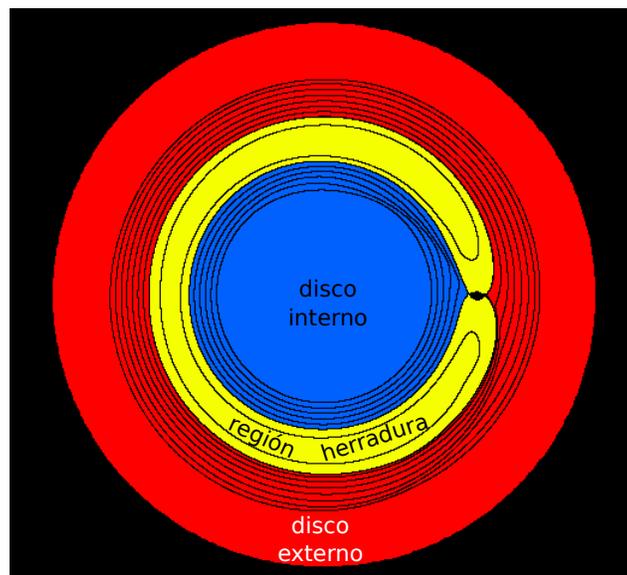


Figura 1.3: Visualización la región herradura en el disco.

[Baruteau & Masset \(2013\)](#) describen como para el caso general, la torca de co-rotación consiste de tres términos: la torca debida al gradiente de vortensidad (vorticidad sobre densidad superficial), la torca debida al gradiente de temperatura, y la torca debida al gradiente de entropía. En todos estos casos, persiste el término que depende del gradiente de vortensidad a través de la región herradura, al haber creación de vortensidad a partir de los gradientes de temperatura o entropía.

En el caso de viscosidad nula, la torca de co-rotación oscila con una amplitud que decrece con el tiempo, hasta desvanecerse al desaparecer el gradiente de vortensidad en la región herradura. El movimiento en herradura al que se ve forzado el fluido interno a la región de herradura, genera que el gradiente inicial de vortensidad se vaya mezclando hasta llegar a un valor uniforme en toda la región de herradura. A esto se le conoce como la saturación de la torca de co-rotación. Ahora bien, para valores finitos de viscosidad, se puede llegar a preservar el gradiente de vortensidad y por lo tanto obtener un valor finito no nulo para la torca de co-rotación.

1.1.3. Migración tipo II

El escenario de migración tipo II considera masas del planeta capaces de alterar el perfil de densidad del disco, hasta el punto de crear un surco con ausencia de material en este. El proceso de pérdida o ganancia de momento angular para las regiones internas y externas respectivamente, está influenciada por distintos mecanismos, como describen [Goodman & Rafikov \(2001\)](#). Una forma simplificada de explicar el proceso de formación del surco es a través del efecto que tiene el planeta altamente masivo sobre el material externo e interno a su órbita. El planeta ejerce una torca positiva sobre el material externo, efectivamente empujando a este material a órbitas más alejadas, mientras que ejerce una torca negativa sobre el material interno, recorriendo así a este a órbitas más internas. La creación del surco depende también de la viscosidad del disco, siendo esta una vía para prevenir la formación del surco. Es evidente entonces que al ser vaciada la región en co-rotación con el planeta, la torca de co-rotación se vuelve irrelevante en este escenario de migración, de igual forma la torca diferencial de Lindblad se vuelve despreciable al quedar las resonancias de Lindblad dentro de esta

región vacía de material. En este escenario, la migración del disco es la que conduce la migración del planeta.

1.1.4. Migración tipo III

Los planetas en migración capaces de crear un surco parcial en rededor de su órbita, son afectados por una torca adicional de co-rotación. Esta torca adicional es debida al flujo de material a través de la región herradura. Esto es, durante la migración interna del planeta, los elementos de fluido que son alcanzados por la región de herradura, realizan una instancia del movimiento en herradura para después salir de esta región y terminar en una órbita más externa al seguir migrando el planeta. En consecuencia a esto, la distribución de masa en la región de herradura adopta una forma asimétrica, habiendo más masa detrás del planeta que delante de este. La migración en este caso puede ser entonces descrita como un ciclo de retroalimentación entre la torca y la tasa de migración. Cuando el déficit de masa co-orbital δm , es menor que la masa efectiva del planeta $\tilde{M}_p = M_p + M_{cpd}$ (donde M_{cpd} es la masa del disco circumplanetario), la retroalimentación es estable. Al contrario, cuando $\delta m > \tilde{M}_p$, la retroalimentación diverge, y se dice entonces que el planeta entra en un régimen de fuga. A este régimen de migración en fuga se le denomina migración tipo III ([Masset & Papaloizou 2003](#)), y no aplica para planetas de baja masa al formar un déficit de masa despreciable, ni para planetas de alta masa, los cuales al formar un surco profundo impiden el flujo de material a través de la región herradura. En concreto, este tipo de migración concierne solo a planetas de masa intermedia en discos masivos.

1.2. El escenario de la fricción dinámica

Un escenario más sencillo y aplicable al escenario de interacción disco-planeta es el escenario de la fricción dinámica en medios gaseosos ([Ostriker 1999](#)). En este escenario se considera a un perturbador de masa M moviéndose a una velocidad V en un medio gaseoso homogéneo de densidad ρ_0 y velocidad del sonido adiabática $c_s = \sqrt{\gamma T}$. Por efecto de gravedad, el planeta genera alteraciones en el medio, en respuesta, estas

alteraciones imparten una fuerza de arrastre sobre el perturbador, a este efecto se le denomina fricción dinámica. El efecto de la fricción fue inicialmente estudiado para medios sin colisiones por [Chandrasekhar \(1943\)](#), mucho tiempo después se realizó la extensión al caso con colisiones o gaseoso ([Rephaeli & Salpeter 1980](#)). Haciendo un estudio en régimen estacionario para esta fricción dinámica en el régimen subsónico, encontraron que debido a la simetría de la perturbación en medio generada por el perturbador masivo, no habría una fuerza de arrastre neta sobre éste. [Ostriker \(1999\)](#) muestra que es necesario relajar la suposición de la fricción dinámica como un problema de estado estacionario, haciendo un análisis lineal dependiente del tiempo para encontrar que la fuerza de arrastre en el límite en la velocidad tiende a cero tiene un valor finito distinto de cero:

$$F_{\text{arrastre}} = -\frac{4\pi(GM)^2\rho_0V}{3c_s^3} \quad (1.2)$$

Posteriormente, mediante simulaciones numéricas se realizó la corroboración de esta fuerza de arrastre no nula para el régimen subsónico ([Sánchez-Salcedo & Brandenburg 1999](#)).

1.3. Dinámica de fluidos

El escenario base para ambos escenarios descritos anteriormente, es el escenario de la dinámica de fluidos. Las ecuaciones que gobiernan la evolución de un fluido son respectivamente, la ecuación de continuidad o conservación de la masa:

$$\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (1.3)$$

donde ρ es la densidad del fluido y \mathbf{v} es su velocidad. La ecuación de conservación del momento:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p) = -\rho\nabla\Phi, \quad (1.4)$$

donde p es la presión del fluido, y Φ el potencial gravitatorio. Esta ecuación puede

transformarse, usando la ecuación (1.3), en la ecuación de Euler:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi. \quad (1.5)$$

Por último tenemos la ecuación de conservación de la energía

$$\partial_t e + \nabla \cdot (e\mathbf{v}) = -p\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1.6)$$

donde e es la densidad de energía interna del fluido. La simulación computacional de la dinámica de un fluido requiere entonces de la implementación de métodos que permitan resolver espacialmente y temporalmente las ecuaciones que gobiernan al fluido.

Capítulo 2

Preliminares sobre los métodos numéricos

2.1. El código FARGO3D

Presentamos una breve descripción del código FARGO3D ([Benítez-Llambay et al. 2015](#)), restringiéndonos a la implementación hidrodinámica (obviando la parte magnética). Este es un código que emplea tanto volumen finito como diferencias finitas para resolver las leyes de conservación, y emplea un método up-wind para realizar la actualización del sistema.

Empezamos describiendo la discretización del dominio, lo cual consiste primeramente en subdividir el dominio espacial en celdas a manera de formar una malla que describa de manera discreta nuestro dominio. Cada celda constituye entonces un volumen de control sobre el cual podemos aproximar la solución a nuestras leyes de conservación. Similar a al código Zeus ([Stone & Norman 1992](#)), FARGO3D es un código de cantidades escalonadas, esto es; las cantidades escalares ρ , e y P están definidas en el centro de la celda, mientras que las cantidades vectoriales (en nuestro caso las velocidades) están definidas en los centros de las caras correspondientes a la dirección de la componente (decimos entonces que están escalonadas), tal y como lo muestra la figura 2.1:

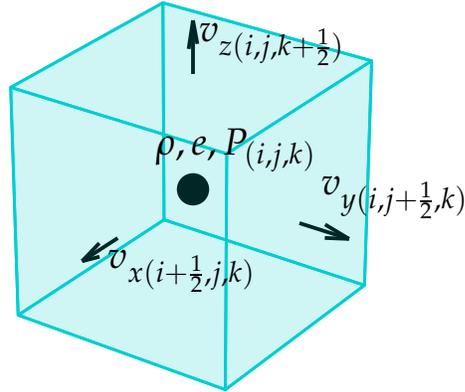


Figura 2.1: Representación de una celda en la discretización de FARGO3D. Las cantidades escalares están definidas en el centro de la celda, mientras que las cantidades vectoriales están definidas en las caras correspondientes a cada componente.

Ahora que tenemos la descripción de nuestras celdas y el posicionamiento de sus cantidades pasamos al tratamiento de las ecuaciones gobernantes.

2.1.1. Técnica de separación de operadores

Prestando atención a nuestras ecuaciones gobernantes, podemos ver que tienen la forma:

$$\partial_t Q + \nabla \cdot (Q\mathbf{v}) - S(Q, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2.1)$$

donde tenemos un término de transporte $\nabla \cdot (Q\mathbf{v})$ y un término fuente $S(Q, \mathbf{v}, t)$. La técnica de separación de operadores (operator splitting en inglés) consiste en este caso, en descomponer la implementación de estos términos en dos implementaciones separadas, realizando una actualización parcial al implementar el operador del término fuente, de manera subsecuente obteniendo el estado final al implementar el operador del término de transporte al estado parcialmente actualizado.

Para poder realizar esta separación de operadores en los tres sistemas de coorde-

nadas utilizados (cartesianas, cilíndricas y esféricas), es necesario reescribir las leyes de conservación en términos de las cantidades a conservar de modo que cumplan con la forma 2.1. Empezamos por el caso cartesiano, en este caso las cantidades a conservar son los momentos lineales ρv_x , ρv_y y ρv_z , las ecuaciones de conservación son entonces:

$$\partial_t(\rho v_x) + \nabla \cdot (\rho v_x \mathbf{v}) = -\partial_x P - \rho \partial_x \Phi \quad (2.2)$$

$$\partial_t(\rho v_y) + \nabla \cdot (\rho v_y \mathbf{v}) = -\partial_y P - \rho \partial_y \Phi \quad (2.3)$$

$$\partial_t(\rho v_z) + \nabla \cdot (\rho v_z \mathbf{v}) = -\partial_z P - \rho \partial_z \Phi \quad (2.4)$$

Continuamos con el caso cilíndrico en el que tenemos los momentos lineales radial ρv_r y vertical ρv_z , y el momento angular acimutal $\rho r v'_\phi$ donde $v'_\phi = v_\phi + r\Omega$, las ecuaciones de conservación son entonces:

$$\partial_t(\rho r v'_\phi) + \nabla \cdot (\rho r v'_\phi \mathbf{v}) = -\partial_\phi P - \rho \partial_\phi \Phi \quad (2.5)$$

$$\partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot (\rho v_r \mathbf{v}) = \rho \frac{v_\phi'^2}{r} - \partial_r P - \rho \partial_r \Phi \quad (2.6)$$

$$\partial_t(\rho v_z) + \nabla \cdot (\rho v_z \mathbf{v}) = -\partial_z P - \rho \partial_z \Phi \quad (2.7)$$

por último el caso esférico dónde los momentos a conservar son el momento lineal radial ρv_r y los momentos angulares meridional $\rho r v_\theta$ y acimutal $\rho r v'_\phi \sin \theta$ donde $v'_\phi = v_\phi + r \sin \theta \Omega$, las ecuaciones de conservación son entonces:

$$\partial_t(\rho r v'_\phi \sin \theta) + \nabla \cdot (\rho r v'_\phi \sin \theta \mathbf{v}) = -\partial_\phi P - \rho \partial_\phi \Phi \quad (2.8)$$

$$\partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot (\rho v_r \mathbf{v}) = \rho \frac{v_\theta^2 + v_\phi'^2}{r} - \partial_r P - \rho \partial_r \Phi \quad (2.9)$$

$$\partial_t(\rho r v_\theta) + \nabla \cdot (\rho v_\theta \mathbf{v}) = \rho v_\phi'^2 - \partial_\theta P - \rho \partial_\theta \Phi \quad (2.10)$$

Tenemos ahora reescritas las ecuaciones para las leyes de conservación, de modo

que todas tienen la forma descrita por la ecuación 2.1. Pasamos ahora a describir la etapa en la cual se aplican los términos fuentes.

2.1.2. Etapa fuente

La etapa fuente consiste en la actualización parcial de la velocidad a partir de la aplicación de los términos fuente que hemos colocado a la derecha en las ecuaciones 2.2 ... 2.10. Dado el posicionamiento escalonado de las velocidades con respecto a las las cantidades definidas en el centro de la celda, tenemos que la actualización parcial de las velocidades por parte de cantidades centradas requiere solo de las dos cantidades vecinas. Empezamos por la implementación de los términos fuente debidos al potencial externo, mostrando en la figura 2.2 el ejemplo para la dirección x en el caso Cartesiano, donde realizamos una modificación parcial de la velocidad debido a este término fuente.

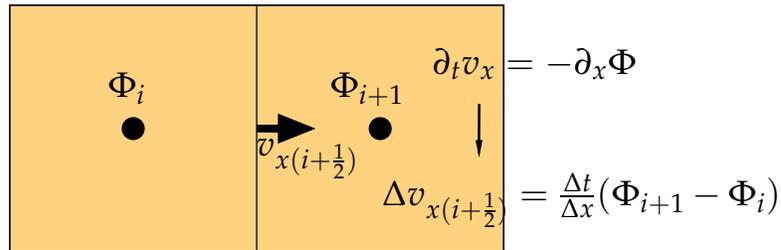


Figura 2.2: Discretización del potencial externo y su implementación en la modificación parcial de la velocidad.

Como segundo caso mostramos la implementación del término fuente para la velocidad radial debido a las velocidades angulares. En este caso es necesario hacer uso de cuatro valores, para computar el promedio de la velocidad angular en la posición de la velocidad radial a modificar. Mostramos en la figura 2.3 el ejemplo para la velocidad acimutal, que puede ser directamente extrapolado para el caso meridional.

El tercer caso es la implementación del término fuente debido al gradiente de presión. En este caso, al igual que para el caso del potencial, el gradiente se computa a partir de los valores centrados más cercanos. Es necesario también, obtener la densidad

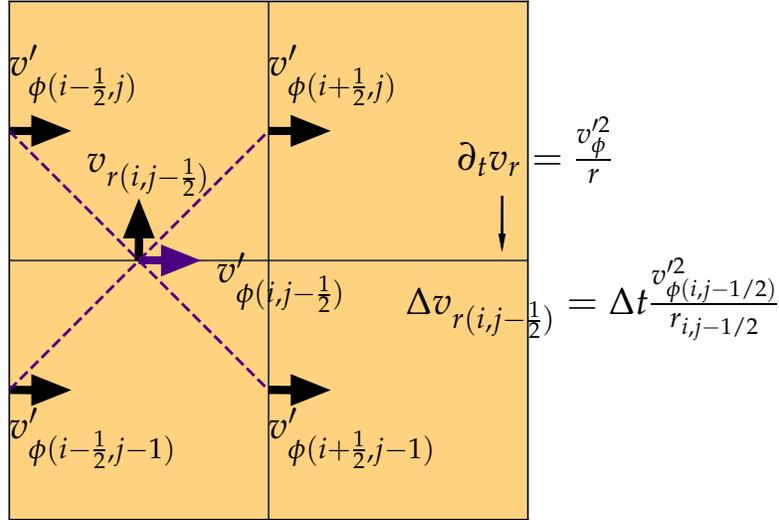


Figura 2.3: Modificación de la velocidad radial a partir de la velocidad angular, mostrando el ejemplo del término fuente debido a la velocidad acimutal.

en la posición de la velocidad, para esto realizamos un promedio sobre los dos valores centrados más cercanos, tal y como lo muestra la figura 2.4 para el caso de la velocidad lineal en x .

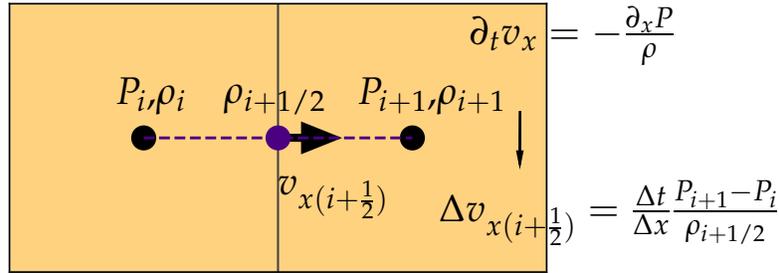


Figura 2.4: Modificación de la velocidad a partir del gradiente de presión. La presión al igual que la densidad, están definidas en el centro de cada celda.

Por último mostramos la implementación de viscosidad artificial usada para el suavizado de discontinuidades o choques. La implementación realizada consiste en la aplicación de un término fuente a partir de una "presión de viscosidad":

$$\partial_t \mathbf{v} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_\nu}{\rho}, \tag{2.11}$$

P_ν es un tensor diagonal, cuyos elementos distintos a cero son:

$$P_{\nu,i} = l^2 \rho \partial_i^2 v_i, \text{ si } \partial_x v_x > 0 (i = x, y, z), \quad (2.12)$$

donde l representa la intensidad de la viscosidad, y dicta la escala espacial sobre la que se esparcirá el choque, en esta implementación utilizamos típicamente $l \approx \sqrt{2}\Delta x$. Esta expresión al ser discretizada, nos lleva a presiones viscosas definidas en los centros de cada celda:

$$P_{\nu,x(i)} = l^2 \rho_i \left(\frac{v_{x(i+1/2)} - v_{x(i-1/2)}}{\Delta x} \right)^2, \text{ si } v_{x(i+1/2)} - v_{x(i-1/2)} > 0, \quad (2.13)$$

a partir de las cuales el cambio en la velocidad es similar al descrito para la presión en la figura 2.4:

$$\Delta v_{x(i+1/2)} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_{\nu,x(i+1)} - P_{\nu,x(i)}}{\rho_{i+1/2}}. \quad (2.14)$$

2.1.3. Etapa de transporte

A partir de la forma integral de las leyes de conservación podemos derivar un algoritmo para describir la evolución temporal de la cantidad a conservar $Q(x, y, z, t)$, obteniendo el valor promedio $Q(x, y, z, t_{n+1})$ a partir de $Q(x, y, z, t_n)$ al integrar sobre el paso de tiempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$:

$$Q_{i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (F_{k+1/2}^{n+1/2} - F_{k-1/2}^{n+1/2}),$$

donde $F_{(i,j,k)\pm 1/2}^n$ representan los flujos en las interfaces de la celda i, j, k . Los flujos están definidos en las interfases entre celda, cada flujo es entonces compartido por dos celdas. De esta forma, por construcción tenemos conservación de las cantidades transportadas a la precisión de la maquina, lo que sale de una celda entra a la otra, y viceversa. En nuestra implementación hacemos uso de un método *up-wind*, que

consiste en remontar la corriente para estimar el valor de la cantidad Q en la interfase a evaluar, a manera de expresar el flujo como:

$$F_i^{n+1/2} = v_{x,i+1/2}^n Q_{i+1/2}^*, \quad (2.15)$$

donde $Q_{i+1/2}^*$ es el valor interpolado de la cantidad Q en la interfase $x_{i+1/2}$ a mitad del paso de tiempo. En esta implementación hacemos uso de la llamada interpolación de van Leer para estimar el valor Q^* en cada interfase.

Interpolación de van Leer

El método de interpolación de van Leer está dado por la siguiente interpolación lineal de la cantidad $Q_{i+1/2}^*$ a partir de las cantidades Q_{i+1} y $Q_{i+1/2}$:

$$Q_{i+1/2}^* = \begin{cases} Q_i + \frac{a_i}{2} (\Delta x_i - v_{x(i+1/2)}) \Delta t, & \text{si } v_{x(i+1/2)} \geq 0 \\ Q_{i+1} - \frac{a_{i+1}}{2} (\Delta x_i + v_{x(i+1/2)}) \Delta t, & \text{si } v_{x(i+1/2)} < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

donde las pendientes a_i están dadas por:

$$a_i = \begin{cases} 2 \frac{Q_{i+1/2} \Delta Q_{i+1/2}}{Q_{i+1/2} + \Delta Q_{i+1/2}} (\Delta x_i + v_{x(i+1/2)} \Delta t), & \text{si } \Delta Q_{i+1/2} \Delta Q_{i+1/2} \geq 0 \\ 0, & \text{si } \Delta Q_{i+1/2} \Delta Q_{i+1/2} < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $\Delta Q_{i+1/2} = (Q_{i+1} - Q_i) / \Delta x_i$. Este proceso se realiza de la misma forma para las direcciones y y z .

2.1.4. Conservación de los momentos

Hemos descrito el proceso de transporte para cantidades centradas y como este garantiza por construcción la conservación a la precisión de la maquina de la cantidades transportadas. Ahora, tenemos el inconveniente de tener densidades y velocidades definidas en distintas posiciones, debemos entonces crear a partir de estas dos cantidades escalonadas entre sí, momentos centrados en la celda, a modo que podamos

garantizar la conservación de estos mediante el algoritmo anteriormente descrito. Para hacer esto, construimos por cada dirección lo que llamamos momentos *mas* y *menos*, mostramos el ejemplo para la dirección x :

$$\Pi_{x,i}^- = \rho_i v_{x,i-1/2}, \quad (2.18)$$

$$\Pi_{x,i}^+ = \rho_i v_{x,i+1/2}. \quad (2.19)$$

Estos momentos centrados pasan por la etapa de transporte al igual que ρ y e . Una vez que tenemos que el transporte de momentos y densidad podemos recuperar la velocidad al tiempo t_{n+1} :

$$v_{x,i-1/2}^{n+1} = \frac{\Pi_{i-1}^{+,n+1} + \Pi_i^{-,n+1}}{\rho_{i-1}^{n+1} + \rho_i^{n+1}}. \quad (2.20)$$

2.2. Esquemas de Galerkin discontinuos.

2.2.1. Ecuaciones gobernantes

En esta implementación nos limitamos al caso Cartesiano $2D$, a continuación presentamos las ecuaciones de Euler para describir la relación entre la densidad, presión y velocidad de un fluido en movimiento bajo la influencia de un término fuente, en forma vectorial las podemos escribir como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \quad (2.21)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho v_x & \rho v_y \\ \rho v_x^2 + p & \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_y & \rho v_y^2 + p \\ (E + p)v_x & (E + p)v_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \frac{\partial}{\partial x} \Phi \\ -\rho \frac{\partial}{\partial y} \Phi \\ -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \end{pmatrix}$$

aquí \mathbf{f} representa la matriz de flujos $(\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y)$ y \mathbf{S} el término fuente, que en este caso está dado por la aplicación del potencial gravitacional Φ . La energía total E puede ser expresada en términos de la densidad de energía interna e y la energía cinética del fluido: $E = e + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Cerramos nuestro sistema de ecuaciones con la ecuación de estado adiabática $p = e(\gamma - 1)$, donde γ es el índice adiabático.

2.2.2. Método de Galerkin discontinuo

Seguimos el método formulado por Cockburn & Shu (1998), que resumimos a continuación para el caso de una ley de conservación escalar $2D$ definida en una malla Cartesiana.

Consideremos un dominio $2D$ regular $\Omega \in \mathbb{R}^2$, que aproximamos mediante elementos rectangulares no traslapados:

$$K_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

donde (i, j) son los índices del rectángulo. Además, consideremos el espacio local $V(K)$ dado por el conjunto de polinomios $2D$ de hasta un grado N_p en x y y . Denotamos por $\{\phi_i\}_{i=0}^{N_p}$ el conjunto de polinomios base del espacio local $V(K)$.

Para cada rectángulo $K_{i,j}$, la solución local está expresada como¹:

$$u_h^K(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{N_p} \hat{u}_i^K(t) \phi_i(\mathbf{x}).$$

En este trabajo usamos una *representación modal* de la solución. Esto significa que la solución numérica en el elemento K será representada por los coeficientes lineales $\hat{u}_i^K(t)$ para $i = 0, \dots, N_p$. En particular, elegimos los polinomios de Legendre al ser una base ortogonal: $\int \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{ij}$.

Un coeficiente modal $\hat{u}_i^K(t)$ se obtiene mediante la proyección L^2 de la solución

¹Omitimos los índices del rectángulo i, j cuando resulte prescindible especificarlos.

$u(x)$ restringida al elemento K en el vector de la base ortogonal $\phi_i(\mathbf{x})$:

$$\hat{u}_i^K(t) = \int_K u(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Finalmente, la solución escalar global $u(\mathbf{x}, t)$ se obtiene al unir las soluciones locales definidas en cada sub-espacio local $V(K)$, lo cual podemos expresar de manera formal como una suma directa (denotada por \bigoplus):

$$u(\mathbf{x}, t) \approx u_h(\mathbf{x}, t) = \bigoplus_{K \in \Omega_h} u_h^K(\mathbf{x}, t).$$

La extensión al sistema de ecuaciones se realiza repitiendo el procedimiento que acabamos de describir para cada una de las variables del vector solución \mathbf{u} .

Discretización espacial

Manteniendo la notación, discretizamos en espacio la ecuación 2.21 haciendo uso del método DG . A cada tiempo t , buscamos la solución aproximada $u_h(\mathbf{x}, t)$ en el espacio de elemento finito de funciones discontinuas. La formulación débil de la ecuación 2.21 se obtiene al multiplicar la ecuación por una función suave de prueba $v(\mathbf{x})$, integrando sobre el volumen de control K y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{e \in \partial K} \int_e f(u(\mathbf{x}, t)) \cdot n_{e,K} v(\mathbf{x}) d\Gamma \\ - \int_K f(u(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K S(u) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Aquí $n_{e,K}$ denota la normal unitaria saliente al borde e .

La solución exacta se reemplaza por la solución aproximada $u_h(\mathbf{x})$, la función de prueba $v(\mathbf{x})$ se reemplaza por $v_h(\mathbf{x})$ y las integrales de la formulación débil son reemplazadas por una cuadratura adecuada, formando así la formulación semi-discreta

del método *DG*, escrita como:

$$\begin{aligned}
u_h(t=0) &= P_{V_h}(u_0) \\
\frac{d}{dt} \int_K u_h(\mathbf{x}, t) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= - \sum_{e \in \partial K} \sum_{i=0}^L h_{e,K}(\mathbf{x}_i, t) v_h(\mathbf{x}_i) w_i |e| \\
&\quad + \sum_{j=0}^M f(u(\mathbf{x}_j, t)) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}_j) w_j |K| \\
&\quad + \sum_{j=0}^M S(u(\mathbf{x}_j, t)) v_h(\mathbf{x}_j) w_j |K| \\
\forall v_h(\mathbf{x}) &\in V(K), \forall K \in \Omega_h,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $P_{V_h}(\cdot)$ es la proyección L^2 del estado inicial $u_0(\mathbf{x})$ hacia el espacio de elementos finitos V_h , $\{(\mathbf{x}_i, w_i)\}_{i=0}^{L,M}$ son el conjunto de puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre (con sus pesos respectivos w_i) con distinto número de puntos L y M , para las integrales de contorno y volumen, $|e|$ es la longitud del contorno mientras que $|K|$ es el área del volumen de control. Además, $f(u(\mathbf{x}, t)) \cdot n_{e,K}$ es remplazado por el flujo numérico $h_{e,K}(x_i, t)$, que determina la solución única en la interfase entre elementos vecinos.

Discretización temporal

Dado que elegimos representar nuestro espacio local mediante un conjunto ortogonal de polinomios, tenemos para la evolución de cada modo \hat{u}_i^K , una expresión independiente de los demás modos. La forma semi-discreta de la ecuación 2.22 reduce nuestras ecuaciones diferenciales de parciales a ordinarias con la forma:

$$\frac{d}{dt} u_h = \mathcal{L}(u),$$

donde \mathcal{L} representa el término a mano derecha en la ecuación 2.22. Hacemos uso de métodos Runge-Kutta de fuerte preservación de estabilidad *SSPRK* (por sus siglas en inglés) para la discretización temporal (Gottlieb & Shu 1998). El algoritmo 1 describe el proceso de la marcha temporal.

Data: $w_h^0 = P_{V_h}(w_0)$
Result: w_h^{n+1}
for $n = 0, \dots, N - 1$ **do**
 $w_h^{(0)} = w_h^n$;
 $h = \Delta t$;
 for $i = 0, \dots, k$ **do**
 $k_i = \mathcal{L}(t^n + c_i \cdot h, y_i + h(a_{i,1}k_1 + \dots + a_{i,i-1}k_{i-1}))$;
 $w_h^{(i+1)} = w_h^{(i)} + h \sum_{j=1}^i b_j k_j$;
 end
 $w_h^{n+1} = w_h^{(k+1)}$;
end

Algorithm 1: Algoritmo de la evolución temporal

Los coeficiente $a_{i,j}$, b_i y c_i están especificados en el apéndice.1.

2.2.3. Cálculo del paso de tiempo

Dado que tenemos un integrador de tiempo explícito, el paso de tiempo debe cumplir con la condición CFL para lograr estabilidad numérica. El paso máximo de tiempo Δt^K en la celda K se calcula como (Cockburn & Shu 1998).

$$\Delta t^K = \frac{C}{2N_p + 1} \left(\sum_{i=1}^d \frac{|v_i^K| + c_s^K}{\Delta x_i^K} \right)^{-1},$$

donde $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ es la velocidad de sonido adiabática, v_i^K es la componente i de la velocidad promedio en la celda, Δx_i^K es el ancho de la celda en la dimensión i .

2.2.4. Limitadores de la solución

Es conocido que las ecuaciones no lineales pueden desarrollar discontinuidades en tiempos finitos, y que oscilaciones no físicas pueden generarse para la solución numérica en presencia de estas discontinuidades. Estas oscilaciones generan a su vez deterioro en la precisión del método, llevando a pérdida de convergencia cerca del punto de discontinuidad (Hesthaven & Warburton 2007). Además, para sistemas físicos, es de interés tener una solución que garantice densidad y presión positivas. Para estabilizar la solución y garantizar soluciones positivas hacemos uso de limitadores,

los cuales tienen el defecto de poder afectar la calidad de la solución numérica.

En este trabajo hacemos uso de un limitador que garantiza preservar la positividad de la densidad y de la presión (Zhang & Shu 2010). Al usar este limitador, tenemos una restricción extra para la condición CFL, la cual incluye el peso del primer nodo en la cuadratura Gauss-Lobatto, denotado por w_1 , apropiado para un limitador con aproximación de orden N_p :

$$\Delta t^K = C \min \left(\frac{1}{2N_p + 1}, \frac{w_1}{2} \right) \left(\sum_{i=1}^d \frac{|v_i^K| + c_s^K}{\Delta x_i^K} \right)^{-1}.$$

2.3. Cómputo en paralelo

El cómputo en paralelo ha resultado ser una herramienta imprescindible en la elaboración de códigos con fines de cómputo científico, permitiendo la simulación de sistemas de otra forma inatacables. Paralelizar tiene impacto tanto en el tamaño tratable del sistema, como en el tiempo asequible de evolución. Para nuestros fines, típicamente, un núcleo de CPU puede procesar 5×10^5 celdas por segundo, donde un sistema típico consiste de 10^7 celdas. Considerando estas condiciones, tenemos que un paso de tiempo tomaría al rededor de 20 segundos. si consideramos ahora el escenario de interacción disco-planeta, donde la evolución temporal deseada está en el rango de 10 a 1000 órbitas, cada órbita tomando entre 100 y 1000 pasos tiempo, nos llevaría a tiempos de cómputo de fracción de un día a un año completo, tiempo que resulta prohibitivo. En este trabajo hacemos uso de dos herramientas distintas de paralelización, que al ser independientes pueden ser empleadas de manera conjunta.

2.3.1. Paralelización de grano grueso

Considerando que tenemos un CPU capaz de ejecutar n procesos de forma independiente, el paralelismo de grano grueso consiste en la partición del dominio inicial de la simulación en n sub-dominios, cada uno de estos siendo ejecutado por un distinto proceso. Idealmente este paralelismo tendría un rédito de disminuir el tiempo de ejecución en un factor $1/n$. Este factor ideal se ve restringido por la necesidad de reali-

zar comunicaciones entre los n procesos, necesarias para preservar el comportamiento unido del dominio total.

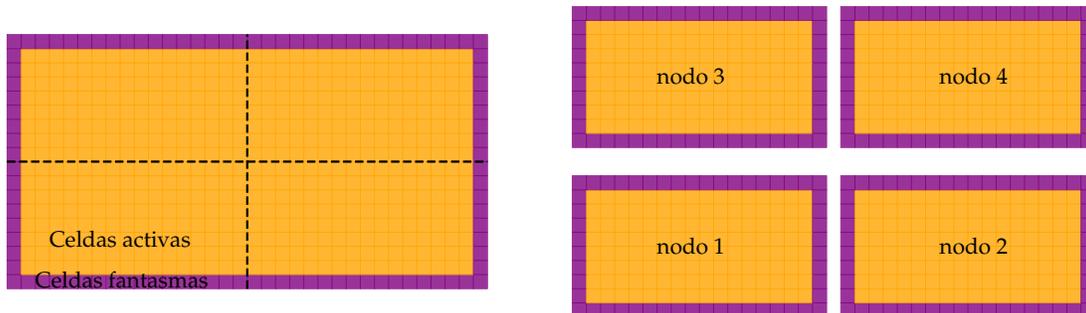


Figura 2.5: Celdas fantasmas y repartición del dominio

La paralelización descrita hasta el momento reedita solo en reducir el tiempo de ejecución. Ahora bien si consideramos el caso en el que tenemos acceso a m nodos, donde cada nodo corresponde a un CPU distinto con sus n procesos y su memoria propia, podemos entonces separar nuestro dominio en $m \times n$ sub-dominios. En caso esperamos un factor ideal $1/mn$ en la reducción del costo computacional. Otro impacto posible de este tipo de paralelización es el aumentar el tamaño tratable del sistema, al poder simular un sistema m veces más grande de lo posible con un solo nodo.

El paralelismo de grano grueso que usamos en los códigos que se presentan en este trabajo fue implementado haciendo uso del protocolo MPI (por sus siglas en inglés), el cual permite la repartición en distintos procesos así como la gestión de estos.

2.3.2. Paralelización de grano fino

Este paralelismo consiste en hacer uso de unidades de cómputo con la característica principal de poseer un elevado número de procesadores, procesadores con menor desempeño que los que posee un CPU típico, pero que por su gran cantidad sobre compensan la calidad. Las unidades de procesamiento gráfico GPUs (por sus siglas en inglés) son un ejemplo de este tipo de dispositivos, y en la actualidad, pueden contar

con miles de unidades de procesamiento, proveyendo así miles de procesos concurrentes. En nuestro caso, el estado de una celda al tiempo t_{n+1} solo requiere información de esta misma y de otras (dependiendo del método) al tiempo t_n , la evolución de cada celda del sistema se puede realizar entonces de manera concurrente.

En nuestro caso, al tener acceso a dispositivos de Nvidia, hacemos uso del lenguaje CUDA que ellos mismos han puesto disponible para hacer uso de sus GPUs, para implementar esta paralelización de grano fino en nuestros códigos.

Como mencionamos anteriormente, este paralelismo es ortogonal al de grano grueso, con esto queremos decir que ambos pueden ser usados en conjunto. Entonces, de tener acceso a múltiples GPUs, la ejecución del código puede repartirse sobre estas mismas, cada GPU a cargo de un sub-dominio, y cada celda del sub-dominio siendo tratada por uno de los miles de procesos de esta GPU.

Capítulo 3

Un código $2D$ de Galerkin

Discontinuo en GPUs

3.1. Introducción

El acelerado ritmo en el descubrimiento de sistemas exoplanetarios ha traído consigo la elaboración de estudios teóricos para el mejor entendimiento de su funcionamiento y extraordinaria diversidad. Una gran parte de estos estudios se ha realizado mediante el uso simulaciones computacionales para la interacción entre disco y protoplanetas. La práctica más común para estas simulaciones de la interacción disco-planeta es a través de códigos de mallas. Entre la vasta colección de códigos podemos citar *Athena* (Zhu et al. 2014), *DISCO* (Duffell 2016), *FARGO* y *FARGO3D* (Masset 2000; Benítez-Llambay & Masset 2016), *NIRVANA* (D’Angelo et al. 2003a), *PENCIL* (Lyra et al. 2009), *PEngUIIn* (Fung et al. 2014), *PLUTO* (Mignone et al. 2012) y *RODEO* (Paardekooper & Mellema 2006). Algunos de estos códigos son relativamente nuevos, mientras que otro han sido usados por más de una década. Hace ya casi una década que las propiedades y desempeño de estos códigos fueron estudiados por de Val-Borro et al. (2006) en un proyecto dedicado a la comparación de estos códigos dedicados a interacciones disco-planeta. La gran mayoría de estos códigos emplean mallas polares centradas en la estrella primaria para el caso $2D$, y mallas cilíndricas o esféricas para centradas en la primaria y co-planas con el disco para el caso $3D$. Existen pocas ex-

cepciones a esto, tal como es el estudio de [Pepliński et al. \(2008a\)](#), donde desarrollaron simulaciones de corto tiempo para la migración pronta de planetas gigantes. Tanto las mallas cilíndricas como las esférica están naturalmente adaptadas a la geometría del problema disco-planeta, lo cual resulta en una mucho menor viscosidad numérica (para el flujo en el disco) que para el caso de una malla Cartesiana con similar resolución. Tenemos que las interacciones disco-planeta son altamente sensibles a la viscosidad del disco, ya sea a través de la saturación de la torca de co-rotación en el régimen de baja masa ([Masset 2001](#); [Masset & Casoli 2010](#); [Paardekooper et al. 2011](#)) o a través del proceso de formación de brecha para el caso de planetas gigantes ([Lin & Papaloizou 1986](#); [Crida et al. 2006](#); [Fung et al. 2014](#)). Existe un creciente cuerpo de evidencia sugiriendo que los discos poseen muy pequeña viscosidad efectiva, si es que poseen alguna. La inclusión de efectos magneto-hidrodinámicos no ideales en los modelos teóricos de discos protoplanetarios conllevan un marco cualitativamente diferente al de modelos pasados, y sugiere que el flujo es laminar en la mayor parte del disco ([Bai & Stone 2013](#); [Lesur et al. 2014](#)), mientras que los intentos de detectar movimiento turbulento en los discos protoplanetarios cercanos ha llevado a decrecientes límites superiores ([Flaherty et al. 2018](#)). Todo lo anterior demanda esquemas con muy baja viscosidad numérica para bien lograr el estudio de interacciones disco-planeta. Sin embargo, no todos los estudios numéricos de discos protoplanetarios pueden realizarse sobre mallas cilíndricas o esféricas. Conforme aumenta la complejidad y realismo, las mallas Cartesianas con refinamiento adaptativo *AMR* (por sus siglas en inglés) pueden ofrecer un mejor lienzo para las simulaciones ([Lichtenberg & Schleicher 2015](#); [Hennebelle et al. 2017](#)). Otro escenario posible es considerar la simulación de múltiples discos, como sucede en el caso de los discos circunestelares de una estrella múltiple. Recientemente, [Schaal et al. \(2015\)](#) ha presentado una implementación de un método *DG* enfocado en la descripción de flujos astrofísicos. Las soluciones de alto orden que provee este esquema, sugieren la capacidad de capturar discos que rotan de manera diferencial con una muy baja viscosidad. Por otra parte, estos esquemas presentan la interesante propiedad de conservar el momento angular a precisión de la maquina (en las partes donde no se emplee limitador de flujo). Esta es una propiedad muy

deseada para simulaciones de disco-planeta con tiempos largos, donde la deriva del planeta depende en su mayor parte del intercambio de momento angular con su región co-orbital: un intercambio espurio de momento angular puede inducir una tasa de migración incorrecta. Dado que los métodos de DG conllevan computaciones intensivas y requieren de un estencil pequeño, están bien adecuados para ser portados a plataformas con masivos números de hilos de cómputo tal como lo son las GPUs.

Por todas estas razones, hemos implementado sobre GPUs un esquema DG para una malla Cartesiana $2D$, y hemos evaluado sus propiedades y desempeño al estudiar flujos Keplerianos para planetas de masa intermedia. Aunque una implementación de este esquema DG en mallas cilíndricas o esféricas es posible, nos enfocamos en la presente implementación como una prueba conceptual en caso menos favorable. Como hemos de ver, podemos obtener muy pequeñas viscosidades numéricas aun con la desfavorable malla Cartesiana, lo cual sugiere cabida para mejora con mallas adaptadas a la geometría del flujo. Este capítulo contiene el trabajo presentado por [Velasco Romero et al. \(2018\)](#), el código resultante fue también empleado en el trabajo de [Veiga et al. \(2018\)](#).

3.2. Implementación

La disponibilidad de recursos computacionales enfocados a la paralelización como las GPUs, ha renovado el interés en métodos de alto costo computacional. Los métodos DG al poseer un estencil pequeño (solo se requiere información de primeros vecinos) y tener un elevado costo computacional, son una natural elección para ser portados a GPUs, donde el poder de cómputo es elevado mientras que el acceso a memoria es limitado. Presentamos aquí la implementación Cartesiana $2D$ que hemos realizado de un método DG modal sobre GPUs haciendo uso de los lenguajes FORTRAN, C y CUDA y del protocolo de comunicaciones MPI.

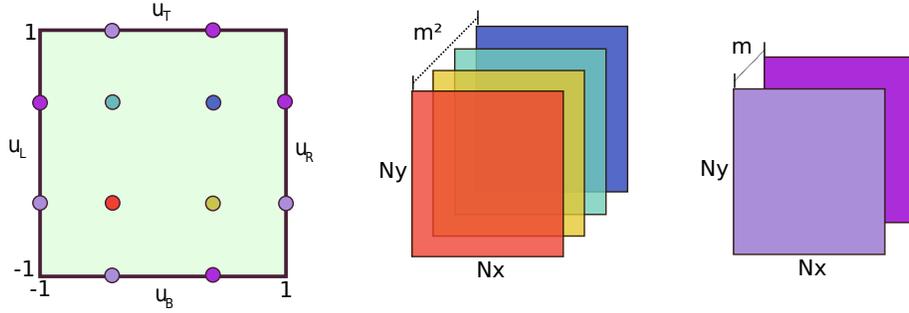


Figura 3.1: Estructura de los arreglos para los valores nodales en la implementación 2D del método DG, mostramos el caso para $m = 2$, los valores modales tienen la misma estructura que los valores nodales de volumen.

3.2.1. Estructura de datos

Empezamos por describir la estructura elegida para guardar en memoria nuestros datos. Tanto la representación en modos como en nodos de un campo requiere de m^2 valores de volumen por cada celda (donde m es el orden del esquema), elegimos entonces construir m^2 arreglos de tamaño $N_x \times N_y$ para almacenar nodos o modos. Para los nodos de contorno sobre los cuales calculamos los flujos tenemos m valores cara, construimos entonces m arreglos de tamaño $N_x \times N_y$ por cara. En la figura 3.1 mostramos una caricatura del ordenamiento de los valores nodales de nuestros campos. Esta elección facilita la lectura y el cómputo tanto de nodos como de modos sobre GPUs.

3.2.2. Partición del dominio para múltiples procesos

Hemos habilitado el código para ser ejecutado sobre múltiples GPUs, para realizar esto es necesario subdividir el dominio espacial en distintos sub-dominios que habrán de ser simulados por distintas GPUs. Amalgamamos nuestros sub-dominios en uno solo comunicando la capa más externa de celdas activas con el sub-dominio vecino. Tratamos estas comunicaciones como parte de nuestras *condiciones de contorno*, las cuales se encargan del llenado de las celdas fantasmas, esto nos permite en el algoritmo tratar a cada sub-dominio como un dominio individual, el cual posee $n_x \times n_y$ celdas activas y una capa de celdas inactivas o fantasmas por lado. La información

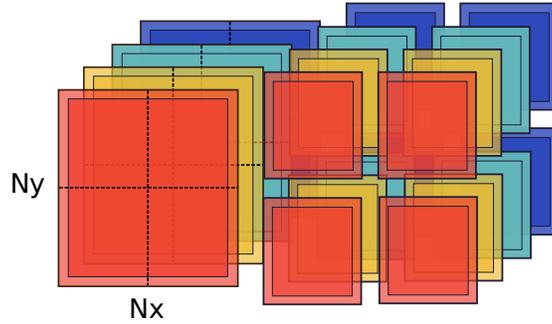


Figura 3.2: Ejemplo de la subdivisión de la estructura de datos para múltiples procesos, mostramos el caso para 4 procesos. Cada nuevo sub-dominio tiene una capa de celdas fantasmas por lado, las cantidades a comunicar son los modos de las variables conservadas densidad, momentos y energía total.

a comunicarse consiste de los valores modales de las cantidades conservadas (densidad, momentos lineales y energía total). En nuestra implementación (que mezcla FORTRAN, C y CUDA) no hacemos uso del MPI adecuado para CUDA, por tanto nuestras comunicaciones se realizan de CPU a CPU, lo cual deja cabida para mejora en un futuro.

3.2.3. Descripción del algoritmo

Pasamos a realizar una breve descripción de las etapas que involucra nuestro algoritmo:

1. Condiciones iniciales
 - a) Inicializar los nodos de la variables primitivas (densidad, velocidades y presión)
 - b) Convertir los nodos a variables conservadas (densidad, momentos y energía total)
 - c) Integrar para obtener los modos de las variables conservadas
2. condición CFL: encontrar el paso de tiempo global
3. Runge-Kutta sub-paso:

- a) Computar: flujos dentro del volumen, flujos en las caras, términos fuentes
 - b) Actualizar los modos de las variables conservadas
 - c) Condiciones de contorno (incluye comunicaciones MPI)
 - d) Limitadores
4. Si $t = t_{\text{salida}}$: Copiamos los modos a memoria de CPU para imprimir a un archivo el estado a $t = t_{\text{salida}}$
 5. Si $t < t_{\text{final}}$: Regresamos al paso 2
 6. Fin de la simulación

La evaluación del paso de tiempo se hace a partir de los valores promedio de la celda, lo cual corresponde al modo de orden cero para cada cantidad.

3.2.4. Peculiaridades de la implementación sobre GPUs

En la presente implementación del método DG , todos nuestros campos consisten de arreglos lineales, así mismo las funciones kernel sobre GPUs son ejecutadas sobre bloques unidimensionales. El mapeo de hilos a modos/nodos fue elegido de forma que facilite la lectura de memoria (aunque no garantiza lecturas totalmente alineadas como lo haría utilizar memoria alineada (pitched memory)). Como mencionamos anteriormente elegimos tener m^2 matrices de tamaño $N_x \times N_y$ en lugar de una matriz de tamaño $(m \times N_x) \times (m \times N_y)$, de igual forma las funciones que tratan operaciones de volumen son llamadas con bloques de tamaño $m^2 \times N_x \times N_y$, donde cada hilo se encarga de computar un modo/nodo. El alineamiento de memoria que describimos permite que las lecturas sean compartidas entre hilos, tal y como lo muestra la figura 3.3:

Para obtener nodos u a partir de modos \hat{u} tenemos que el índice del hilo está dado por:

$$id = id = i + j \cdot N_x + i_q \cdot N_x \cdot N_y + j_q \cdot N_x \cdot N_y \cdot m, \quad (3.1)$$

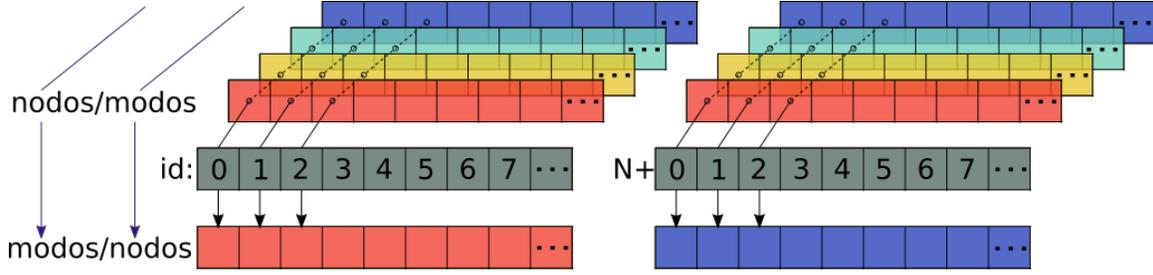


Figura 3.3: Ejemplo de la paralelización en hilos realizada sobre GPUs para el cómputo de nodos a partir de modos y viceversa.

a partir de éste extraemos los índices i, j de la celda y los índices i_q, j_q de la cuadratura, teniendo entonces:

$$u[id] = u(i, j, i_q, j_q) = \sum_{j_m, i_m}^k \hat{u}(i, j, i_m, j_m) \phi(i_q, i_m) \phi(j_q, j_m). \quad (3.2)$$

donde $\phi(i_q, i_m)$ representa el polinomio de Legendre de orden i_m evaluado en el punto de cuadratura i_q .

Ahora, para obtener los modos a partir de los modos, tenemos que obtener del índice id los índices i, j de la celda, y los índices i_m y j_m del respectivo modo, entonces computamos el modo $\hat{u}(i, j, i_m, j_m)$ como:

$$\hat{u}[id] = \hat{u}(i, j, i_m, j_m) = \sum_{j_q, i_q}^k u(i, j, i_q, j_q) \phi(i_q, i_m) \phi(j_q, j_m) \omega(i_q) \omega(j_q). \quad (3.3)$$

Tanto los polinomios de Legendre evaluados en los puntos de la cuadratura $\phi(i_q, i_m)$, como los pesos de estos puntos $\omega(i_q)$, se guardan en la memoria constante de GPUs, de manera que el acceso a estos es más rápido, evitando así recalcular los polinomios en cada uso.

La reducción necesaria para calcular el mínimo global de los máximos pasos de tiempo posibles, se realiza sobre un solo bloque de hilos, haciendo uso de memoria compartida (shared memory).

Experimentaciones previas realizadas con el código FARGO3D nos mostraron que

el uso de memoria alineada tenía poco beneficio sobre la implementación de arreglos unidimensionales (Benítez-Llambay & Masset 2016). Esto puede deberse a los dos niveles de memoria cache disponibles en GPUs modernas, también la mejora en el sofisticado mecanismo de lectura de memoria global que poseen estas, disminuyendo la necesidad de alineamiento de memoria por parte del programador, como lo era en versiones anteriores.

A partir de aquí, usaremos la expresión "grado de libertad" para referirnos a un elemento individual de resolución, de manera que el número de grados de libertad en FARGO3D es $N_x \times N_y$, mientras que es $N_x \times N_y \times m^2$ para un esquema DG de orden m (cabe resaltar que el número de valores independientes a especificar es cuatro veces mayor que esto, ya que por cada elemento de resolución debemos especificar las 4 variables primitivas: densidad, presión y las dos componentes de la velocidad).

3.2.5. Desempeño del código sobre múltiples GPUs

Teniendo en mente realizar la validación de nuestra implementación del método DG, realizamos mediciones del tiempo de ejecución por etapa del integrador RK , esto para diferentes resoluciones y grados de la aproximación espacial. Comparamos después estos tiempos con los tiempos de ejecución del código FARGO3D. Los resultados de esta comparación se muestran en la figura 3.4, donde mostramos el promedio del tiempo de ejecución por *grado de libertad* en función del grado del esquema. Es importante resaltar que el tiempo de ejecución medido es de una etapa, donde para el código DG el paso de tiempo consiste de varias etapas del integrador RK (el número de etapas depende del grado del integrador) mientras que para FARGO3D del paso de tiempo es equivalente a una etapa. En la gráfica a mano derecha presentamos las curvas para el escalamiento fuerte, mostrando el desempeño del código en función del número de GPUs utilizadas en la paralelización del dominio. Podemos observar que aun sin hacer uso de comunicaciones directas entre GPUs, tenemos un escalamiento cercano al óptimo. Vemos también que mientras mayor es el grado del esquema más cercano es el escalamiento medido al óptimo, aun para bajas resoluciones, estos resultados son consistentes con lo esperado para un método intensivo en computaciones,

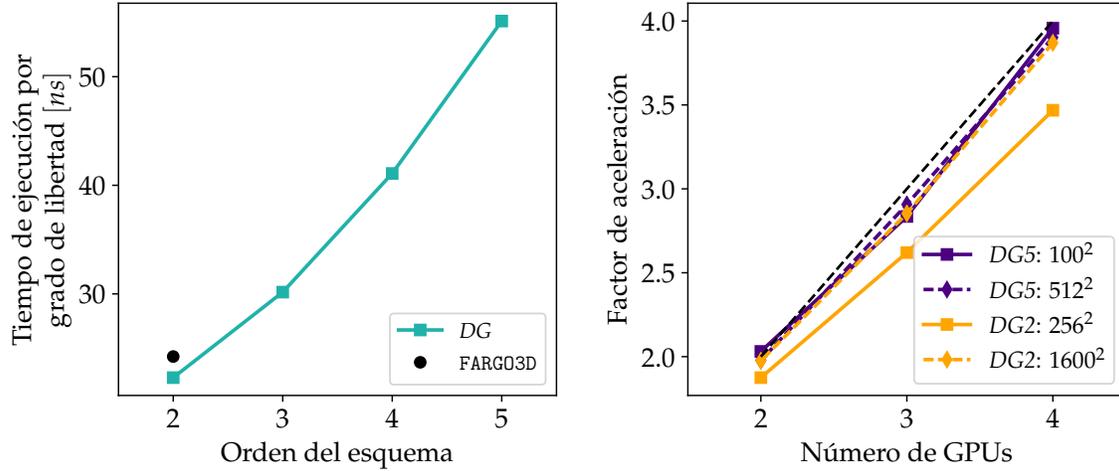


Figura 3.4: En la izquierda el tiempo promedio de ejecución de un sub-paso por grado de libertad en función del orden efectivo del esquema. En la derecha el factor de aceleración para el código DG en función del número de GPUs utilizadas en la paralelización del dominio. Estos resultados fueron obtenidos haciendo uso de GPUs K20s con control de error (ECC) activado.

dónde las comunicaciones tienen poco impacto en el tiempo total de ejecución. Un estudio de escalamiento débil nos mostró un factor de aceleración cercano a $60x$ para una ejecución de nuestro código con 64 GPUs P100.

Hemos de mencionar que la última implementación realizada solo tiene versión GPU, por esta razón no podemos mencionar factores de aceleración respecto a ejecuciones sobre CPUs. Sin embargo, con versiones anteriores no optimizadas para CPU, observábamos un factor de aceleración entre $100x$ y $350x$ (el factor más grande se obtuvo para el caso de mayor grado del esquema). Este factor fue obtenido haciendo uso de GPUs K80 y de CPUs IntelTM Xeon E5.

3.3. Problemas de prueba

En esta sección presentamos un conjunto de pruebas estándares con la finalidad de validar la implementación.

3.3.1. Vórtice isentrópico

Este problema consiste en la descripción la convección de un vórtice isentrópico para un fluido no viscoso (Yee et al. 1999). El dominio físico consiste del cuadrado $[0, 10] \times [0, 10]$, el vórtice está centrado en $(x_c, y_c) = (5.0, 5.0)$, $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$ y las condiciones de frontera son periódicas.

Las condiciones iniciales para las variables primitivas son:

$$\begin{aligned}\rho &= \left[1 - \frac{(\gamma - 1)\beta^2}{8\gamma\pi^2} \exp(1 - r^2) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ v_x &= 1 - \frac{\beta}{2\pi} \exp\left(\frac{1 - r^2}{2}\right) (y - y_c), \\ v_y &= 1 + \frac{\beta}{2\pi} \exp\left(\frac{1 - r^2}{2}\right) (x - x_c), \\ p &= \rho^\gamma,\end{aligned}$$

con $\gamma = 1.4$, mientras que las condiciones para el flujo libre están dadas por:

$$\rho = 1.0, \quad v_{x,\infty} = 1.0, \quad v_{y,\infty} = 1.0, \quad p = 1.0$$

Tasa empírica de convergencia

Los error empíricos se estiman haciendo uso de la norma de error \mathcal{L}_1 :

$$\mathcal{L}_1 = \|u_h(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\|_1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.4)$$

Está mostrado por Zhang & Shu (2004) que se espera una tasa de convergencia de $N_p + 1$ en la norma \mathcal{L}_1 para soluciones polinomiales aproximadas de grado N_p y soluciones suficientemente suaves:

$$\|u_h(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\|_1 \approx \sum_{K \in \Omega} \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N_p} \sum_{j=0}^{N_p} |u_h(x_i, y_j) - u(x_i, y_j)| w_i w_j \Delta x \Delta y \quad (3.5)$$

El sistema evoluciona hasta un tiempo $t = 10$ i.e. hasta que el vórtice atraviesa la

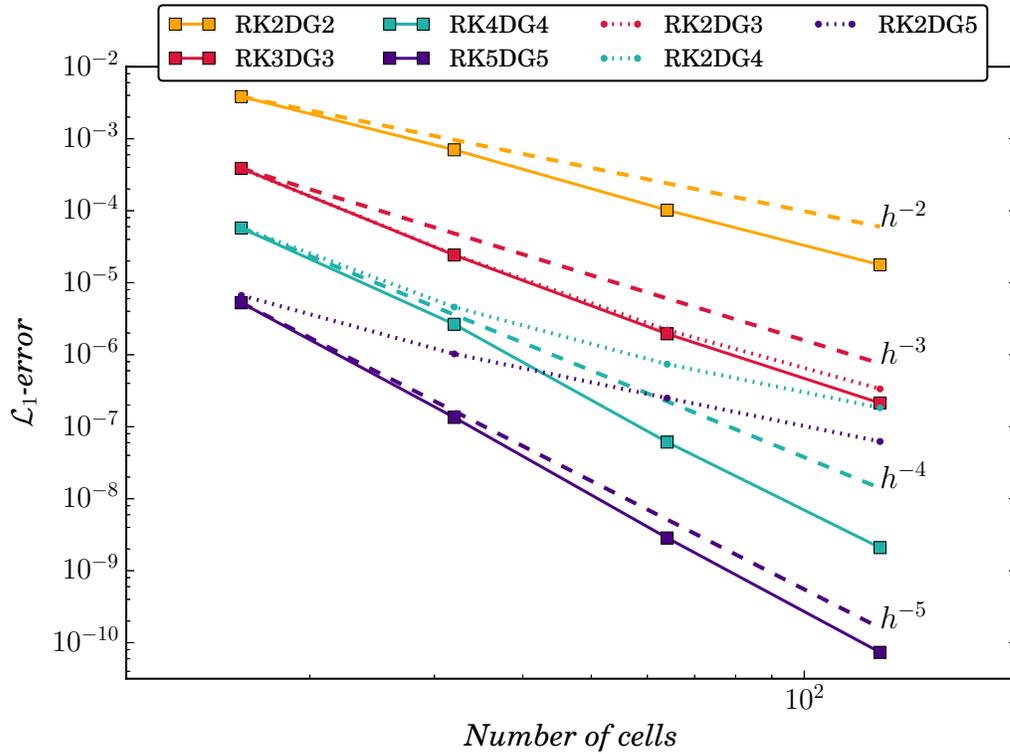


Figura 3.5: Convergencia del método RKDG en la norma \mathcal{L}_1 para diferentes grados en la discretización espacial y temporal en el caso de un vórtice isentrópico.

caja y regresa a su posición inicial.

Tal y como se muestra en la figura 3.5, observamos una tasa empírica de convergencia cercana a la anticipada de manera teórica. Observamos que reducir el grado de la integración temporal conlleva a un decremento en la norma \mathcal{L}_1 , siendo la tasa de convergencia dominada por el error de la integración temporal. Como muestran [Young & Ooi \(2004\)](#), es posible recuperar la tasa de convergencia adecuada si se restringe la condición de CFL. En otras palabras, esto significa que podemos reducir el grado de la integración temporal con respecto al grado de la integración espacial y mantener un error aceptable. Esto resulta relevante ya que al aumentar el grado de la integración temporal el número de etapas requerido aumenta a mayor ritmo, volviéndose prohibitivo en costo.

3.3.2. Vórtice de Gresho

Este problema consiste de una solución estable en rotación para las ecuaciones de Euler no viscosas (Liska & Wendroff 2003), y se usa frecuentemente para pruebas de conservación de la vorticidad y del momento angular. La velocidad angular v_ϕ depende sólo del radio, y la fuerza centrífuga está balanceada por un gradiente de presión. El suavizado del perfil de la velocidad angular es una medida de que tan bien conserva el código el momento angular. El dominio físico está definido por el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, el vórtice está centrado en $(x_c, y_c) = (0.5, 0.5)$ y $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$. Las condiciones de contorno son libres de gradiente:

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad \text{para } u \text{ una variable conservada } \rho, v_x, v_y, p.$$

Las condiciones iniciales para las variables primitivas son:

$$\rho = 1.0, \quad v_x = -v_\phi \frac{(y - y_c)}{r}, \quad v_y = v_\phi \frac{(x - x_c)}{r}, \quad p = p(r),$$

con velocidad angular v_ϕ y presión p :

$$v_\phi(r) = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 \leq r < 0.4 \\ 0 & r \geq 0.4 \end{cases}$$

$$p(r) = \begin{cases} 5 + \frac{25}{2}r^2 & r < 0.2 \\ 9 - 4 \log(0.2) + \frac{25}{2}r^2 - 20r + 4 \log(r) & 0.2 \leq r < 0.4 \\ 3 + 4 \log(2) & r \geq 0.4 \end{cases}$$

El momento angular \mathbf{J} y la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ pueden escribirse de forma

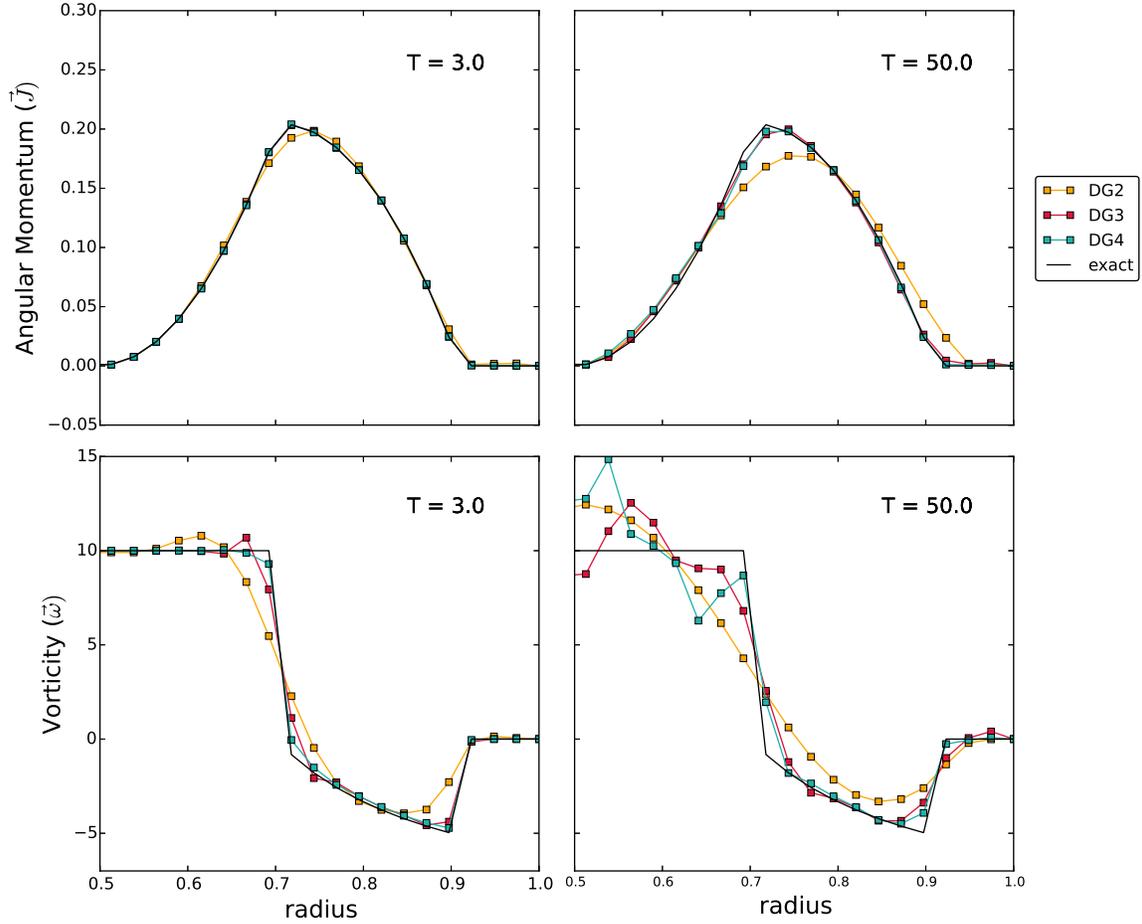


Figura 3.6: Perfil del momento angular a los tiempos $t = 3.0$ y $t = 50.0$ para el problema del vórtice de Gresho con distinto grado del esquema DG .

analítica como:

$$\mathbf{J}(r) = \begin{cases} 5r^2 & r < 0.2 \\ 2r - 5r^2 & 0.2 \leq r < 0.4 \\ 0 & r \geq 0.4 \end{cases} \quad \omega(r) = \begin{cases} 10 & r < 0.2 \\ \frac{2}{r} - 10 & 0.2 \leq r < 0.4 \\ 0 & r \geq 0.4 \end{cases}$$

Ha sido mostrado que un esquema DG sin limitadores, puede conservar el momento angular haciendo elección del conjunto adecuado de funciones bases (Schaal et al. 2015). En la figura 3.6 se muestra el perfil del momento angular a los tiempos $t = 3.0$ y $t = 50.0$ (correspondientes a aproximadamente 2.4 y 40 órbitas a un radio $r = 0.2$ respectivamente). Hacemos notar que el momento angular se mantiene bien descrito

Esquema	\mathcal{L}_1 error en vorticidad (%)	\mathcal{L}_1 error en densidad(%)
CFLFh	20	0.16
JT	45	0.22
LL	44	0.23
CLAW	28	0.1
WAFT	26	0.07
WENO	27	0.06
PPM	13	0.04
VH1	15	0.04
DG2	20.50	0.05
DG3	12.00	0.01
DG4	6.46	0.008

Tabla 3.1: Error relativo de la norma \mathcal{L}_1 para diferentes códigos en el problema del vórtice de Gresho a $t = 3$.

a lo largo de la simulación, tal y como se esperaba. Sin embargo, la vorticidad no se mantiene bien comportada para tiempos largos de evolución, esto no resulta sorprendente dado que el perfil de vorticidad de este problema es discontinuo y realizamos la medición de la vorticidad a través de los modos de la solución con alto grado.

Comparamos nuestra implementación del método DG con el desempeño de los códigos mostrados por [Liska & Wendroff \(2003\)](#) para este vórtice de Gresho. Hacemos evolucionar el sistema hasta un tiempo $t = 3$, en una malla de tamaño $(N_x, N_y) = (40, 40)$.

Como se muestra en la tabla 3.1, encontramos que en general, el método DG conlleva mucho mejores resultados que los demás métodos en cuanto a la densidad (excepto para el caso de segundo orden, que tiene un error comparable al de PPM y VH1), y se tiene un error básicamente similar al de los demás métodos al describir la vorticidad (excepto para el esquema de cuarto orden, para el cual el error resulta ser un factor dos más pequeño que para los mejores mejores métodos mostrados PPM y VH1).

3.4. Disco protoplanetario

3.4.1. Setup

Hemos diseñado un escenario sencillo de disco-planeta, de manera que podamos comparar el desempeño de este código con el de `FARGO3D`. El escenario consiste de un disco con radio interno $r_{\text{in}} = 0.4$ y radio externo $r_{\text{ex}} = 1.75$, con una densidad de superficie $\Sigma_0 = 1$ y una presión $p_0 = 2.5 \times 10^{-3}$ inicialmente uniformes. Tenemos un planeta en órbita circular fija con radio $r_p = 1$. Dado que no hay gradiente de presión o de densidad en la órbita del planeta, tampoco hay gradiente de entropía o de temperatura, y por lo tanto esperamos que la torca de co-rotación que siente el planeta sea la torca debida a la vortensidad, descrita por [Jiménez & Maset \(2017\)](#). La velocidad adiabática de sonido en la posición del planeta es entonces $c_s^{\text{adi}} = \sqrt{\gamma p_0 / \Sigma_0} \approx 0.059 r_p \Omega_p$ (donde Ω_p es la frecuencia orbital del planeta y γ el índice adiabático), mientras que la velocidad isoterma del sonido es $c_s^{\text{iso}} = 0.05 r_p \Omega_p$, la cual corresponde a una longitud de escala de presión $H = 0.05 r_p$, entonces la tasa de aspecto del disco en la posición del planeta es $h = H / r_p = 0.05$. La masa del planeta es $M_p = 6.0 \times 10^{-5} M_*$, donde M_* es la masa del objeto central ¹. El potencial gravitatorio de planeta tiene una longitud de suavizado $\epsilon_p = 0.03 r_p$. Dado que para ambas implementaciones (`DG` y `FARGO3D`) el marco de referencia está centrado en la estrella, ninguno es estrictamente inercial, al ser la estrella acelerada por planeta y por el disco. Esto da origen a un término adicional para el potencial gravitatorio, llamado término indirecto. Este término es en general minúsculo y no resulta crucial para la comparación que habremos de hacer, por tanto lo descartaremos en ambas implementaciones.

Hacemos uso de un sistema de unidades en el cual la masa M_* es unitaria, al igual que la longitud del radio r_p y la unidad de tiempo Ω_p^{-1} , esto implica que para este sistema de unidades la constante gravitatoria G es también unitaria². Para la configuración en el código `DG` usamos una cuadrado con longitud $4.5 r_p$ (yendo de

¹Esto se traduce a un planeta de $20 M_{\oplus}$ para una masa central equivalente a la del Sol.

²De tomar en cuenta el término indirecto, deberíamos elegir la masa $M_* + M_p$ como la masa unitaria para que lo anterior se cumpla.

$-2.25r_p$ a $2.25r_p$).

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{\Sigma_0}{1 + f(r)} \\ v_x &= -v_\phi \frac{y}{r} \\ v_y &= v_\phi \frac{x}{r} \\ p &= \frac{p_0}{1 + f(r)},\end{aligned}$$

donde elegimos $f(r) = \exp\left(\frac{r-r_{\text{ex}}}{r_p}\right)$ para proveer una transición suave al exterior del disco. La velocidad angular v_ϕ que lleva al equilibrio rotacional para este perfil de densidad es:

$$v_\phi^2 = r^2\Omega^2 + \frac{r\partial_r(c_{\text{s,iso}}^2\Sigma)}{\rho} = \Omega^2 - \frac{rc_{\text{s,iso}}^2 f(r)}{r_p h[1 + f(r)]},$$

donde el índice adiabático es $\gamma = 1.4$. Para la frecuencia orbital Ω tenemos rotación Kepleriana en toda la caja, excepto para la región interna al radio r_{in} , donde tenemos rotación sólida:

$$\Omega^2(r) = \begin{cases} \frac{GM_*}{r_{\text{in}}^3} & r \leq r_{\text{in}} \\ \frac{GM_*}{r^3} & r > r_{\text{in}}. \end{cases}$$

Tenemos también condiciones de frontera para amortiguar ondas como se describe por [de Val-Borro et al. \(2006\)](#). Un campo Q se amortigua en cada paso hacia su estado no perturbado Q_0 siguiendo la prescripción:

$$Q = \frac{\Delta t Q_0 + \tau Q}{\tau + \Delta t},$$

donde el tiempo de amortiguamiento es:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r_d^3}{GM_*}} \times \frac{1}{R(r)},$$

con una función rampa dada por:

$$R(r) = \left(\frac{r - r_d}{r_{\text{in/ex}} - r_d} \right)^2,$$

cubre el intervalo entre 0 y 1 con un comportamiento parabólico en la región entre r_d y radio límite del disco $r_{\text{in/ex}}$. El radio de amortiguamiento r_d para el límite interno del disco es:

$$r_d = r_{\text{in}} 1.15^{2/3}$$

mientras que para el límite externo del disco es:

$$r_d = r_{\text{ex}} 1.15^{-2/3}.$$

Los campos que amortiguamos son la densidad, las velocidades lineales, y la temperatura.

3.4.2. Comparación de resultados

Presentamos los resultados del código con malla Cartesiana *DG* y los de *FARGO3D* con malla polar, ambos códigos realizando simulaciones para el escenario de interacción disco-planeta. Realizamos un conjunto de simulaciones con creciente resolución y creciente grado del esquema en nuestra implementación *DG*. En la figura 3.7 mostramos imágenes de la densidad de superficie, a la izquierda la obtenida con un esquema *RK2DG5* (segundo orden temporal y quinto orden espacial), a la derecha la obtenida con *FARGO3D* para una malla polar. La posición y el contraste de la estela espiral resulta casi indistinguible entre ambas simulaciones, las diferencias notables surgen al acercarnos a las fronteras de amortiguamiento. Por otra parte, la región donde la torca tiene origen se encuentra relativamente alejada de la región que a través de la condición de CFL limita el paso de tiempo. Como consecuencia de esto, el número de Courant efectivo en esta región es pequeño, lo cual conlleva a diminutas diferencias a una posición dada entre pasos de tiempo, por tanto, aun con esquemas de bajo grado

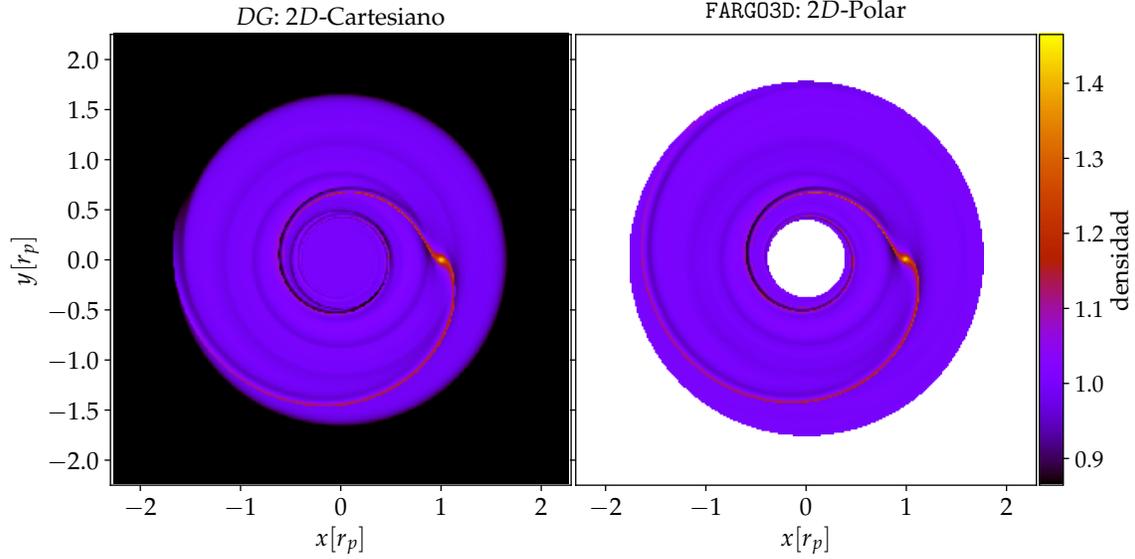


Figura 3.7: Imágenes de la densidad superficial para un disco adiabático a 50 orbitas de haber introducido el planeta. A la izquierda mostramos el resultado para un esquema $RK2DG5$ con una malla Cartesiana de tamaño 640×640 , en la izquierda mostramos el resultado de FARGO3D con una malla polar de dimensiones $N_\phi = 3574$ y $N_r = 768$.

temporal podemos obtener resultados similares a los de esquemas con mayor grado, tal y como se muestra en la figura 3.8 donde comparamos los resultados entre un $RK2$ y un $RK5$ para un esquema $DG5$.

Para todas las simulaciones presentes realizamos un monitoreo de la torca específica ejercida sobre el planeta a \mathbf{r}_p :

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_n \mathbf{r}_p \times \mathbf{g}_n = \mathbf{r}_p \times \sum_n \frac{GM_n(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p)}{[(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p)^2 + \epsilon_p^2]^{3/2}}, \quad (3.6)$$

donde M_n y \mathbf{r}_n representan respectivamente la masa y la posición de la celda n , mientras que \mathbf{g}_n representa la aceleración impartida por el material de la celda n hacia la posición del planeta. La evaluación de esta aceleración incluye la longitud de suavizado del planeta ϵ_p . Dado que consideramos el caso dos-dimensional, la única componente no nula de la torca $\mathbf{\Gamma}$ es la componente z . A partir de aquí haremos referencia a esta componente como la torca total Γ .

Normalizamos esta torca al valor $\Gamma_0 = \Sigma \Omega^2 r_p^4 q / h^2$ y de ahora en adelante mencio-

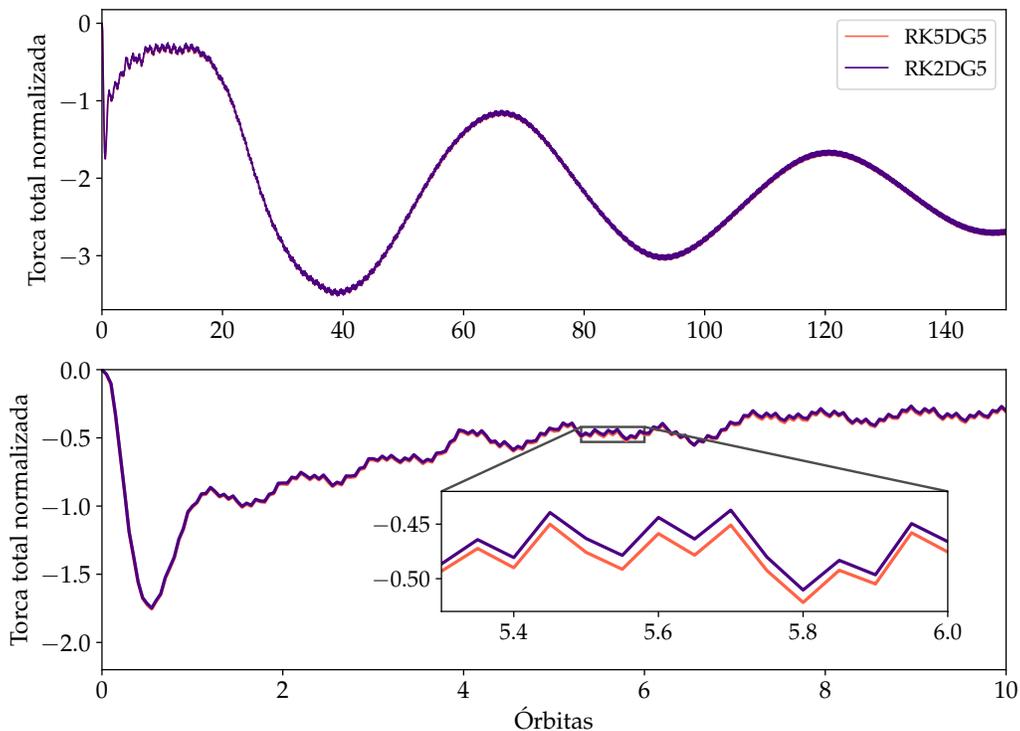


Figura 3.8: Comparación de la torca neta normalizada para un esquema de quinto orden espacial $DG5$ y dos integradores temporales de distinto orden, en morado un $RK2$ y en anaranjado un $RK5$. Vemos que a gran escala son prácticamente indistinguibles, en el recuadro de acercamiento podemos ver que existe una pequeña separación entre las curvas, pero que la forma de la curva se preserva entre ambos casos.

namos los valores en términos de $\gamma\Gamma/\Gamma_0$.

Comenzamos presentando en la figura 3.9 los resultados para el código *DG*, donde mostramos el comportamiento para distintas resoluciones y distintos grados del esquema. Vemos que al incrementar el grado del esquema podemos describir de manera adecuada el comportamiento en sierra que se espera de la torca en un disco sin viscosidad (Ward 2007). También podemos ver que el aumentar el grado del esquema nos permite llegar al comportamiento adecuado con cada vez menor número de celdas, como vemos para *DG5* donde aun un sistema de 256^2 celdas fue suficiente para describir el comportamiento dentado de la torca.

Los resultados para la torca son mostrados en la figura 3.7 para un esquema *DG5* con *RK2* y *RK5*. Estos resultados pueden generalizarse a los esquemas *DG3* y *DG4*, para el cual encontramos resultados virtualmente indistinguibles al usar *RK2* en comparación con un esquema de mismo grado temporal que el espacial. Esto puede deberse al hecho de que la región de herradura está resuelta en un número celdas relativamente pequeño. Como mostrábamos en la figura 3.5, a baja resolución, un integrador temporal de grado 2 tiene errores en la norma muy similares que los de uno de mayor grado.

La figura 3.10 contiene las torcas totales normalizadas para diferentes grados del esquema con la misma resolución. Aquí, la resolución para el esquema *DG* está tomada como la longitud de la celda dividida por el grado del esquema espacial. Las simulaciones de *FARGO3D* fueron diseñadas a manera de tener celdas cuadradas al radio $r = r_p$. La curva gris en esta figura tiene un tamaño de celda similar al de las curvas para *DG* con segundo, cuarto y quinto grado.

Observamos un comportamiento más cercano al analíticamente esperado en las simulaciones con más alto grado aun cuando el número de grados de libertad es igual. Las torcas mostradas en la imagen superior de la figura 3.10 muestran una gran similitud entre ambos códigos, especialmente al aumentar el grado del esquema

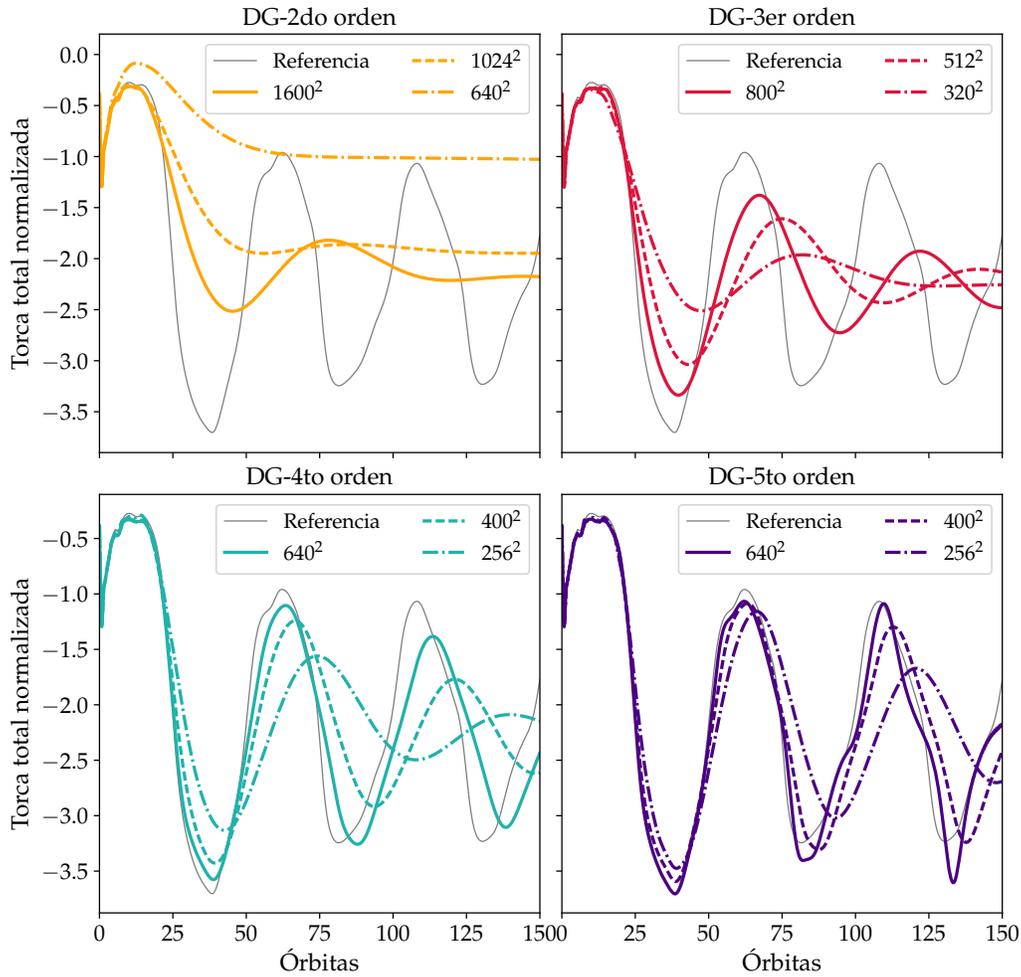


Figura 3.9: Torca neta normalizada obtenida con el código *DG* para un disco adiabático tras 150 órbitas del planeta, mostramos los resultados para distintos grados del esquema y distinto número de celdas. Cada imagen corresponde a un grado dado, y muestra la evolución de la torca para distintas resoluciones, mostrando la mejora en la descripción de la forma serrada de la torca al aumentar la resolución. Vemos también que aumentar el grado del esquema tiene un fuerte impacto en la preservación del comportamiento de la torca. La torca de referencia mostrada en gris fue obtenida con el código *FARGO3D* haciendo uso de advección orbital. No se incluye viscosidad física en estas simulaciones, de forma que el desvío del comportamiento dentado está atribuido exclusivamente a la difusión numérica del esquema.

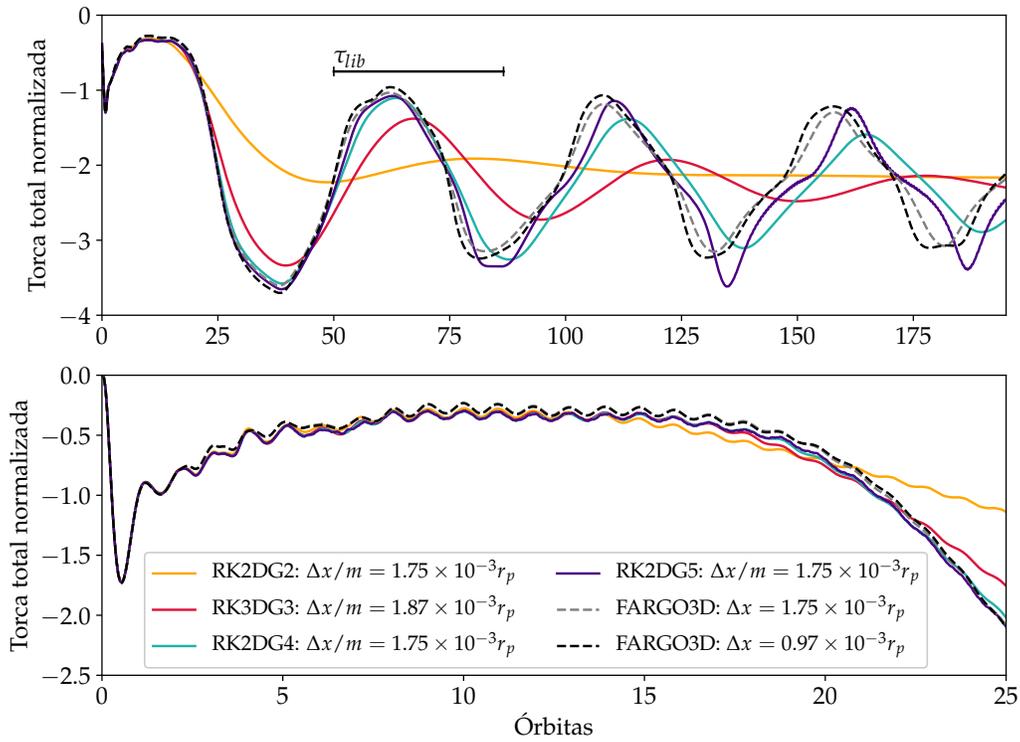


Figura 3.10: Dependencia temporal de la torca total normalizada para un disco adiabático para 200 orbitas del planeta. En líneas sólidas los resultados para *DG*, en líneas punteadas los resultados para FARGO3D con malla polar y el algoritmo FARGO. Mostramos dos simulaciones de FARGO3D con distinta resolución, las cuales son prácticamente indistinguibles, sugiriendo así que el resultado ha convergido.

DG. Esta similitud se conserva aun realizando un acercamiento a las componentes de amplitud baja y alta frecuencia en las etapas tempranas para el establecimiento de la torca (como se muestra en la imagen inferior de la figura 3.10) donde las oscilaciones en ambos códigos tienen una estructura altamente similar.

Dadas las grandes diferencias en las implementaciones de ambos códigos (tanto en el método numérico como en la geometría de la malla), esto hace la fuerte sugerencia que el comportamiento observado tiene origen físico en lugar de ser un artefacto numérico.

3.4.3. Estimación de la viscosidad numérica

La dinámica de herradura que da origen a la torca de co-rotación puede ser reducida a un problema de difusión y advección, en el cual la advección se origina del flujo Kepleriano mientras que la difusión viene del propio esquema numérico. Para poder cuantificar la viscosidad numérica del método *DG*, hemos recurrido a una comparación con simulaciones de alta resolución con el código **FARGO3D** haciendo uso de advección orbital. Dado que **FARGO3D** resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes, realizamos simulaciones para distintos valores de la viscosidad cinemática ν desde $10^{-9}r_p^2\Omega_p$ hasta $10^{-4}r_p^2\Omega_p$. A partir de estas construimos la paleta de torcas que se presentan en la figura 3.11, con la cual podemos comparar los resultados de nuestra implementación *DG* para así asignar una viscosidad numérica para una resolución y un orden del esquema dados.

[Masset & Casoli \(2010\)](#) encuentran que los máximos y mínimos sucesivos de la torca de co-rotación para valores pequeños de la viscosidad de cizalla se aproximan a una secuencia geométrica. Extraemos el coeficiente $\tilde{\rho}$ de esta secuencia geométrica a partir de los primeros tres puntos extremos de la torca total para nuestras simulaciones de baja viscosidad (hasta una $\nu \approx 10^{-6}r_p^2\Omega_p$). Este valor $\tilde{\rho}$ será utilizado como medio para comparar la viscosidad física de las simulaciones de **FARGO3D** a la viscosidad numérica de las simulaciones con *DG*. En otras palabras, a partir de los valores de $\tilde{\rho}$ obtenidos de la simulaciones con **FARGO3D**, construimos una aproximación polinomial de la relación entre $\tilde{\rho}$ y la viscosidad usada ν . Esta relación será utilizada en sentido

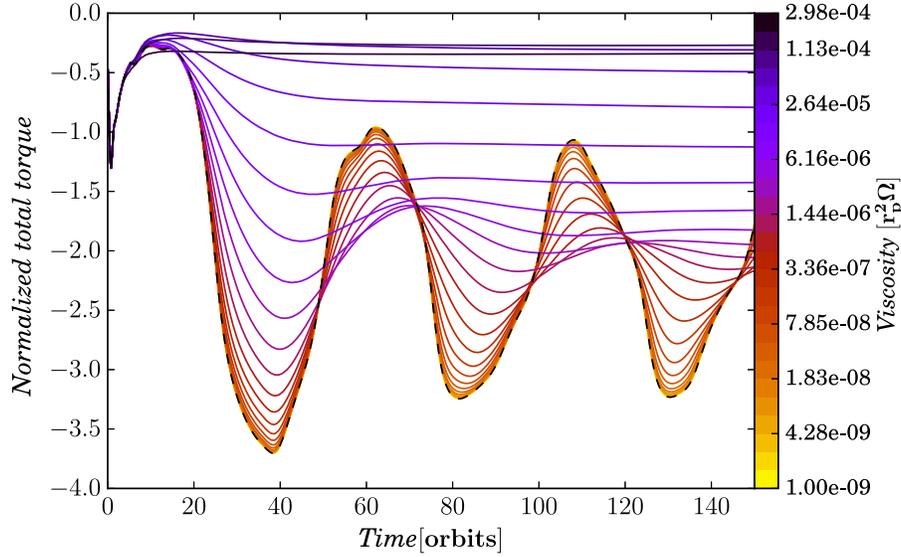


Figura 3.11: Dependencia temporal de la torca total normalizada, para un disco adiabático con viscosidad cinemática ν . Los resultados fueron obtenidos haciendo uso de FARGO3D con una malla polar de dimensiones 6444×1384 para el eje acimutal y el eje radial respectivamente. Las simulaciones fueron realizadas en un marco de referencia en co-rotación con el planeta y haciendo uso del algoritmo de advección orbital.

opuesto para asignar una estimación de la viscosidad numérica para el valor de $\tilde{\rho}$ medido en las simulaciones con *DG*. Los resultados de dichas estimaciones para la viscosidad numérica se muestran en la figura 3.12. Hacemos énfasis en que nuestro método conlleva una evaluación precisa de la viscosidad numérica para el problema específico de la dinámica de herradura. De usarse una observable distinta a la torca para inferir la viscosidad numérica del esquema, se podría obtener un valor distinto. Debido a la gran sensibilidad que presenta la torca con la viscosidad efectiva, creemos que el método que hemos utilizado provee una buena estimación de la viscosidad intrínseca del esquema numérico. La gráfica de la izquierda en la figura 3.12, muestra la ventaja, en términos de la viscosidad numérica, de incrementar el orden del esquema para una resolución efectiva dada. La gráfica del centro muestra que FARGO3D con advección orbital se desempeña de forma similar al esquema *DG* de 3^{er} orden con respecto a la resolución en la posición del planeta, mientras que los esquemas de 4^{to} y 5^{to} orden de *DG* superan a FARGO3D, aun cuando la geometría del problema es desfavorable para una malla Cartesiana. La gráfica de la derecha muestra que en

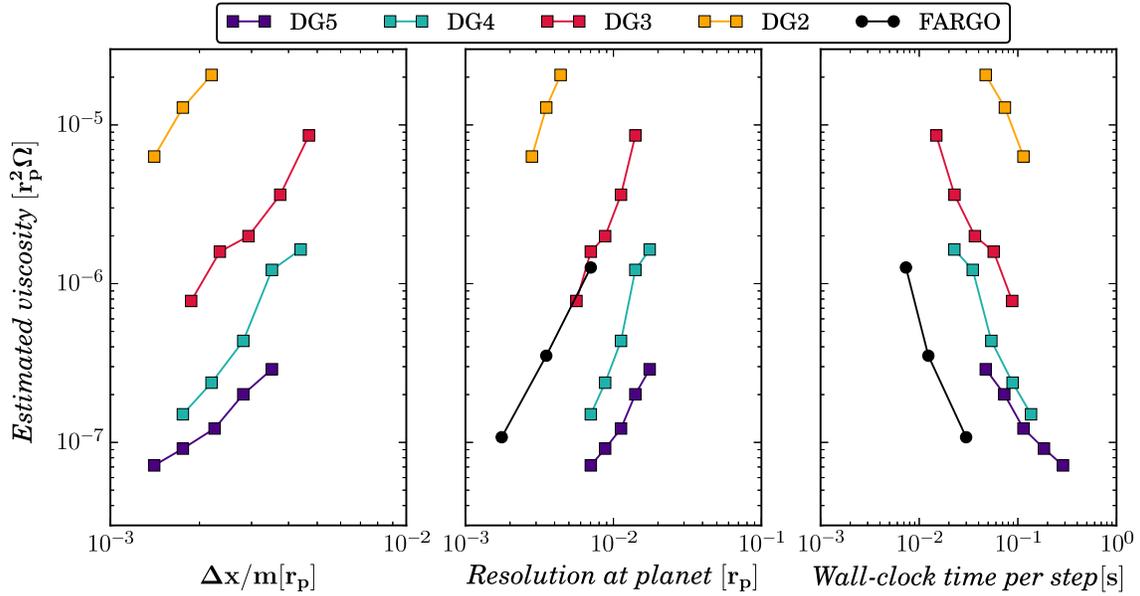


Figura 3.12: Viscosidad numérica del esquema DG inferida a partir de la viscosidad cinemática del código FARGO3D. Los resultados fueron obtenidos haciendo uso de un integrador temporal Runge-Kutta de segundo orden (RK2) para DG , y haciendo uso de advección orbital y un marco en co-rotación para el código FARGO3D. A la izquierda se muestra la viscosidad para DG como función de la resolución efectiva $\Delta x/m$. En el centro se muestra la viscosidad como función de la resolución Δx en la posición del planeta. A la derecha se muestra la viscosidad como función del tiempo de ejecución por paso de tiempo, mostrando que FARGO3D es más eficiente que los esquemas de DG .

cuestión de tiempo de ejecución, el desempeño de `FARGO3D`, supera en casi un orden de magnitud al de `DG`.

3.5. Conclusiones

Hemos mostrado la aplicabilidad de los métodos de Galerkin discontinuo en el escenario de interacciones disco-planeta, siendo capaces de obtener viscosidades numéricas despreciables al usar esquemas de alto grado en la aproximación espacial. También mostramos que para un número de grados de libertad dado, podemos alcanzar menores viscosidades al incrementar el orden del esquema en lugar de incrementar la resolución. La implementación 2D Cartesiana de `DG` con un marco de referencia sin rotación es capaz de reproducir los resultados de código `FARGO3D`, para el cual es necesario recurrir a una malla polar y ya sea advección orbital o un marco de referencia en co-rotación con el planeta para poder capturar adecuadamente el comportamiento de la torca. Hacemos notar que las viscosidades efectivas para un disco protoplanetario pueden ser extremadamente pequeñas. Muchas observaciones sugieren la existencia de vórtices, cuya persistencia requiere de un parámetro de Shakura-Syunyaev α de casi 10^{-4} (Zhu & Baruteau 2016), lo cual se traduce a un sistema con viscosidad $\nu = 2.5 \cdot 10^{-7} r_p \Omega_p^2$. Además, ha sido sugerido que el transporte de momento angular que conduce a la acreción en discos protoplanetarios puede no ser de naturaleza viscosa (Rafikov 2017), lo cual enfatiza la necesidad de métodos numéricos con muy baja viscosidad numérica. Nuestra implementación `DG` es más lenta que `FARGO3D` y probablemente sea de poco uso en escenarios de discos individuales. También, al ser esta una implementación 2D, debe esencialmente ser tomada como una prueba de concepto. Sin embargo, sugiere fuertemente que los esquemas `DG` pueden ser de gran utilidad en escenarios más complejos que requieran la captura de flujos con baja viscosidad, como pueden ser las simulaciones de múltiples escalas para discos protoplanetarios y su ambiente, para los cuales una implementación Cartesiano con AMR son la herramienta a elegir.

Capítulo 4

FARGO3D multi-malla

4.1. Introducción

Hacemos uso del código FARGO3D ([Benítez-Llambay & Masset 2016](#)) con capacidad de refinamiento mediante el uso de mallas anidadas, similar al del código NIRVANA ([D'Angelo et al. 2003b](#)). Nuestra implementación provee la posibilidad de crear una jerarquía de mallas anidadas con un número arbitrario de niveles de refinamiento, donde cada nivel de refinamiento duplica la resolución (a lo largo de cada dimensión) del nivel que le precede en la jerarquía. Cada malla de nuestro sistema jerárquico pasa individualmente a través del núcleo hidrodinámico de FARGO3D, el sistema completo se forma al amalgamar las mallas individuales en un sistema único a través de comunicaciones entre niveles, estas comunicaciones se realizan en etapas específicas del código de modo que logremos comunicar información concurrente. Esta versión multi-malla de FARGO3D está implementada en CUDA y MPI, dando así la posibilidad de realizar simulaciones que se ejecuten de forma paralela sobre múltiples GPUs. [Fung et al. \(2017\)](#) presentan los primeros resultados de esta versión del código FARGO3D con nuestra implementación de mallas anidadas. A continuación presentamos la minucia de esta implementación. Este capítulo contiene la implementación de mallas anidadas para el código FARGO3D descrito por [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#), esta implementación fue también utilizada por [Fung et al. \(2017\)](#) y [Masset et al. \(2018\)](#).

4.2. Programando el paso de tiempo

La condición de Courant implica en muchos casos que el máximo paso de tiempo permitido escale con la resolución. Para tales casos, tenemos que por cada paso Δt en un nivel dado ℓ , la práctica común consiste en realizar dos pasos de tamaño $\Delta t/2$ para el nivel más fino $\ell+1$ de manera recursiva (D'Angelo et al. 2002, 2003b; Pepliński et al. 2008b). Esta técnica de *sub-ciclado* es la que empleamos en este trabajo, dado que es la más eficiente para el problema que tratamos. Sin embargo, para otros problemas como el de un planeta embebido en un flujo con cizalla, no resulta ser la técnica más eficiente. Presentamos entonces el criterio general que desarrollamos para determinar de forma automática el mejor esquema de sub-ciclado.

4.3. Comunicación entre niveles

Para poder coordinar las mallas individuales que componen nuestro sistema, y hacerlas funcionar como un sistema único, es necesario comunicar información entre niveles adyacentes. Debemos comunicar información de forma ascendente (nivel grueso a fino), lo cual llamaremos `CommUp`, e información descendente (nivel fino a grueso) de la cual tenemos que comunicar promedios `CommMean` y flujos `CommFlux`. A continuación realizamos una descripción de cada una de este tipo de comunicaciones, donde denominamos ℓ al nivel grueso y $\ell + 1$ al nivel fino.

4.3.1. Llenado de celdas fantasmas del nivel fino: `CommUp`

Al estar inmerso el nivel fino dentro del nivel grueso, el nivel grueso constituye las condiciones de contorno del nivel más fino, de esta forma es necesario actualizar las celdas fantasmas del nivel fino mediante interpolación de las celdas activas correspondientes en el nivel grueso. Las celdas fantasmas del nivel fino $\ell + 1$ deben de ser actualizadas antes de pasar por el núcleo hidrodinámico del código, realizamos el llenado de estas celdas mediante una interpolación tri-lineal de 3^D celdas del nivel grueso (figura 4.1). Para una celda fina contenida por una celda gruesa (i, j, k) , em-

pezamos la interpolación tri-lineal en la dirección z interpolando los valores en $k - 1$, k y $k + 1$ a la posición k_{fino} de la celda fina. Esto resulta en 9 valores que ahora interpolamos en la dirección y de las posiciones $j - 1$, j y $j + 1$ a la posición j_{fino} de la celda fina, los 3 valores resultantes correspondientes a las posiciones $i - 1$, i y $i + 1$ son interpolados una última vez en la posición i_{fino} para así obtener el valor actualizado de la celda fina. Esta secuencia de interpolaciones está representada por la figura 4.1. Cada interpolación aquí se realiza usando un limitador de pendiente de van Leer como lo describe van Leer (1977).

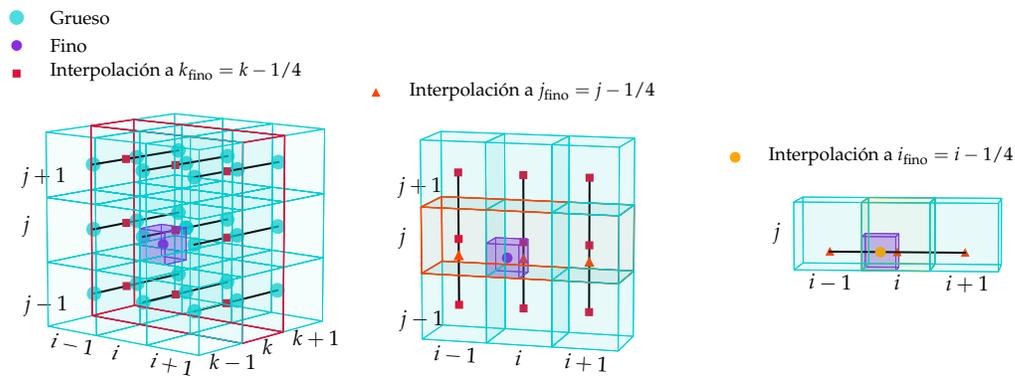


Figura 4.1: Principio de la comunicación ascendente (CommUp). Primero interpolamos sobre la dirección z a la posición k_{fino} de la celda fina, procedemos a interpolar en la dirección y a la posición j_{fino} de la celda fina, y terminamos al realizar una interpolación en la dirección x a la posición i_{fino} . Este proceso es realizado tanto para cantidades centradas como para escalonadas, siendo el alineamiento la única diferencia entre ambos casos.

Realizamos esta comunicación al inicio del ciclo del nivel fino que es cuando ambos niveles se encuentran en el mismo tiempo. Por tanto omitimos este tipo de comunicación entre sub-ciclos del nivel fino para evitar comunicar información antigua del nivel grueso. Esto conlleva duplicar el número de celdas fantasmas requeridas para así evitar que información corrupta llegue a la zona activa.

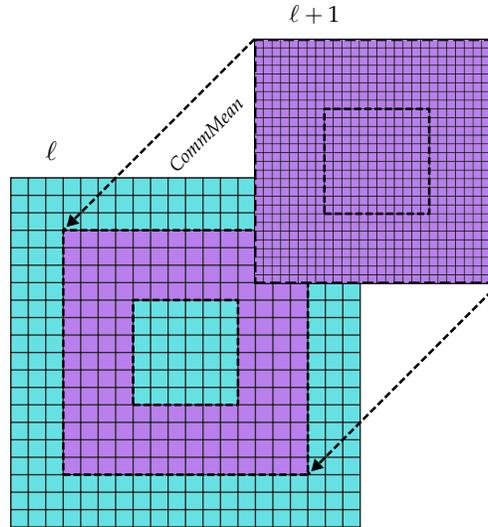


Figura 4.2: Representación esquemática del tipo de comunicación `CommMean`. La región en la malla gruesa correspondiente al contorno interno traslapado por el nivel fino, es sobrescrito por valores promediados sobre el nivel fino.

4.3.2. Sobrescribir celdas gruesas: `CommMean`

Parte fundamental del amalgamado de niveles consiste en sobrescribir al final de un paso del nivel grueso varias capas de celdas que están traslapadas por el nivel fino (figura 4.2). El número de capas a sobrescribir depende del número de etapas del núcleo hidrodinámico, para el caso de fricción dinámica con difusión térmica, requerimos de cuatro capas para garantizar que información más interna en la región traslapada no migre a la región activa no traslapada. Realizamos el reemplazo de la información en las celdas gruesas promediando sobre las celdas finas correspondientes a la celda gruesa. Como se muestra en la figura 4.3, para cantidades centradas promediamos sobre las 8 celdas finas, mientras que para cantidades escalonadas promediamos sobre las 4 celdas finas que están alineadas con la celda gruesa en la dimensión escalonada.

4.3.3. Empalmar los flujos: `CommFlux`

Para poder hacer valer la conservación a la precisión de la máquina de las cantidades a conservar (masa, momentos y energía) a través de todos los niveles que componen el sistema, es necesario empalmar los flujos en las fronteras entre niveles.

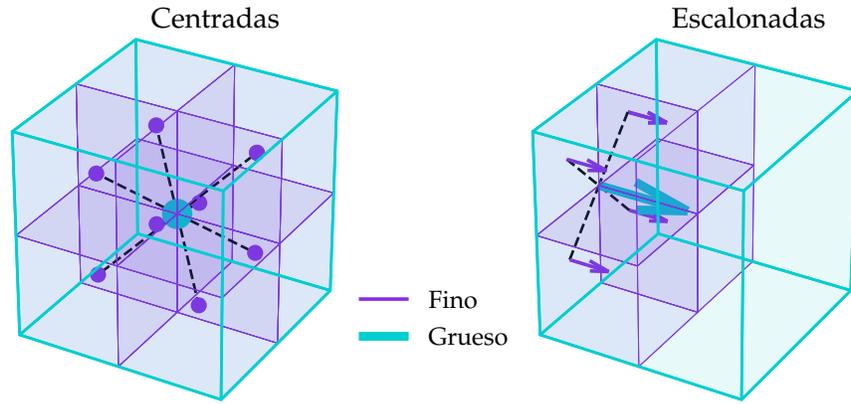


Figura 4.3: Principio de la comunicación descendente (*CommMean*). Los valores centrados de una celda gruesa son sobrescritos con el promedio sobre 8 celdas del nivel fino. Las cantidades escalonadas son sobrescritas con el promedio de las 4 celdas finas alineadas con la celda gruesa en la dimensión escalonada.

Usamos los flujos en el contorno del nivel fino para determinar lo que entra o sale del nivel grueso que rodea a este nivel fino. En la práctica, esto se logra al mandar los flujos en el contorno del nivel $\ell + 1$ hacia el nivel ℓ , usando estos flujos para sobrescribir los flujos correspondientes en el nivel grueso. Comunicamos y sobrescribimos sólo los flujos en la frontera entre niveles. El flujo f de una celda gruesa es sobrescrito por la suma de los flujos de las 4 celdas finas que comparten interfase con ésta. Los flujos se comunican al final de un ciclo completo del nivel fino, por tanto, en el caso de un sub-ciclado, el flujo comunicado es la suma de los flujos de cada sub-ciclo $f = f_1 + f_2$.

Para garantizar concurrencia entre los flujos de niveles adyacentes, hemos modificado ligeramente la estructura de las etapas del núcleo hidrodinámico del código FARGO3D descrito por [Benítez-Llambay & Masset \(2016\)](#). Dividimos la ejecución de la etapa fuente *SubStep1* correspondiente a la actualización de velocidades por un potencial, en dos aplicaciones de esta etapa fuente *SubStep1* con la mitad del paso de tiempo correspondiente al nivel tratado, dando medio paso antes de la etapa de

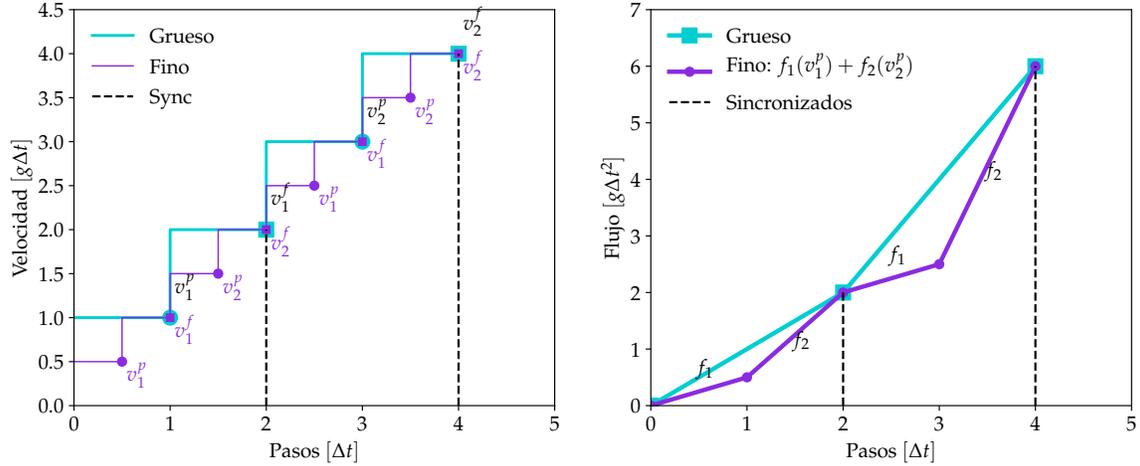


Figura 4.4: Ilustración del emparejamiento de velocidades y flujos entre nivel fino y grueso. El paso Δt es el correspondiente al nivel fino.

transporte y el otro medio paso después de esta. En el esquema original teníamos:

$$S(\Delta t) \longrightarrow T(\Delta t), \quad (4.1)$$

al modificar el esquema tenemos:

$$S(\Delta t/2) \longrightarrow T(\Delta t) \longrightarrow S(\Delta t/2), \quad (4.2)$$

donde S y T corresponden a las etapas fuente y de transporte respectivamente. La evaluación de los flujos es realizada con las velocidades parcialmente actualizadas v^p , que obtenemos del primer medio paso de la etapa fuente *SubStep1*.

4.4. Sub-ciclos y organización de las comunicaciones

Presentamos una breve descripción de la implementación de sub-ciclos, mostrando el momento elegido para realizar las comunicaciones. Aquí Δt es el paso de tiempo de un sub-ciclo del nivel fino, los superíndices p y q denotan campos con actualización parcial mientras que f denota campos con actualización final, usamos subíndices para enumerar los sub-ciclos. Los nombres de las distintas etapas son similares a los de Stone & Norman (1992) y Benítez-Llambay & Masset (2016).

- Nivel fino ($\ell + 1$):
 - Primer sub-ciclo:
 - $SubStep1(\Delta t/2) \rightarrow \mathbf{v}_1^p$.
 - $SubStep2, SubStep3(\Delta t) \rightarrow \{\rho, e\}_1^p$
 - $Integración\ de\ flujos(\mathbf{v}_1^p, \Delta t) \rightarrow f_1$
 - $Transporte(f_1) \rightarrow \{\rho, e\}_1^f, \mathbf{v}_1^q$.
 - $SubStep1(\Delta t/2) \rightarrow \mathbf{v}_1^f$.
 - Segundo sub-ciclo:
 - $SubStep1(\Delta t/2) \rightarrow \mathbf{v}_2^p$.
 - $SubStep2, SubStep3(\Delta t) \rightarrow \{\rho, e\}_2^p$
 - $Integración\ de\ flujos(\mathbf{v}_2^p, \Delta t) \rightarrow f_2$
 - $Transporte(f_2) \rightarrow \{\rho, e\}_2^f, \mathbf{v}_2^q$.
 - $SubStep1(\Delta t/2) \rightarrow \mathbf{v}_2^f$.
 - $CommFlux: f_1 + f_2 \rightarrow$ Nivel grueso
- Nivel Grueso (ℓ):
 - Primer ciclo:
 - $SubStep1(\Delta t) \rightarrow \mathbf{v}^p$.
 - $SubStep2, SubStep3(2\Delta t)$
 - $Integración\ de\ flujos(\mathbf{v}^p, 2\Delta t) \rightarrow f$.
 - $Reemplazo\ de\ flujos(f_1 + f_2) \rightarrow f$.
 - $Transporte(f) \rightarrow \{\rho, e\}^f, \mathbf{v}^q$.
 - $SubStep1(\Delta t) \rightarrow \mathbf{v}^f$.
 - $CommUp(\ell \rightarrow \ell + 1): \{\rho, \mathbf{v}, e\}^f \rightarrow \{\rho, \mathbf{v}, e\}_2^f$
 - $CommMean(\ell \leftarrow \ell + 1): \{\rho, \mathbf{v}, e\}^f \leftarrow \{\rho, \mathbf{v}, e\}_2^f$

Entonces tenemos velocidades y flujos concurrentes (hasta lo permitido por el esquema de escalonamiento) al final de un ciclo del nivel grueso (figura 4.4).

Capítulo 5

Fricción dinámica con difusión térmica

5.1. Introducción

Avances recientes en el campo de interacciones disco-planeta muestran la importancia que tiene el desprendimiento de calor del embrión planetario hacia el gas, afectando drásticamente la dinámica de éste. La retroalimentación entre planeta caliente y disco conlleva la aparición de una región sub-densa en la cercanía del embrión, esta región sub-densa puede entonces ayudar a resistir o inclusive revertir la migración interna del embrión (Benítez-Llambay et al. 2015; Masset 2017). Otro efecto que esta región de baja densidad puede producir es excitar la excentricidad (Eklund & Masset 2017; Chrenko et al. 2017; Masset et al. 2017) e inclinación (Eklund & Masset 2017; Masset et al. 2017) del embrión planetario a valores relevantes.

El escenario de fricción dinámica es un caso más sencillo al tener un medio uniforme en reposo, contrario al caso de un disco casi Kepleriano, el cual involucra cizalla en el medio. Este caso simplificado nos sigue permitiendo ver el impacto de la radiación de energía en la respuesta del medio al perturbador, el impacto de la radiación térmica puede llegar al punto de generar una aceleración neta en el perturbador, contrario a la desaceleración típicamente observada en este escenario de fricción dinámica (Masset & Velasco Romero 2017; Park & Bogdanović 2017).

Masset & Velasco Romero (2017) dan una expresión analítica en el régimen lineal para el exceso de fuerza resultante de la retroalimentación del proceso radiante, llamamos a esta fuerza como fuerza de calentamiento. En el límite para número de Mach pequeño encontramos que esta fuerza de calentamiento tiene un valor asintótico y finito, el cual es independiente de la velocidad del perturbador. En el régimen supersónico encontramos que la fuerza de calentamiento decae como \mathcal{M}^{-2} , donde \mathcal{M} es el número de Mach. En ambos casos encontramos que la fuerza de calentamiento resultante es positiva (acelera al perturbador).

El objetivo de este trabajo es el corroborar el comportamiento asintótico en ambos regímenes por medio de simulaciones numéricas, así como investigar el régimen para número de Mach intermedio, para el cual no tenemos un estimado analítico. Estudiamos también en detalle la fuerza resultante de incluir difusión térmica para el caso de un perturbador frío (que no irradia al medio).

Podemos crear un banco de pruebas adecuado para nuestro problema al construir un referencial en el cual el perturbador se encuentre en reposo. En este referencial el gas es inicialmente advechado a una velocidad en sentido opuesto a la del perturbador en el referencial del gas. Modelamos la difusión térmica de manera uniforme sobre todo el dominio de la simulación. Debido al gran rango de escalas de longitud involucradas en el problema, resulta poco práctico, inclusive imposible para ciertos casos, simular el sistema en una malla individual, por tanto recurrimos al uso de mallas anidadas.

Masset & Velasco Romero (2017) argumentan que el análisis lineal realizado, es válido para una razón de proporcionalidad $GM/\chi c_s$ pequeña, donde χ es el coeficiente de difusión térmica del gas, y c_s es la velocidad del sonido adiabática. Todas las simulaciones que se presentan aquí fueron realizadas para $GM/\chi c_s \leq 10^{-1}$ (para la mayoría siendo 10^{-2}). Esta razón de proporcionalidad puede ser vista como la razón entre la escala de tiempo de la difusión a través del radio de Bondi R_B^2/χ y la escala de tiempo acústica a través de este mismo $R_B = GM/c_s^2$. En este primer trabajo estudiamos el impacto que tienen la difusión térmica y el desprendimiento de calor en la fricción dinámica, sin intentar capturar la dinámica del flujo dentro del radio de Bondi del perturbador, de manera que solo lidiemos con efectos débilmente no-

lineales. La resolución a usar será entonces del orden del radio de Bondi, de forma que no resolvamos la dinámica dentro de este.

5.2. Descripción del problema

Tenemos un perturbador puntual de masa M y luminosidad L inmerso en un gas inicialmente uniforme con velocidad del sonido adiabática c_s . Mantenemos fijo al perturbador en el centro de un marco Cartesiano (xyz) , mientras que el gas se advecta a una velocidad $V = \mathcal{M}c_s$ a lo largo del eje z . El calor liberado por el perturbador se difunde de acuerdo a la ley de Fourier con un coeficiente de difusión térmica χ constante y uniforme. Usar un coeficiente de difusión térmica constante y uniforme es una sobre simplificación del proceso radiante en la vecindad del perturbador, pero que para fines del estudio lineal, representa una descripción tratable analíticamente y nos permite comparar de manera limpia los resultados numéricos con los analíticos.

5.2.1. Ecuaciones gobernantes

Denotamos respectivamente con ρ , \mathbf{v} y e la densidad, velocidad y densidad de energía interna del gas, y agregamos el índice "0" para referirnos a las cantidades no perturbadas.

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del fluido tal como hemos visto en la sección 1.3, son la ecuación de continuidad, las ecuaciones de Euler para la velocidad y la ecuación de energía, se escriben respectivamente como:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi \quad (5.2)$$

$$\partial_t e + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \left(\chi \rho \nabla \frac{e}{\rho} \right) = L \delta(\mathbf{r}) \quad (5.3)$$

donde $\Phi = -GM/|\mathbf{r}|$ represente el potencial del perturbador y el término $L\delta(\mathbf{r})$

$$F_{\text{total}} = \underbrace{F_{\text{adi}} + F_{\text{thermal}}^{\text{cold}}}_{Ma_{M,0,0}} + F_{\text{heating}}$$

$Ma_{M,0,\chi}$

$Ma_{0,L,\chi}$

Fuerzas térmicas
 ↓ en el régimen lineal

Figura 5.1: Descomposición de la fuerza total sobre el perturbador en la componente adiabática y las fuerzas termales (las fuerzas que surgen del intercambio de calor con el medio). Las fuerzas termales se pueden dividir de manera subsecuente en la fuerza fría y la fuerza de calentamiento.

representa la fuente de energía proveniente de la radiación del perturbador hacia el gas. La presión sigue la ecuación de estado $p = (\gamma - 1)e$, donde γ es el índice adiabático. El cuarto término en el lado izquierdo de la ecuación 5.3 es el término proveniente de la difusión térmica.

5.2.2. Convenciones a utilizar

Para evitar ambigüedad en lo posible, usamos los índices M, L, χ para las soluciones a las ecuaciones 5.1-5.3. También hacemos uso de estos índices para referirnos a la aceleración neta a impartida sobre el perturbador:

$$a_{M,L,\chi} = \iiint \frac{G\rho_{M,L,\chi}(x,y,z)z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz \quad (5.4)$$

La aceleración $a_{M,0,0}$ es la aceleración en el caso de un perturbador no luminoso ($L = 0$) de masa M en un gas adiabático ($\chi = 0$). Multiplicando esta aceleración por M , recuperamos la fuerza de arrastre desarrollada analíticamente por [Ostriker \(1999\)](#). De manera similar, $a_{0,L,\chi}$ es la aceleración sobre una fuente de calor con luminosidad L , impartida por la perturbación de densidad que el proceso de radiación genera en los alrededores de esta fuente de calor sin masa. Cuando las perturbaciones relativas de las variables del flujo son pequeñas, éstas escalan linealmente con M y L , y por tanto también lo hace $a_{M,L,\chi}$ por virtud de la ecuación 5.4.

La figura. 5.1 presenta las convenciones que usaremos a lo largo del trabajo presen-

te para nombrar las fuerzas correspondientes a los tres casos descritos anteriormente. La fuerza total que actúa sobre el perturbador es entonces $Ma_{M,L,\chi}$, y la podemos descomponer en diferentes componentes: el arrastre adiabático $Ma_{M,0,0}$, la fuerza fría que resulta de la diferencia entre la fuerza impartida sobre un perturbador frío de masa M en un disco con difusión térmica y en un disco adiabático. la última componente es la fuerza de calentamiento definida como:

$$F_{\text{heating}} = Ma_{M,L,\chi} - Ma_{M,0,\chi}. \quad (5.5)$$

Solo cuando la perturbación del flujo es casi lineal podemos entonces expresar esta fuerza como $Ma_{0,L,\chi}$.

5.3. Resumen de resultados analíticos

Hacemos aquí una recapitulación de los resultados obtenidos por [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#), los cuales queremos confirmar mediante el uso de simulaciones numéricas. Empezamos presentando la expresión obtenida para la perturbación de la densidad inducida por la emisión de calor, primeramente para el límite de número de Mach pequeño en el régimen lineal para un estado estacionario:

$$\rho_{0,L,\chi}(x, y, z) = -\frac{\gamma(\gamma - 1)L}{4\pi\chi c_s^2 r} \exp\left(\frac{z - r}{2\lambda}\right), \quad (5.6)$$

donde $\lambda = \chi/\gamma V$ es la distancia de corte que surge de la competencia entre advección y difusión y representa la distancia característica de la pluma caliente de baja densidad que rodea al perturbador luminoso. La aceleración sobre una masa de prueba localizada en $r = 0$, impartida por esta perturbación en la densidad es:

$$a_{0,L,\chi} = \frac{\gamma(\gamma - 1)GL}{2\chi c_s^2} \text{sign}(V). \quad (5.7)$$

Ésta aceleración que resulta independiente de la magnitud de la velocidad V , tiene la misma dirección que el movimiento del perturbador, resultando entonces en una

propulsión. El tiempo de respuesta

$$\tau = \frac{\lambda^2}{\chi} = \frac{\chi}{\gamma^2 V^2} \quad (5.8)$$

es una estimación del tiempo que le toma a la fuerza de calentamiento establecerse.

Pasamos ahora al límite para números de Mach altos, para el cuál [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#) obtienen que la aceleración que surge como reacción a la emisión de calor del perturbador está dada por:

$$a_{0,L,\chi} = \frac{2(\gamma - 1)GL}{\sqrt{\pi}\chi V^2} f\left(\frac{r_{\min}V}{4\chi}\right), \quad (5.9)$$

donde r_{\min} es el radio mínimo para la integración de la fuerza, y donde $f(\epsilon)$ está dado por:

$$f(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} \mu(\sqrt{u}) du, \quad (5.10)$$

la función $\mu(u)$ está definida como:

$$\mu(u) = ue^{-u^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(u^{-2} - 2)\text{erfc}(u). \quad (5.11)$$

Cuando el argumento de la función f es pequeño la aceleración puede ser aproximada como:

$$a_{0,L,\chi} \approx \frac{(\gamma - 1)GL}{\chi V^2} \left[-1.96 - \log\left(\frac{r_{\min}V}{4\chi}\right) \right]. \quad (5.12)$$

Esta aceleración como en el caso subsónico, está también dirigida a lo largo de la dirección de movimiento del perturbador. Hemos diseñado sistemas para realizar simulaciones numéricas que prueben la validez de las ecuaciones. 5.6, 5.7, 5.9 y 5.12.

Capítulo 6

Estudio numérico en el régimen lineal

6.1. Introducción

En este capítulo procedemos a presentar un estudio numérico para la corroboración de las expresiones analíticas encontradas en el estudio lineal de la fuerza de calentamiento para tanto el límite de alto número de Mach como el límite de número de Mach pequeño. Se presenta también el análisis lineal en el límite de número de Mach pequeño para la fuerza de enfriamiento que surge a partir de la inclusión de difusión térmica en el comportamiento del gas. Posteriormente se presenta el estudio numérico para corroborar la expresión encontrada para esta fuerza de enfriamiento. Por último se muestra el estudio de la fuerza total impartida sobre un perturbador masivo y luminoso en un medio con difusión térmica, mostrando que en el régimen lineal, esta fuerza es la suma de tres componentes distintas: la fuerza de arrastre del caso adiabático, la fuerza de enfriamiento y la fuerza de calentamiento, como se describe en la figura 5.1 del capítulo anterior. Este capítulo contiene el trabajo presentado por [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#).

6.2. Implementación del sistema para la fricción dinámica

Creemos un sistema con mallas cartesianas donde el perturbador de masa M y luminosidad L está fijo en la posición $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$. El perturbador está inmerso en un gas inicialmente uniforme, con densidad $\rho_0 = 1$, velocidad $\mathbf{v}_0 = (0, 0, V)$ y energía $e_0 = c_s^2 \rho_0 / \gamma(\gamma - 1)$, con la velocidad adiabática del sonido $c_s = 1$, un índice adiabático $\gamma = 1.4$ y una constante de difusión térmica χ . Hacemos uso de la simetría del problema en las direcciones no advectadas x y y para reducir nuestro dominio espacial al cuadrante para $x > 0$ y $y > 0$. El nivel más grueso o base ($\ell = 0$), impone el dominio principal del sistema $x_{min} = 0$, $x_{max} = l$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = l$, $z_{min} = -l$ y $z_{max} = l$, donde la longitud l es elegida de modo que cumpla con ciertas condiciones que especificamos adelante. Cada malla anidada de nivel ℓ cubre el sub-dominio: $x_\ell \in [0, 2^{-\ell} x_{max}]$, $y_\ell \in [0, 2^{-\ell} y_{max}]$ y $z_\ell \in [2^{-\ell} z_{min}, 2^{-\ell} z_{max}]$.

Implementamos el potencial gravitacional de acuerdo a la ley de Plummer:

$$\Phi(\mathbf{r}_{i,j,k}) = \frac{GM}{\sqrt{|\mathbf{r}_{i,j,k} - \mathbf{r}_0|^2 + \epsilon^2}}, \quad (6.1)$$

donde ϵ es la longitud de suavizado. Restringimos el trabajo de este capítulo al estudio de perturbaciones de pequeña amplitud, de modo que podamos comparar los resultados con los del estudio analítico que realizamos en el régimen lineal (Masset & Velasco Romero 2017). Por tanto, renunciamos a describir la dinámica dentro del radio de Bondi del perturbador $R_B = GM/c_s^2$, adoptando una resolución comparable o más grande que este radio R_B . En un siguiente capítulo presentaremos los resultados al describir la dinámica no lineal dentro de este radio. Usaremos entonces en este capítulo una longitud de suavizado generalmente nula $\epsilon = 0$, a menos que se especifique una.

Realizamos un monitoreo de la componente z de la fuerza que el gas ejerce sobre el perturbador

$$F = \sum_l \frac{z_l GM \rho_l V_l}{(r_l^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (6.2)$$

donde $r'_l = |\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_0|$ es la distancia desde el centro de la celda l hasta la posición del perturbador. Evaluamos esta suma sobre todas las celdas de cada nivel, con la precaución de descartar las regiones traslapadas con niveles más finos.

Implementamos la difusión térmica evaluando los flujos de energía de acuerdo a la ley de Fourier para la difusión de calor. Multiplicamos los flujos por la superficie de la interfase a evaluar (ya sea S_x , S_y o S_z), el resultado se escribe como:

$$f_{i-\frac{1}{2}}^x = \chi\rho_0 \left(\frac{e}{\rho} - \frac{e_{i-1}}{\rho_{i-1}} \right) \frac{S_x}{\Delta x} \quad (6.3)$$

$$f_{j-\frac{1}{2}}^y = \chi\rho_0 \left(\frac{e}{\rho} - \frac{e_{j-1}}{\rho_{j-1}} \right) \frac{S_y}{\Delta y} \quad (6.4)$$

$$f_{k-\frac{1}{2}}^z = \chi\rho_0 \left(\frac{e}{\rho} - \frac{e_{k-1}}{\rho_{k-1}} \right) \frac{S_z}{\Delta z}. \quad (6.5)$$

donde por legibilidad solo escribimos los índices que difieren de i , j o k . La energía es entonces actualizada con estos flujos como:

$$e_{i,j,k}^- = \Delta t \left(f_{i+\frac{1}{2}}^x - f_{i-\frac{1}{2}}^x + f_{j+\frac{1}{2}}^y - f_{j-\frac{1}{2}}^y + f_{k+\frac{1}{2}}^z - f_{k-\frac{1}{2}}^z \right) V^{-1}, \quad (6.6)$$

donde V aquí representa el volumen de la celda.

Implementamos el desprendimiento de calor por parte del perturbador luminoso de manera similar a la descrita por [Benítez-Llambay et al. \(2015\)](#): donde tenemos al perturbador posicionado exactamente en el vértice entre 8 celdas, por tanto la energía $L\Delta t$ desprendida sobre un paso de tiempo se divide de manera equitativa entre las 8 celdas que comparten el vértice en el que se localiza el perturbador, aumentando la energía internas de estas.

Las condiciones de contorno para este sistema son las siguientes:

- En x_{min} y x_{max} :
 - Para ρ, v_y, v_z, e , usamos condiciones de frontera simétricas.
 - Para v_x , usamos condiciones de frontera anti-simétricas.

- En y_{min} y y_{max} :
 - Para ρ, v_x, v_z, e , usamos condiciones de frontera simétricas.
 - Para v_y , usamos condiciones de frontera anti-simétricas.
- En z_{min} y z_{max} :
 - Para ρ, v_z, e , usamos condiciones de frontera de entrada/salida de flujo (inyectamos en las celdas fantasmas los valores iniciales de cada variable ρ_0, V, e_0).
 - Para v_x, v_y , usamos condiciones de frontera simétricas.

6.3. Resultados

Las simulaciones presentadas aquí fueron ejecutadas hasta un tiempo final $t_{end} = 100\tau$, donde τ es el tiempo estimado para la formación de la pluma caliente de baja densidad que expresamos en la ecuación 5.8, el cual es dependiente de la velocidad del viento V . Elegimos dicha duración para garantizar que el flujo esté cerca de un estado estacionario. Para los cálculos que involucran a la fuerza neta, tomamos la precaución de evitar que la esfera acústica generada por la inserción del perturbador no llegue a la frontera externa de la malla base en la duración de la simulación. Cuando esta esfera acústica alcanza la frontera externa, es reflejada hacia el interior de la malla, lo cual modifica la fuerza ejercida sobre el perturbador. Los cálculos enfocados a las fuerzas termal son obtenidos mediante la diferencia entre dos simulaciones distintas, la fuerza de calentamiento es calculada a través de la diferencia entre la fuerza del caso termal luminoso y la fuerza del caso termal frío, mientras que la fuerza fría es calculada mediante la diferencia entre la fuerza del caso adiabático y la fuerza del caso termal frío.

Presentamos los valores de la masa en unidades de $c_s^3/\sqrt{G^3\rho_0}$, los valores del coeficiente de difusión térmica en términos de $c_s^2/\sqrt{G\rho_0}$ y los valores para la luminosidad en unidades de c_s^5/G . En aras de legibilidad, no escribimos explícitamente las unidades de cada valor mencionado. Para nuestras simulaciones hemos elegido usar $c_s = 1$,

$G = 1$ y $\rho_0 = 1$. Este sistema libre de escale nos permite capturar la fricción dinámica indistintamente del sistema estudiado.

6.3.1. Fuerza de calentamiento

Realizamos un conjunto de simulaciones en una secuencia geométrica de 80 valores para el número de Mach en el rango $\mathcal{M} \in [0.02, 5]$, con un coeficiente de difusión térmica $\chi = 0.1$ y una masa $M = 10^{-3}$ para el perturbador. Para cada uno de estos valores del número de Mach, realizamos dos simulaciones: una con luminosidad $L = 2 \cdot 10^{-4}$ y otra con $L = 0$. Seguidamente calculamos la fuerza de calentamiento al substraer la fuerza del caso no luminoso de la fuerza del caso luminoso. Para este conjunto de simulaciones utilizamos una extensión del dominio $l = 100\lambda$, permitiendo entonces rebote de ondas acústicas en las fronteras para los números más bajos de Mach (para los cuales $100\tau c_s > 100\lambda$). Nos permitimos realizar esto considerando que al ser la fuerza de calentamiento resultado de una substracción, los efectos del rebote acústico se cancelan en este régimen casi lineal. Para estas simulaciones hacemos uso de 6 niveles en total, incluyendo el nivel base, cada malla teniendo tamaños $N_x = 16$, $N_y = 16$ y $N_z = 32$. La figura 6.1 muestra la fuerza de calentamiento como función del número de Mach. Podemos ver entonces como se corrobora lo predicho para ambos regímenes ([Masset & Velasco Romero 2017](#)): tenemos un valor asintótico finito para número de Mach pequeño, y una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad en el régimen supersónico. En ambos casos, la fuerza de calentamiento es positiva (en dirección del movimiento del perturbador) para todo número de Mach. Estudiamos más adelante con más detalle estos dos regímenes.

número de Mach pequeño

En el límite para número de Mach pequeño, tenemos que la contribución a la fuerza de calentamiento proveniente del material interno al radio r es ([Masset & Velasco Romero 2017](#)):

$$h(r') = \frac{1 - 2r' - e^{-2r'}}{2r'^2} + 1, \quad (6.7)$$

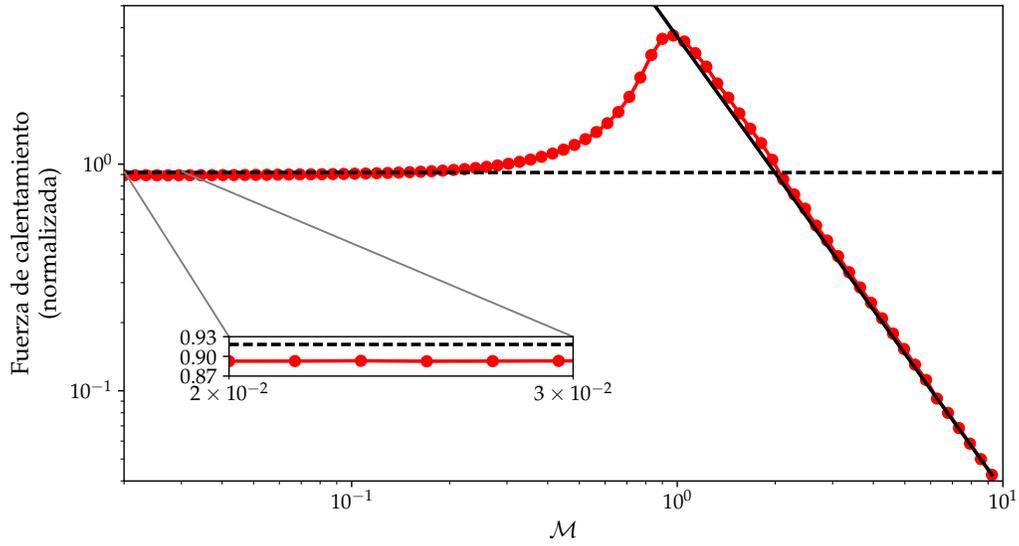


Figura 6.1: Fuerza de calentamiento en función del número de Mach, normalizada al valor analítico obtenido en el límite para $\mathcal{M} \rightarrow 0$. La línea punteada muestra el valor asintótico $h(r'_{\max}) - h(r'_{\min})$ esperado para número de Mach pequeño considerando las dimensiones finitas de nuestra simulación. El marco interno muestra que obtenemos una fuerza dentro del $\sim 3\%$ del valor esperado. La línea sólida muestra una dependencia \mathcal{M}^{-2} pasando a través los puntos para alto número de Mach.

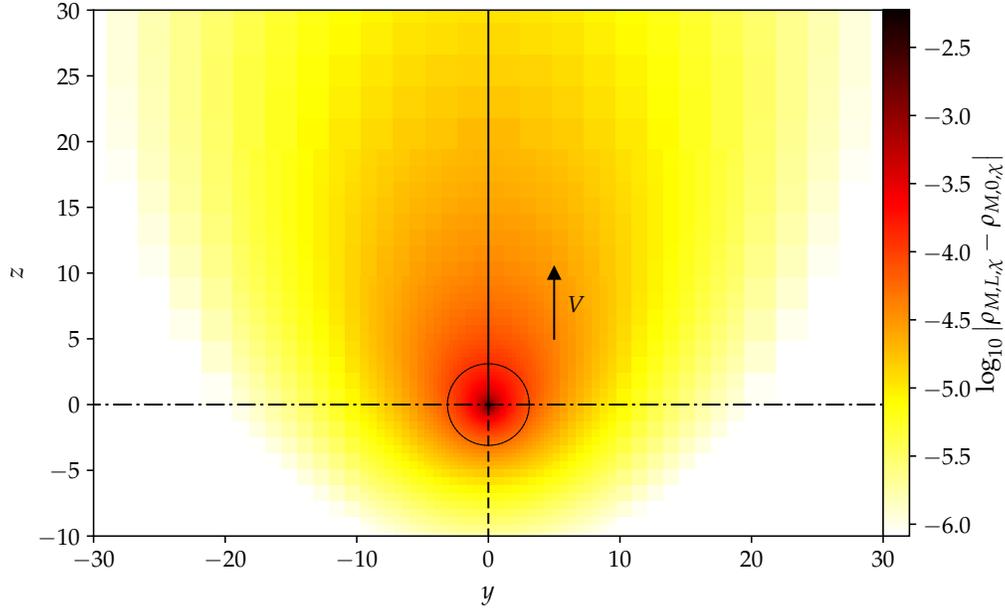


Figura 6.2: Perturbación de la densidad que surge como reacción al desprendimiento de calor del perturbador. Mostramos un plano que contiene la trayectoria de un perturbador para número de Mach pequeño. Dentro del círculo de radio λ centrado en el perturbador, la perturbación tiende a exhibir una simetría esférica, mientras que fuera de este radio es distorsionada por el flujo. Las distintas líneas en esta imagen que pasan a través del perturbador coinciden con el estilo presentado en la figura 6.3. La flecha muestra el sentido de la velocidad del gas en el referencial del perturbador.

donde $r' = r/2\lambda$. La fracción de la fuerza de calentamiento que podemos obtener dado los parámetros de nuestra simulación es entonces $\approx h(r'_{\max}) - h(r'_{\min})$, donde r'_{\max} corresponde a la longitud máxima (el tamaño de la caja) y r'_{\min} corresponde a la longitud mínima (la resolución del nivel más fino).

Para las simulaciones presentes en la figura 6.1, la resolución del nivel más fino es $\Delta x = \frac{25}{128}\lambda$, con lo que para la escala mínima tenemos $r'_{\min} = \frac{25}{256} \approx 9.8 \cdot 10^{-2}$, mientras que para la escala máxima $r'_{\max} = l/2\lambda = 50$. Esperamos entonces obtener un $h(r'_{\max}) - h(r'_{\min}) \approx 92\%$ de la fuerza total de calentamiento por las escalas finitas de nuestra simulación. El resultado observado en la figura 6.1 es consistente con el valor esperado en este límite para número de Mach pequeño, donde vemos una desviación del 3% al valor predicho.

Para el límite de número de Mach pequeño, la perturbación de la densidad esta

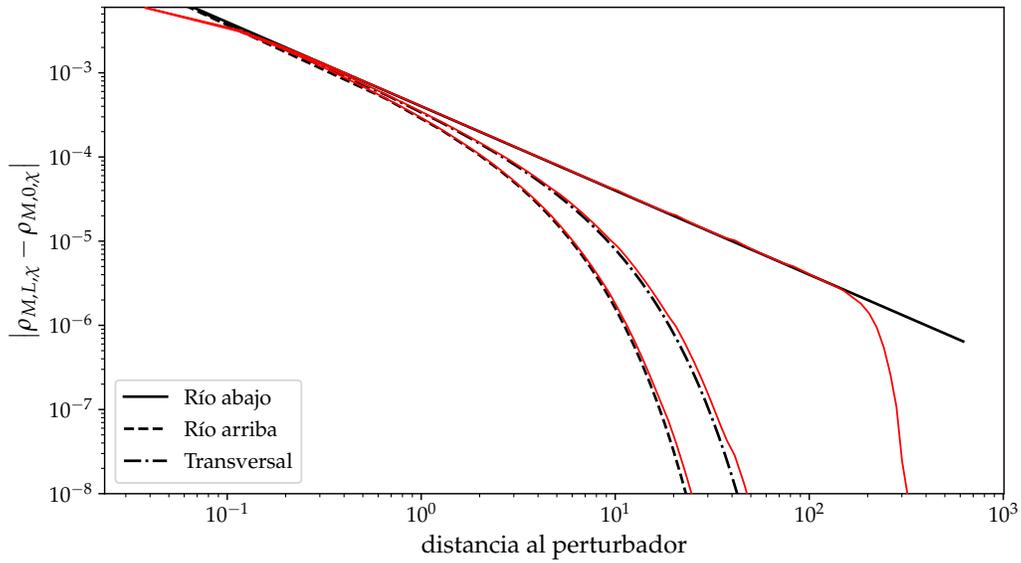


Figura 6.3: Perfil de la perturbación de la densidad para número de Mach pequeño. En negro las curvas analíticas, en rojo los cortes para una simulación con $\mathcal{M} = 0.023$, un nivel base de tamaño $64 \times 64 \times 128$ y 11 niveles de refinamiento de tamaño $32 \times 32 \times 64$. La perturbación en la dirección del viento no depende de la velocidad de este, simplemente sigue una ley inversa (Masset & Velasco Romero 2017), mientras que en las direcciones transversal y contra viento tenemos un corte exponencial, donde la longitud de este corte exponencial es dos veces menor para el caso transversal que para el contra viento.

descrita por la ecuación 5.6. En la figura 6.2 mostramos un mapa de color para esta perturbación de densidad que surge como respuesta al calor liberado por el perturbador, en la figura 6.3 mostramos tres distintos cortes de esta perturbación de densidad: a lo largo, en contra y perpendicular a la dirección del viento (z) para $\mathcal{M} = 0.023$ con un nivel base de dimensión $64 \times 64 \times 128$ y 11 niveles de refinamiento de dimensiones $32 \times 32 \times 64$. Para esta simulación el primer nivel de refinamiento cubre solo una cuarta parte del nivel base, en lugar de cubrir la mitad, esto lo hacemos para cubrir un dominio más grande con poco impacto en el tiempo de cómputo, ya que el nivel base ocupa un 0.05% del tiempo total de cómputo. Observamos un buen acuerdo entre nuestros resultados y la predicción analítica, las discrepancias aparecen cerca de la frontera, donde la perturbación de la densidad es despreciable.

Alto número de Mach

Cómo mencionamos con anterioridad, la configuración de nuestro banco de pruebas es tal que la razón l/λ está fija, por tanto tenemos $r_{\min}V/4\chi \equiv r_{\min}/(\lambda \times 4\gamma)$. Para el régimen supersónico vemos en la figura 6.1 una dependencia cuadrática en la velocidad V^{-2} , lo cual está en acuerdo con la fuerza de calentamiento dada por la ecuación 5.9. Proseguimos investigando la dependencia de la fuerza con la resolución (r_{\min}), hacemos esto para un número de Mach fijo en el régimen supersónico. Hacemos distintas realizaciones de la misma simulación agregando para cada nueva realización un nivel más de refinamiento, duplicando entonces la resolución de una realización a otra. En el límite donde $r_{\min}V/4\chi$ es suficientemente pequeño, de la ecuación. 5.12 podemos ver que la variación de la fuerza entre realizaciones sucesivas debe ser:

$$\Delta F_{0,L,\chi} = \frac{(\gamma - 1)GML}{\chi V^2} \log 2. \quad (6.8)$$

Este incremento está en gran acuerdo con los resultados mostrados en la figura 6.4. La perturbación en la densidad que surge en respuesta al calor liberado por el perturbador exhibe la típica forma cónica del caso supersónico, tal como se muestra en la figura 6.5. Sin embargo, la perturbación no está estrictamente constreñida al interior

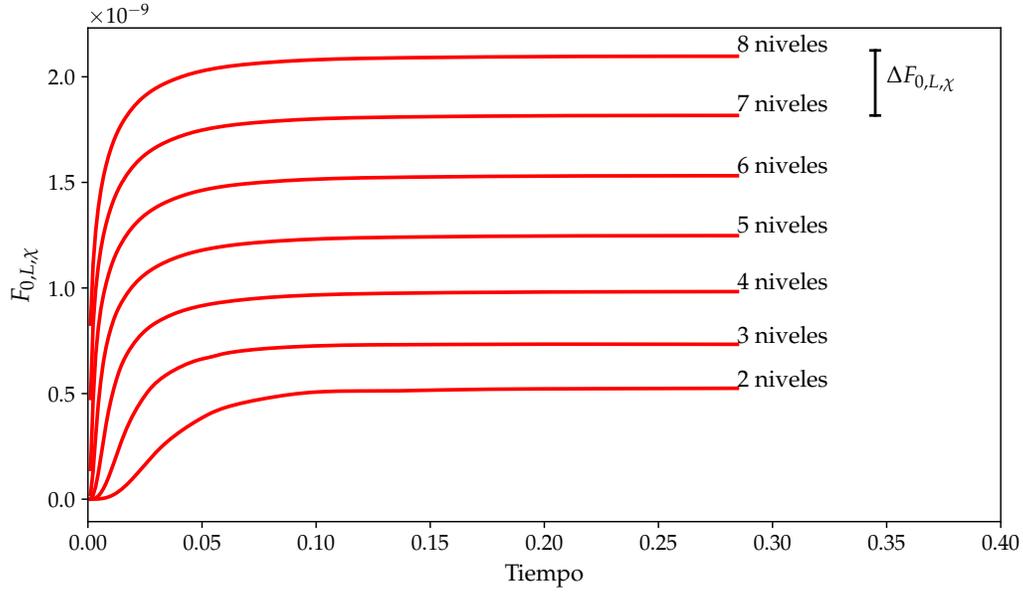


Figura 6.4: Fuerza de calentamiento en función del tiempo para un perturbador con $\mathcal{M} = 3$, esto para una secuencia de simulaciones con creciente número de niveles. La resolución de la simulación se duplica por cada nivel agregado. La barra vertical representa el incremento esperado al duplicar la resolución dado por la ecuación 6.8.

del cono de Mach en la vecindad del perturbador, esto dado a que la difusión térmica tiene una extensión característica $\sqrt{\chi t}$, que domina a las perturbaciones acústicas en la vecindad del perturbador.

Valores intermedios para el número de Mach

Tenemos resultados analíticos tanto para el caso subsónico como para el supersónico (Masset & Velasco Romero 2017), sin embargo, no tenemos una expresión analítica para la fuerza de calentamiento para valores intermedios del número de Mach. En la figura 6.1 mostramos que para el caso supersónico, la fuerza de calentamiento tiene una dependencia en \mathcal{M}^{-2} , válida hasta casi $\mathcal{M} = 1$. En la figura 6.6 comparamos los valores de la fuerza de calentamiento en el punto transónico dado por la ecuación 5.9 para $V = c_s$ y en función de la distancia mínima r_{\min} . Los resultados obtenidos están en acuerdo razonable con los valores esperados, la razón ξ del valor de la fuerza en el

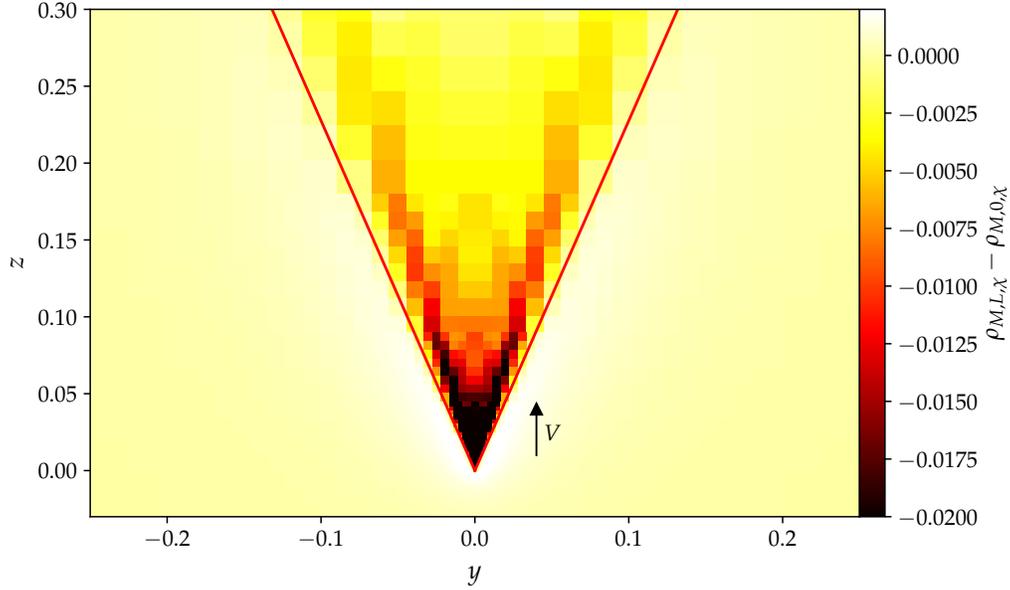


Figura 6.5: Perturbación de la densidad que surge en respuesta al calor liberado por el perturbador, vemos un plano que contiene la trayectoria del perturbador con número de Mach $\mathcal{M} = 3$. La flecha muestra la dirección en la que el gas es advectado, las líneas rojas representan el cono de Mach.

punto transónico al valor en el límite de número de Mach nulo es:

$$\xi \sim \frac{4}{\sqrt{\pi\gamma}} f\left(\frac{r_{\min}V}{4\chi}\right). \quad (6.9)$$

Cuando el tamaño de la pluma es mucho más grande que la distancia mínima r_{\min} , esta razón es mayor que uno y por tanto la fuerza tiene un pico en el punto transónico. Este pico desaparece cuando r_{\min} es comparable al tamaño de la pluma.

6.3.2. Fricción dinámica con difusión térmica

En esta sección estudiamos la fuerza ejercida sobre un perturbador no luminoso o frío, esto al considerar intercambio de calor entre elementos de fluido adyacentes, en otras palabras, cuando relajamos la suposición adiabática realizada por [Ostriker \(1999\)](#). En un primer paso evaluamos la corrección a la fuerza debida a la inclusión de difusión térmica en el comportamiento del gas, hacemos esto mediante teoría de perturbación lineal. En un segundo paso corroboramos la expresión obtenida analíti-

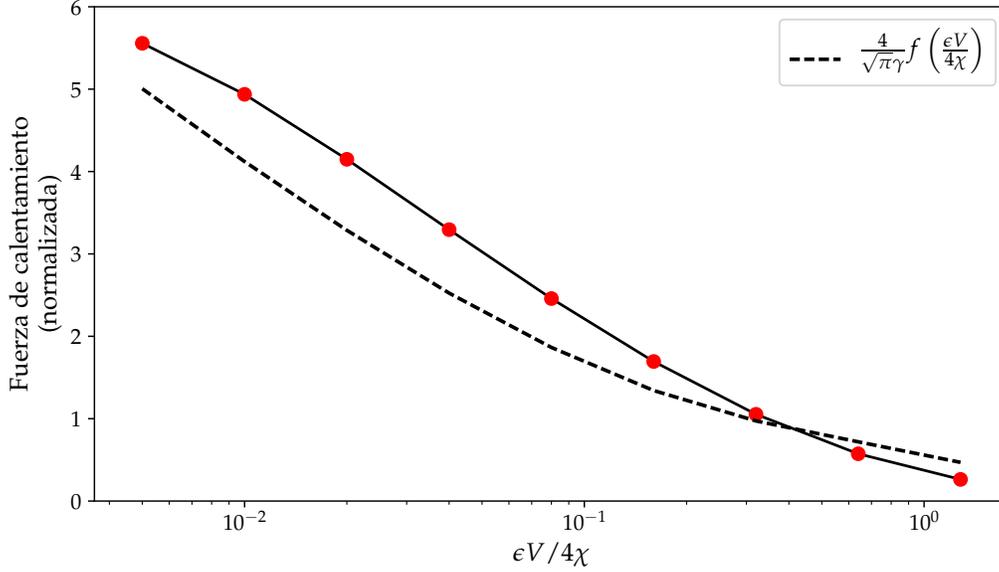


Figura 6.6: Fuerza de calentamiento para $V = c_s$ a $t = 50\tau$ normalizada al valor asintótico para número de Mach pequeño, en función de la razón entre la distancia de suavizado y la resolución ϵ/r_{\min} .

camente mediante simulaciones numéricas. A lo largo de esta sección consideramos el caso de un perturbador frío, siendo la difusión térmica la única diferencia respecto al caso descrito por [Ostriker \(1999\)](#).

Análisis lineal de la fuerza fría en el límite para número de Mach pequeño

Comenzamos linealizando las ecuaciones que gobiernan la dinámica del fluido [5.1...5.3]:

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (6.10)$$

$$\partial_t \mathbf{v}' + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = \nabla \Phi_p \quad (6.11)$$

$$\partial_t p' + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' + \frac{p_0}{\rho_0} \chi \Delta \rho' - \chi \Delta p' = 0, \quad (6.12)$$

donde las cantidades tildadas representan las perturbaciones (por ejemplo $\rho' = \rho - \rho_0$). En aras de facilitar la legibilidad, a partir de aquí nos deshacemos de las tildes. Usamos la misma notación y convención para las transformadas de Fourier empleadas por [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#), entonces al realizar la transformada de Fourier

espacial y temporal de las ecuaciones 6.10 ... 6.12 tenemos:

$$-i\omega\tilde{\rho} + i\rho_0 k_j \tilde{v}_j = 0, j = 1, 2, 3 \quad (6.13)$$

$$-i\omega\tilde{v}_j + ik_j \frac{\tilde{p}}{\rho_0} = -ik_j \tilde{\Phi}_p \quad (6.14)$$

$$-i\omega\tilde{p} + \gamma p_0 ik_j \tilde{v}_j - \frac{p_0}{\rho_0} \chi k^2 \tilde{\rho} + \chi k^2 \tilde{p} = 0. \quad (6.15)$$

Podemos hacer uso de la ecuación de Poisson, que se escribe:

$$\tilde{\Phi}_p = -\frac{4\pi G \rho_0 \tilde{\rho}_p}{k^2}, \quad (6.16)$$

donde $\rho_p(\mathbf{r}, t)$ es la densidad del perturbador. Haciendo uso de las ecuaciones 6.13 y 6.14, llegamos a:

$$\tilde{p} = \frac{4\pi G \rho_0 \tilde{\rho}_p + \omega^2 \tilde{\rho}}{k^2}, \quad (6.17)$$

sustituyendo esto en la ecuación 6.15, tenemos que la transformada de Fourier de la perturbación de densidad es:

$$\tilde{\rho} = \frac{4\pi G \rho_0 \left(\frac{i\omega}{k^2} - \chi \right)}{i\omega \left(c_s^2 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) + \chi \left(\omega^2 - k^2 c_s^2 / \gamma \right)} \tilde{\rho}_p, \quad (6.18)$$

donde $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ es la velocidad de sonido adiabática. Cuando $\chi = 0$ podemos simplificar esta expresión en:

$$\tilde{\rho}_{\text{adi}} = \frac{4\pi G \rho_0}{k^2 c_s^2 - \omega^2} \tilde{\rho}_p, \quad (6.19)$$

que es equivalente a la ecuación 4 de [Ostriker \(1999\)](#), y requiere de solución dependiente del tiempo involucrando funciones retardadas de Green para obtener la fuerza de arrastre. En el caso general, podemos separar la ecuación 6.18 en dos componentes:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{\text{adi}} + \tilde{\rho}_{\text{thermal}}, \quad (6.20)$$

donde

$$\tilde{\rho}_{\text{thermal}} = \frac{4\pi G \rho_0 \chi k^2 c_s^2 (1 - \gamma) / [\gamma (k^2 c_s^2 - \omega^2)]}{i\omega (c_s^2 - \omega^2 / k^2) + \chi (\omega^2 - k^2 c_s^2 / \gamma)} \tilde{\rho}_p, \quad (6.21)$$

es la nueva componente que emerge en presencia de difusión térmica. Esta componente térmica aparece como la convolución de la densidad del perturbador ρ_p con la función de Green $K(\mathbf{r}, t)$. Consideramos ahora a un perturbador con trayectoria de velocidad constante V a lo largo del eje z , esta trayectoria pasa por $z = 0$ al tiempo $t = 0$. Evaluamos el campo $\rho_{\text{thermal}}(\mathbf{r}, t = 0)$ para poder así evaluar la fuerza que éste induce en el perturbador posicionado en $\mathbf{r} = 0$. El campo de densidad del perturbador está dado por la expresión:

$$\rho_p(x, y, z, t) = M \delta(x) \delta(y) \delta(z - Vt) \mathcal{H}(-t), \quad (6.22)$$

donde \mathcal{H} es la función escalón de Heaviside, que introducimos para solo considerar la trayectoria pasada del perturbador ($t < 0$). La convolución de ρ_p con la función K de Green, que es:

$$\rho_{\text{thermal}}(\mathbf{r}, 0) = \iiint d\mathbf{r}' \int dt' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', -t') \rho_p(\mathbf{r}', t') \quad (6.23)$$

toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{thermal}}(x, y, z, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, z - Vt', -t') M \mathcal{H}(-t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^0 K\left(x, y, z - z', -\frac{z'}{V}\right) \frac{M}{V} dz'. \end{aligned} \quad (6.24)$$

La fuerza ejercida sobre el perturbador al tiempo $t = 0$ es a lo largo del eje z y está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} F_{\text{thermal}}^{\text{cold}} &= \iiint \frac{GM \rho_{\text{thermal}}(x, y, z, 0) z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^0 \iiint \frac{GM^2 K\left(x, y, z - z', -\frac{z'}{V}\right) z}{V(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz dz' \end{aligned} \quad (6.25)$$

Solo la normal k del vector de onda aparece en la ecuación 6.21, de manera que la función de Green tiene simetría esférica.

La integral triple más interna en la ecuación 6.25 corresponde a la fuerza ejercida en $\mathbf{r} = 0$ por una perturbación de densidad equivalente a una función de Green centrada en la posición $(0, 0, z')$. Dado que la función posee simetría esférica al rededor de este punto, podemos usar el teorema de Gauss sobre flujos para expresar esta integral en términos de la masa encerrada en la esfera de radio $-z'$ centrada en $(0, 0, z')$. Esta masa puede obtenerse fácilmente en el límite de número de Mach pequeño. En este caso la función de Green es evaluada al tiempo $t = -z'/V$ para radios $|\mathbf{r}| < |z'|$, por tanto para radios $|\mathbf{r}| \ll tc_s$. En este límite tenemos para el espacio de Fourier que $kc_s \gg \omega$ y podemos simplificar la ecuación 6.21 como:

$$\tilde{\rho}_{\text{thermal}} = \tilde{K}(k, \omega) \tilde{\rho}_p, \quad (6.26)$$

con

$$\tilde{K}(k, \omega) = \frac{4\pi G \rho_0 \chi (\gamma - 1) / c_s^2}{\chi k^2 - i\gamma\omega}. \quad (6.27)$$

En espacio real tenemos entonces:

$$K(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi G \rho_0 \chi (\gamma - 1) / (\gamma c_s^2)}{8(\pi \chi t / \gamma)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma r^2}{4\chi t}\right) \quad \text{for } r \ll tc_s. \quad (6.28)$$

En estas condiciones la integral de $K(\mathbf{r}, t)$ en una esfera de radio R tiene la expresión:

$$\begin{aligned} m(R, t) &= \int_0^R 4\pi r^2 K(r, t) dr \\ &= \frac{8\sqrt{\pi} G \rho_0 \chi (\gamma - 1)}{\gamma c_s^2} \left[-R \sqrt{\frac{\gamma}{4\chi t}} \exp\left(\frac{-R^2 \gamma}{4\chi t}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(R \sqrt{\frac{\gamma}{4\chi t}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Usando el teorema de Gauss para la divergencia de flujos podemos escribir:

$$\iiint \frac{GMK(x, y, z - z', -\frac{z'}{V}) z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz = -\frac{GMm(-z', -z'/V)}{z'^2}. \quad (6.30)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación 6.25, obtenemos:

$$\begin{aligned} F_{\text{thermal}}^{\text{cold}} &= -\frac{2\pi^{\frac{1}{2}}G^2M^2\rho_0(\gamma-1)}{c_s^2}\int_0^\infty\left[-u^{\frac{1}{2}}e^{-u}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{2\pi G^2M^2\rho_0(\gamma-1)}{c_s^2} \end{aligned} \quad (6.31)$$

y generalizando a una dirección de movimiento arbitraria:

$$F_{\text{thermal}}^{\text{cold}} = -\frac{2\pi G^2M^2\rho_0(\gamma-1)}{c_s^2}\frac{\mathbf{V}}{V} \quad (6.32)$$

Esta es la fuerza de arrastre, que como la fricción dinámica en un gas adiabático, está dirigida en oposición al movimiento del perturbador. Esta fuerza tiene dos propiedades notables: es independiente del valor del coeficiente de difusión térmica del gas y de la velocidad del perturbador. La fuerza de calentamiento es también independiente de la velocidad en el régimen de número de Mach pequeño.

También resulta directo caer en cuenta que si sustituimos en el análisis de la sección 3.1 de [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#), la derivada convectiva $V\partial_z$ con ∂_t , tanto la transformada de Fourier de la perturbación de densidad que surge en respuesta al calor liberado, como la transformada de Fourier de la perturbación de densidad que surge con la inclusión de difusión térmica (nuestras ecuaciones 6.26 y 6.27), tienen la misma forma, excepto por un cambio de signo. En el límite de número de Mach pequeño, la perturbación de la densidad ρ_{thermal} tiene entonces la misma forma que la de la pluma caliente de alta densidad asociada a la fuerza de calentamiento (corroborada numéricamente en la sección 6.3.1), excepto por tener signo opuesto: en este caso es una pluma fría de baja densidad.

Dando seguimiento a esta analogía podemos decir que ρ_{thermal} tiene en el límite de número de Mach pequeño, la misma forma que tendría la perturbación de densidad provocada por un sumidero de calor sin masa con luminosidad $-L_c$. La luminosidad L_c puede ser encontrada al igualar las ecuaciones 5.8 y 6.32, la cual es:

$$L_c = \frac{4\pi GM\rho_0\chi}{\gamma}. \quad (6.33)$$

Esta luminosidad resulta ser la misma expresión encontrada en el contexto de la torca fría ejercida sobre un planeta de baja masa en órbita circular dentro de un disco proto-planetario gaseoso (Masset 2017).

Esperamos entonces que un perturbador con luminosidad L_c esté sometido a una fuerza de calentamiento que prácticamente se cancele con la fuerza fría en este régimen de bajo número de Mach, tal que el perturbador experimente una fuerza de arrastre similar a la fuerza del caso adiabático.

Corroboración numérica

De manera que podamos confirmar la magnitud y dirección de la fuerza de enfriamiento (o fuerza fría), hemos realizado un conjunto de simulaciones para un perturbador no luminoso con diferentes valores para la difusividad térmica ($\chi = 0.01, 0.05$ y 0.1), abarcando 44 valores de la velocidad del perturbador en el régimen subsónico $\mathcal{M} \in [0.02, 0.7]$ (en secuencia geométrica). Tanto la dimensión de la caja como el tiempo final se ajustaron para $\chi = 0.1$ (que es el caso más demandante). Ya que en este estudio dejamos de estudiar de manera individual la fuerza de calentamiento, resulta importante evitar que la esfera acústica disparada a $t = 0$ se refleje en los bordes del dominio computacional. Por esta razón elegimos una longitud $l = 3200\lambda$ previniendo así esta reflexión (excepto para las dos velocidades más pequeñas, donde tenemos reflexión casi al finalizar la simulación). Tenemos un nivel base de tamaño $64 \times 64 \times 128$, y 11 niveles de refinamiento, donde el primer nivel cubre solo una cuarta parte del nivel base, para los demás niveles cada nivel fino cubre la mitad del nivel grueso correspondiente. Cada nivel $\ell > 0$ tiene tamaño $32 \times 32 \times 64$. Con estas especificaciones para nuestro dominio de cómputo esperamos obtener $\approx 99.1\%$, 98.4% y 92.3% de la fuerza neta ¹ respectivamente para los casos con $\chi = 0.1, 0.05$ y 0.01 . Los resultados de estas simulaciones se muestran en la figura 6.7, estos confirman lo anticipado por la predicción analítica con una gran precisión. Encontramos que la fuerza neta en estas simulaciones con difusión térmica, tiende a un valor finito y negativo en acuer-

¹Asumiendo que la fuerza fría tenga la misma dependencia en las grandes escalas como en las cortas escalas tal como se describe en la ecuación 6.7 para la fuerza de calentamiento.

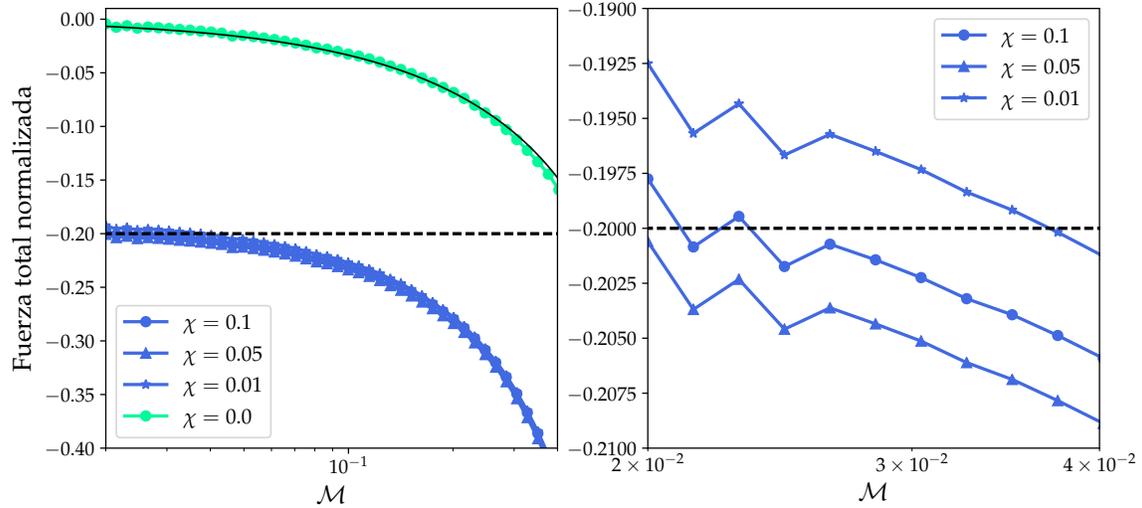


Figura 6.7: Fuerza neta ejercida sobre un perturbador frío inmerso en un gas adiabático (curva verde) y en un gas con difusión térmica (curvas azules). Las líneas sólidas representan la expresión analítica dada por [Ostriker \(1999\)](#) mientras la línea punteada muestra el valor asintótico de la fuerza para el caso con difusión térmica. Las tres curvas azules resultan casi superpuestas en la gráfica izquierda, en la gráfica derecha se muestran las curvas de la fuerza con difusión térmica con enfoque en el régimen de número de Mach pequeño. Las fuerzas mostradas están normalizadas al valor asintótico $F_0 = 4\pi(GM)^2\rho_0/c_s^2$. De esta manera las fuerza normalizadas deben de tender a un valor $-(\gamma - 1)/2 = -0.2$ a muy baja velocidad.

do hasta un gran porcentaje con la predicción dada por la ecuación 6.32. Este valor resulta altamente interesante al ser independiente del valor elegido para la difusión térmica. La pequeña variación observada para los distintos valores usados de χ puede ser atribuida a los cambios en las escalas de longitud cubiertas y al comienzo de no linealidad en los flujos en la cercanía del perturbador para los valores más pequeños de χ .

Mostramos también las perturbaciones de densidad y temperatura tanto para el caso adiabático como para el difusivo en la figura 6.8, así como la diferencia de estos campos entre ambos casos. El resultado confirma que introducir difusión térmica induce una perturbación positiva en la densidad mientras que la perturbación en la temperatura es negativa con respecto al caso adiabático (el gas se enfría).

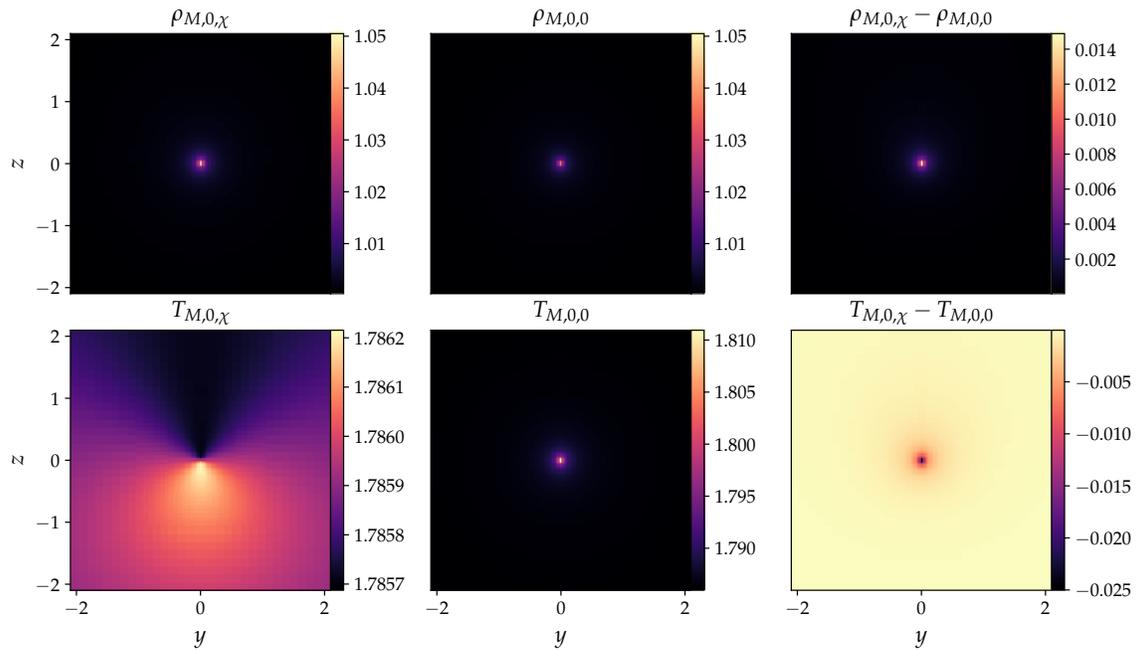


Figura 6.8: En la primera fila se muestra la perturbación de la densidad mientras que en la segunda fila se muestra la perturbación de la temperatura. En la primera columna el caso de un perturbador no luminoso para el caso de difusión térmica, en la segunda columna para el caso adiabático, la tercer columna muestra la diferencia entre ambos casos.

6.3.3. Fuerza neta en el caso general

Habiendo estudiado de forma independiente las fuerzas de calentamiento y de enfriamiento, estamos en posición de proceder ahora a estudiar la fuerza neta sobre un perturbador de masa M y luminosidad L en un gas con difusión térmica, cuando el flujo es prácticamente lineal. La fuerza neta está dada por la expresión de la figura 5.1.

Simplificación de la expresión de las fuerzas térmicas para número de Mach pequeño

Si definimos:

$$F_0 = \frac{4\pi(GM)^2\rho_0}{c_s^2}, \quad (6.34)$$

podemos reescribir la expresión para las fuerzas térmicas en régimen de número de Mach pequeño corrientes a las ecuaciones 6.32 y 5.7 respectivamente como:

$$F_{\text{thermal}}^{\text{cold}} = -\frac{\gamma-1}{2}F_0 \quad (6.35)$$

y

$$F_{\text{heating}} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{L}{L_c} F_0, \quad (6.36)$$

de forma que

$$F_{\text{thermal}} = F_{\text{thermal}}^{\text{cold}} + F_{\text{heating}} = \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{L}{L_c} - 1 \right) F_0. \quad (6.37)$$

También podemos ver que la fuerza en el caso adiabático puede se expresada en términos de F_0 como:

$$F_{\text{adi}} = F_0 \mathcal{M}^{-2} I \quad (6.38)$$

para todo número de Mach, donde I está dado por las ecuaciones (14) o (15) de [Ostriker \(1999\)](#).

Análisis numérico

En la figura 6.9 presentamos los resultados para varios conjuntos de simulaciones con 11 niveles de refinamiento, alcanzando un $r'_{min} = 0.01$ en una caja con $r'_{max} = 1600$, de esta forma debemos obtener un 99% de la fuerza neta de calentamiento. Mostramos la fuerza total para el caso adiabático ($\chi = 0$), y para los casos con difusión térmica para $\chi = 0.1$ con tres distintos valores para la luminosidad del perturbador: $L = 0$, $L = L_c$ y $L = 2L_c$. Los resultados confirman que en el régimen de número de Mach pequeño, para $L = L_c$, la fuerza total coincide con la fuerza de arrastre del caso adiabático presentado por [Ostriker \(1999\)](#), como se anticipaba en el último párrafo de la sección 6.3.2).

El análisis realizado en la sección 6.3.2 para la fuerza de enfriamiento está limitado al régimen de número de Mach pequeño. No hemos logrado obtener una expresión para esta fuerza en el régimen supersónico. Sin embargo, nuestras simulaciones parecen indicar que en este régimen, la fuerza fría tiene un rol despreciable, dado que la fuerza neta sin calentamiento (curva azul) tiende a la fuerza neta en el caso adiabático (curva verde). Encontramos también que la fuerza neta puede llegar a ser positiva para luminosidades que exceden L_c y el número de Mach es suficientemente pequeño (e.g. por debajo de ≈ 0.48 para $L = 2L_c$), lo cual corresponde a una propulsión del perturbador.

[Masset & Velasco Romero \(2017\)](#) argumentaban que, dado que para el régimen supersónico, tanto la fuerza adiabática como la fuerza de calentamiento tienen una dependencia en V^{-2} , y son de signo opuesto, la fuerza neta podría entonces ser positiva para toda velocidad en este régimen supersónico, considerando una luminosidad lo suficientemente grande. En este análisis se ignoró la fuerza fría, asumiendo que la fuerza de un perturbador frío coincidiría con la estimación del caso adiabático de [Ostriker \(1999\)](#). Nuestros nuevos resultados sugieren que la fuerza fría es despreciable en este régimen, dando así cabida a la validez de la estimación realizada. Por tanto, nos dimos a la tarea de realizar simulaciones para mayores valores de la luminosidad, los cuales presentamos en la figura 6.10. Vemos entonces que para una luminosidad $L =$

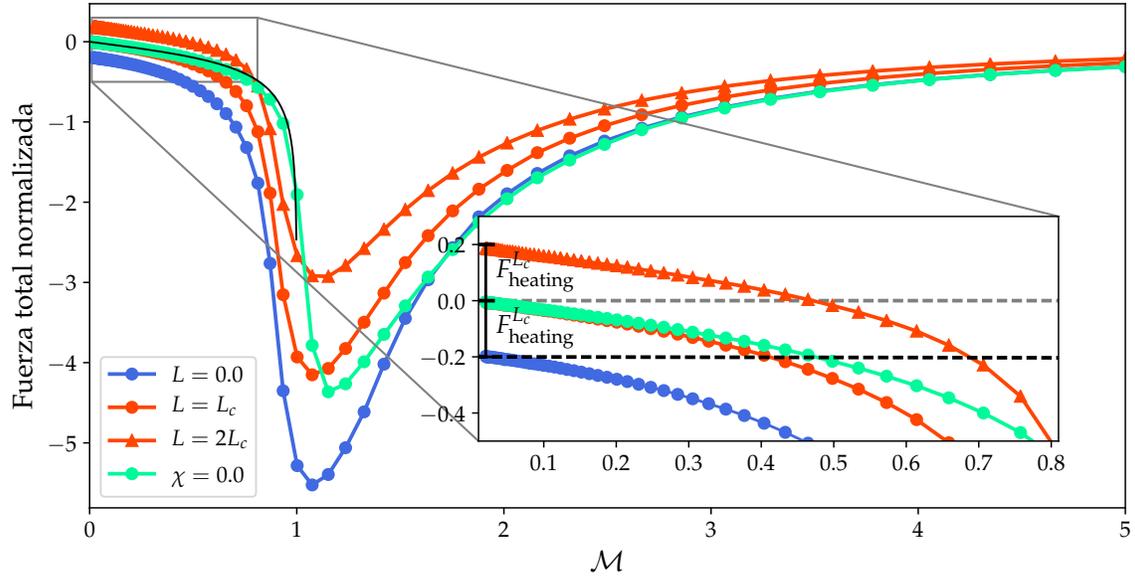


Figura 6.9: Fuerza total en función del número de Mach, para el caso adiabático ($\chi = 0$) y los casos con difusión térmica para distintos valores de la luminosidad. El recuadro muestra que el caso adiabático coincide con el caso luminoso con $L = L_c$ en el límite de bajo número de Mach. También vemos que para $L = 2L_c$ (triángulos) tenemos una fuerza neta positiva para bajo número de Mach.

$4L_c$, la fuerza neta es positiva esencialmente sobre todo el dominio subsónico, mientras que siempre es positiva para $L = 8L_c$, con el conjunto de parámetros utilizados. Este comportamiento es consistente con el perfil de densidad que mostramos en la figura 6.11, donde podemos observar un déficit de material detrás del perturbador (dentro del cono de Mach).

6.4. Discusiones y conclusiones

Hemos realizado una extensiva cantidad de simulaciones numéricas, de modo que nos permitieran corroborar el impacto que tiene la difusión numérica en la fricción dinámica que experimenta un perturbador masivo, tanto con luminosidad como sin luminosidad. Debido al gran rango de escalas de longitud que se requiere cubrir para capturar adecuadamente estos efectos térmicos, nos vimos en la necesidad de recurrir a un sistema de mallas anidadas, el cual implementamos tanto para la versión CPU como la GPU del código FARGO3D. Nuestras simulaciones confirman con un alto gra-

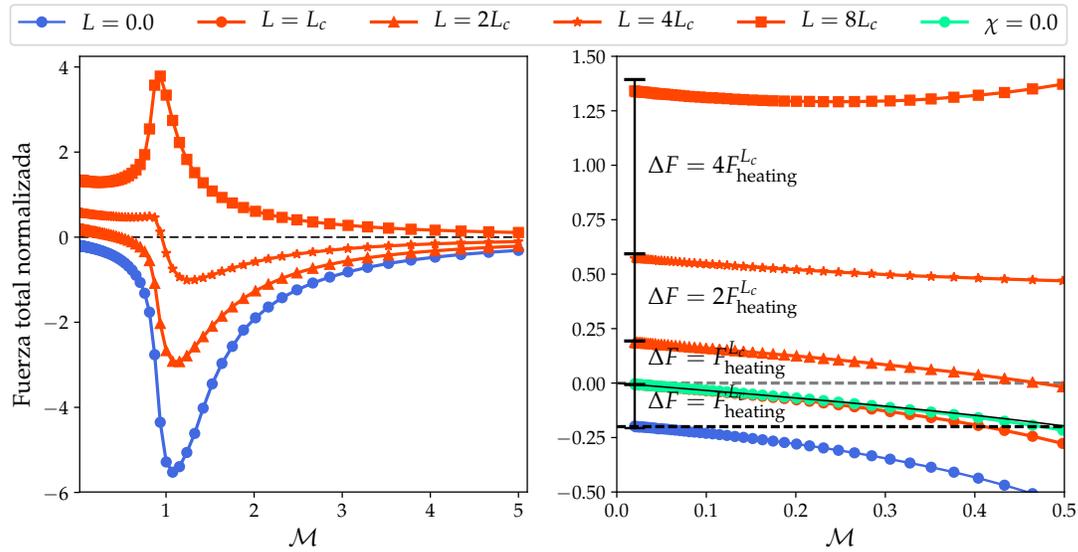


Figura 6.10: Fuerza neta en función del número de Mach para varias luminosidades. La gráfica izquierda muestra que para nuestro conjunto de parámetros, se obtiene una fuerza neta positiva para todo número de Mach con una luminosidad de $8L_c$. La gráfica derecha muestra un acercamiento a los resultados en el régimen subsónico, y muestra que la fuerza de calentamiento escala con la luminosidad.

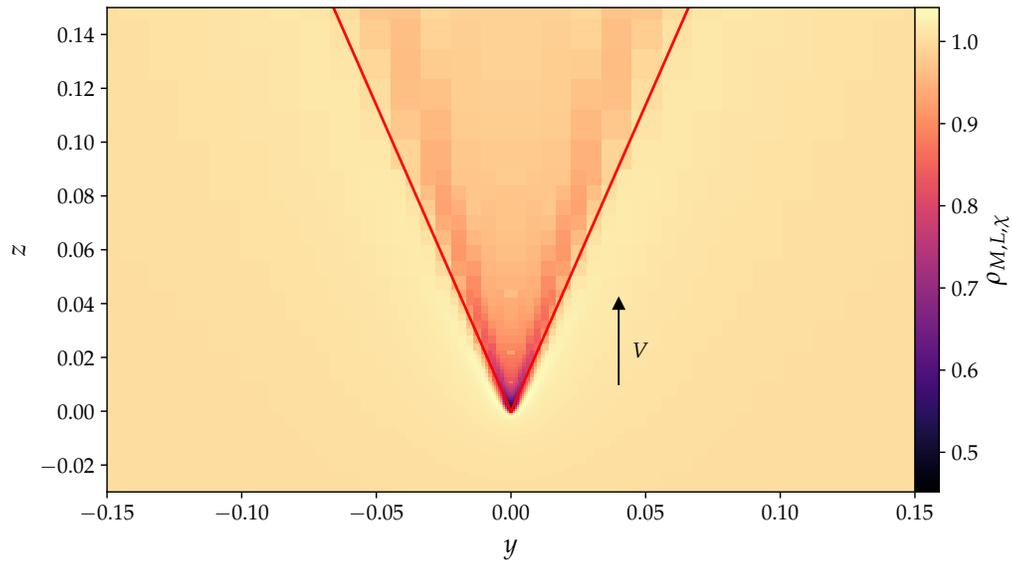


Figura 6.11: Imagen de la densidad para $\mathcal{M} = 2.48$ y $L = 8L_c$. Podemos ver que la densidad dentro del cono de Mach es menor que la del entorno, lo cual es consistente con la propulsión neta observada en la figura 6.10.

do de precisión las predicciones analíticas realizadas por [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#). Cuando el perturbador es luminoso, el exceso de fuerza que surge a partir de la perturbación de densidad debida a la retroalimentación de radiación, o fuerza de calentamiento, coincide con el comportamiento esperado en ambos regímenes (bajo y alto número de Mach). En el régimen de bajo número de Mach, esta fuerza tiende a un valor finito a medida que la velocidad tiende a cero. Este comportamiento de cierta forma contra-intuitivo, resulta debido a las siguientes escalas. La región que da lugar a la fuerza neta tiene típicamente una longitud $\sim \lambda$ por lo tanto un volumen $V \propto \lambda^3$. Ahora bien, la perturbación de densidad en esta región escala como $\rho \propto \lambda^{-1}$, llevando entonces a una perturbación de masa $\delta M \propto \lambda^2$. De esto tenemos que la fuerza neta producida por el material en este volumen escala como $GM\delta M/\lambda^2$ y es entonces independiente de la distancia de corte λ . El único resultado de cambiar la velocidad en la perturbación de densidad es cambiar la escala λ . En consecuencia tenemos que la fuerza de calentamiento no depende de la magnitud de la velocidad. Sin embargo, mientras la velocidad del perturbador tiende a cero, la distancia de corte se incrementa (la difusión domina ante el viento) y toma entonces más tiempo el establecer la región de densidad perturbada. En el límite de bajo número de Mach, la aceleración en reacción al calor liberado es función de t/τ únicamente, donde τ esta definido por la ecuación 5.8. Esta función tiende al valor asintótico de la ecuación 5.7 y τ tiende al infinito cuando el número de Mach tiende a cero.

En el régimen de alto número de Mach, la fuerza de calentamiento decae con V^{-2} , y exhibe una dependencia logarítmica en la escala más pequeña de longitud. Para todos los casos, la fuerza de calentamiento es a lo largo de la dirección de movimiento del perturbador, generando así una propulsión en éste.

En el presente trabajo mostramos que el arrastre gravitatorio en un perturbador no luminoso, cuando se tiene difusión térmica, es significativamente distinto a la expresión encontrada por [Ostriker \(1999\)](#) para el caso de un gas adiabático. La diferencia entre estas dos expresiones, que llamamos fuerza fría o de enfriamiento, comparte varias similitudes con la fuerza de calentamiento en el régimen subsónico. En particular, tiende a un valor finito en el límite de velocidad nula. La interpreta-

ción de esta nueva componente de la fuerza resulta similar a la de la torca termal fría discutida por [Masset \(2017\)](#) en un contexto distinto (el de un planeta de baja masa en un disco proto-planetario). Introducir difusión térmica genera un aplanamiento en el pico de temperatura que encontramos al rededor del perturbador en el caso de un gas adiabático. Permitir que el calor se difunda equivale entonces a introducir en la vecindad del perturbador una perturbación negativa en la temperatura. El balance de presión en el régimen subsónico implica entonces que esta perturbación negativa esté acompañada una perturbación positiva de densidad. [Masset \(2017\)](#) argumentan que cuando el perturbador tiene una velocidad muy baja con respecto al gas, introducir difusión térmica conlleva una perturbación en la densidad equivalente a la inducida por un sumidero de calor con luminosidad $-L_c$, donde L_c está dado por la ecuación 6.33, indiferentemente de la geometría del flujo de fondo (ya sea con cizalla, como en un disco protoplanetario, o sin cizalla como fue el caso trabajado aquí). Esto es exactamente lo que encontramos a través de nuestras simulaciones, las cuales representan el primer cuerpo cuantitativo de evidencia para la confirmación de este efecto. Una consecuencia potencialmente importante de este efecto es el amortiguamiento de la excentricidad de embriones planetarios fríos en un disco con difusión térmica. Este amortiguamiento debe ser mucho más acelerado que el esperado de cálculos adiabáticos. Esto ha sido observado en simulaciones ([Eklund & Masset 2017](#)), pero no de manera cuantitativa debido a limitaciones en la resolución máxima accesible.

Dado que la fuerza de enfriamiento tiene un valor finito en el límite en el que la velocidad tiende a cero, se comporta entonces como la llamada fricción sólida o seca, y detiene por completo al perturbador en un tiempo finito. El tiempo de respuesta de la pluma tiende a infinito en este mismo límite, entonces esto solo puede ser cierto si la distancia que toma detener al perturbador es una fracción de la distancia de corte λ para la velocidad inicial. Resulta sencillo encontrar que una condición para esto es $L_c \gg c_s^5/G$.

La fuerza finita y negativa para un perturbador no luminoso en el límite de velocidad nula que hemos encontrado no había sido considerado por [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#). Las conclusiones realizadas en dicho trabajo necesitan corrección.

Un perturbador con movimiento lento percibe una aceleración neta sí, y solo sí, su luminosidad es mayor a L_c . De otra forma, la fuerza neta sobre éste es negativa, y su velocidad decae. Para los dos modelos fiduciales considerados en dicho trabajo, la luminosidad crítica del embrión planetario de masa $\chi c_s/G$ coincide con la luminosidad debida a acreción para un tiempo de duplicación de la masa cercano a 100 kyrs. Para los parámetros del escenario disco-planeta considerados por [Benítez-Llambay et al. \(2015\)](#) y [Eklund & Masset \(2017\)](#), la luminosidad por acreción para un tiempo de duplicación de la masa de 100 kyrs resulta ser el doble de la luminosidad crítica correspondiente a una masa $\chi c_s/G$. De esta forma, los embriones planetarios de baja masa, sujetos a una rápida acreción de piedras ([Lambrechts & Johansen 2012](#)), para los cuales se esperan tiempos de duplicación de masa mucho más cortos que 100 kyrs, deben de estar sujetos a fuerza de calentamiento que excede por mucho la fuerza de enfriamiento.

Aunque no hemos desarrollado una expresión analítica para la fuerza de enfriamiento del régimen supersónico, los resultados arrojados por nuestras simulaciones sugieren que ésta es despreciable. Una explicación tentativa puede ser la siguiente: la fuerza fría surge principalmente del aplanamiento del pico de temperatura que se forma al rededor de un perturbador lento al aproximarse a un equilibrio hidro-estático. Ya que este pico no puede ser formado en el caso de un perturbador rápido, las perturbaciones inducidas por difusión térmica en la vecindad del perturbador rápido, resultan ser de poco impacto.

Hemos encontrado también que para luminosidades suficientemente grandes, podemos tener una fuerza neta positiva para todo número de Mach. Comentamos que la fuerza de arrastre inducida por gravitación diverge de manera logarítmica conforme avanza el tiempo en el régimen supersónico, mientras que la fuerza de calentamiento permanece constante, de forma que eventualmente la fuerza de arrastre puede revertir el signo de la fuerza neta, a menos que el medio esté limitado, como es el caso de un disco protoplanetario ([Muto et al. 2011](#)). En tal caso, la fuerza neta podría entonces permanecer positiva en todo momento, la velocidad del perturbador incrementando entonces a un ritmo $t^{1/3}$. Siendo el tamaño de la pluma caliente inversamente propor-

cional a la velocidad del perturbador, tenemos que la aceleración se detiene una vez que el tamaño de la pluma es comparable al tamaño del perturbador, o, si la difusión térmica es efectuada por transferencia de radiación cuando este tamaño llega a ser comparable al libre recorrido medio de los fotones, lo que ocurra primero.

En el análisis presentado aquí, nos hemos restringido a trabajar en el régimen de flujos débilmente perturbados, evitando resolver los flujos dentro de la esfera de Bondi del perturbador.

Capítulo 7

Estudio numérico del régimen no lineal

7.1. Introducción

Como fue estudiado por [Ostriker \(1999\)](#), un perturbador puntual con masa, inmerso en un medio gaseoso moviéndose a velocidad constante, está sujeto a una fuerza de arrastre causada por fricción dinámica. En este contexto de fricción dinámica, la inclusión de difusión térmica en las propiedades del medio provee un efecto adicional de arrastre en el perturbador ([Velasco Romero & Masset 2019](#)). Proveer al perturbador de un comportamiento luminoso, puede contrarrestar este arrastre adicional que experimenta el perturbador en un medio difusivo, hasta el punto de generar una propulsión neta del perturbador para una luminosidad lo suficientemente elevada ([Masset & Velasco Romero 2017](#)). Este mecanismo de propulsión resulta de gran interés en el escenario de interacción disco-planeta, donde puede proveer un medio para revertir la migración interna ([Benítez-Llambay et al. 2015](#); [Masset 2017](#)), puede también permitir el crecimiento de planetas gigantes ([Laughlin et al. 2011](#)) y cambiar totalmente el panorama de la formación de planetas al excitar la inclinación y excentricidad de sus orbitas. En el límite para número de Mach pequeño, [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#) corroboran que en el régimen lineal, la fuerza total ejercida sobre el perturbador resulta como la adición de tres componentes: la fuerza de arrastre del caso

adiabático, la fuerza de enfriamiento en el caso con difusión térmica para un perturbador no luminoso, y la fuerza de calentamiento para el caso de un perturbador luminoso. En este capítulo se presenta un estudio numérico en el régimen no lineal para el comportamiento de la fuerza sobre un perturbador masivo y luminoso en el límite de número de Mach pequeño.

7.2. Implementación numérica

7.2.1. Mallas cilíndricas y Cartesianas

De misma forma que fue realizado por [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#), iniciamos realizando simulaciones para un sistema Cartesiano de mallas anidadas. El dominio principal de estas simulaciones dado por un caja de dimensiones $x_{min} = 0$, $x_{max} = l$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = l$, $z_{min} = -l$ y $z_{max} = l$, correspondiente a una cuarta parte del cubo de lado l . Cada malla de refinamiento cubre la mitad de su malla gruesa correspondiente. Dada la alta resolución requerida para describir la dinámica dentro del radio de Bondi, hicimos uso de la simetría acimutal del problema, para reducir la dimensión de nuestras simulaciones de $3D$ a $2D$, realizando simulaciones cilíndricas $2D$ de manera similar a lo hecho por [Kim & Kim \(2009\)](#). Estas simulaciones $2D$ cilíndricas tienen un dominio base $z_{min} = -l$, $z_{max} = l$, $r_{min} = 0$ y $r_{max} = l$, y también hacemos uso del sistema de mallas anidadas para incrementar la resolución al rededor del perturbador, en este caso con un impacto menor en el costo computacional (tanto en ejecución como en uso de memoria) dada la dimensión reducida.

Nuestras condiciones iniciales consisten de una densidad $\rho_0 = 1$, velocidades $v_y = 0$, $v_z = V$ y energía $e_0 = c_s^2 \rho_0 / \gamma(\gamma - 1)$ inicialmente uniformes, donde $c_s = 1$ es la velocidad adiabática del sonido, y $\gamma = 1.4$ es el índice adiabático. El perturbador está posicionado en \mathbf{r}_0 con masa M y luminosidad L , el potencial gravitatorio del

perturbador sigue la ley de Plummer:

$$\Phi(\mathbf{r}_{i,j,k}) = \frac{GM}{\sqrt{|\mathbf{r}_{i,j,k} - \mathbf{r}_0|^2 + \epsilon^2}}, \quad (7.1)$$

donde ϵ es la longitud de suavizado. En este estudio hacemos uso de una $\epsilon = 0.2R_B$, para así permanecer en el escenario de interacción disco-planeta. A cada paso de la simulación realizamos un monitoreo de la componente z de la fuerza ejercida sobre el perturbador:

$$F = \sum_l \frac{z_l GM \rho_l V_l}{(r_l'^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (7.2)$$

donde r_l' es la distancia desde el centro de la celda l hasta la posición del perturbador.

Para poder realizar una medición de la fuerza de calentamiento ejercida sobre el perturbador en un estado estacionario, es necesario hacer evolucionar el sistema a tiempos mucho mayores que el tiempo característico de la pluma τ , en nuestro caso hemos elegido un tiempo total de simulación de 100τ . Este requerimiento impone un tamaño en el dominio de la simulación, donde para evitar el rebote de las ondas acústicas (que dispara la presencia del perturbador en el medio) en las fronteras externas del dominio, es necesario tener una extensión mínima de $l = 100\tau(c_s + V)$. Ahora, para poder describir la dinámica dentro de la esfera de Bondi, es necesario resolver el radio de Bondi con varias celdas (típicamente mayor que 5). Alcanzar este último requerimiento tiene un alto impacto en el costo computacional, costo que incrementa inversamente con la masa del perturbador (al reducirse también el radio de Bondi).

7.2.2. Difusión térmica realista

En el capítulo anterior tomamos ventaja del enfoque lineal del estudio realizado, haciendo uso de una implementación simplificada para modelar la difusión térmica,

con un coeficiente de difusión constante y uniforme. Para el estudio que se presenta en este capítulo hemos implementado un modelo más realista para el fenómeno de la difusión en discos circunestelares ([Schwarzschild 1958](#); [Kley & Lin 1996](#)), tomando en cuenta un coeficiente de difusión térmica dependiente tanto de la temperatura como de la densidad del fluido:

$$\chi = \chi_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-2}. \quad (7.3)$$

Para nuestra implementación numérica, computamos el coeficiente de difusión térmica en cada interfase entre celdas como:

$$\chi_{i-\frac{1}{2}} = \chi_0 \left(\frac{e_i + e_{i-1}}{2e_0} \right)^3 \left(\frac{2\rho_0}{\rho_i + \rho_{i-1}} \right)^5 = 4\chi_0 \frac{(e_i + e_{i-1})^3}{(\rho_i + \rho_{i-1})^5}. \quad (7.4)$$

De manera similar a lo presentado en las ecuaciones (19)...(21) de [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#), los flujos de energía multiplicados por su superficie correspondiente son:

$$f_{i-\frac{1}{2}}^x = \chi_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{e_i}{\rho_i} - \frac{e_{i-1}}{\rho_{i-1}} \right) \frac{S_x}{\Delta x} \quad (7.5)$$

$$f_{j-\frac{1}{2}}^y = \chi_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{e_j}{\rho_j} - \frac{e_{j-1}}{\rho_{j-1}} \right) \frac{S_y}{\Delta y} \quad (7.6)$$

$$f_{k-\frac{1}{2}}^z = \chi_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{e_k}{\rho_k} - \frac{e_{k-1}}{\rho_{k-1}} \right) \frac{S_z}{\Delta z}. \quad (7.7)$$

La energía es entonces actualizada con la prescripción presentada en la ecuación (22) de [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#).

7.2.3. Desprendimiento de calor

En el capítulo anterior también tomamos ventaja del enfoque lineal para realizar una implementación sencilla del desprendimiento de calor. Esta implementación consistía en un desprendimiento uniforme en las ocho celdas más cercanas a la posición de la fuente r_0 , como se describe también por [Benítez-Llambay et al. \(2015\)](#). Dado el

énfasis no lineal del estudio de este capítulo, es necesario recurrir a implementaciones más elaboradas para el modelado del comportamiento radiante del perturbador. Hemos elegido modelar el comportamiento no local de irradiación por medio de un desprendimiento de calor exponencialmente decreciente con respecto a la distancia a la fuente:

$$e_{i,j,k+} = L\Delta t \exp\left(\frac{-r'_{i,j,k}}{\epsilon}\right) \quad (7.8)$$

donde de nuevo r' representa la distancia del centro de la celda al perturbador, y ϵ la distancia de suavizado usada para el potencial de Plummer.

7.2.4. Trazado del gas

Hemos realizado la implementación de un campo trazador, el cual, de la misma manera que los demás campos conservativos (densidad, momentos y energía), pasa a través de la etapa de transporte de nuestro núcleo hidrodinámico. Para realizar el trazado del gas, recurrimos a la posición vertical de cada celda z , creando un campo $\Psi = z_0$ que etiqueta a cada parcela de fluido con su posición vertical inicial. Este campo representa una cantidad intensiva del fluido que cumple con

$$\delta_t \Psi + \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi = 0, \quad (7.9)$$

mientras que las cantidades conservativas que representan cantidades extensivas del fluido, cumplen con:

$$\delta_t \Psi + \nabla \cdot (\Psi \mathbf{v}) = 0. \quad (7.10)$$

Si bien nuestro campo $\Psi = z_0$ es intensivo, podemos construir a partir de este, el campo $\Psi' = \rho \Psi$ que al ser dependiente de la masa resulta en un campo extensivo, lo cual podemos corroborar al ver que cumple con la ecuación 7.10:

$$\delta_t \Psi' + \nabla \cdot (\Psi' \mathbf{v}) = \rho (\delta_t \Psi + \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi) = 0. \quad (7.11)$$

Podemos entonces ver la evolución del campo intensivo Ψ , mediante la evolución de su contra-parte extensiva Ψ' y así como de la densidad ρ :

$$\Psi_{i,j,k}^n = \frac{\Psi'_{i,j,k}{}^n}{\rho_{i,j,k}^n}. \quad (7.12)$$

7.3. Resultados

7.3.1. Fuerza neta

Comenzamos presentando en la figura 7.1 un estudio de la fuerza neta ejercida sobre el perturbador para dos valores del número de Mach $\mathcal{M} = 0.4, 0.1$, para una secuencia geométrica de valores para la masa en torno a la masa crítica $M_c = c_s \chi / G$, y otra secuencia geométrica de valores para la luminosidad en torno a la luminosidad crítica L_c correspondiente a cada masa. En esta figura, la fuerza se normaliza con respecto al valor asintótico F_0 de la ecuación 6.34, el eje horizontal corresponde a la razón entre la masa del perturbador y la masa crítica $M/M_c = R_{BCs}/\chi$. Como era de esperarse del estudio lineal, al alejarnos del límite de velocidad nula $\mathcal{M} = 0$, la luminosidad necesaria para obtener una fuerza total positiva incrementa. Para masas subcríticas ($R_{BCs}/\chi < 1$) recuperamos el comportamiento observado en el estudio lineal, donde la luminosidad necesaria para tener una propulsión neta del perturbador es $L > L_c(1 + \frac{5}{3}\mathcal{M})$. En el régimen de masas supercríticas ($R_{BCs}/\chi > 1$), observamos un incremento en la luminosidad necesaria para obtener una fuerza neta motriz, observando de hecho, que el impacto de la luminosidad decrece linealmente con la masa M . Este es el régimen en el que la escala temporal acústica supera a la escala temporal difusiva.

La extensión de los mapas de color presentados en la figura 7.1 está limitada por el crecimiento del costo computacional que conlleva estudiar masas más pequeñas y luminosidades más altas. Resolver el radio de Bondi con un número constante de celdas impone un aumento cuadrático en tiempo de ejecución al reducir el tamaño

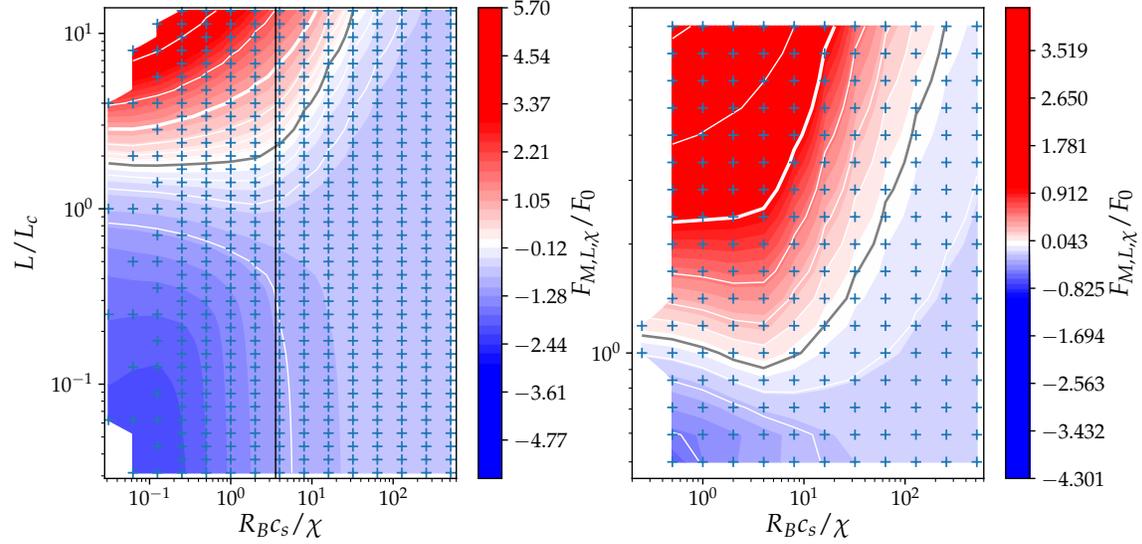


Figura 7.1: Mapas de color para la aceleración específica total. La imagen derecha muestra los resultados para $\mathcal{M} = 0.4$, mientras que la imagen izquierda muestra los para $\mathcal{M} = 0.1$. La región roja corresponde a una aceleración total positiva (propulsión), mientras que la región azul corresponde a una aceleración total negativa (arrastre). Observamos que para masas supercríticas ($R_{BCs}/\chi > 1$) la luminosidad necesaria para una propulsión neta escala con R_B .

de R_B . Para luminosidades supercríticas, duplicar la luminosidad implica duplicar el tiempo total de ejecución de la simulación.

7.3.2. Eficiencia de la fuerza de calentamiento

Como fue derivado por [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#), para el límite de bajo número de Mach, el rendimiento de la fuerza de calentamiento $\eta = VF_{\text{heating}}/L$ se lee como:

$$\eta = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \left(\frac{GM}{c_s \chi} \right) \mathcal{M}, \quad (7.13)$$

lo cual puede ser rescrito como:

$$\eta = \frac{(\gamma - 1) R_B}{2 \lambda}. \quad (7.14)$$

La figura 7.2 presenta mapas de color para la eficiencia de la fuerza de calen-

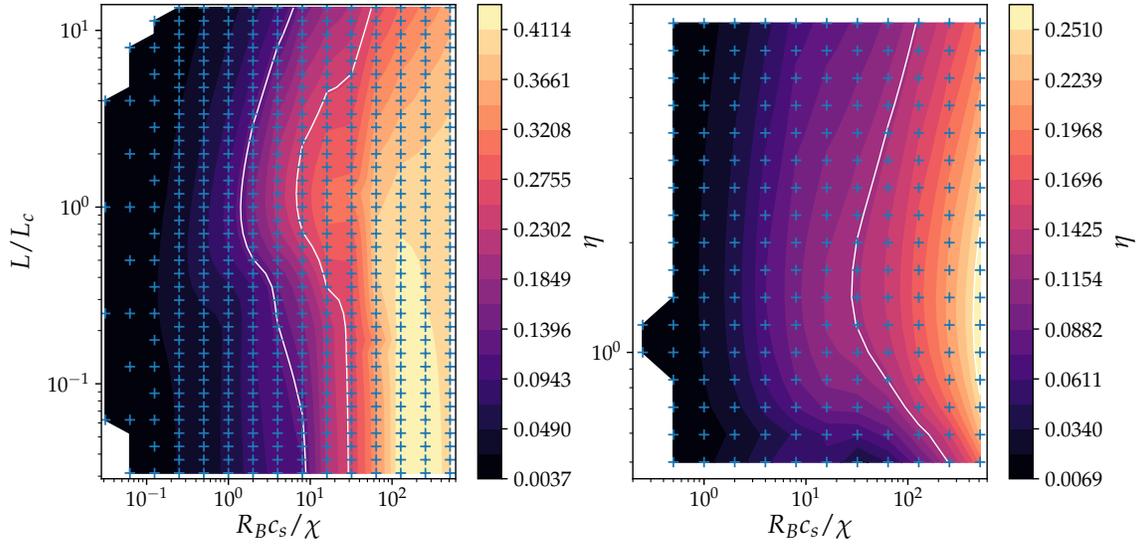


Figura 7.2: Mapas de color para la eficiencia térmica de la fuerza de calentamiento. La imagen derecha muestra los resultados para $\mathcal{M} = 0.4$, la imagen izquierda muestra los resultados para $\mathcal{M} = 0.1$. Podemos ver que se cumple con una eficiencia térmica menor que uno para todas las masas y luminosidades.

tamiento en función de la luminosidad y la masa del perturbador para dos valores distintos del número de Mach. Podemos observar que para toda masa, se cumple con una eficiencia térmica $\eta < 1$ en acuerdo con la primera ley de la termodinámica.

7.3.3. Fuerza de enfriamiento

En la figura 7.3 presentamos las curvas de la fuerza normalizada de enfriamiento como función de la masa, presentamos las curvas para distinto número de Mach. Normalizamos la fuerza de enfriamiento con respecto a la fuerza teórica asintótica del límite en que la velocidad tiende a cero $F_{\text{thermal}}^{\text{cold}}$ para la respectiva masa de cada punto. Para masas sub-críticas ($R_{BC_s}/\chi < 1$) tenemos que para velocidad finita, la fuerza de enfriamiento supera el valor asintótico $F_{\text{thermal}}^{\text{cold}}$, al aproximarnos a velocidad nula, recuperamos el comportamiento asintótico. Para masas supercríticas ($R_{BC_s}/\chi > 1$) podemos observar que al disminuir la velocidad, la fuerza de enfriamiento tiende a un escalamiento en M^{-1} .

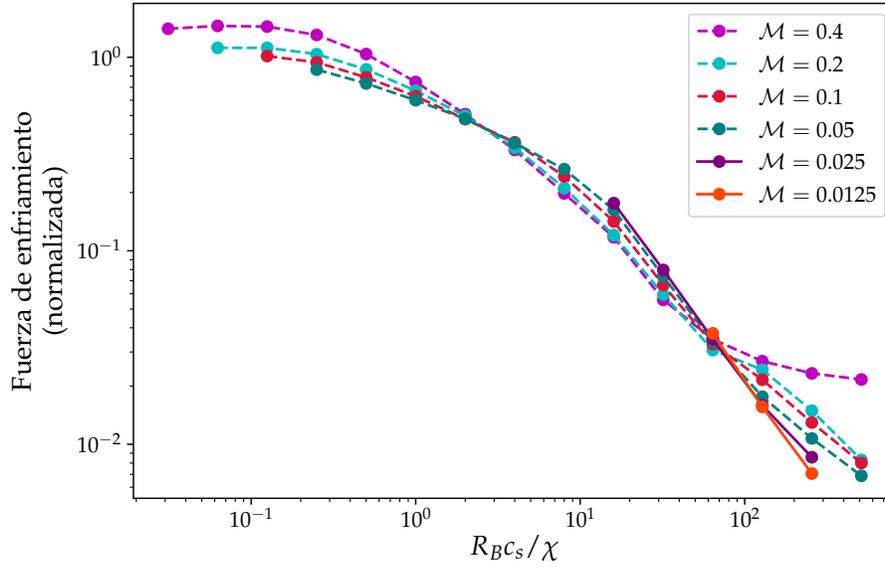


Figura 7.3: Fuerza de enfriamiento como función de la masa a diferentes valores del número de Mach. Las fuerzas están normalizadas al valor analítico para el límite en que la velocidad tiende a cero. Observamos un corte en la fuerza de enfriamiento para las masas supercríticas ($R_{BCs}/\chi > 1$), donde el corte crece al disminuir la velocidad.

7.3.4. Fuerza de calentamiento

Procedemos ahora a analizar el comportamiento de la fuerza de calentamiento como función de la masa, de misma forma que para el caso de la fuerza de enfriamiento, realizamos el estudio para distintos valores del número de Mach dentro del régimen subsónico. En la figura 7.4 presentamos los resultados de la fuerza de calentamiento para una luminosidad de $L = 8L_c$, la fuerza está normalizada al valor asintótico del análisis lineal para el límite en el que la velocidad tiende a cero, y correspondiente a la luminosidad utilizada $F_{\text{heating}}^{8L_c}$. Para todas estas curvas, observamos una fuerza de calentamiento menor que el valor asintótico del estudio lineal. Para las masas supercríticas observamos que la fuerza de calentamiento muestra una dependencia en M^{-1} para las velocidades estudiadas, y contrario a lo observado para la fuerza fría, el corte de la fuerza de calentamiento para masas supercríticas se vuelve más fuerte al elevar el número de Mach.

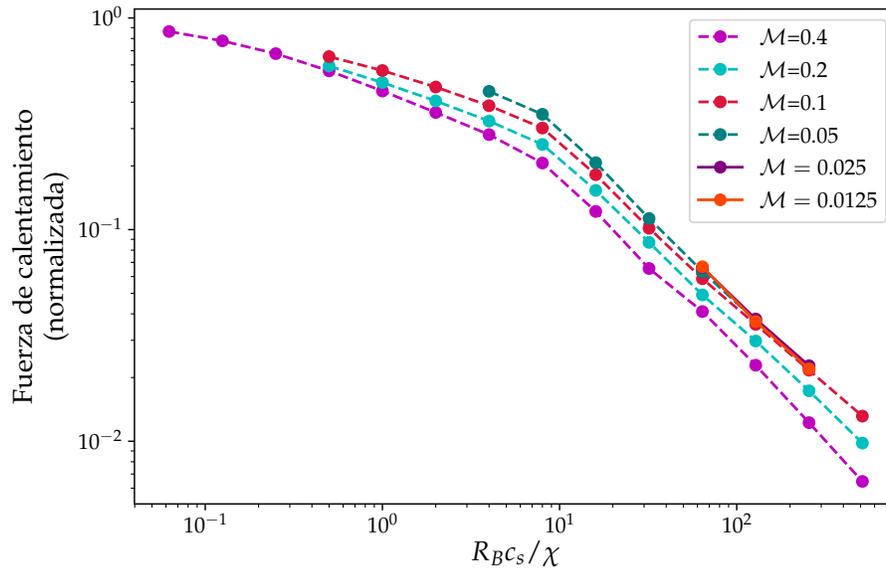


Figura 7.4: Fuerza de calentamiento para un perturbador con luminosidad $L = 8L_c$ como función de la masa y con distintos valores para el número de Mach. Las fuerzas se normalizan al valor analítico asintótico de la fuerza de calentamiento respectiva a la masa y luminosidad usadas. Observamos un corte en la fuerza de calentamiento para las masas supercríticas, el corte presenta una tendencia en M^{-1} . En contraste al caso de la fuerza de enfriamiento (figura 7.3), el corte es más fuerte mientras más elevado es el número de Mach.

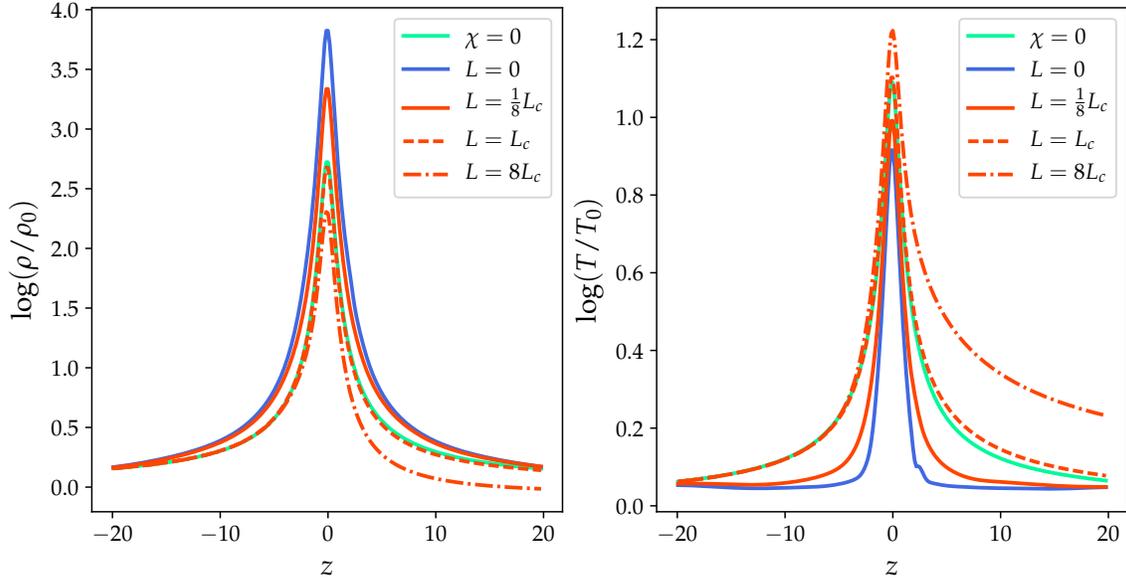


Figura 7.5: Cortes de la densidad y la temperatura a lo largo del eje z a $t = 200\tau$, en verde el caso adiabático, en azul el caso frío, y en naranja el caso luminoso para tres distintos valores de la luminosidad: $L = 1/8, 1$ y $8L_c$. En la imagen izquierda se muestra la densidad, en la imagen derecha se muestra la correspondiente temperatura.

7.3.5. Dinámica en la esfera de Bondi

En esta sección nos enfocamos en la dinámica interna a la esfera de Bondi para masas supercríticas, donde deseamos observar el impacto que tiene el carácter radiante del perturbador en dicha dinámica. En concreto, mostramos el caso de un perturbador de masa $M = 32M_c$ para un número de Mach $\mathcal{M} = 0.05$. En la figura 7.5 mostramos los cortes de densidad y temperatura a lo largo del eje z , presentando el caso adiabático, el caso frío y el caso luminoso para una luminosidad sub-crítica $L_c/8$, para la luminosidad crítica L_c y para una luminosidad supercrítica $8L_c$. Podemos ver entonces que la inclusión de difusión térmica tiene impacto en ambas cantidades, elevando el pico de densidad y disminuyendo el pico de temperatura que se generan entorno al perturbador. Vemos que la luminosidad puede contrarrestar este efecto, recuperando el comportamiento del caso adiabático para un perturbador con luminosidad $L = L_c$. Para luminosidades supercríticas podemos ver claramente una asimetría entorno al perturbador para el frente y reverso de ambas densidad y temperatura, esto es consistente con la propulsión neta que observamos.

Hacemos ahora uso del campo trazador $\Psi = z_0$ para ver a donde va a dar el material durante la simulación. Empezamos con el caso frío $L = 0$, en la figura 7.6a presentamos un mapa de color del campo trazador $\Psi = z_0$ a $t = 200\tau$. En esta figura podemos observar material atrapado en un radio cercano a R_B , este comportamiento es consistente con el impacto de la difusión térmica, que logra evitar que la temperatura colme el pozo potencial al rededor del perturbador, impidiendo así que el material pueda escapar de la esfera de Bondi.

En las imágenes *b* y *c* de la figura 7.6b se presentan respectivamente los casos para un perturbador con luminosidad $L_c/8$ y $L_c/4$, donde podemos ver poca diferencia en la estructura general con respecto al caso frío. Para el caso de $L = L_c/2$ mostrado en la figura 7.6d, podemos ver un comportamiento cualitativamente distinto al del caso frío, observando una gran reducción de la región de material atrapado. Para una luminosidad crítica (figura 7.6e) vemos que no hay material atrapado en la vecindad del perturbador, vemos de hecho que el material que pasa en la vecindad del perturbador es acelerado, mostrado por el flujo adelante del perturbador. Al seguir incrementando la luminosidad, esperamos que el pico de temperatura creado permita que el material sea acelerado por el perturbador, este comportamiento es consistente con lo observado en la figura 7.6f donde se presenta el caso para una luminosidad $L = 8L_c$.

7.4. Discusión

Hemos realizado simulaciones de alta resolución en el régimen sub-sónico. Encontramos que para cualquier masa es posible obtener una fuerza neta motriz, siempre y cuando se tenga una luminosidad del perturbador lo suficientemente elevada. Vemos que la eficiencia termal de la fuerza de calentamiento cumple con la cota $\eta < \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{M}{M_c} \mathcal{M}$ para toda masa. Observamos que el impacto de la luminosidad tiene un corte para masas superiores a M_c , donde este corte crece linealmente con M , y es este corte el que permite mantener una eficiencia menor a la unidad para masas supercríticas. Encontramos que la fuerza de enfriamiento también tiene un corte para masas supercríticas, creciendo también este linealmente con la masa. Vemos que para

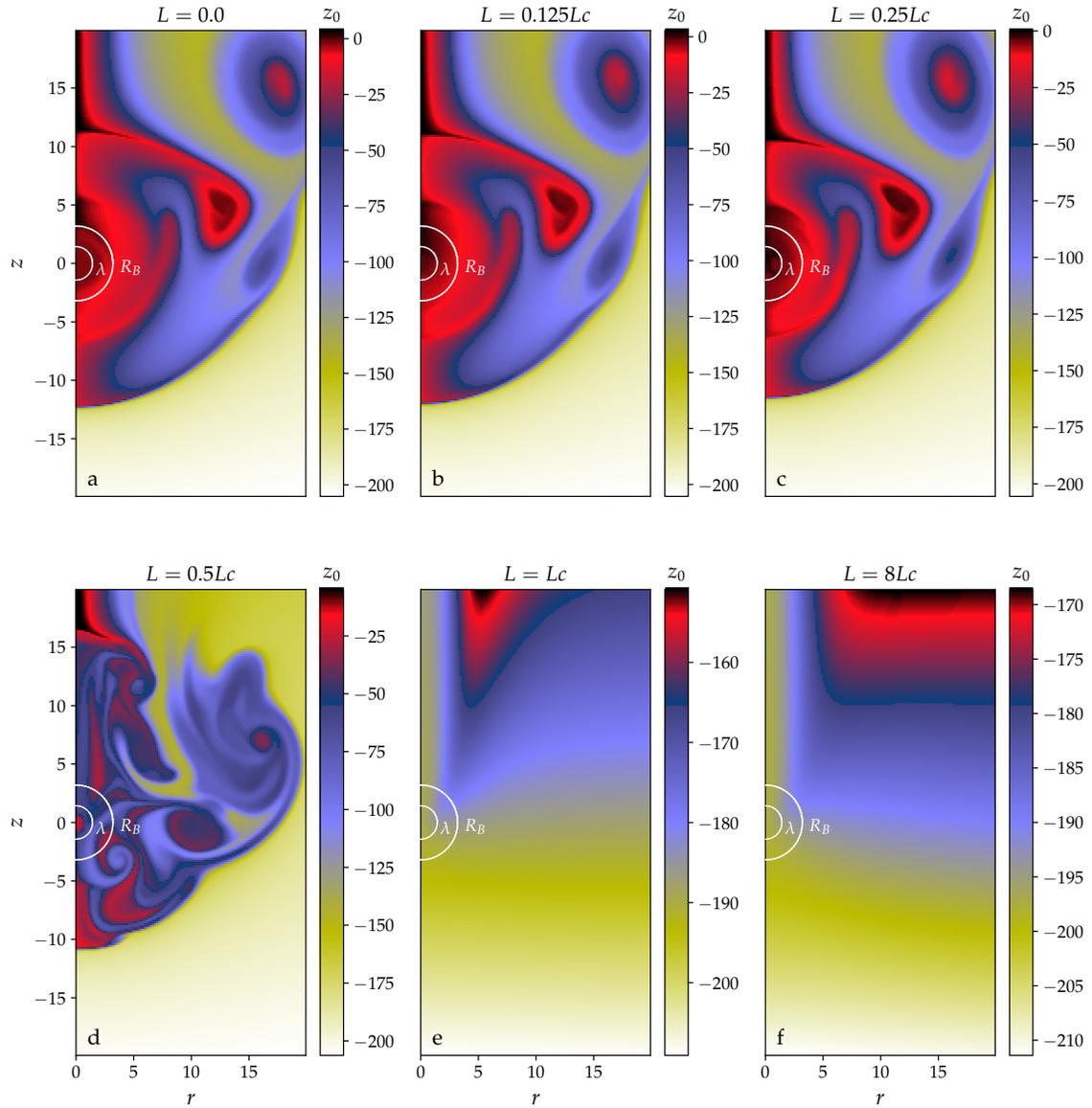


Figura 7.6: Mapas de color para el campo trazador $\Psi = z_0$. Las imágenes corresponden a simulaciones con $\mathcal{M} = 0.05$ y $M = 32M_c$ a $t = 200\tau$, para una secuencia de luminosidades $L = 0, 1/8, 1/4, 1/2, 1$ y $8L_c$.

un perturbador no luminoso en un medio con difusión térmica, el material interno a la esfera de Bondi se encuentra atrapado, y que para luminosidades suficientemente altas, el material es capaz de liberarse, dejando así de haber material atrapado en el interior de la esfera de Bondi.

Capítulo 8

Apéndice

.1. Coeficientes del método Runge-Kutta

A continuación se describe el método Runge-Kutta empleado para la integración temporal del código *DG*. Para la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt}u_h = \mathcal{L}(u),$$

y una condición inicial apropiada u_h^0 , obtenemos la solución al tiempo t^{n+1} :

$$u_h^{n+1} = u_h^n + h \sum_{i=1}^k b_i k_i,$$

donde

$$k_i = \mathcal{L}(t^n + c_i \cdot h, y_i + h(a_{i,1}k_1 + \dots + a_{i,i-1}k_{i-1})).$$

Para especificar un método particular, se necesita especificar el número de etapas k y los coeficientes $a_{i,j}$, b_i y c_i . Presentamos aquí las tablas de Butcher para distintos algoritmos de método Runge-Kutta. La tabla 1 presenta la tabla de Butcher genérica mientras que las tablas 2, 3, 4 y 5 muestran los coeficientes de los algoritmos de segundo, tercer, cuarto y quinto orden de integración temporal, respectivamente.

0					
c_2	$a_{2,1}$				
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$			
...		
c_k	$a_{k,1}$	$a_{k,2}$...	$a_{k,k-1}$	
	b_1	b_2	...	b_{k-1}	b_k

Tabla 1: Tabla de Butcher genérica para un método explícito de Runge Kutta de k etapas.

0		
1/2	1/2	
	1/2	1/2

Tabla 2: Tabla de Butcher para el esquema de segundo orden con dos etapas SSP(2,2).

0			
1	1		
3/4	1/4	1/4	
	1/6	1/6	2/3

Tabla 3: Tabla de Butcher para el esquema de tercer orden con tres etapas SSP(3,3).

0					
0.39175222700392	0.39175222700392				
0.58607968896779	0.21766909633821	0.36841059262959			
0.47454236302687	0.08269208670950	0.13995850206999	0.25189177424738		
0.93501063100924	0.06796628370320	0.11503469844438	0.20703489864929	0.54497475021237	
	0.14681187618661	0.24848290924556	0.10425883036650	0.27443890091960	0.22600748319395

Tabla 4: Tabla de Butcher para el esquema de cuarto orden con 5 etapas SSP-RK(4,5).

0						
1/5	1/5					
3/10	3/40	9/40				
3/5	3/10	-9/10	6/5			
1	-11/54	5/2	-70/27	35/27		
7/8	1631/55296	175/512	575/13824	44275/110592	253/4096	
	37/378	0	250/621	125/594	0	512/1771

Tabla 5: Tabla de Butcher para el esquema de quinto orden con 6 etapas (Cash & Karp 1990).

Bibliografía

- Bai, X.-N. & Stone, J. M. (2013), ‘Wind-driven Accretion in Protoplanetary Disks. I. Suppression of the Magnetorotational Instability and Launching of the Magnetocentrifugal Wind’, *ApJ* **769**, 76.
- Baruteau, C. & Masset, F. (2013), Recent Developments in Planet Migration Theory, *in* J. Souchay, S. Mathis & T. Tokieda, eds, ‘Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag’, Vol. 861 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, p. 201.
- Benítez-Llambay, P., Masset, F., Koenigsberger, G. & Szulágyi, J. (2015), ‘Planet heating prevents inward migration of planetary cores’, *Nature* **520**, 63–65.
- Benítez-Llambay, P. & Masset, F. S. (2016), ‘FARGO3D: A New GPU-oriented MHD Code’, *ApJS* **223**, 11.
- Cash, J. R. & Karp, A. H. (1990), ‘A variable order runge-kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides’, *ACM Trans. Math. Softw.* **16**(3), 201–222.
URL: <http://doi.acm.org/10.1145/79505.79507>
- Chandrasekhar, S. (1943), ‘Dynamical Friction. I. General Considerations: the Coefficient of Dynamical Friction.’, *ApJ* **97**, 255.
- Chrenko, O., Brož, M. & Lambrechts, M. (2017), ‘Eccentricity excitation and merging of planetary embryos heated by pebble accretion’, *ArXiv e-prints* .

- Cockburn, B. & Shu, C.-W. (1998), ‘The runge-kutta discontinuous galerkin method for conservation laws v’, *J. Comput. Phys.* **141**(2), 199–224.
URL: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1998.5892>
- Crida, A., Morbidelli, A. & Masset, F. (2006), ‘On the width and shape of gaps in protoplanetary disks’, *Icarus* **181**, 587–604.
- D’Angelo, G., Henning, T. & Kley, W. (2002), ‘Nested-grid calculations of disk-planet interaction’, *A&A* **385**, 647–670.
- D’Angelo, G., Kley, W. & Henning, T. (2003a), ‘Orbital Migration and Mass Accretion of Protoplanets in Three-dimensional Global Computations with Nested Grids’, *ApJ* **586**, 540–561.
- D’Angelo, G., Kley, W. & Henning, T. (2003b), ‘Orbital Migration and Mass Accretion of Protoplanets in Three-dimensional Global Computations with Nested Grids’, *ApJ* **586**, 540–561.
- de Val-Borro, M., Edgar, R. G., Artymowicz, P., Cielieglag, P., Cresswell, P., D’Angelo, G., Delgado-Donate, E. J., Dirksen, G., Fromang, S., Gawryszczak, A., Klahr, H., Kley, W., Lyra, W., Masset, F., Mellema, G., Nelson, R. P., Paardekooper, S.-J., Peplinski, A., Pierens, A., Plewa, T., Rice, K., Schäfer, C. & Speith, R. (2006), ‘A comparative study of disc-planet interaction’, *MNRAS* **370**, 529–558.
- Duffell, P. C. (2016), ‘DISCO: A 3D Moving-mesh Magnetohydrodynamics Code Designed for the Study of Astrophysical Disks’, *ApJS* **226**, 2.
- Eklund, H. & Masset, F. S. (2017), ‘Evolution of eccentricity and inclination of hot protoplanets embedded in radiative discs’, *MNRAS* **469**, 206–217.
- Flaherty, K. M., Hughes, A. M., Teague, R., Simon, J. B., Andrews, S. M. & Wilner, D. J. (2018), ‘Turbulence in the TW Hya Disk’, *ApJ* **856**, 117.
- Fung, J., Masset, F., Lega, E. & Velasco, D. (2017), ‘Planetary Torque in 3D Isentropic Disks’, *AJ* **153**, 124.

- Fung, J., Shi, J.-M. & Chiang, E. (2014), ‘How Empty are Disk Gaps Opened by Giant Planets?’, *ApJ* **782**, 88.
- Goldreich, P. & Tremaine, S. (1979), ‘The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential’, *ApJ* **233**, 857–871.
- Goodman, J. & Rafikov, R. R. (2001), ‘Planetary Torques as the Viscosity of Protoplanetary Disks’, *ApJ* **552**, 793–802.
- Gottlieb, S. & Shu, C. W. (1998), ‘Total variation diminishing Runge-Kutta schemes’, *Mathematics of Computation* **67**, 73–85.
- Hennebelle, P., Lesur, G. & Fromang, S. (2017), ‘Spiral-driven accretion in protoplanetary discs . III. Tridimensional simulations’, *A&A* **599**, A86.
- Hesthaven, J. S. & Warburton, T. (2007), *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, 1st edn, Springer Publishing Company, Incorporated.
- Jiménez, M. A. & Masset, F. S. (2017), ‘Improved torque formula for low- and intermediate-mass planetary migration’, *MNRAS* **471**, 4917–4929.
- Kim, H. & Kim, W.-T. (2009), ‘NONLINEAR DYNAMICAL FRICTION IN a GASEOUS MEDIUM’, *The Astrophysical Journal* **703**(2), 1278–1293.
URL: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/703/2/1278>
- Kley, W. & Lin, D. N. C. (1996), ‘The Structure of the Boundary Layer in Protostellar Disks’, *ApJ* **461**, 933.
- Lambrechts, M. & Johansen, A. (2012), ‘Rapid growth of gas-giant cores by pebble accretion’, *A&A* **544**, A32.
- Laughlin, G., Crismani, M. & Adams, F. C. (2011), ‘On the Anomalous Radii of the Transiting Extrasolar Planets’, *ApJ* **729**, L7+.

- Lesur, G., Kunz, M. W. & Fromang, S. (2014), ‘Thanatology in protoplanetary discs. The combined influence of Ohmic, Hall, and ambipolar diffusion on dead zones’, *A&A* **566**, A56.
- Lichtenberg, T. & Schleicher, D. R. G. (2015), ‘Modeling gravitational instabilities in self-gravitating protoplanetary disks with adaptive mesh refinement techniques’, *A&A* **579**, A32.
- Lin, D. N. C. & Papaloizou, J. (1986), ‘On the tidal interaction between protoplanets and the primordial solar nebula. II - Self-consistent nonlinear interaction’, *ApJ* **307**, 395–409.
- Liska, R. & Wendroff, B. (2003), ‘Comparison of several difference schemes for the euler equations in 1d and 2d’, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications* pp. 831–840.
- Lyra, W., Johansen, A., Klahr, H. & Piskunov, N. (2009), ‘Standing on the shoulders of giants. Trojan Earths and vortex trapping in low mass self-gravitating protoplanetary disks of gas and solids’, *A&A* **493**, 1125–1139.
- Masset, F. (2000), ‘FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks’, *A&AS* **141**, 165–173.
- Masset, F. S. (2001), ‘On the Co-orbital Corotation Torque in a Viscous Disk and Its Impact on Planetary Migration’, *ApJ* **558**, 453–462.
- Masset, F. S. (2017), ‘Coorbital thermal torques on low-mass protoplanets’, *MNRAS* **472**, 4204–4219.
- Masset, F. S. & Casoli, J. (2010), ‘Saturated Torque Formula for Planetary Migration in Viscous Disks with Thermal Diffusion: Recipe for Protoplanet Population Synthesis’, *ApJ* **723**, 1393–1417.
- Masset, F. S., Eklund, H. & Velasco Romero, D. A. (2017), Eccentricity and inclination evolution of hot protoplanetary embryos in protoplanetary discs, *in* ‘Revista

- Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series', Vol. 49 of *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, pp. 15–18.
- Masset, F. S. & Papaloizou, J. C. B. (2003), 'Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters', *ApJ* **588**, 494–508.
- Masset, F. S. & Velasco Romero, D. A. (2017), 'Dynamical friction on hot bodies in opaque, gaseous media', *MNRAS* **465**, 3175–3184.
- Masset, F. S., Velasco Romero, D. A. & Eklund, H. (2018), Dynamical friction on hot bodies in gaseous, opaque media, and application to embedded protoplanets, in 'Journal of Physics Conference Series', Vol. 1031 of *Journal of Physics Conference Series*, p. 012006.
- Mignone, A., Flock, M., Stute, M., Kolb, S. M. & Muscianisi, G. (2012), 'A conservative orbital advection scheme for simulations of magnetized shear flows with the PLUTO code', *A&A* **545**, A152.
- Muto, T., Takeuchi, T. & Ida, S. (2011), 'On the Interaction between a Protoplanetary Disk and a Planet in an Eccentric Orbit: Application of Dynamical Friction', *ApJ* **737**, 37–+.
- Ostriker, E. C. (1999), 'Dynamical Friction in a Gaseous Medium', *ApJ* **513**, 252–258.
- Paardekooper, S.-J., Baruteau, C. & Kley, W. (2011), 'A torque formula for non-isothermal Type I planetary migration - II. Effects of diffusion', *MNRAS* **410**, 293–303.
- Paardekooper, S.-J. & Mellema, G. (2006), 'RODEO: a new method for planet-disk interaction', *A&A* **450**, 1203–1220.
- Park, K. & Bogdanović, T. (2017), 'Gaseous Dynamical Friction in Presence of Black Hole Radiative Feedback', *ApJ* **838**, 103.

- Pepliński, A., Artymowicz, P. & Mellema, G. (2008*a*), ‘Numerical simulations of type III planetary migration - I. Disc model and convergence tests’, *MNRAS* **386**, 164–178.
- Pepliński, A., Artymowicz, P. & Mellema, G. (2008*b*), ‘Numerical simulations of type III planetary migration - I. Disc model and convergence tests’, *MNRAS* **386**, 164–178.
- Rafikov, R. R. (2017), ‘Protoplanetary Disks as (Possibly) Viscous Disks’, *ApJ* **837**, 163.
- Rephaeli, Y. & Salpeter, E. E. (1980), ‘Flow past a massive object and the gravitational drag’, *ApJ* **240**, 20–24.
- Sánchez-Salcedo, F. J. & Brandenburg, A. (1999), ‘Deceleration by Dynamical Friction in a Gaseous Medium’, *ApJ* **522**, L35–L38.
- Schaal, K., Bauer, A., Chandrashekar, P., Pakmor, R., Klingenberg, C. & Springel, V. (2015), ‘Astrophysical hydrodynamics with a high-order discontinuous Galerkin scheme and adaptive mesh refinement’, *MNRAS* **453**, 4278–4300.
- Schwarzschild, M. (1958), ‘Theory of Stellar Evolution and the Age Sequence of Stellar Populations’, *Ricerche Astronomiche* **5**, 204.
- Stone, J. M. & Norman, M. L. (1992), ‘ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests.’, *ApJS* **80**, 753–790.
- van Leer, B. (1977), ‘Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection’, *Journal of Computational Physics* **23**, 276–+.
- Veiga, M. H., Romero Velasco, D. A., Abgrall, R. & Teyssier, R. (2018), ‘Capturing near-equilibrium solutions: a comparison between high-order discontinuous Galerkin methods and well-balanced schemes’, *arXiv e-prints* p. arXiv:1803.05919.

- Velasco Romero, D. A., Han Veiga, M., Teyssier, R. & Masset, F. S. (2018), ‘Planet-disc interactions with discontinuous Galerkin methods using GPUs’, *MNRAS* **478**(2), 1855–1865.
- Velasco Romero, D. A. & Masset, F. S. (2019), ‘Numerical study of dynamical friction with thermal effects - I. Comparison to linear theory’, *MNRAS* **483**, 4383–4396.
- Ward, W. R. (2007), A Streamline Model of Horseshoe Torque Saturation, in ‘Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts’, Vol. 38 of *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, pp. 2289–+.
- Yee, H. C., Sandham, N. D. & Djomehri, M. J. (1999), ‘Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic-Based Filters’, *Journal of Computational Physics* **150**, 199–238.
- Young, M. & Ooi, A. (2004), Analysis of the temporal discretisation of finite difference schemes, in ‘Proceedings of the Nineteenth Australasian Fluid Mechanics Conference’.
- Zhang, Q. & Shu, C.-W. (2004), ‘Error estimates to smooth solutions of runge–kutta discontinuous galerkin methods for scalar conservation laws’, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **42**(2), 641–666.
URL: <https://doi.org/10.1137/S0036142902404182>
- Zhang, X. & Shu, C.-W. (2010), ‘On positivity-preserving high order discontinuous galerkin schemes for compressible euler equations on rectangular meshes’, *Journal of Computational Physics* **229**(23), 8918 – 8934.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110004535>
- Zhu, Z. & Baruteau, C. (2016), ‘Gas and dust hydrodynamical simulations of massive lopsided transition discs - I. Gas distribution’, *MNRAS* **458**, 3918–3926.
- Zhu, Z., Stone, J. M., Rafikov, R. R. & Bai, X.-n. (2014), ‘Particle Concentration at Planet-induced Gap Edges and Vortices. I. Inviscid Three-dimensional Hydro Disks’, *ApJ* **785**, 122.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Coordinación de Programas Educativos

Posgrado en Ciencias

DR. VICTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada “*Desarrollo de varios métodos numéricos sobre GPUs y su aplicación en entornos astrofísicos*” que presenta el alumno David Aarón Velasco Romero (5920150308) para obtener el título de **Doctor en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Gennaro D'Angelo Los Alamos National Laboratory	APROBATORIO	
Dr. Alejandro Ramírez Solís CINC-UAEM	APROBATORIO	
Dr. Francisco Javier Sánchez Salcedo IA-UNAM	APROBATORIO	
Dr. Jose Alejandro Esquivel Salazar ICN-UNAM	APROBATORIO	
Dr. Fabio De Colle ICN-UNAM	APROBATORIO	
Dr. Aldo Figueroa Lara CINC-UAEM	Aprobatorio	
Dr. Frédéric Sylvain Masset ICF-UNAM	APROBATORIO	