UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Invertibilidad lateral de operadores funcionales con desplazamientos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

L.C. LUIS EDUARDO FLORES ZAPOTITLA

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Yuriy Karlovych

CUERNAVACA, MORELOS *OCTUBRE, 2022*

Introdución

Sea $\mathcal{B}(X,Y)$ el espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados que actuan del espacio de Banach X al espacio de Banach Y. Si $X=Y$, entonces $\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}(X,X)$ es un álgebra de Banach. Un operador $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ se dice que es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) si existe un operador $B\in\mathcal{B}(Y,X)$ tal que $BA=I_X$ (resp., $AB=I_Y$), donde I_X y I_Y son los operadores identidad en los espacios X y Y, respectivamente. El operador B es llamado un inverso izquierdo (resp., derecho) del operador A. Un operador $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ es llamado invertible si es invertible por la izquierda y por la derecha simultaneamente. Si el operador A es invertible solo por un lado (lateralmente), entonces el inverso lateral correspondiente no es único, mientras que los inversos bilaterales son únicos

Un operador $A\in\mathcal{B}(X)$ se dice que es n-normal (resp., d-normal) en X si su imagen $\operatorname{Im} A$ es cerrado en X y $\dim\ker A<\infty$ (resp., $\dim\operatorname{Coker} A<\infty$), donde $\operatorname{Coker} A:=X/\operatorname{Im} A$. Un operador $A\in\mathcal{B}(X)$ es llamado un operador de Fredholm en X si A es n-normal y d-normal simultaneamente. Sea $\mathcal{K}(X)$ el ideal cerrado bilateralmente de todos los operadores compactos en $\mathcal{B}(X)$. Es bien sabido que un operador $A\in\mathcal{B}(X)$ es de Fredholm sí y solo si la clase de equivalencia $A^\pi:=A+\mathcal{K}(X)$ es invertible en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}^\pi(X):=\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. Si $A\in\mathcal{B}(X)$ es de Fredholm, Entonces su índice de Fredholm es definido por

$$\operatorname{ind} A:=\dim\ker A-\dim\operatorname{Coker} A.$$

Dado$p\in[1,\infty]$, Consideramos el espacio de Banach $l^p=l^p(\mathbb{Z})$ que consiste de todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ equipada con la norma

$$\|f\|_{l^p}=\begin{cases}\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|^p\big)^{1/p} & \text{si}\ \ p\in[1,\infty),\\ \sup_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)| & \text{si}\ \ p=\infty.\end{cases}$$

Sea $l^0=l^0(\mathbb{Z})$ el subespacio cerrado de l^∞ que consiste de todas las funciones $f\in l^\infty$ tales que $\lim_{n\to\infty}|f(n)|=0$. Es sabido que, $(l^p)^*=l^q$ para toda $p\in[1,\infty)$, donde $1/p+1/q=1$, y $(l^0)^*=l^1$.

Sea $p\in\{0\}\cup[1,\infty]$ y sea V el isomorfismo isométrico de l^p sobre si mismo, el cual es dado por $(Vf)(n)=f(n+1)$ para toda $n\in\mathbb{Z}$. Entonces $V^k\in\mathcal{B}(l^p)$ para toda $k\in\mathbb{Z}$. Un operador $A\in\mathcal{B}(l^p)$ de la forma

$$A=\sum_{k\in F}a_kV^k,\quad\text{con toda}\ \ a_k\in l^\infty\ \ \text{y un conjunto finito}\ F\subset\mathbb{Z},$$

es llamado un operador *discreto de banda*, mientras que el límite uniforma de una sucesión de operadores discretos de banda en $\mathcal{B}(l^p)$ es llamado un operador *discreto de banda dominada* (sver, [16]). Definimos por $\mathfrak{A}_p\subset\mathcal{B}(l^p)$ el álbera de Banach de todos los operadores discretos de banda dominada que actuan en el espacio l^p.

Para $p\in\{0\}\cup[1,\infty]$, consideramos la álgebra de Banach con unidad $\mathcal{W}=\mathcal{W}_p\subset\mathfrak{A}_p$ que consiste de todos los operadores discretos de banda dominada de la forma

$$A=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_kV^k\in\mathcal{B}(l^p),\quad\text{con}\ \ a_k\in l^\infty\ \text{y}\ \|A\|_{\mathcal{W}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|a_k\|_{l^\infty}<\infty.\tag{1}$$

Por analogía con el álgebra de Wiener de series de Fourier absolutamente convergentes, llamamos a $\mathcal{W}$ el álgebra de Wiener de operadores discretos de banda dominada.

Motivados por los artículos [1], [24] and [23], estudiamos dos subálgebras de Banach del álgebra de Banach $\mathcal{B}(l^p)$, las cuales definimos de la siguiente manera.

Para cualquier mapeo inyectivo $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, introducimos los operadores $E = E_\pi$ y $E^\diamond = E_\pi^\diamond$ en $\mathcal{B}(l^p)$ definido sobre funciones $f \in l^p$ por

$$(Ef)(n) = f(\pi(n)), \quad (E^\diamond f)(n) = \begin{cases} f(m) & \text{si } \ n = \pi(m), \\ 0 & \text{si } \ n \notin \pi(\mathbb{Z}), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $EE^\diamond = I$ y $E^\diamond E$ es una proyección en $\mathcal{B}(l^p)$. Para todo $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$, definimos los operadores discretos de tipo Wiener en el álgebra de Banach $\mathcal{B}(l^p)$ que tienen la forma

$$A_E := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E V^k, \quad \widehat{A}_E := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E^\diamond V^k, \tag{2}$$

donde $a_k \in l^\infty$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty$. Llamamos a los operadores de la forma (2) los operadores *discretos de tipo wiener E módulo.* Si el mapeo inyectivo $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es dado por $\pi(n) = mn$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, donde $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces los operadores (2) con $E_m := E_\pi$ y $E_m^\diamond := E_\pi^\diamond$ son llamados los operadores *discretos de tipo Wiener de inclinación dominada.* Note que los operadores de banda dominada $A \in \mathcal{W}_p$ son de inclinación dominada con $m = 1$.

Un criterio de invertibilidad para un operador discreto binomial de banda A con forma $A = aI - bV$ con $a, b \in l^\infty$ en cada espacio l^p para $p \in [1, \infty]$ fue obtenido en [8, Teorema 17]. Criterios para la invertibilidad lateral de este operador en los espacios l^p con $p \in [1, \infty]$ fueron dados en [2, Teoremas 3.8, 3.10]. Por otro lado, la invertibilidad y la invertibilidad lateral de los operadores discretos de banda dominada $A \in \mathfrak{A}_p$ en los espacios l^p fueron estudiados solo para casos de coeficientes especiales (ver, [5, Secciones 6.3, 6.4]).

El criterio de Fredholm para operadores discretos de banda dominada $A \in \mathfrak{A}_p$ en términos de invertibilidad de todos los operadores límite y la acotación uniforme de sus inversos fueron obtenidos en [16, Teorema 1] para $p \in \{0\} \cup (1, \infty)$ (ver también [17, Teorema 2.5.7] para $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ y $A \in \mathcal{W}_p$). Posteriormente estos resultados fueron generalizados en [12, Corolario 10, Teorema 11] y [22, Teoremas 5.6, 5.7] probando que la condición de ser Fredholm de un operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es equivalente unicamente a la invertibilidad de todos los operadores límite.

Los índices de Fredholm para operadores discretos de banda dominada $A \in \mathfrak{A}_p$ en los espacios l^p en términos de sus operadores límite fueron calculados en [15, Teorema 1.2] para $p = 2$ y en [19, Teorema 2.5] para $p \in (1, \infty)$. Por [21, Teorema 3], el índice de Fredholm de un operador $A \in \mathcal{W}$ es el mismo en todos los espacios l^p para $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$. Que un operador $A \in \mathfrak{A}_p$ sea $n(d)$-normal en l^p para $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ es equivalente a que sea de Fredholm (ver [22, Teorema 4.3]).

Sea $\chi_{[j,j+1)}$ la función caracteristica del intervalo $[j, j + 1) \subset \mathbb{R}$. Los operadores de tipo Wiener de inclinación dominada son contenidos en la clase de multiplicación por operadores en $\mathcal{B}(l^p)$ por matrices infintitas α-inclinadas $\mathcal{A} = (a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ con entradas $a_{n,m} \in \mathbb{C}$, donde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y para toda $j \in \mathbb{Z}$, la j-ésima α-inclinación de $\mathcal{A}$ es la matriz $\mathcal{A}_j = \left(a_{n,m}^{(j)}\right)_{n,m\in\mathbb{Z}}$

con entradas $a^{(j)}_{n,m} = a_{n,m}\chi_{[j,j+1)}(\alpha n - m)$ (ver [1]). Bajo condiciones de decadencia en las α-inclinaciones fueron obtenidos criterios para la invertibilidad izquierda en $\mathcal{B}(l^p)$, por operadores de multiplicación de tipo matriz α-inclinadas en [1] en términos de las normas inferiores de esos operadores. La prueba se basa en demostrar que las normas inferiores para los operadores considerados sean positivos simultaneamente en todos los espacios l^p para $p \in [1, \infty]$ si esto es cierto para algún $p \in [1, \infty]$.

Analogamente criterios de invertibilidad izquierda para operadores de multiplicación en $\mathcal{B}l^p$ fueron obtenidos en [24] y [23] en términos de matrices delgadas y dispersas, es decir, para estas matrices en el caso de l^p existen números $N, M \in \mathbb{N}$ tales que todo renglón de la matriz admite a lo más N valores diferentes de cero, y cada columna de la matriz admite a lo más M valores diferentes de cero. Note que, para todo conjunto finito $F \subset \mathbb{Z}$, los operadores discretos E-módulo

$$A_E := \sum_{k\in F} a_k E V^k, \quad \widehat{A}_E := \sum_{k\in F} a_k E^{\diamond} V^k$$

son operadores de multiplicación por matrices infinitas delgadas y dispersas.

La siguiente tesis obtiene criterios de invertibilidad e invertibilidad lateral para operadores discretos de banda dominada $A \in \mathfrak{A}_p$ en los espacios l^p. También se estudian la invertibilidad lateral de los operadores discretos de tipo wiener en los espacios l^p. Probando que los operadores $A_E A^{\diamond}_E$, $A^{\diamond}_E A_E$, $\widehat{A}_E \widehat{A}^{\diamond}_E$ y $\widehat{A}^{\diamond}_E \widehat{A}_E$ son operadores discretos de banda dominada en $\mathcal{W}_p$, y aplicando el criterio de invertibilidad para esos operadores, obtenemos condiciones suficientes para la invertibilidad lateral para los operadores discretos de banda dominada tipo Wiener y E módulo en los espacios l^p.

Sea α un homeorfismo de $\mathbb{R}_+$ en si mismo que preserva la orientación, el cual tiene dos puntos fijos en 0 y ∞. Así $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(\infty) = \infty$, pero $\alpha(t) \neq t$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$. La función α es llamado un cambio, ya que α es monótono creciente en $\mathbb{R}_+$, su derivada existe y es positiva en casi todo $\mathbb{R}_+$. Si $\log \alpha' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces el operador de peso U_α definido por

$$U_\alpha \varphi = (\alpha')^{1/p} \varphi \circ \alpha,$$

es una isometría en el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}_+)$ para todo $p \in [1, \infty]$, y por lo tanto el operador U_α es invertible en este espacio. Sea $\alpha_0(t) = t$ y $\alpha_n(t) = \alpha(\alpha_{n-1}(t))$ para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $U^n_\alpha(t) = U_{\alpha^n}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Sea $\mathfrak{A}_p$ la subálgebra de Banach más pequeña de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ para $p \in [1, \infty]$, la cual contiene a los operadores U_α y U^{-1}_α y todos los operadores de por funciones en $L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Los operadores $A \in \mathfrak{A}_p$ son llamados operadores funcionales. Los operadores funcionales junto con sus operadores discretos juegan un rol importante en la teoría de operadores funcionales diferenciales, teoría de operadores singulares integrales, operadores de tipo convolución y operadores seudo diferenciales con cambio, teoría de sistemas dinámicos, etc.

Un criterio de invertibilidad para un operador funcional binomial A con forma $A = aI - bU_\alpha$ con $a, b, \log \alpha'^{\pm} \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ fue establecido en [8, Capítulo 5] usando el método de reducción a operadores de diferencia. Mientras que en [2, Teorema 4.9] fue establecido otro criterio para estos operadores usando criterios de invertibilidad para operadores discretos asociados.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 se da un breve repaso de algunos resultados básicos de teoría de operadores, así como técnicas y criterios conocidos para atacar el prolema de invertibilidad de operadores. Todo este matrial comprende lo aprendido en los primeros dos semestres de la maestría y es de ayuda para comprender el material. En el capítulo 2 se definen los operadores discretos en los espacios l^p para $p \in [1, \infty]$, se dan varios criterios de invertibilidad lateral de operadores discretos de banda dominada que tengan series absolutamente convergentes $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k V^k$ o límites uniformes de operadores de banda de la forma $A = \sum_{k \in F} a_k V^k$ donde F es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$ y $a_k \in l^\infty$ usando el método de bloques extremos asociados a los índices $\mathrm{ind}_p^{\pm} A$ de A y el rango de la matriz rectangular central asociada. También se obtiene otro criterio de invertibilidad lateral (derecha e izquierda, respectivamente) para un operador $A \in \mathcal{W}_p$ basado en la invertibilidad (bilateral) de los operadores $A^\diamond A$ y $AA^\diamond$ (respectivamente). Se introducen los operadores discretos de tipo Wiener E-módulo, para los cuales obtenemos condiciones de invertibilidad lateral. Finalmente, en el capítulo 3 se definen los operadores funcionales con coeficientes acotados $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ a los cuales llamamos operadores funcionales con desplazamientos y estudiamos la relación de estos con sus operadores discretos asociados. Utilizando esta relación obtenemos un criterio para la invertibilidad izquierda (resp. derecha) de estos operadores mediante la invertibilidad de los operaores A^*A (resp. AA^*). También se introducen los operadores funcionales con coeficientes de oscilación lenta como posible candidato para trabajo futuro.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espacios de Banach

Sea $\mathbb{F}$ un campo con elemento 0 e identidad 1, en lo que sigue se usará la notación $\mathbb{K}$ para referirse a uno de los campos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Dado una espacio lineal X decimos que una función $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ es una **Norma** sobre X si satisface:

N1. $||x|| = 0 \iff x = 0$, $x \in X$.

N2. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\quad x \in X$.

N3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \, \forall x, \, y \in X$(Desigualdad del triángulo).

Un espacio lineal con norma se llama **Espacio lineal normado.** Decimos que una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una **Distancia** sobre X si satisface

D1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

D2. $d(x, y) = d(y, x) \quad$ (simetría).

D3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z + y) \quad$ (desigualdad del triángulo).

Si en un espacio lineal normado existe una distancia tal que $d(x, y) = ||x - y|| \, \forall \, x, y \in X$, entonces decimos que X es un **Espacio métrico**.

1.1.1 Norma de un operador en espacios métricos

Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **Sucesión de Cauchy** si, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe un entero positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos los números naturales n, $m > N$ implica $|x_m - x_n| < \epsilon$. Si en un espacio métrico toda sucesión de Cauchy converge, entonces decimos que es un **Espacio métrico completo**. Un **Espacio de Banach** $\mathscr{B}$ es un espacio lineal normado y completo en la métrica definida por su norma, es decir $\mathscr{B}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales o complejos con una norma $||\cdot||$ tal que toda sucesión de Cauchy (con respecto a la métrica $d(x,y)=||x-y||$) en $\mathscr{B}$ tiene un límite en $\mathscr{B}$.

Dado un espacio normado X un **Funcional** es un mapeo $f: X\to\mathbb{C}$ continuo en sentido epsilon-delta, es decir $\forall\epsilon>0\,\exists\,\delta=\delta(x,\epsilon)>0$ tal que $\forall\, x,y\in X$ tales que $||x-y||<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\epsilon$(continuidad en x), si δ no depende de la elección de x, entonces se dice que f es continua uniformemente. La continuidad uniforme del funcional f es equivalente a

$$\exists\, M\in[0,\infty)\quad \text{tal que}\,|f(x)-f(y)|\leqslant M||x-y||\,\forall\, x,y\in X.$$

Si un funcional satisface $|f(x)|\leqslant M||x||\,\forall x\in X$, entonces decimos que es un **Funcional acotado**. Si f es un funcional acotado, entonces definimos la **norma** de f como:

$$||f||=\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{|f(x)|}{||x||}. \tag{1.1}$$

Si f es un funcional acotado, entonces $||f||<M$. Decimos que un funcional es un **funcional lineal** si para todos $x,y\in X$ y para todos $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ se tiene que $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$. Si f es un funcional lineal, entonces la definición de norma se puede expresar de la siguiente manera

$$||f||=\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{|f(x)|}{||x||}=\sup_{x\in X\setminus\{0\}}|\frac{1}{||x||}f(x)|=\sup_{x\in X\setminus\{0\}}|f(\frac{x}{||x||})|=\sup_{x\in X,\,||x||=1}|f(x)|. \tag{1.2}$$

Lema 1.1.1. *Si f es un funcional lineal, entonces:*

$$\sup_{x\in X,\,||x||=1}|f(x)|=\sup_{x\in X,\,||x||\leqslant 1}|f(x)|. \tag{1.3}$$

Demostración. Sea $E_1:=\{x\in X: ||x||=1\}$ la esfera unitaria centrada en 0 y $B_1:=\{x\in X: ||x||\leqslant 1\}$ la bola unitaria centrada en 0, como $E_1\subset B_1$ se tiene que

$$\sup_{x\in X,\,||x||=1}|f(x)|\leqslant\sup_{x\in X,\,||x||\leqslant 1}|f(x)|.$$

Sea $x\in X$ tal que $||x||<1\implies\exists\,\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $|\alpha|>1$ y $||\alpha x||=1$, entonces:

$$|f(x)|=|\alpha|^{-1}|f(\alpha x)|<|f(\alpha x)|\quad(\alpha x\in E_1),$$

esta ultima ecuación implica que

$$\sup_{x\in X,\,||x||=1}|f(x)|\geqslant\sup_{x\in X,\,||x||\leqslant 1}|f(x)|$$

y el lema es probado. □

Sean X, Y espacios lineales normados, una función $A : X \to Y$ es llamada un **Operador**, si el operador A satisface que para todo $x, z \in X$ y para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene que $A(\alpha x+\beta z) = \alpha A(x)+\beta A(z)$, entonces decimos que A es un **Operador lineal**. Un operador lineal A es un **Operador lineal acotado** si $\exists M \in [0, \infty)$ tal que $\forall x \in X$ se tiene que $||A(x)||_Y \leqslant M||x||_X$. Definimos la norma de un operador A como:

$$||A|| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||A(x)||_Y}{||x||_X}. \tag{1.4}$$

Lema 1.1.2. *Si A es un operador lineal, entonces*

$$||A|| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||A(x)||_Y}{||x||_X} = \sup_{x\in X, ||x||_X=1} ||A(x)||_Y = \sup_{x\in X, ||x||_X\leqslant 1} ||A(x)||_Y.$$

La prueba es análoga a la prueba del lema 1.1.1 .

Teorema 1.1.1. *Si X es un espacio lineal normado y Y es un álgebra de Banach, entonces el conjunto $\mathfrak{B}(X, Y)$ de todos los operadores lineales y acotados $f : X \to Y$ es un álgebra de Banach con norma igual a norma del operador.*

1.1.2 Redes y conjuntos dirigidos

La topología de un espacio espacio métrico puede ser descrita en términos de las sucesiones que convergen. Para espacios topológicos más generales una noción más general de sucesiones convergentes es necesaria. Recordemos que un **conjunto dirigido** A satisface que para cada pareja $\alpha, \beta \in A$ existe $\gamma \in A$ tal que $\gamma \geqslant \alpha$ y $\gamma \geqslant \beta$. Sea A un conjunto dirigido y X un espacio topológico una **Red** es una función de A en X tal que $\alpha \to \lambda_\alpha$, una red se dice que es convergente a λ en X si para cada vecindad U de λ existe α_U en A tal que $\lambda_\alpha \in U$ para $\alpha \geqslant \alpha_U$. Dos topologías en un espacio X coinciden si tienen las mismas series convergentes. (ver, [20], pag 3.)

Definición 1.1.1. *Una red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en un espacio de Banach $\mathscr{B}$ se dice que es una **Red de Cauchy** si para toda $\epsilon > 0$ existe $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant \alpha_0$ implica $||f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2}|| < \epsilon$.*

La definición anterior generaliza el concepto de sucesiones de Cauchy y de este modo tenemos el concepto de completes.

Proposición 1.1.1. *[20, Proposición 1.7.] En un espacio de Banach $\mathscr{B}$ toda red de Cauchy converge.*

Definición 1.1.2. *Sea $\{f_\alpha\}\alpha \in A$ un conjunto de vectores en el espacio de Banach $\mathscr{B}$ y sea $\mathfrak{F} = \{F \subset A : F \text{ finito}\}$, entonces $\mathfrak{F}$ es un conjunto dirigido respecto a la relación $\subset$. Para cada $F \in \mathfrak{F}$, sea $g_F = \sum_{\alpha\in F} f_\alpha$. Si la red $\{g_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ converge a algún $g \in \mathscr{B}$, entonces la suma $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ se dice que converge y escribimos $g = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha$.*

Proposición 1.1.2. *[20, Proposición 1.9.] Si $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un conjunto de vectores en el espacio de Banach $\mathscr{B}$ tal que $\sum_{\alpha\in A} ||f_\alpha||$ converge en $\mathbb{R}$, entonces $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ converge en $\mathscr{B}$.*

Demostración. En la notación de la definición 1.1.2 y por la proposición 1.1.1 basta probar que la red $\{g_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ es de Cauchy. Ya que $\sum_{\alpha\in A}||f_\alpha||$ converge en $\mathbb{R}$, para toda $\epsilon > 0$, existe una $F_0 \in \mathcal{F}$, tal que para cada $F \geq F_0$ se tiene que

$$\sum_{\alpha\in F}||f_\alpha|| - \sum_{\alpha\in F_0}||f_\alpha|| < \epsilon.$$

Por lo tanto, dados F_1, $F_2 \geq F_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||g_{F_1} - g_{F_2}|| &= ||\sum_{\alpha\in F_1} f_\alpha - \sum_{\alpha\in F_2} f_\alpha|| \\ &= ||\sum_{\alpha\in F_1\setminus F_2} f_\alpha - \sum_{\alpha\in F_2\setminus F_1} f_\alpha|| \\ &\leq \sum_{\alpha\in F_1\setminus F_2}||f_\alpha|| + \sum_{\alpha\in F_2\setminus F_1}||f_\alpha|| \\ &\leq \sum_{\alpha\in F_1\cup F_2}||f_\alpha|| - \sum_{\alpha\in F_0}||f_\alpha|| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que la red $\{g_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ es de Cauchy y por lo tanto converge. □

De la proposición anterior tenemos que si $\mathscr{B}$ es un espacio lineal normado, entonces $\mathscr{B}$ es un espacio de Banach si y sólo si para toda sucesión de vectores $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathscr{B}$ la condición $\sum_{n=1}^{\infty}||f_n|| < \infty$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Proposición 1.1.3. *Sea ϕ un funcional lineal de un espacio de Banach $\mathscr{B}$, entonces los siguientes son equivalentes:*

(a) ϕ es acotado.

(b) ϕ es continuo.

(c) ϕ es continuo en 0.

Definición 1.1.3. *Sea $\mathscr{B}^*$ el conjunto de todas las funcionales lineales y acotados de $\mathscr{B}$, entonces decimos que $\mathscr{B}^*$ es el* ***Espacio dual*** *de $\mathscr{B}$.*

Si dotamos al espacio dual con la norma definida como la norma del operador, entonces el espacio dual de $\mathscr{B}$ resulta ser un espacio de Banach con esta norma. Sea X un conjunto, Y un espacio topológico, y sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones de X a Y. Definimos la **topología débil** en X inducida por $\mathcal{F}$ como la topología más débil o más pequeña $\mathfrak{J}$ en X para la cual cada función en $\mathcal{F}$ es continua, es decir, $\mathfrak{J}$ es la topología generada por los conjuntos

$$\{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \text{ abierto de } Y\}.$$

Es sabido que cuando Y es un espacio de Hausdorff y $\mathcal{F}$ separa los puntos de X, entonces la topología débil es Hausdorff. Dado un espacio de Banach $\mathscr{B}$ definimos la w^***-topología** de $\mathscr{B}^*$ como la topología débil inducida por el conjunto de funciones $\mathcal{F} = \{\hat{f} : f \in \mathscr{B}, \varphi \in \mathscr{B}^*, \hat{f}(\varphi) = \varphi(f)\}$.

Proposición 1.1.4. *[20, Proposición 1.19.] Si $\mathscr{B}$ es un espacio de Banach, entonces la w^*-topología en $\mathscr{B}^*$ es de Hausdorff.*

Definición 1.1.4. *La bola unitaria de un espacio de Banach $\mathscr{B}$ es el conjunto $\{x \in \mathscr{B} : ||x|| \leq 1\}$ y es denotado por $(\mathscr{B})_1$.*

Teorema 1.1.2 (Alaoglu)**.** *La bola unitaria $(\mathscr{B}^*)_1$ del espacio dual de un espacio de Banach $\mathscr{B}$ es compacto en la w^*-topología.*

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, por $C(X)$ denotamos al conjunto de funciones complejas continuas en X. La importancia del resultado anterior es el teorema de Banach, el cual establece que todo espacio de Banach es isomorfo a un a un subespacio de $C(X)$ para algún X.

Definición 1.1.5. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$ y sea ρ una función real definida sobre X. Entonces decimos que ρ es un **funcional sublineal** en X si $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y si para todo λ real positivo se tiene que $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$.*

Teorema 1.1.3 (Hahn-Banach)**.** *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio de un espacio de Banach $\mathscr{B}$. Si φ es un funcional lineal y acotado en $\mathcal{M}$, entonces existe $\Phi \in \mathscr{B}^*$ tal que $\Phi(m) = \varphi(m)$ para toda $m \in \mathcal{M}$ y $||\Phi|| = ||\varphi||$.*

Un corolario inmediato del resultado anterior es que dado $x \in \mathscr{B}$, con $\mathscr{B}$ un espacio de Banach, entonces existe un $\varphi \in \mathscr{B}^*$ tal que $\varphi(x) = ||x||$.

Teorema 1.1.4 (Banach)**.** *Todo espacio de Banach $\mathscr{B}$ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C(X)$ para algún espacio de Hausdorff X.*

1.1.3 Espacios cocientes

Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach y $\mathscr{M}$ un subespacio cerrado de $\mathscr{B}$. Sea $\mathscr{B}/\mathscr{M}$ el espacio lineal de las clases de equivalencia $\{\overline{f} : f \in \mathscr{B}\}$, donde $\overline{f} = \{f + g : g \in \mathscr{M}\}$, se puede definir una norma en $\mathscr{B}/\mathscr{M}$ definido por:

$$||\overline{f}|| = \inf_{g \in \mathscr{M}} ||f + g|| = \inf_{h \in \overline{f}} ||h||. \tag{1.5}$$

Si $\{\overline{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{B}/\mathcal{M}$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$||\overline{f}_{n_{k+1}} - \overline{f}_{n_k}|| < 1/2^k,$$

si escogemos $h \in \overline{f_{n_{k+1}} - f_{n_k}}$, tal que $||h|| < 1/2^k$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ||h_k|| < 1$ y por la proposición 1.1.2 existe $h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$. De la siguiente ecuación

$$\overline{f_{n_k} - f_{n_1}} = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{f_{n_{i+1}} - f_{n_i}} = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{h_i},$$

se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{f_{n_k} - f_{n_1}} = \overline{h}$ y entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{f_{n_k}} = \overline{h + f_{n_1}}$, luego $\mathscr{B}/\mathcal{M}$ es un espacio de Banach. Sea $\pi : \mathscr{B} \to \mathscr{B}/\mathcal{M}$ la proyección canónica, entonces π es una función abierta y es una contracción.

Definición 1.1.6. *Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach. Una transformación lineal $T : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ se dice que es acotada si*

$$||T|| = \sup_{x\in\mathscr{B}_1} \frac{||Tx||_{\mathscr{B}_1}}{||y||_{\mathscr{B}_2}} < \infty.$$

El espacio de todas las transformaciones lineales y acotadas de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es denotado por $\mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, si $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$, entonces escribimos $\mathcal{B}(\mathscr{B}_1)$ en lugar de $\mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1)$. Al igual que el espacio dual de un espacio de Banach tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.1.5. *Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, entonces $\mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es un espacio de Banach con norma igual a norma del operador.*

Teorema 1.1.5 (Teorema de la función inversa)**.** *Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es biyectivo, entonces T^{-1} existe y es acotado.*

Un resultado importante del Teorema de la función inversa 1.1.5, es el teorema del mapeo abierto.

Teorema 1.1.6 (Teorema del mapeo abierto)**.** *Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ sobreyectivo, entonces T es un operador abierto.*

Demostración. Como el operador T es continuo se tiene que su núcleo $\ker T$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{B}_1$, deseamos definir una transformación S del espacio $\mathscr{B}_1/\ker T$ al espacio $\mathscr{B}_2$ de tal forma que el siguiente diagrama conmute, es decir $S(\overline{f}) = Tg$ para $\overline{f} \in \mathscr{B}_1/\ker T$ y $g \in \overline{f}$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{B}_1/\ker T \arrow[dd, dashed, "S"] \\
\ker T \arrow[r] & \mathscr{B}_1 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "T"'] & \\
 & & \mathscr{B}_2
\end{tikzcd}$$

Si $g_1, g_2 \in \overline{f}$, entonces $g_1 - g_2 \in \ker T$, luego $Tg_1 = Tg_2$ y por lo tanto S es bien definido. Claramente S es lineal y la desigualdad:

$$||S(\overline{f})|| = \inf_{g\in\overline{f}} ||Tg|| \leqslant ||T|| \inf_{g\in\overline{f}} ||g|| \leqslant ||T||\, ||\overline{f}|| \tag{1.6}$$

la cual se tiene para $\overline{f} \in \mathscr{B}/\ker T$ muestra que S es acotado. Más aún, si $S(\overline{f}) = 0$, entonces $Tf = 0$, lo cual implica que $f \in \ker T$ y $\overline{f} = \overline{0}$, de donde S es inyectiva. Finalmente S es sobre, ya que, T lo es y por el teorema de la función inversa 1.1.5 S es un mapeo abierto. Ya que el morfismo natural π es abierto y $T = S \circ \pi$, luego T es abierto. $\square$

1.1.4 Subespacios

Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach, todo conjunto de $\mathscr{B}$ tal que cualesquiera dos de sus elementos implica que cualquier combinación lineal de estos también esta en este subconjunto, es llamado una **variedad lineal**. Decimos que una variedad lineal $\mathcal{L}$ es un **subespacio** de $\mathscr{B}$ si es cerrado. Dados dos subespacios $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ de $\mathscr{B}$, los cuales solo se intersectan en el origen el conjunto de todos los elementos x de $\mathscr{B}$ que se pueden escribir de la forma $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \mathcal{L}_1$ y $x_2 \in \mathcal{L}_2$ es llamado la **suma directa** de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, y es denotado como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$. Es claro que la suma directa de dos subespacios es una variedad lineal, pero no necesariamente es un subespacio (es decir, puede no ser cerrado).

Lema 1.1.3. *[6, Cap. 2,Teorema 1.1] Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach y $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ dos subespacios de $\mathscr{B}$ que solo se intersectan en el origen. Entonces la suma directa $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$ es un subespacio de $\mathscr{B}$ si y sólo si existe una constante $k > 0$ tal que*

$$||x_1 + x_2|| \geq k(||x_1|| + ||x_2||) \quad (x_1 \in \mathcal{L}_1,\, x_2 \in \mathcal{L}_2).$$

Sea $\mathcal{L}$ un subespacio de $\mathscr{B}$ un espacio de Banach. Un subespacio $\mathcal{N}$ de $\mathscr{B}$ es llamado **complemento directo** de $\mathcal{L}$ en $\mathscr{B}$ si $\mathscr{B} = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{N}$. En general el complemento directo de un subespacio $\mathcal{L}$ de un espacio de Banach $\mathscr{B}$ no es único, esto sólo pasa cuando $\mathscr{B} = \mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y en este caso nosotros escribimos $\mathscr{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{N}$ guardando el símbolo $\oplus$ para el caso de espacios de Hilbert.

Sea $\mathcal{L}$ un subespacio de $\mathscr{B}$ un espacio de Banach. La dimensión del espacio cociente $\mathscr{B}/\mathcal{L}$ es llamada **codimensión** del subespacio $\mathcal{L}$. La codimensión de $\mathcal{L}$ es denotado por $\operatorname{codim} \mathcal{L} := \dim \mathscr{B}/\mathcal{L}$.

Teorema 1.1.7. *[6, Cap. 2, Teorema 2.2] Sea $\mathcal{L}$ un subespacio de un espacio de Banach $\mathscr{B}$ con $\dim \mathcal{L} < \infty$, entonces $\mathcal{L}$ tiene un complemento en $\mathscr{B}$ y además la dimensión del complemento coincide con la codimensión de $\mathcal{L}$ en $\mathscr{B}$.*

1.2 Álgebras de Banach

Una **álgebra** sobre el campo $\mathbb{F}$ es un espacio lineal $\mathscr{A}$ sobre $\mathbb{F}$ junto con una operación bilineal

$$\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

llamada multiplicación, la cual satisface la ley asociativa

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{para todos } a,\, b, c \in \mathscr{A}.$$

Álgebras sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) serán referidas como álgebras complejas. Una norma $||\cdot||$ en $\mathscr{A}$ se dice que es **submultiplicativa** si

$$||ab|| \leq ||a||\,||b|| \quad (a,\, b \in \mathscr{A}).$$

Si un espacio de Banach $\mathscr{B}$ satisface

AB1. $\forall x, y \in \mathscr{B} \quad ||xy|| \leqslant ||x||\,||y||$,

AB2. $\exists\, e \in \mathscr{B}$ tal que $\forall x \in \mathscr{B} \quad xe = ex = x$ (elemento neutro),

AB3. $||e|| = 1$.

entonces decimos que el espacio de Banach $\mathscr{B}$ es un **Álgebra de Banach**. Es importante recalcar que la operación multiplicación en $\mathscr{B}$ no es necesariamente conmutativa, es decir $xy = yx\,\forall x, y \in \mathscr{B}$, y que bajo estas condiciones el elemento neutro de $\mathscr{B}$ es único.

A veces en ciertos textos es omitido en la definición de álgebra de Banach la existencia del elemento neutro ver [25] pág. 246.

La propiedad $AB1$ hace de la multiplicación una operación continua en $\mathscr{B}$, esto es $x_n \to x$ y $y_n \to y$ implica $x_n y_n \to xy$, esto se sigue de la identidad

$$x_n y_n = (x_n - x)y_n + x(y_n - y). \tag{1.7}$$

En particular la multiplicación es continua por la izquierda y continua por la derecha:

$$x_n y \to xy \text{ y } xy_n \to xy \quad \text{cuando} \quad x_n \to x \text{ y } y_n \to y.$$

Una **subálgebra** de $\mathscr{A}$ es un subespacio $\mathscr{B}$ tal que $b, b' \in \mathscr{B} \implies bb' \in \mathscr{B}$. Tomando la multiplicación en $\mathscr{B}$ como la restricción de la multiplicación de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ es en sí mismo un álgebra. Si $(\mathscr{B}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subálgebras de una álgebra $\mathscr{A}$, entonces $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$ es también una subálgebra de $\mathscr{A}$. Por lo que dado S un subconjunto de $\mathscr{A}$, hay una subálgebra $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ más pequeña tal que contiene a S. Esta álgebra es llamada **la subálgebra de $\mathscr{A}$ generada por S.** En el caso en el que $S = \{a\}$, entonces $\mathscr{B}$ consiste de el espacio generado por todas las potencias positivas de a.

Definición 1.2.1. *Dada una álgebra no conmutativa $\mathscr{A}$, el conjunto*

$$Cen\,\mathscr{A} := \{c \in \mathscr{A} : ca = ac\, para\ todo\ a \in \mathscr{A}\},$$

*forma una subálgebra de $\mathscr{A}$, llamada el **centro de $\mathscr{A}$.***

Dado un subespacio lineal $\mathscr{I}$ de un álgebra $\mathscr{A}$ es llamado un **ideal izquierdo** (resp. derecho) de $\mathscr{A}$ si

$$aj \in \mathscr{I}\,(\text{respectivamente } ja \in \mathscr{I})\,\text{para todo } a \in \mathscr{A} \text{ y} j \in \mathscr{I}.$$

Un **ideal** en $\mathscr{A}$ es un subespacio vectorial que es simultáneamente un ideal izquierdo y derecho de $\mathscr{A}$. El álgebra $\mathscr{A}$ y $\{0\}$ son claramente ideales de $\mathscr{A}$, los cuales se llaman **ideales triviales**. Un ideal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$ se dice propio si $\mathscr{I} \neq \mathscr{A}$. Un **ideal maximal** es un ideal propio de $\mathscr{A}$ que no es contenido en ningún otro ideal de $\mathscr{A}$, los ideales maximales izquierdos y derechos son definidos de manera análoga.

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos álgebras, un **homomorfismo** o simplemente morfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ es un mapeo lineal $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in \mathscr{A}$, es bien sabido que dado un morfismo se tiene su núcleo

$$\ker \varphi := \{a \in \mathscr{A} : \varphi(a) = 0\},$$

es un ideal de $\mathscr{A}$, mientras que su imagen

$$Im\, \varphi = \varphi(\mathscr{A}) := \{b \in \mathscr{B} : \exists\, a \in \mathscr{A} \text{ tal que } \varphi(a) = b\},$$

es una subálgebra de $\mathscr{B}$.
Dado un álgebra $\mathscr{A}$ y un ideal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$, el cociente $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ es definido como el conjunto de las clases $a + \mathscr{I}$ de elementos $a \in \mathscr{A}$, hay una estructura lineal en $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ el cual hace de este cociente un espacio de Banach (ver sección 1.1.3), más aún, definiendo la multiplicación $(a+\mathscr{I})(b+\mathscr{I}) := ab+\mathscr{I}$ el cociente se convierte en un álgebra, llamada el **álgebra cociente** de $\mathscr{A}$ por $\mathscr{I}$.

1.2.1 Teoría espectral

Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con unidad e sobre el campo $\mathbb{F}$, un elemento $a \in \mathscr{A}$ es invertible por la izquierda (resp. por la derecha) si existe un elemento $b \in \mathscr{A}$ tal que $ba = e$ (resp. $ab = e$), decimos que un elemento $a \in \mathscr{A}$ es **invertible** si es invertible por la izquierda y por la derecha al mismo tiempo, en dado caso que el elemento a sea invertible por la izquierda (resp. por la derecha) pero no sea invertible, entonces decimos que el elemento es **invertible unilateralmente.** Es sabido que dado un elemento a invertible lateralmente en un álgebra $\mathscr{A}$ este contiene infinitos inversos laterales (ver, [6] pág. 63), mientras que si el elemento es invertible en el álgebra $\mathscr{A}$, entonces su inversa es única, más aún si el álgebra $\mathscr{A}$ es abeliana entonces un elemento a invertible unilateralmente es equivalente a que es invertible, mientras que esto no necesariamente pasa en álgebras no conmutativas.

Definición 1.2.2. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, denotamos al conjunto de todos los elementos invertibles de $\mathscr{A}$ por $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$, y sean $\mathscr{G}_{\mathscr{A}_r}$ y $\mathscr{G}_{\mathscr{A}_l}$ los conjuntos de los elementos de $\mathscr{A}$ que son invertibles a la derecha y a la izquierda en $\mathscr{A}$, respectivamente.*

Los conjuntos $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}\, \mathscr{G}_{\mathscr{A}_l}$ y $\mathscr{G}_{\mathscr{A}_r}$ son todos grupos respecto a la multiplicación heredada de $\mathscr{A}$.

Nuestro estudio se basa en la obtención de criterios para saber cuando un elemento de un álgebra de Banach es invertible y si es posible saber cual es la forma de su inverso. El siguiente resultado es un excelente criterio.

Teorema 1.2.1 (Series de Neuman)**.** *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

(i) Si $a \in \mathscr{A}$ y $||a|| < 1$, entonces $e - a \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ y $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

(ii) Si $a \in \mathscr{A}$ y $||e - a|| < 1$, entonces $a \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ y $||a^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1 - ||1-a||}$.

(iii) *Si* $a \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ *y* $b \in \mathscr{A}$ *con* $||b|| < \dfrac{1}{||a^{-1}||}$*, entonces* $a - b \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$*, más aún*

$$||(a-b)^{-1}|| \leq \frac{||a^{-1}||}{1 - ||a^{-1}|| \, ||b||} \tag{1.8}$$

y

$$||(a-b)^{-1} - a^{-1}|| \leq \frac{||a^{-1}||^2 \, ||b||}{1 - ||a^{-1}|| \, ||b||}. \tag{1.9}$$

Demostración. Sólo se probará (i), pues demostraciones de (ii) y (iii) son análogas. Ya que $\sum_{n=0}^{\infty} ||a^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||a||^n = (1 - ||a||)^{-1} < \infty$ la proposición 1.1.2 garantiza que $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge a un $b \in \mathscr{A}$, y ya que $(e-a)(e + \cdots + a^n) = e - a^{n+1}$ converge a $(e-a)b = b(e-a)$ y a e cuando $n \to \infty$, el elemento b es el inverso de $e - a$. □

La propiedad (iii) es conocido como la propiedad de **Perturbación pequeña**, pues garantiza que dado un elemento invertible (resp. invertible lateralmente) bajo cierta perturbación seguirá siendo invertible (resp. invertible lateralmente), lo cual es descrito en el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1. *Si* $\mathscr{A}$ *es un álgebra de Banach, entonces* $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{G}_{\mathscr{A}_l}$ *y* $\mathscr{G}_{\mathscr{A}_r}$ *son conjuntos abiertos de* $\mathscr{A}$*.*

Otro corolario del teorema 1.2.1 es

Corolario 1.2.2. *[20, Corolario 2.8.] Sea* $\mathscr{A}$ *un álgebra de Banach, entonces el mapeo* $x \mapsto x^{-1}$ *es un automorfismo de* $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$*.*

Definición 1.2.3. *Sea* $\mathscr{A}$ *un álgebra de Banach y* $a \in \mathscr{A}$*, el* ***resolvente*** *de* a *en* $\mathscr{A}$ *es el conjunto*

$$\rho_{\mathscr{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}\}.$$

Su complemento en el plano complejo denotado por $\sigma_{\mathscr{A}}(a) = \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathscr{A}}(a)$ es llamado el espectro de a en $\mathscr{A}$. En dado caso que no halla duda en el álgebra en el cuál se calcule el espectro escribiremos $\rho(a)$ y $\sigma(a)$ en lugar de $\rho_{\mathscr{A}}(a)$ y $\sigma_{\mathscr{A}}(a)$, respectivamente. Si $a, b \in \mathscr{A}$, entonces usando el echo que dados a, $b \in \mathscr{A}$ la invertibilidad del elemento $e - ab$ es equivalente a la invertibilidad del elemento $e - ba$ (ver [18, Lema 1.2.1]) se tiene que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$.
El siguiente resultado lo podemos considerar como el Teorema fundamental de las álgebras de Banach.

Teorema 1.2.2 (Gelfand)**.** *Sea* a *un elemento de un álgebra de Banach* $\mathscr{A}$*, entonces el espectro de* a $\sigma(a)$ *es un subconjunto compacto no vacío de* $\mathbb{C}$*.*

Para la demostración del Teorema anterior se pueden consultar [20], [13] y [18]. Una consecuencia del hecho de que el espectro de un elemento no es vacío es el siguiente Corolario.

Corolario 1.2.3 (Teorema de Gelfand-Mazur). *[18, Corolario 1.2.11] Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, en el cual todo elemento distinto de cero es invertible, entonces $\mathscr{A}$ es isomorfo al campo $\mathbb{C}$.*

Sea $\mathscr{A}$ un álgebra sobre el campo $\mathbb{F}$ y sea $a \in \mathscr{A}$, entonces el número

$$r_{\mathscr{A}}(a) := \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)\}, \tag{1.10}$$

es llamado el **radio espectral** de a. Si el álgebra de Banach es evidente, entonces solo escribimos $r(a)$ en lugar de $r_{\mathscr{A}}(a)$. Así, $r(a)$ es el radio del disco centrado en el origen más pequeño que contiene el espectro de a. Del Teorema 1.2.2 se sigue que

$$r(a) \leq ||a|| \text{ para todo } a \in \mathscr{A}. \tag{1.11}$$

Más aún el radio espectral de un elemento se puede calcular mediante la siguiente fórmula.

Teorema 1.2.3 (Beurling). *[13, Teorema 1.2.7] Si a es un elemento de una álgebra de Banach $\mathscr{A}$, entonces:*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} (||a^n||)^{\frac{1}{n}}. \tag{1.12}$$

Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, un morfismo complejo de $\mathscr{A}$ es un morfismo entre $\mathscr{A}$ y $\mathbb{C}$. Denotamos por $\Delta = \Delta_{\mathscr{A}}$ el conjunto de todos los morfismos complejos de $\mathscr{A}$.

Teorema 1.2.4. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach conmutativa.*

(i) Si $\varphi \in \Delta$, entonces $||\varphi|| = 1$.

(ii) El conjunto Δ es no vacío, y el mapeo $\varphi \mapsto \ker \varphi$ define un biyección entre Δ y el conjunto de todos los ideales maximales de $\mathscr{A}$.

(iii) Δ es un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Llamamos a $\Delta = \Delta_{\mathscr{A}}$ el **espacio de ideales maximales** de $\mathscr{A}$.

Definición 1.2.4. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, la **Transformada de Gelfand de a** es la función $\Gamma : \mathscr{A} \to C(\Delta)$ dada por $\Gamma(a) = \hat{a}|_{\Delta}$, esto es, $\Gamma(a)(\varphi) = \hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$, para $\varphi \in \Delta$.*

Es claro que la transformada de Gelfand es un morfismo entre $\mathscr{A}$ y Δ, es decir $\Gamma(ab)(\varphi) = \Gamma(a)(\varphi)\Gamma(b)(\varphi)$ y que $||\Gamma(a)||_\infty \leq ||a||$. Es de nuestro interés la transformada de Gelfand debido a que es posible saber la invertibilidad de un elemento a de un álgebra de Banach $\mathscr{A}$ conmutativa vía la invertibilidad de su transformada $\hat{a}$ en $C(\Delta)$.

Teorema 1.2.5 (Gelfand). *[20, Teorema 2.35.] Sea $\mathscr{A}$ una álgebra de Banach conmutativa , Δ el espacio de ideales maximales de $\mathscr{A}$, y $\Gamma : \mathscr{A} \to C(\Delta)$ la transformada de Gelfand, entonces:*

(1) Δ no es vacío;

(2) Γ *es un morfismo algebraico;*

(3) $||\Gamma a||_\infty \leq ||a||$ *para* a *en* $\mathscr{A}$*; y*

(4) a *es invertible en* $\mathscr{A}$ *si y sólo si* $\Gamma(a)$ *es invertible en* $C(\Delta)$*.*

Unos resultados que son obtenidos del teorema anterior son:

Corolario 1.2.4. *[20, Corolario 2.36.] Si* $\mathscr{A}$ *es un espacio de Banach, entonces* $\sigma(a) = rank\,\Gamma a$ *y* $r(a) = ||\Gamma a||_\infty$*.*

Dada un función entera con coeficientes complejos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ es posible extender la función $f(z)$ de tal manera que ahora actúe sobre $\mathscr{A}$, es decir, dado $a \in \mathscr{A}$, entonces $f(a)$ denota al elemento $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a^n \in \mathscr{A}$.

Teorema 1.2.6 (Teorema del Mapeo Espectral)**.** *Sea* $\mathscr{A}$ *una álgebra de Banach,* $a \in \mathscr{A}$ *y* f *una función entera en* $\mathbb{C}$*, entonces:*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Un resultado que será necesario en capítulos futuros y como consecuencia del Teorema del Mapeo Espectral es el siguiente

Corolario 1.2.5. *Sea* $\mathscr{A}$ *un álgebra de Banach conmutativa, entonces la transformada de Gelfand es una isometría sí y sólo si* $||a^2|| = ||a||^2$ *para todo* $a \in \mathscr{A}$*.*

1.3 Operadores de Fredholm

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, donde m y n son números naturales fijos, entonces del álgebra lineal tenemos que

Proposición 1.3.1. *La ecuación* $Ax = y$ $(x \in \mathbb{C}^m,\ y \in \mathbb{C}^n)$ *es soluble si y sólo si* $f(y) = 0$ *para toda solución* $f \in (\mathbb{C}^n)^*$ *de la ecuación homogénea adjunta* $A^* f = 0$*.*

En el caso de espacios de Banach de dimensión infinita $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, la condición $f(y) = 0$ con $f \in \ker A^*$ y $y \in \mathscr{B}_2$ es para el operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ una condición necesaria para la solvencia de la ecuación $Ax = y$. Decimos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es **normalmente soluble** si la ecuación $Ax = y$ $(x \in \mathscr{B}_1,\ y \in \mathscr{B}_2)$ es soluble si y sólo si la condición $f(y) = 0$ se satisface para cada funcional $f \in \ker A^*$. Dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ denotamos por $\mathbf{A}$ el operador que mapea el espacio cociente $\mathscr{B}_1/\ker A$ sobre el subespacio $\overline{im\,A}$ definido por $\mathbf{A}\mathbf{x} = Ax$, donde $\mathbf{x}$ denota la clase residual de x en $\mathscr{B}_1/\ker A$.

Teorema 1.3.1. *[6, Cap. 4, Teo. 1.2.] Necesario y suficiente para que el operador* A *sea normalmente soluble es la invertibilidad del operador* $\mathbf{A}$*.*

1.3.1 Operadores compactos

Sea $K : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ entre espacios de Banach $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, decimos que K es **compacto** si $K((\mathscr{B}_1)_1)$ es relativamente compacto en $\mathscr{B}_2$, donde $(\mathscr{B}_1)_1$ es la bola unitaria en $\mathscr{B}_1$. Equivalentemente $K((\mathscr{B}_1)_1)$ es totalmente acotado. Otras formas equivalentes de saber si un operador es compacto vienen dados por el siguiente Teorema.

Teorema 1.3.2. *[13, Teorema 1.4.1.] Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach y $K \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K es compacto;*
2. *Para cada conjunto compacto S de $\mathscr{B}_1$, el conjunto $K(S)$ es relativamente compacto en $\mathscr{B}_2$;*
3. *Para cada sucesión (x_n) en $\mathscr{B}_1$, la sucesión $(K(x_n))$ admite una subsucesión que converge en $\mathscr{B}_2$.*

Dado dos espacios de Banach $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ denotamos por $\mathcal{K}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ el conjunto de todos los operadores compactos de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$. Es sabido que $\mathcal{K}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ y que $\mathcal{K}(\mathscr{B}) = \mathcal{B}(\mathscr{B})$ cuando $\mathscr{B}$ es un espacio de Banach de dimensión finita.

Definición 1.3.1. *Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Definimos el **operador adjunto** de T como el operador $T^* \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_2^*, \mathscr{B}_1^*)$ tal que*

$$T^* : \mathscr{B}_2^* \to \mathscr{B}_1^*, \quad \varphi \mapsto T^*(\varphi) = \varphi \circ T.$$

Si un operador K es compacto, entonces es sabido que su operador adjunto $K^* : \mathscr{B}_2^* \to \mathscr{B}_1^*$ también es un operador compacto. Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ entre espacios de Banach se dice que es **acotado por abajo** si existe una constante positiva δ tal que $||T(x)|| \geq \delta||x||\,(x \in \mathscr{B}_1)$. En el caso de que un operador T sea acotado por abajo se tiene que $T(\mathscr{B}_1)$ es necesariamente cerrado en $\mathscr{B}_2$. Es claro que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es acotado por abajo si y sólo si hay una sucesión de vectores unitarios $(x_n) \in \mathscr{B}_1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = 0$.

Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(\mathscr{B})$, entonces la sucesión de espacios $(\ker T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, es decir $\ker T^n \subset \ker T^{n+1}$. Si $\ker T^n \neq \ker T^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces decimos que T tiene la **propiedad del ascenso infinito** y escribimos $\operatorname{asc}(T) = +\infty$, en otro caso decimos que T tiene **ascenso finito** y definimos su ascenso como el menor número entero positivo tal que $\ker T^p = \ker T^{p+1}$. En este caso $\ker T^p = \ker T^n$ para toda $n \geq p$.
La sucesión de espacios $(T^n(\mathscr{B}_1))$ es una sucesión decreciente, es decir $T^{n+1}(\mathscr{B}_1) \subset T^n(\mathscr{B}_1)$. Decimos que T tiene la **propiedad del descenso infinito** si $T^n(\mathscr{B}_1) \neq T^{n+1}(\mathscr{B}_1)$ para todo n entero positivo y escribimos $\operatorname{desc}(T) = +\infty$, en otro caso decimos que T tiene **descenso finito** y definimos su descenso como el menor número entero positivo p tal que $T^{p+1}(\mathscr{B}_1) = T^p(\mathscr{B}_1)$. En este caso $T^p(\mathscr{B}_1) = T^n(\mathscr{B}_1)$ para toda $n \geq p$. De [13, Teorema 1.4.5-6.] tenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.3.3. *Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach, $K \in \mathcal{K}(\mathscr{B})$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

1. *El espacio* $\ker(K-\lambda I)$ *es de dimensión finita.*

2. *El espacio* $(K-\lambda I)(\mathscr{B})$ *es de codimensión finita en* $\mathscr{B}$.

3. $K-\lambda I$ *tiene finito ascenso y descenso.*

1.3.2 Operadores Límite

Dada una sucesión (A_n) de operadores en $\mathcal{B}(\mathscr{B})$ se dice que **convergen fuertemente** si la sucesión $(A_n x)$ converge en la norma de $\mathscr{B}$ para cada $x \in \mathscr{B}$. Así $Ax := \lim A_n x$ define un operador en $\mathscr{B}$ el cuál es llamado el **limite fuerte** de la sucesión (A_n), y es denotado como s-lim A_n. En estos casos podemos escribir $A_n \xrightarrow{s} A$.
En general dada una sucesión (A_n) que converge fuertemente no implica que la sucesión de operadores adjuntos (A_n^*) sea fuertemente convergente, por lo que en dado caso en el que ambas sucesiones(A_n) y (A_n^*) convergan fuertemente en los espacios $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}^*$, respectivamente, y diremos que la sucesión (A_n) converge **$*$-fuertemente**. En este caso tenemos que

$$\text{s-}\lim A_n^* = (\text{s-}\lim A_n)^*,$$

y escribimos $A_n \xrightarrow{s^*} A$.

Teorema 1.3.4 (Banach-Steinhaus)**.** *[17, Teorema 1.1.1] Si la sucesión* (A_n) *de operadores en* $\mathcal{B}(\mathscr{B})$ *converge fuertemente a un operador* A. *Entonces* $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B})$, *la sucesión* (A_n) *es uniformemente acotada y*

$$||A||_{\mathcal{B}(\mathscr{B})} \leq \liminf ||A_n||_{\mathcal{B}(\mathscr{B})}.$$

Dado un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathscr{B})$, decimos que es un conjunto de **operadores uniformemente invertibles** si los operadores en $\mathcal{M}$ son invertibles y si las normas de sus inversas son uniformemente acotadas.

Proposición 1.3.2. *[17, Proposición 1.1.2]*

(i) *Si* $A_n \xrightarrow{s} A$ *y* $B_n \xrightarrow{s} B$, *entonces* $A_n + B_n \xrightarrow{s} A + B$ *y* $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$.

(ii) *Si* $A_n \xrightarrow{s} A$ *y los operadores* A_n *son uniformemente invertibles, entonces* $A_n^{-1} A \xrightarrow{s} I$.

(iii) *Si* $A_n \xrightarrow{s^*} A$ *y los operadores* A_n *son uniformemente invertibles, entonces* A *es invertible y* $A_n^{-1} \xrightarrow{s^*} A^{-1}$.

La noción de compacidad y la de convergencia fuerte están relacionadas por medio del siguiente Teorema.

Teorema 1.3.5. *[17, Teorema 1.1.3] Sea* A_n, $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B})$, *entonces* $||A_n x - Ax||_{\mathscr{B}} \to 0$ *para toda* $x \in \mathscr{B}$ *si y sólo si* $||A_n K - AK||_{\mathcal{B}(\mathscr{B})} \to 0$ *para toda* $K \in \mathcal{K}(\mathscr{B})$.

Por lo que la convergencia fuerte de (A_n) a A considerados como operadores en $\mathscr{B}$ es equivalente a la convergencia fuerte de (A_n) a A considerado como un operador de multiplicación izquierda en $\mathcal{K}(\mathscr{B})$.

1.3.3 Operadores de Fredholm

Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach y sea $F \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Decimos que F es un operador de Fredholm si $\ker F$ es de dimensión finita y $F(\mathscr{B}_1)$ es de codimensión finita en $\mathscr{B}_2$. Sean $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ espacios de Banach, el conjunto de todos los operadores de Fredholm F que actúan de $\mathscr{B}_1$ en $\mathscr{B}_2$ es denotado por $\mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$

Definición 1.3.2. *Dado un operador de Fredholm F definimos el **índice de Fredholm** o solamente índice del operador F como*

$$\operatorname{ind}(F) = \dim \ker(F) - \dim \operatorname{Coker}(F). \tag{1.13}$$

Teorema 1.3.6. *[17, Teorema 1.1.5]*

(a) Sean $A \in \mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ y $K \in \mathcal{K}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, entonces $A + K \in \mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ y $\operatorname{ind}(A + K) = \operatorname{ind}(A)$.

(b) $\mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es abierto en el espacio $\mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ y la función $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) \to \mathbb{Z}$ es continua.

(c) $\mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es un semigrupo bajo la multiplicación, y la función ind es un morfismo de $\mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ en el grupo aditivo $\mathbb{Z}$.

(d) Si $A \in \mathcal{F}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, entonces $A^* \in \mathcal{F}(\mathscr{B}_2^*, \mathscr{B}_1^*)$, y $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$.

Teorema 1.3.7. *[6, Cap. 4, Teorema 6.2] Sea $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, entonces los siguientes son equivalentes:*

(a) El operador A es un operador de Fredholm.

(b) El operador A puede ser expresado en la forma $A = D + T$, donde D es un operador de Fredholm invertible lateralmente y T es un operador compacto.

(c) El operador A puede ser expresado en la forma $A = D + K$, donde D es un operador de Fredholm invertible lateralmente y K es un operador de dimensión finita.

Dado que todo operador en un espacio de dimensión finita es de Fredholm podemos enfocar nuestra atención solamente en los espacios de dimensión infinita.

Teorema 1.3.8 (Atkinson.)**.** *Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach de dimensión infinita y sea $u \in \mathcal{B}(\mathscr{B})$. Entonces u es de Fredholm si y sólo si $u + \mathcal{K}(\mathscr{B})$ es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{B}(\mathscr{B})/\mathcal{K}(\mathscr{B})$, el **álgebra de Calkin** de $\mathscr{B}$.*

Dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ decimos que este operador admite un regularizador si existe un operador $M \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1)$ tal que cualquiera de los operadores $MA - I$ y $AM - I$ es compacto. El operador M se dice que es un **regularizador** de A.

Teorema 1.3.9. *[6, Teorema 7.1-1'] Las siguientes afirmaciones respecto a un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ son equivalentes:*

1. *A es un operador de Fredholm.*

2. *A admite una regularización*

3. *Existen operadores M_1, $M_2 \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ tales que los operadores $M_1A - I$ y $AM_2 - I$ tienen rango finito.*

4. *Existen operadores M_1, $M_2 \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ tales que los operadores $M_1A - I$ y $AM_2 - I$ son compactos.*

Teorema 1.3.10. *Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach, $K \in \mathcal{K}(\mathscr{B})$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

1. *El operador $K - \lambda$ es un operador de Fredholm de índice cero.*

2. *Sea p el ascenso (finito) de $K - \lambda$, <entonces*

$$\mathscr{B} = \ker(K - \lambda I)^p \dot{+} (K - \lambda I)^p(\mathscr{B}).$$

3. *El operador $K - \lambda$ es inyectivo si y sólo si es sobreyectivo.*

El inciso 3 de este Teorema es conocido como la **alternativa de Fredholm**. Si $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ son espacios de Banach directamente complementarios, es decir, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \dot{+} \mathscr{B}_2$ y sean f y g mapeos lineales en los espacios $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, respectivamente. Denotamos por $f \dot{+} g$ el mapeo lineal en $\mathscr{B}$ dado por

$$(f \dot{+} g)(x_1 + x_2) = f(x_1) + g(x_2) \qquad (x_{1,2} \in \mathscr{B}_{1,2}).$$

Claramente $f \dot{+} g$ es invertible si y sólo si f y g son invertibles en los espacios $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, respectivamente.
Si $\mathscr{B}$ es un espacio de Banach y $h \in \mathcal{B}(\mathscr{B})$, entonces $\sigma_{\mathcal{B}(\mathscr{B})}(h) = \sigma(h)$. Si $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \dot{+} \mathscr{B}_2$ y $h = f \dot{+} g$ para $f \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1)$ y $g \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_2)$, entonces $\sigma(h) = \sigma(f) \cup \sigma(g)$.

Sea X un espacio vectorial y sea $p : X \to X$ un mapeo lineal, si $p^2 = p$, entonces decimos que p es un **idempotente**. En este caso se tiene que $\ker p = (I - p)(X)$ y por lo tanto $X = \ker p \dot{+} p(X)$. El reciproco también es cierto, es decir, si $X = Y \dot{+} Z$ donde Y y Z son subespacios de X, entonces existe un único idempotente P en X tal que $P(X) = Y$ y $\ker P = Z$, llamamos a este mapeo una **proyección** de X en Y a lo largo de Z. Es sabido que si $X = Y \dot{+} Z$ y P es una proyección de X en Y a lo largo de Z, entonces P es acotado.

1.3.4 Operadores $\mathcal{P}$-compactos

Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach y $\mathcal{P} = (P_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión acotada de $\mathcal{B}(\mathscr{B})$. Decimos que $\mathcal{P}$ es una **proyección aproximada creciente** si, para toda $m \in \mathbb{N}$ hay un $N(m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_n P_m = P_m P_n = P_m \quad \text{para toda } n \geq N(m), \tag{1.14}$$

y decimos que $\mathcal{P}$ es una **proyección aproximada decreciente** si, para toda $m \in \mathbb{N}$ hay un $N(m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_n P_m = P_m P_n = P_n \quad \text{para todo } n \geq N(m). \tag{1.15}$$

Si $\mathcal{P} = (P_n)$ es una proyección aproximada creciente, entonces la sucesión (Q_n) con $Q_n = I - P_n$ forma una proyección aproximada decreciente, la cual llamamos la **proyección aproximada asociada** a $\mathcal{P}$. Una proyección aproximada (creciente o decreciente) se dice que es propia si $P_n \neq 0$ y $P_n \neq I$ para toda n. Si $\mathcal{P}$ es una proyección aproximada creciente propia, entonces $||P_n|| \geq 1$ para toda n suficientemente grande, también es claro que, si $\mathcal{P}^* := (P_n^*)$es una proyección aproximada creciente (decreciente) en $\mathcal{B}(\mathscr{B}^*)$ cuando $\mathcal{P} = (P_n)$ es un proyección aproximada creciente (decreciente) en $\mathcal{B}(\mathscr{B})$. En lo que sigue las proyecciones aproximadas crecientes propias serán referidas solamente como **proyección aproximada**.

Definición 1.3.3. *Un operador $K \in \mathcal{K}(\mathscr{B})$ es $\mathcal{P}$-compacto si*

$$||KP_n - K|| \to 0 \quad y \quad ||P_n K - K|| \to 0 \quad \textit{cuando } n \to \infty$$

Por $\mathcal{K}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$ denotamos al conjunto de los operadores $\mathcal{P}$-compactos en $\mathscr{B}$ y por $\mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$ al conjunto de los operadores $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B})$ para los cuales AK y KA son $\mathcal{P}$-compactos cuando K es compacto.

Es inmediato de todo esto que todo operador en $\mathcal{P}$ es $\mathcal{P}$-compacto y ademas

$$\mathcal{K}(\mathscr{B}^*, \mathcal{P}^*) := \{K^* : K \in \mathcal{K}(\mathscr{B}, \mathcal{P})\}, \quad \mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P}) = \{A^* : A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P})\} \tag{1.16}$$

Sea $\mathscr{A}_1$ una subálgebra de un álgebra de Banach $\mathscr{A}$ con identidad, entonces decimos que $\mathscr{A}_1$ es **inversamente cerrada** en $\mathscr{A}$ si para todo elemento $a \in \mathscr{A}_1$ invertible en $\mathscr{A}$ se tiene que su inverso a^{-1} pertenece a $\mathscr{A}_1$. No siempre se tiene que $\mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$ es inversamente cerrado en $\mathcal{B}(\mathscr{B})$, esto solo pasa cuando la proyección aproximada es uniforme (Ver[17, Teorema 1.1.9]).

Definición 1.3.4. *Un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$ es llamado un operador $\mathcal{P}$-**Fredholm** si la clase $A + \mathcal{K}(E, \mathcal{P})$ es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P})/\mathcal{K}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$.*

La norma y el espectro de la clase $A + \mathcal{K}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$ en $\mathcal{B}(\mathscr{B}, \mathcal{P})/\mathcal{K}(\mathscr{B}, \mathcal{P})$ son llamados la **norma** cp**-esencial** y el **espectro** $\mathcal{P}$**-esencial**

Capítulo 2

Invertibilidad lateral de operadores discretos

2.1 Invertibilidad lateral de operadores

Criterios generales para el caso de la invertibilidad lateral de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ son dados por los siguientes teoremas.

Teorema 2.1.1. *[6, Teorema 5.1, Cap. 2] Necesario y suficiente para la invertibilidad izquierda de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es la validez de las siguientes condiciones:*

1. *El espacio lineal $\mathrm{im}\, A = A\mathscr{B}_1$ es cerrado y tiene un complemento directo en $\mathscr{B}_2$.*

2. $\ker A = \{0\}$.

Si estas condiciones se satisfacen y si el operador A_0^{-1} $(\in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2))$ es uno de los inversos izquierdos de A, entonces la forma general de los inversos izquierdos a A es dada por la fórmula $A_0^{-1}P$, donde P es una proyección arbitraria con la propiedad $\mathrm{im}\, P = \mathrm{im}\, A$.

Análogamente al teorema anterior tenemos el caso de la invertibilidad por la derecha.

Teorema 2.1.2. *[6, Teorema 5.2, Cap 2] Necesario y suficiente para la invertibilidad derecha del operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es la validez de las siguientes condiciones:*

1. *$\mathrm{im}\, A = \mathscr{B}_2$.*

2. *El subespacio $\ker A$ tiene complemento directo en $\mathscr{B}_1$.*

Si las condiciones anteriores se satisfacen y A_0^{-1} $(\in \mathcal{B}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}1))$ es uno de los inversos derechos de A, entonces la forma general de todos los operadores inversos por la derecha a A es dado por la fórmula PA_0^{-1}, donde P es cualquier proyección que satisface la condición $\ker\, P = \ker\, A$.

Como consecuencia de los teoremas anteriores tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1. *[6, Corolarios 5.1-2, Cap 2]*

1. *Si el operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es invertible por la izquierda, entonces*

$$\dim \operatorname{Coker} A = \dim \ker A^{-1}.$$

2. *Si el operador $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es invertible por la derecha, entonces*

$$\dim \ker A = \dim \operatorname{Coker} A^{-1}.$$

Dado $p \in [1, \infty]$ consideramos el espacio de Banach $l = l^p(\mathbb{Z})$ el cual consiste de todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ equipadas con la norma

$$||f||_{l^p} = \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^p\right)^{1/p} & \text{si} \quad p \in [1, \infty) \\ \\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

Sea $l^0 = l^0(\mathbb{Z})$ denota el subespacio de l^∞ que consiste de todas las funciones $f \in l^\infty$ tales que $\lim_{n\to\infty} |f(n)| = 0$.

Sea $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ y el operador de cambio de l^p en si mismo, denotado por V y definido por $(Vf)(n) = f(n+1)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, entonces $V^k \in \mathcal{B}(l^p)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$. Un operador de la forma

$$A = \sum_{n\in F} a_k V^k, \text{ para todo } a_k \in l^\infty \text{ y todo conjunto finito } F \subset \mathbb{Z},$$

es llamado un **operador discreto de banda**, mientras el límite uniforme de una sucesión de operadores discretos de banda en $\mathcal{B}(l^p)$ es llamado un **operador discreto de banda dominada**. Como en [16] denotamos por $\mathfrak{A}_p \subset \mathcal{B}(l^p)$ el álgebra de Banach de todos los operadores discretos de banda dominada actuando en el espacio l^p. Para $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ denotamos al espacio de Banach con unidad $\mathcal{W} = \mathcal{W}_p \subset \mathfrak{A}_p$ el cual consiste de todos los operadores discretos de banda dominada de la forma

$$A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k V^k \in \mathcal{B}(l^p), \text{ con } a_k \in l^\infty \text{ y } ||A||_{\mathcal{W}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ||a_k||_{l^\infty} < \infty. \tag{2.1}$$

Por analogía con el álgebra de Wiener de series de Fourier absolutamente convergentes, $\mathcal{W}$ es llamado el **álgebra de Wiener** de operadores discretos de banda dominada.

Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{B}(\mathscr{B}_1)$, de [10, Sección 1.3] consideramos la **norma inferior** de un operador A definido por

$$|A|_- = \inf\{||Ax||_{\mathscr{B}} : ||x||_{\mathscr{B}} = 1\}.$$

Es conocido que si el operador A es invertible por la izquierda (resp. por la derecha) en $\mathcal{B}$, entonces $|A|_+ > 0$ (resp. $|A^*|_+ > 0$), donde $A^* \in \mathcal{B}(\mathscr{B}^*)$ es el operador adjunto de A. La afirmación inversa es válida cuando $\mathscr{B}$ es un espacio de Hilbert (ver por ejemplo [11, Lema 2.33 y observación 2.34]) . La implicación inversa también es válida para operadores discretos de banda

$$A = \sum_{k\in F} a_k V^k \in \mathcal{B}(l^p), \tag{2.2}$$

con coeficiente $a_k \in l^\infty$, conjuntos finitos $F \subset \mathbb{Z}$, el operador de cambio V y $p \in [1, \infty]$. Ya que la representación matricial del operador $A = \sum_{k \in F} a_k V^k$ en la base estándar de l^∞ tiene solamente un número finito de diagonales distintas de cero se puede considerar como una matriz inclinada, y usando [1, Teorema 2.11] y [24] obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.3. *Sea F un conjunto finito de $\mathbb{Z}$ y sea $a_k \in l^\infty$ para toda $k \in F$. Para*

$$A = \sum_{k \in F} a_k V^k \qquad \textit{sea} \qquad A^\diamond = \sum_{k \in F} V^{-k} \overline{a_k}$$

el operador formal adjunto del operador A. Si $|A|_+ > 0$ (resp., $|A^\diamond|_+ > 0$) para el operador A en el espacio l^p para algún $p \in [1, \infty]$, entonces A es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en todos los espacios l^p con $p \in [1, \infty]$ y uno de sus inversos izquierdos (resp., derecjos) es dado por $A^L = (A^\diamond A)^{-1} A^\diamond$ (resp., $A^R = A^\diamond (A^\diamond A)^{-1}$).

Corolario 2.1.2. *Si un operador de banda A de la forma 2.1 con coeficientes en l^∞ es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) para algún $p \in [1, \infty]$, entonces A es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en todos los espacios l^p con $p \in [1, \infty]$.*

Es de nuestro interés estudiar la invertibilidad lateral de los operadores discretos de banda dominada $A \in \mathcal{W}_p$ y $A \in \mathfrak{A}_p$ con coeficientes en l^∞ en los espacios l^p para $p \in [1, \infty]$ ya que este es un estudio todavía abierto.

2.2 Resultados conocidos sobre operadores de Fredholm $A \in \mathfrak{A}_p$

Dado $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ y el espacio de Banach $l^p = l^p(\mathbb{Z})$, consideramos el álgebra de Wiener $\mathcal{W} = \mathcal{W}_p$ de operadores discretos de banda dominada de la forma 2.1 que actúan en el espacio l^p, y el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p \subset \mathcal{B}(l^p)$ de operadores discretos de banda dominada en l^p, el cuál es la clausura de $\mathcal{W}_p$.

Por [17][Teorema 2.5.2], el álgebra $\mathcal{W}_p$ y por lo tanto $\mathfrak{A}_p$ son inversamente cerradas en el álgebra de Banach $\mathcal{B}(l^p)$ para toda $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$. Si $p \in \{0\} \cup (1, \infty)$, entonces el álgebra $\mathfrak{A}_p$ contiene al ideal $\mathcal{K}(l^p)$ [17][Proposición2.1.7].

Dado $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$, sea $A \in \mathcal{B}(l^p)$ y sea $h = \{h_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ una sucesión que tiende a infinito. Por [16], el operador $A_h \in \mathcal{B}(l^p)$ es llamado el operador límite de A respecto a h si

$$\lim_{m \to \infty} ||(V^{h_m} A V^{-h_m} - A_h) \chi I||_{\mathcal{B}(l^p)} = 0$$

y

$$\lim_{m \to \infty} ||\chi (V^{h_m} A V^{-h_m} - A_h)||_{\mathcal{B}(l^p)} = 0$$

para toda función $\chi \in l^\infty$ de soporte finito. El conjunto $\sigma_{op}(A)$ de todos los operadores límite de A es llamado el espectro operador de A y este se puede representar de la siguiente forma

$$\sigma_{op}(A)) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A,)$$

donde $\sigma_+(A)$ y $\sigma_-(A)$ son los los conjuntos de todos los operadores límite de A, los cuales corresponden a sucesiones que tienden a $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente.

Proposición 2.2.1. *[16][Proposición 29] Sea $A \in \mathcal{W}$ y sea $h \subset \mathbb{Z}$ una sucesión que tiende al infinito, entonces existe una subsucesión g de h tal que el operador límite A_g existe con respecto a todos los espacios l^p con $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$. Este operador límite pertenece a $\mathcal{W}$ y $||A_g||_{\mathcal{W}} \leqslant ||A||_{\mathcal{W}}$.*

La proposición 2.2.1 sigue siendo válida para todos los operadores discretos de banda dominada $A \in \mathfrak{A}_p$ para $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$, en tal caso el operador A es llamado un operador abundante (ver [17][sección 2.1.6]). El siguiente teorema generaliza [16][Teorema 1] y [19][Teorema 2.4]

Teorema 2.2.1. *[22][Teorema 5.6] Sea $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ y sea $A \in \mathfrak{A}_p$, entonces A es un operador de Fredholm en el espacio l^p sí y sólo si todos sus operadores límites son invertibles en el espacio l^p. En tal caso sus inversas son uniformemente acotadas.*

Teorema 2.2.2. *[21][Teorema 3] Un operador $A \in \mathcal{W}$ es de Fredholm en uno de los espacios l^p sí y sólo si A es de Fredholm en todos los espacios l^p con $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$. En este caso el índice de Fredholm del operador A es el mismo en todos los espacios.*

Teorema 2.2.3. *[22][Teorema4.3] Sea $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$, entonces cualquier operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es n(d)-normal en el espacio l^p sí y sólo si A es de Fredholm en este espacio.*

Sean $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Z}_-$ los conjuntos de los enteros no negativos y negativos, respectivamente, P y Q las proyecciones de $l^p(\mathbb{Z})$ en $l^p(\mathbb{Z}_+)$ y $l^p(\mathbb{Z}_-)$ de $l^p(\mathbb{Z})$, respectivamente, donde $l^p(\mathbb{Z}_+)$ y $l^p(\mathbb{Z}_-)$ son identificados con los subespacios correspondientes de $l^p(\mathbb{Z})$.

Si A es un operador de banda dominada en l^p, donde $p \in \{0\} \cup (1, \infty)$, entonces cada uno de los operadores PAQ y QAP son compactos (son de rango finito si A es un operador de banda). Por lo tanto los operadores $A - (PAP + Q)(P + QAQ)$ y $A - (P + QAQ)(PAP + Q)$ también son compactos, y así probamos que un operador de banda dominada A es de Fredholm sí y sólo si los operadores $PAP + Q$ y $P + QAQ$ son de Fredholm, en este caso los números enteros

$$\operatorname{ind}_p^+ A := \operatorname{ind}_p(PAP + Q) \quad \text{y} \quad \operatorname{ind}_p^- A := \operatorname{ind}_p(P + QAQ)$$

son llamados el índice positivo y el índice negativo de A, los cuales son locales en $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente.

Claramente

$$\operatorname{ind}_p A = \operatorname{ind}_p^+ A + \operatorname{ind}_p^- A$$

para todo operador de Fredholm $A \in \mathfrak{A}_p$,

Teorema 2.2.4. *[19][Teorema 2.5] Sea $p \in (1, \infty)$ y sea A un operador de Fredholm de banda dominada en el espacio l^p*

(a) Para toda $B_\pm \in \sigma_\pm(A)$, $\quad \operatorname{ind}_p^\pm(B_\pm) = \operatorname{ind}_p^\pm$;

(b) todos los operadores en $\sigma_+ A$ tienen el mismo índice positivo, y todos los operadores en $\sigma_-(A)$ tienen el mismo índice negativo;

(c) para elecciones arbitrarias de los operadores $B_+ \in \sigma_+ A$ y $B_- \in \sigma_- A$,

$$\mathrm{ind}\,_p A = \mathrm{ind}\,_p^+(B_+) + \mathrm{ind}\,_p^-(B_-).$$

Este teorema sigue siendo válido para el caso de $p = 0$ (ver [19]).

Corolario 2.2.1. *[17][Proposiciones2.1.7-2.1.9] Sea $p \in \{0\}(1, \infty)$, entonces:*

(a) el álgebra $\mathfrak{A}_p$ contiene al ideal $\mathcal{K}(l^p)$;

(b) el álgebra $\mathfrak{A}_p$ es inversamente cerrada en $\mathcal{B}(l^p)$;

(c) el álgebra cociente $\mathfrak{A}_p/\mathcal{K}(l^p)$ es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(l^p)/\mathcal{K}(l^p)$.

Sea $\mathcal{B}$ una álgebra c^* con unidad, por [4][Sección4.7] y [7][Sección] un elemento $a \in \mathcal{B}$ se dice que invertible según Moore-Penrose si existe un elemento $b \in \mathcal{B}$ tal que

$$aba = a, \quad bab = b, \quad (ab)^* = ab, \quad (ba)^+ ba. \tag{2.3}$$

Si $a \in \mathcal{B}$ es invertible según Moore-Penrose, entonces existe un único elemento $b \in \mathcal{B}$ que satisface las condiciones anteriores (ver [4][Proposición4.20]). Si tal elemento $b \in \mathcal{B}$ existe, entonces es llamado el inverso de Moore-Penrose de a y es denotado por a^+.

Teorema 2.2.5. *[4][Teorema 4.21] Un elemento $a \in \mathcal{B}$ es invertible según Moore-Penrose sí y sólo si existe un número $d \geq 0$ tal que el espectro del elemento a^*a es contenido en el conjunto $\{0\} \cup [d^2, \infty)$.*

Así todo elemento $a \in \mathcal{B}$ invertible es ainvertible según Moore-Penrose, pero la implicación inversa no es cierta en general. Un inverso izquierdo (resp. derecho) $b \in \mathcal{B}$ de $a \in \mathcal{B}$ es el inverso de Moore-Pemrose de a si la proyección ab (resp. ba) es ortogonal. Si a^*a es invertible, entonces $b = (a^*a)^{-1}a^*$ es inverso de Moore-Penrose de a.

Un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es llamado normal mente soluble en el espacio de Hilbert H si el rango del operador A $\mathrm{Im}(A)$ es cerrado.

Teorema 2.2.6. *[4][Teorema 4.24] Un elemento $A \in \mathcal{B}(H)$ es invertible según Moore-Penrose sí y sólo si es normalmente soluble. En este caso $A^*A + P$ es invertible y $A^+ = (A^*A + P)-1A^*$, donde P es la proyección ortogonal de H en $\ker A$.*

Si un un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es autoadjunto y normalmente soluble en el espacio d e Hilbert H, entonces el inverso de Moore-Perose A^+ de A es dado por

$$A^+ = (A + P_{\ker A})^{-1} P_{Im\,A}, \tag{2.4}$$

donde $P_{\ker A}$ y $P_{\mathrm{Im}A} = I - P_{\ker A}$ son las proyecciones ortogonales de H en $\ker A$ y $\mathrm{Im}\ A$, respectivamente (ver [7][Ejemplo 2.17]) y $(A^+)^* = A^+$.

2.3 Operadores discretos de banda dominda

Sea $p \in (1, \infty)$ y sea $A \in \mathfrak{A}_p$. Si A es invertible por la izquierda (resp. derecha) en el espacio l^p, Entonces A es n-normal (resp., d-normal) en este espacio por los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2. Por lo tanto, por Teorema 2.2.3, el operador A es de fradholm en el espacio l^p, y por lo tanto los operadores $PAP + Q$ y $QAQ + P$ también son de Fredholm en el espacio l^p. Por el Teorema 2.2.4, podemos definir unívocamente los números

$$N_\pm := \mathrm{ind}_p^\pm(B_\pm) = \mathrm{ind}_p^\pm(A). \tag{2.5}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$, consideramos las proyecciones

$$P_n^\pm = \chi_n^\pm I \in \mathcal{B}(l^p), \tag{2.6}$$

donde χ_n^+ y χ_n^- son las funciones características de los conjuntos

$$\mathbb{Z}_n^+ = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq n\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}_n^- = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq -n\},$$

y los operadores

$$A_n^+ := P_n^+ A P_{n+N_+}^+, \quad A_n^- := P_n^- A P_{n-N_-}^-. \tag{2.7}$$

Teorema 2.3.1. *Si $p \in (1, \infty)$, un operador $A \in \mathfrak{A}_p$ invertible lateralmente en el espacio l^p, y los números $N_\pm$ dados por* (2.5)*, entonces existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ los operadores*

$$A_n^+ : P_{n+N_+}^+ l^p \to P_n^+ l^p \quad \textit{and} \quad A_n^- : P_{n-N_-}^- l^p \to P_n^- l^p, \tag{2.8}$$

definidas por (2.6) *y* (2.7) *son operadores de Fredholm de índice cero, y sus regularizadores $(A_n^\pm)^{(-1)}$ pertenecen al conjunto $P_{n\pm N_\pm}^\pm \mathfrak{A}_p P_n^\pm$, respectivamente.*

Demostración. Ya que $P = P_0^+$ y $Q = P_1^-$, podemos reescribir los operadores $PAP + Q$ y $QAQ + P$ en la forma

$$P_0^+ A P_0^+ + P_1^- \quad \text{and} \quad P_1^- A P_1^- + P_0^+, \tag{2.9}$$

respectivamente, y por lo tanto

$$N_+ = \mathrm{ind}_p(P_0^+ A P_0^+ + P_1^-) \quad \text{y} \quad N_- = \mathrm{ind}_p(P_1^- A P_1^- + P_0^+).$$

Como $P_{1-n}^\mp = I - P_n^\pm$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, respectivamente, es fácil ver que, para toda $n \in \mathbb{Z}$, los operadores

$$P_n^+ A P_n^+ + P_{1-n}^- \quad \text{y} \quad P_n^- A P_n^- + P_{1-n}^+$$

son de Fredholm en el espacio l^p junto con los operadores en (2.9), y

$$\mathrm{ind}_p(P_n^+ A P_n^+ + P_{1-n}^-) = N_+ \quad \text{y} \quad \mathrm{ind}_p(P_n^- A P_n^- + P_{1-n}^+) = N_-$$

por que los operadores $P_n^+ A P_n^+ + P_{1-n}^-$ tienen el mismo espectro operador $\sigma_+(A)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y los operadores $P_n^- A P_n^- + P_{1-n}^+$ tienen el mismo espectro operador $\sigma_-(A)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. En efecto, los operadores

$$K_n^+ := (P_n^+ A P_n^+ + P_{1-n}^-) - (P_0^+ A P_0^+ + P_1^-),$$
$$K_n^- := (P_n^- A P_n^- + P_{1-n}^+) - (P_1^- A P_1^- + P_0^+)$$

son compactos en el espacio l^p, y por lo tanto $(K_n^{\pm})_h = 0$ para toda sucesión $h = \{h_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tendiendo a $\pm\infty$, respectivamente, como $m \to \infty$ (ver [16, Proposition 7]).

Es suficiente probar el teorema para el operador A_n^+ (la prueba para el operador A_n^- es análoga). Más aún, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N_+ = 0$. En efecto, sea $N_+ \geq 0$. Aplicando entonces las igualdades

$$P_n^+ V^k P_{n+k}^+ = P_n^+ V^k = V^k P_{n+k}^+ \quad \text{para toda} \quad n, k \in \mathbb{Z}, \tag{2.10}$$

vemos que el operador

$$P_n^+ V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^- = P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-$$

actúa del espacio l^p en el espacio $(P_{n+N_+}^+ + P_{1-n}^-) l^p$ y es inyectiva. Por lo tanto, el operador $P_n^+ V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-$ es de Fredhoilmn y su índice es igual a $-N_+$. Aplicando la igualdad $P_n^+ V^{-N_+} = V^{-N_+} P_{n-N_+}^+$ (ver (2.10)),obtenemos que

$$\begin{aligned}(P_n^+ A P_n^+ + P_{1-n}^-)(P_n^+ V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-) &= P_n^+ A P_n^+ V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^- \\ &= P_n^+ A V^{-N_+} P_{n-N_+}^+ P_n^+ + P_{1-n}^- \\ &= P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-.\end{aligned}$$

Solo resta observar que el operador $P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+$ es invertible en el espacio $P_n^+ l^p$ en el espacio $P_{n+N_+}^+ l^p$, y que su inversa actua del espacio $P_{n+N_+}^+ l^p$ en el espacio $P_n^+ l^p$ es dado por

$$(P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+)^{-1} = P_n^+ V^{N_+} P_{n+N_+}^+. \tag{2.11}$$

Consecuentemente, de la igualdad

$$P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+ = (P_n^+ A P_{n+N_+}^+)(P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+) \tag{2.12}$$

obtenemos que el operador $A_n^+ = P_n^+ A P_{n+N_+}^+$ es de Fredholm en el espacio $P_{n+N_+}^+ l^p$ al espacio $P_n^+ l^p$ y tiene índice cero junto con el operador $P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+$.

El operador de Fredholm $P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-$ tiene índice cero y pertenece al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ de operadores de banda dominada. Entonces este operador es de la forma $W + K$, donde W es un operador invertible en el espacio l^p y K es un operador compacto en el espacio l^p (ver [6][p. 167]). Ya que $K \in \mathfrak{A}_p$ por el Corolario 2.2.1(a), concluimos que el operador W pertenece a $\mathfrak{A}_p$ también. Entonces, por Corolario 2.2.1(b), el operador W^{-1} también pertenece al álgebra $\mathfrak{A}_p$. Ya que W^{-1} es un regularizador del operador $P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-$, concluimos que todo regularizador $(P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-)^{(-1)}$ del operador $P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+ + P_{1-n}^-$ pertenece al álgebra $\mathfrak{A}_p$ y puede ser representado de la forma $P_n^+ D P_n^+ + P_{1-n}^- + K$, donde $D \in \mathfrak{A}_p$ y $K \in \mathcal{K}(l^p) \subset \mathfrak{A}_p$. Por lo tanto, existe un regularizador, el cual pertenece al álgebra $P_n^+ \mathfrak{A}_p P_n^+ + P_{1-n}^-$. Entonces el regularizador $(P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+)^{(-1)}$ del operador $P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+$ pertenecen al álgebra de Banach $P_n^+ \mathfrak{A}_p P_n^+$. Claramente el operador $(P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+)^{-1}$ dado por (2.11) pertenece al conjunto $P_n^+ \mathfrak{A}_p P_{n+N_+}^+$. Entonces, por (2.12), el regularizador $(P_n^+ A P_{n+N_+}^+)^{(-1)}$ del operador $P_n^+ A P_{n+N_+}^+$ dado por

$$(P_n^+ A P_{n+N_+}^+)^{(-1)} = (P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+)(P_n^+ A V^{-N_+} P_n^+)^{(-1)}$$

pertenece al conjunto $P^+_{n+N_+}\mathfrak{A}_p P^+_n$, el cual completa la prueba para $N_+ \geq 0$.

Si $N_+ < 0$, entonces de (2.10) el operador

$$P^+_n V^{-N_+} P^+_n + P^-_{1-n} = P^+_n V^{-N_+} P^+_{n-N_+} + P^-_{1-n}$$

actua del espacio l^p en el espacio l^p, y el kernel de este operador es $(I - P^+_{n-N_+} - P^-_{1-n})l^p$. Por lo tanto el operador $P^+_n V^{-N_+} P^+_n + P^-_{1-n}$ es nuevamente de Fredholm y su índice es igual a $-N_+$. Aplicando nuevamente (2.10), obtenemos

$$\begin{aligned}(P^+_n V^{-N_+} P^+_n + P^-_{1-n})(P^+_n A P^+_n + P^-_{1-n}) &= P^+_n V^{-N_+} P^+_n A P^+_n + P^-_{1-n} \\ &= P^+_n P^+_{n+N_-} V^{-N_+} A P^+_n + P^-_{1-n} \\ &= P^+_n V^{-N_+} A P^+_n + P^-_{1-n}.\end{aligned}$$

Así, el operador $P^+_n V^{-N_+} A P^+_n + P^-_{n-1}$ es de Fredholm en el espacio l^p, y su índice es igual a cero en este espacio. Por lo tanto, el operador $P^+_n V^{-N_+} A P^+_n$ es de Fredholm en el espacio $P^+_n l^p$, y su índice es igual a cero, lo cual implica las mismas propiedades para el operador $P^+_{n+N_+} V^{-N_+} A P^+_{n+N_+}$ en el espacio $P^p_{n+N_+} l^p$. Finalmente, por la invertibilidad del operador $P^+_{n+N_+} V^{-N_+} P^+_n : P^+_n l^p \to P^+_{n+N_+} l^p$ debido a (2.11), obtenemos por la igualdad

$$P^+_{n+N_+} V^{-N_+} A P^+_{n+N_+} = (P^+_{n+N_+} V^{-N_+} P^+_n)(P^+_n A P^+_{n+N_+}) \tag{2.13}$$

que el operador $P^+_n A P^+_{n+N_+} : P^+_{n+N_+} l^p \to P^+_n l^p$ también es de Fredholm para $N_+ < 0$ y su índice es cero.

Además de la igualdad (2.13) se tiene que cualquier regularizador $(P^+_n A P^+_{n+N_+})^{(-1)}$ del operador $P^+_n A P^+_{n+N_+}$ para $N_+ < 0$ tiene la forma

$$(P^+_n A P^+_{n+N_+})^{(-1)} = (P^+_{n+N_+} V^{-N_+} A P^+_{n+N_+})^{(-1)} (P^+_{n+N_+} V^{-N_+} P^+_n).$$

Consecuentemente, por analogía con el caso $N_+ \geq 0$, concluimos que el regularizador $(P^+_n A P^+_{n+N_+})^{(-1)}$ pertenece al conjunto $P^+_{n+N_+}\mathfrak{A}_p P^+_n$, lo cual completa la prueba. □

Consideremos el operador diagonal por bloques

$$A = \operatorname{diag}\{\dots, B, B, B, \dots\} \in \mathcal{W} \quad \text{con} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Este operador es auto adjunto e invertible en el espacio l^2, y sus índices $N_\pm$ dados por (2.5) iguales a cero. Por otro lado, para toda $n_0 \in \mathbb{N}$ existen números naturales $n_\pm > n_0$ tales que los operadores $A^+_{n_+}$ y $A^-_{n_-}$ no son invertibles en los espacios $P^+_{n_+} l^2$ y $P^-_{n_-} l^2$, respectivamente. Así, en contraste con Teorema 2.3.1, uno no puede esperar la invertibilidad de los operadores (2.8) para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande en lugar de su propiedad de ser Fredholm con índices cero.

Para $p \in (1, \infty)$ y operadores $A \in \mathcal{W}_p$ invertibles lateralmente, podemos especificar regularizadores para el operador $A^\pm_n$.

Teorema 2.3.2. *Si $p \in (1, \infty)$, un operador $A \in \mathcal{W}_p$ es invertible lateralmente en el espacio l^p, y los números $N_\pm$ son dados por (2.5), entonces para toda n los operadores $A_n^\pm$ dados por (2.8) son de Fredholm de indice cero, y sus regularizadores $(A_n^\pm)^{(-1)}$ son de la forma*

$$(A_n^+)^{(-1)} = \big(\hat{W}_n^+\big)^{-1} : \ P_n^+ l^p \to P_{n+N_+}^+ l^p,$$
$$(A_n^-)^{(-1)} = \big(\hat{W}_n^-\big)^{-1} : \ P_n^- l^p \to P_{n-N_-}^- l^p,$$

donde $\hat{W}_n^\pm$ son operadores invertibles en los espacios de Banach $\mathcal{B}(P_{n+N_\pm}^\pm l^p,\, P_n^\pm l^p)$, respectivamente, y posee las propiedades:

$$\hat{W}_n^\pm \in P_n^\pm \mathcal{W}_p P_{n+N_\pm}^\pm \quad y \quad \big(\hat{W}_n^\pm\big)^{-1} \in P_{n+N_\pm}^\pm \mathcal{W}_p P_n^\pm. \tag{2.15}$$

Demostración. Probaremos el teorema para A_n^+ (la prueba para A_n^- es análoga). Por el Teorema 2.3.1, para toda $n \in \mathbb{N}$ el operador A_n^+ es de Fredholm con índice cero y actúa del espacio $P_{n+N_+}^+ l^p$ al espacio $P_n^+ l^p$. Entonces $A_n^+ = W_n^+ + K_n^+$, donde el operador $W_n^+ : P_{n+N_+}^+ l^p \to P_n^+ l^p$ es invertible y el operador $K_n^+ : P_{n+N_+}^+ l^p \to P_n^+ l^p$ es compacto. Ya que $s - \lim_{n\to\infty} P_n^+ = 0$, y debido a [18, Lemma 1.4.7] se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m^+ K_n^+\|_{\mathcal{B}(P_{n+N_+}^+ l^p,\, P_n^+ l^p)} = \lim_{m\to\infty} \|K_n^+ P_{m+N_+}^+\|_{\mathcal{B}(P_{n+N_+}^+ l^p,\, P_n^+ l^p)} = 0.$$

Por lo tanto, existe un número $m > n$ tal que

$$\big\|(W_n^+)^{-1}\big\|_{\mathcal{B}(P_n^+ l^p,\, P_{n+N_+}^+ l^p)} \big\|K_n^+ - \hat{K}_n^+\big\|_{\mathcal{B}(P_{n+N_+}^+ l^p,\, P_n^+ l^p)} < 1 \tag{2.16}$$

para el operador compacto

$$\hat{K}_n^+ := \hat{K}_{n,m}^+ := (P_n^+ - P_m^+) K_n^+ (P_{n+N_+}^+ - P_{m+N_+}^+) \in \mathcal{B}(P_{n+N_+}^+ l^p,\, P_n^+ l^p).$$

Por (2.16), el operador $\hat{W}_n^+ := W_n^+ + (K_n^+ - \hat{K}_n^+) \in \mathcal{B}(P_{n+N_+}^+ l^p,\, P_n^+ l^p)$ es invertible junto con W_n^+, y $A_n^+ = \hat{W}_n^+ + \hat{K}_n^+$. Como $\hat{K}_n^+ \in P_n^+ \mathcal{W}_p P_{n+N_+}^+$, se sigue que $\hat{W}_n^+ \in P_n^+ \mathcal{W}_p P_{n+N_+}^+$ junto con $A_n^+ \in P_n^+ \mathcal{W}_p P_{n+N_+}^+$. Sólo resta probar la segunda propiedad en (2.15). Similarmente a (2.12),

$$\hat{W}_n^+ (P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n *^+) = P_n^+ \hat{W}_n^+ V^{-N_+} P_n^+, \tag{2.17}$$

donde el operador $P_{n+N_+}^+ V^{-N_+} P_n^+$ es invertible del espacio $P_n^+ l^p$ en el espacio $P_{n+N_+}^+ l^p$ debido a (2.11). Ya que $\hat{W}_n^+ \in P_n^+ \mathcal{W}_p P_{n+N_+}^+$ es invertible desde el espacio $P_{n+N_+}^+ l^p$ en el espacio $P_n^+ l^p$, concluimos de (2.17) que el operador $P_n^+ \hat{W}_n^+ V^{-N_+} P_n^+$ es invertible en el espacio $P_n^+ l^p$ y pertenece al álgebra de Banach $P_n^+ \mathcal{W}_p P_n^+$. Por lo tanto, se sigue de [17][Teorema 2.5.2] que el operador inverso $\big(P_n^+ \hat{W}_n^+ V^{-N_+} P_n^+\big)^{-1} \in \mathcal{B}(P_n^+ l^p)$ también pertenece al álgebra de Banach $P_n^+ \mathcal{W}_p P_n^+$, el cual implica junto con (2.17) que $\big(\hat{W}_n^+\big)^{-1} \in P_{n+N_+}^+ \mathcal{W}_p P_n^+$. Entonces

$$A_n^+ = \hat{W}_n^+ \big(I_{n+N_+}^+ + \big(\hat{W}_n^+\big)^{-1} \hat{K}_n^+\big), \quad A_n^+ = \big(I_n^+ + \hat{K}_n^+ \big(\hat{W}_n^+\big)^{-1}\big) \hat{W}_n^+,$$

donde $I_{n+N_+}^+$ y I_n^+ son los operadores identidad en los espacios $P_{n+N_+}^+ l^p$ y $P_n^+ l^p$, y los operadores compactos $\big(\hat{W}_n^+\big)^{-1} \hat{K}_n^+$ y $\hat{K}_n^+ \big(\hat{W}_n^+\big)^{-1}$ están en las álgebras de Banach $P_{n+N_+}^+ \mathcal{W}_p P_{n+N_+}^+$ y $P_n^+ \mathcal{W}_p P_n^+$, respectivamente. Esto significa que $(A_n^+)^{(-1)} := \big(\hat{W}_n^+\big)^{-1}$ es un regularizador obligatorio de A_n^+. $\square$

Dado $p \in [1, \infty]$, para todo operador $A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k V^k \in \mathcal{W}_p$, introducimos su operador formal adjunto $A^\diamond$ dado por

$$A^\diamond := \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-k}\overline{a_k} I \in \mathcal{W}_p. \tag{2.18}$$

Corolario 2.3.1. *Si un operador $A \in \mathcal{W}_p$ satisface $A = A^\diamond$ y es invertible lateralmente en el espacio l^p para algún $p \in (1, \infty)$, entonces A es invertible en el espacio l^p para toda $p \in [1, \infty]$, los números $N_\pm$ dados por (2.5) son iguales a cero, y para suficientemente grande $n \in \mathbb{N}$ los operadores*

$$A_n^+ = P_n^+ A P_n^+ \in \mathcal{B}(P_n^+ l^p) \quad y \quad A_n^- = P_n^- A P_n^- \in \mathcal{B}(P_n^- l^p)$$

son representados en la forma $A_n^\pm = \hat{W}_n^\pm + \hat{K}_n^\pm$, donde los operadores $\hat{W}_n^\pm$ son invertibles en los espacios $P_n^\pm l^p$, los operadores $\hat{K}_n^\pm$ son compactos en los espacios $P_n^\pm l^p$, y $\hat{W}_n^\pm, \left(\hat{W}_n^\pm\right)^{-1}, \hat{K}_n^\pm \in P_n^\pm \mathcal{W}_p P_n^\pm$, respectivamente.

Demostración. La primera afirmación es obvia, ya que $|A|_+ = |A^\diamond|_+ > 0$. Más aún, ya que $A \in \mathcal{W}_p$ es invertible en el espacio l^p, concluimos que su inversa A^{-1} pertenece a $\mathcal{W}_p$ también (ver, [17] [Teorema 2.5.2]), y por lo tanto el operador A es invertible en todos los espacios l^p con $p \in [1, \infty]$.

Como $A = A^\diamond$, es fácil ver que $N_\pm = 0$. En efecto $N_+ = \operatorname{ind}_p^+(P_0^+ A P_0^+ + P_1^-) = 0$ para $A = A^\diamond$, esto debido a la siguiente igualdad

$$P_0^+ A P_0^+ + P_1^- = P_0^+ A^\diamond P_0^+ + P_1^- = (P_0^+ A P_0^+ + P_1^-)^\diamond,$$

entonces $N_+ = \operatorname{ind}_p^+(P_0^+ A P_0^+ + P_1^-) = -\operatorname{ind}_p + (P_0^+ A P_0^+ + P_1^-) = -N_+$. Fijando $n \in \mathbb{N}$ y tomando A_n^+ (la prueba para A_n^- es análoga). Por el Teorema 2.3.2, $A_n^+ = \hat{W}_n^+ + \hat{K}_n^+$, donde el operador $\hat{W}_n^+$ es invertible en el espacio $P_n^+ l^p$ y pertenece junto con su inversa al álgebra de Banach $P_n^+ \mathcal{W}_p P_n^+$, de donde el operador compacto $\hat{K}_n^+$ pertenece a $P_n^+ \mathcal{W}_p P_n^+$ junto con A_n^+. □

El siguiente lema permite construir descomposiciones $A_n^\pm = W_n^\pm + K_n^\pm$ en términos de operadores invertibles $W_n^\pm$ y operadores compactos $K_n^\pm$ para los operadores autoadjuntos de Fredholm $A_n^\pm \in P_n^\pm \mathfrak{A}_2 P_n^\pm$ con índices cero.

Lema 2.3.1. *Si $A = A^*$ es un operador invertible lateralmente de $\mathfrak{A}_2$, $n \in \mathbb{N}$, y $A_n^\pm = P_n^\pm A P_n^\pm$, entonces $A_n^\pm = W_n^\pm + K_n^\pm$, donde los operadores $W_n^\pm := A_n^\pm + P_{\ker A_n^\pm}$ son invertibles en los espacios $P_n^\pm l^2$, $P_{\ker A_n^\pm}$ son proyecciones ortogonales de $P_n^+ l^2$ en $\ker A_n^\pm$, los operadores $K_n^\pm := P_{\ker A_n^\pm}$ son operadores con rango finito en los espacios $P_n^\pm l^2$, y $W_n^\pm, \left(W_n^\pm\right)^{-1}, K_n^\pm \in P_n^\pm \mathfrak{A}_2 P_n^\pm$.*

Demostración. Por el corolario 2.3.1 y el teorema 2.3.1, para toda $n \in \mathbb{N}$, el operador A_n^+ es de Fredholm de índice cero en el espacio $P_n^+ l^2$. Entonces

$$\dim \ker A_n^+ < \infty. \tag{2.19}$$

Usando que el operador de Fredholm $A_n^+ \in \mathcal{B}(P_n^+ l^2)$ es normalmente soluble, tenemos por el Teorema 2.3.1 y (2.4) que el operador $A_n^+ = (A_n^+)^*$ es Moore-Penrose invertible en el espacio $P_n^+ l^2$, y el inverso de Moore-Penrose es dado por

$$(A_n^+)^+ := (A_n^+ + P_{\ker A_n^+})^{-1}(I - P_{\ker A_n^+}),$$

donde el operador $A_n^+ + P_{\ker A_n^+}$ es invertible en el espacio $P_n^+ l^2$ y $P_{\ker A_n^+}$ es la proyección ortogonal de $P_n^+ l^2$ en $\ker A_n^+$ que pertenece al C^*-algebra generado por la unidad P_n^+ y el autoadjunto y normalmente soluble operador A_n^+. Por lo tanto, el inverso de Moore-Penrose de $(A_n^+)^+$ es un operador autoadjunto junto con A_n^+. Ya que A_n^+ y por lo tanto $P_{\ker A_n^+}$ pertenece al C^*-algebra $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$, y también el operador $W_n^+ = A_n^+ + P_{\ker A_n^+}$ pertenece al C^+- álgebra $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$.

Además, por (2.19), el operador $K_n^+ = -P_{\ker A_n^+}$ es un operador de rango finito. Por lo tanto $W_n^+ = A_n^+ - K_n^+$. Entonces el operador compacto K_n^+ pertenece al C^*-álgebra $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$ junto con W_n^+ y A_n^+. Como el operador W_n^+ es invertible en la C^*-álgebra $P_n^\pm \mathfrak{A}_2 P_n^\pm$, concluimos que $\left(W_n^+\right)^{-1} \in P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$ también.

La prueba para A_n^- es análoga. □

Aunque los operadores $A_n^\pm$ no son en general invertibles para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, incluso si $A \in \mathfrak{A}_2$ son autoadjuntas [ver (3.10)], la situación para los operadores positivos $A \in \mathfrak{A}_2$ es mucho mejor.

Teorema 2.3.3. *Si un operador positivo $A \in \mathfrak{A}_2$ es Fredholm en el espacio l^2, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, los operadores $A_n^\pm = P_n^\pm A P_n^\pm$ son invertibles en los espacios $P_n^\pm l^2$, respectivamente, y los operadores $A_n^\pm$ pertenecen con sus inversas a las C^*-álgebras $P_n^\pm \mathfrak{A}_2 P_n^\pm$, respectivamente.*

Demostración. Probamos para A_n^+ (la prueba para A_n^- es análoga). Ya que la condición de que el operador $A \in \mathfrak{A}_2$ sea de Fredholm en el espacio l^2 es equivalente a que los operadores $P_{1-n}^- + P_n^+ A P_n^+$ y $P_{1-n}^- A P_{1-n}^- + P_n^+$ lo sean, podemos concluir que el operador $A_n^+ = P_n^+ A P_n^+$ es de Fredholm en el espacio $P_n^+ l^2$. Como $A \geq 0$ vive en la C^*-álgebra $\mathcal{B}(l^2)$ existe un único operador positivo $B \in \mathcal{B}(l^2)$ tal que $B^2 = A$ (ver [13][Teorema 2.2.1]). Entonces el operador $A_n^+ = P_n^+ B^2 P_n^+$ también es posititvo, y por lo tanto hay un único operador positivo $B_n^+ \in \mathcal{B}(P_n^+ l^2)$ tal que $A_n^+ = (B_n^+)^2$, más aún, los operadores $A_n^+ \geq 0$ y $B_n^+ \geq 0$ pertenecen al C^*-álgebra con unidad $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$ con unidad $I_n^+ = P_n^+$. Ya que $A_n^+ = (B_n^+)^2$ es de Fredholm en el espacio $P_n^+ l^2$, se tiene que el operador B_n^+ lo es, y su ídices es igual a cero. En particular el operador B_n^+ es normalmente soluble. Sea $P_{\ker B_n^+}$ la proyección ortogonal del operador $P_n^+ l^2$ sobre $\ker B_n^+$, entonces se sigue del Teorema 2.2.6 que el operador $W_n^+ := (B_n^+)^2 + P_{\ker B_n^+}$ es invertible en el espacio $P_n^+ l^2$. Por la prueba del Teorema 2.2.5, la proyección $P_{\ker B_n^+}$es positiva y pertenece al C^+-álgebra $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$ junto con $A_n^+ = (B_n^+)^2$. Entonces el operador W_n^+ es un operador positivo e invertible en la C^+-álgebra $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$, y $A_n^+ = W_n^+ + K_n^+$, donde K_n^+ es un operador compacto en $P_n^+ l^2$ que pertenece a la C^*-álgebra $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$. Representando $W_n^+ \geq 0$ en la forma $W_n^+ = (C_n^+)^2$, donde $C_n^+ \geq 0$ es un operador invertible en $P_n^+ \mathfrak{A}_2 P_n^+$, obtenemos

$$A_n^+ = C_n^+ (I_n^+ + \tilde{K_n^+}) C_n^+, \qquad \tilde{K_n^+} := (C_n^+)^{-1} K_n^+ (C_n^+)^{-1} \in \mathcal{K}(P_n^+ l^2). \tag{2.20}$$

Simlarmente a la prueba del Teorema 2.3.2, escogemos números naturales suficientemente grandes $m > n$ para los cuales los operadores compactos

$$\hat{K^+_{n,m}} := (P^+_n - P^+_m)\tilde{K^+_n}(P^+_n - P^+_m), \quad \hat{K^+_m} := P^+_m\tilde{K^+_n}P^+_m,$$

$$K_{n,m} := P^+_m\tilde{K^+_n}(P^+_n - P^+_m), \quad K_{n,m} := (P^+_n - P^+_m)\tilde{K^+_n}P^+_m.$$

satisfacen $\hat{K}^+_{n,m} \geq 0$, $\hat{K}^+_m \geq 0$, $K_{n,m} = K^*_{n,m}$ y los operadores $I^+_m\hat{K}^+_m$ son invertibles en los espacios $P^+_m l^2$. Tomando $I^+_{n,m} = P^+_n - P^+_m$ y aplicando las representaciones matriciales

$$C^+_n = \begin{bmatrix} D & F \\ F^* & G \end{bmatrix}, \quad I^+_n + \tilde{K}^+_n = \begin{bmatrix} I^+_{n,m}\tilde{K}^+_{n,m} & K_{n,m} \\ K^*_{n,m} & I^+_m + \tilde{K}^+_m \end{bmatrix}$$

de los operadores C^+_n y $I^+_n + \tilde{K}^+_n$ en $P^+_n l^2 = (P^+_n - P^+_m)l^2 \oplus P^+_m l^2$, obtenemos que

$$A^+_n = \begin{bmatrix} D & F \\ F^* & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^+_{n,m}\tilde{K}^+_{n,m} & K_{n,m} \\ K^*_{n,m} & I^+_m + \tilde{K}^+_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & F \\ F^* & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & A^+_m \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

donde $D \geq 0$, $G \geq 0$, $I^+_{n,m}\tilde{K}^+_{n,m} \geq 0$, $I^+_m + \tilde{K}^+_m \geq 0$, y

$$A^+_m = F^*(I^+_{n,m}\tilde{K}^+_{n,m})F + GK^*_{n,m}F + F^*K_{n,m}G^* + G(I^+_m + \tilde{K}^+_m)G. \tag{2.22}$$

Ya que $F^*(I^+_{n,m}\tilde{K}^+_{n,m})F \geq 0$, el operador $G(I^+_m + \tilde{K}^+_m)G \geq 0$ es invertible y la norma del operador hermitiano $GK^*_{n,m}F + F^*K_{n,m}G^*$ tiende a cero cuando $m \to \infty$, concluimos que el operador A^+_m es invertible en el espacio $P^+_m l^2$ para toda $m > n$ suficientemente grande. Por último, el operador A^+_m es invertible y pertenece al C^*-álgebra $P^+_m\mathfrak{A}_2P^+_m$. $\square$

2.3.1 Criterios para la invertibilidad lateral de operadores discretos de banda dominada.

. Un espacio de Banach X es la suma directa de $X = X_1\dot{+}X_2\dot{+}X_3$ de sus subespacios X_1, X_2 and X_3, si todo elemento $x \in X$ se puede representar de manera única como $x = x_1+x_2+x_3$, donde $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ y $x_3 \in X_3$. Claramente, en este caso las intersecciones por parejas de esos subespacios consta solamente del elemento cero.

Dado$p \in (1, \infty)$, consideramos la siguiente representación de un operador discreto de banda dominada $A \in \mathfrak{A}_p$ como el operador matricial

$$A = \begin{bmatrix} P^-_n AP^-_{n-N_-} & P^-_n AP^0_{n-N_-,n+N_+} & P^-_n AP^+_{n+N_+} \\ P^0_n AP^-_{n-N_-} & P^0_n AP^0_{n-N_-,n+N_+} & P^0_n AP^+_{n+N_+} \\ P^+_n AP^-_{n-N_-} & P^+_n AP^0_{n-N_-,n+N_+} & P^+_n AP^+_{n+N_+} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

actuando del espacio $P^-_{n-N_-}l^p \dot{+} P^0_{n-N_-,n+N_+}l^p \dot{+} P^+_{n+N_+}l^p$ al espacio $P^-_n l^p \dot{+} P^0_n l^p \dot{+} P^+_n l^p$, donde $P^0_{n-N_-,n+N_+} := I - P^-_{n-N_-} - P^+_{n+N_+}$ y $P^0_n := I - P^-_n - P^+_n$. Si los operadores $A^\pm_n : P^\pm_n AP^\pm_{n\pm N_\pm}$ son de Fredholm de los espacios $P^\pm_{n\pm N_\pm}l^p$ a los espacios $P^\pm_n l^p$, respectivamente, y tienen índices cero por el Teorema 2.3.1, concluimos de [6][p. 167] que

$$A^\pm_n = W^\pm_n + K^\pm_n,$$

donde los operadores $W_n^\pm : P_{n\pm N_\pm}^\pm l^p \to P_n^\pm l^p$ son invertibles en los espacios $K_n^\pm : P_{n\pm N_\pm}^\pm l^p \to P_n^\pm l^p$ son compactos. Como $K_n^\pm \in P_n^\pm \mathfrak{A}_p P_{n\pm N_\pm}^\pm$, y por lo tanto $W_n^\pm \in P_n^\pm \mathfrak{A}_p P_{n\pm N_\pm}^\pm$ también, por el Corolario 2.2.1(b) tenemos que los operadores inversos $(W_n^\pm)^{-1} : P_n^\pm l^p \to P_{n\pm N_\pm}^\pm l^p$ pertenecen al conjunto $P_{n\pm N_\pm}^\pm \mathfrak{A}_p P_n^\pm$. Por lo que, tenemos cuatro casos:

$$1)\ N_\pm \geq 0,\quad 2)\ N_\pm \leq 0,\quad 3)\ N_- \leq 0 \leq N_+,\quad 4)\ N_- \geq 0 \geq N_+.$$

En cada uno de esos casos introducimos los operadores los cuales son invertibles lateralmente simultáneamente con A y del mismo lado que A:

$$\begin{aligned}
1)\quad A_{++} &:= \operatorname{diag}\{P_n^-, P_n^0, (W_n^+)^{-1}\} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} P_n^- A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} & P_n^- A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^- A P_{n+N_+}^+ \\ P_n^0 A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} & P_n^0 A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^0 A P_{n+N_+}^+ \\ P_n^+ A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} & P_n^+ A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^+ A P_{n+N_+}^+ \end{bmatrix}, \\
2)\quad A_{--} &:= \operatorname{diag}\{(W_n^-)^{-1}, P_n^0, P_n^+\} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} P_n^- A P_{n-N_-}^- & P_n^- A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^- A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} \\ P_n^0 A P_{n-N_-}^- & P_n^0 A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^0 A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} \\ P_n^+ A P_{n-N_-}^- & P_n^+ A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^+ A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} \end{bmatrix}, \\
3)\quad A_{-+} &:= \operatorname{diag}\{(W_n^-)^{-1}, P_n^0, (W_n^+)^{-1}\} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} P_n^- A P_{n-N_-}^- & P_n^- A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^- A P_{n+N_+}^+ \\ P_n^0 A P_{n-N_-}^- & P_n^0 A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^0 A P_{n+N_+}^+ \\ P_n^+ A P_{n-N_-}^- & P_n^+ A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^+ A P_{n+N_+}^+ \end{bmatrix}, \\
4)\quad A_{+-} &:= \begin{bmatrix} P_n^- A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} & P_n^- A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^- A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} \\ P_n^0 A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} & P_n^0 A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^0 A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} \\ P_n^+ A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} & P_n^+ A P_{n-N_-,n+N_+}^0 & P_n^+ A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Claramente, estos operadores actúan como sigue:

$$\begin{aligned}
A_{++} &: \ (P_n^- + P_{n-N_-,n+N_+}^0 + P_{n+N_+}^+) l^p \to (P_n^- + P_n^0 + P_{n+N_+}^+) l^p, \\
A_{--} &: \ (P_{n-N_-}^- + P_{n-N_-,n+N_+}^0 + P_n^+) l^p \to (P_{n-N_-}^- + P_n^0 + P_n^+) l^p, \\
A_{-+} &: \ l^p = (P_{n-N_-}^- + P_{n-N_-,n+N_+}^0 + P_{n+N_+}^+) l^p \to (P_{n-N_-}^- + P_n^0 + P_{n+N_+}^+) l^p, \\
A_{+-} &: \ (P_n^- + P_{n-N_-,n+N_+}^0 + P_n^+) l^p \to (P_n^- + P_n^0 + P_n^+) l^p = l^p,
\end{aligned}$$

y sus bloques más extremos tienen, respectivamente, la forma:

$$
\begin{aligned}
A_{++}^{-} &:= P_n^{-} A P_{n-N_-}^{-} (W_n^{-})^{-1} P_n^{-} = I_n^{-} + \tilde{K}_n^{-},\\
A_{++}^{+} &:= P_{n+N_+}^{+} (W_n^{+})^{-1} P_n^{+} A P_{n+N_+}^{+} = I_{n+N_+}^{+} + \tilde{K}_{n+N_+}^{+},\\
A_{--}^{-} &:= P_{n-N_-}^{-} (W_n^{-})^{-1} P_n^{-} A P_{n-N_-}^{-} = I_{n-N_-}^{-} + \tilde{K}_{n-N_-}^{-},\\
A_{--}^{+} &:= P_n^{+} A P_{n+N_+}^{+} (W_n^{+})^{-1} P_n^{+} = I_n^{+} + \tilde{K}_n^{+},\\
A_{-+}^{-} &:= P_{n-N_-}^{-} (W_n^{-})^{-1} P_n^{-} A P_{n-N_-}^{-} = I_{n-N_-}^{-} + \tilde{K}_{n-N_-}^{-},\\
A_{-+}^{+} &:= P_{n+N_+}^{+} (W_n^{+})^{-1} P_n^{+} A P_{n+N_+}^{+} = I_{n+N_+}^{+} + \tilde{K}_{n+N_+}^{+},\\
A_{+-}^{-} &:= P_n^{-} A P_{n-N_-}^{-} (W_n^{-})^{-1} P_n^{-} = I_n^{-} + \tilde{K}_n^{-},\\
A_{+-}^{+} &:= P_n^{+} A P_{n+N_+}^{+} (W_n^{+})^{-1} P_n^{+} = I_n^{+} + \tilde{K}_n^{+},
\end{aligned}
$$

donde los operadores $I_n^{\pm}$ y $I_{n\pm N_\pm}$ son los operadores identidad en los espacios $P_n^{\pm} l^p$ y $P_{n\pm N_\pm} l^p$, respectivamente, y $\tilde{K}_n^{\pm}$ y $\tilde{K}_{n\pm N_\pm}$ son operadores compactos en los espacios $P_n^{\pm} l^p$ y $P_{n\pm N_\pm} l^p$, respectivamente.

Es fácil ver que los operadores A_{++}, A_{--}, A_{-+} y A_{+-} pertenecen al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ ya que $A \in \mathfrak{A}_p$ y $(W_n^{\pm})^{-1} \in P_{n\pm N_\pm}^{\pm} \mathfrak{A}_p P_n^{\pm}$. Además, para toda $m > n$ suficientemente grande, los subbloques $(A_{++}^{\pm})_m$, $(A_{--}^{\pm})_m$, $(A_{-+}^{\pm})_m$ y $(A_{+-}^{\pm})_m$ de $A_{++}^{\pm}$, $A_{--}^{\pm}$, $A_{-+}^{\pm}$ y $A_{+-}^{\pm}$, respectivamente, los cuales son obtenidos de $A_{++}^{\pm}$, $A_{--}^{\pm}$, $A_{-+}^{\pm}$ y $A_{+-}^{\pm}$ reemplazando n por m son operadores invertibles en los espacios correspondientes.

En efecto, tomando, por ejemplo, el operador $A_{+-}^{+} = I_n^{+} + \tilde{K}_n^{+}$, donde $\tilde{K}_n^{+} \in \mathcal{K}(P_n^{+} l^p)$. Ya que s-$\lim_{m\to\infty} P_m^{+} = 0$, de [18][Lemma 1.4.7] tenemos

$$
\lim_{m\to\infty} \| P_m^{+} \tilde{K}_n^{+} P_m^{+} \|_{\mathcal{B}(P_n^{+} l^p)} = 0,
$$

y por lo tanto el operador $P_m^{+} A_{+-}^{+} P_m^{+} = P_m^{+} (I_n^{+} + \tilde{K}_n^{+}) P_m^{+}$ es invertible en el espacio $P_m^{+} l^p$ para toda $m > n$ suficientemente grande.

Representando los operadores A_{++}, A_{--}, A_{-+} y A_{+-} de la forma de operador matricial de 3×3 con bloques más extremos $(A_{++}^{\pm})_m$, $(A_{--}^{\pm})_m$, $(A_{-+}^{\pm})_m$ y $(A_{+-}^{\pm})_m$, respectivamente, podemos estudiar la invertibilidad lateral de los operadores A_{++}, A_{--}, A_{-+} y A_{+-}, y por lo tanto la invertibilidad lateral de el operador inicial A en los espacios l^p con $p \in (1, \infty)$.

Por ejemplo, vamos a estudiar la invertibilidad lateral de el operador A_{+-} relacionado al cuarto caso $N_- \geq 0 \geq N_+$. Este operador es representado en la forma

$$
D := A_{+-} = \begin{bmatrix} P_m^{-} A_{+-} P_m^{-} & P_m^{-} A_{+-} P_{m-N_-, m+N_+}^{0} & P_m^{-} A_{+-} P_m^{+} \\ P_m^{0} A_{+-} P_m^{-} & P_m^{0} A_{+-} P_{m-N_-, m+N_+}^{0} & P_m^{0} A_{+-} P_m^{+} \\ P_m^{+} A_{+-} P_m^{-} & P_m^{+} A_{+-} P_{m-N_-, m+N_+}^{0} & P_m^{+} A_{+-} P_m^{+} \end{bmatrix}, \tag{2.25}
$$

Donde los bloques más extremos son invertibles y tienen la forma

$$
\begin{aligned}
D_m^{-} &:= P_m^{-} A_{+-} P_m^{-} = P_m^{-} A P_{n-N_-}^{-} (W_n^{-})^{-1} P_m^{-},\\
D_m^{+} &:= P_m^{+} A_{+-} P_m^{+} = P_m^{+} A P_{n+N_+}^{+} (W_n^{+})^{-1} P_m^{+}.
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Por el Corolario 2.2.1(b), los bloques $D_m^{\pm}$ están en el álgebra de Banach $P_m^{\pm}\mathfrak{A}_p P_m^{\pm}$ y son invertibles en esas álgebras, respectivamente. Por lo tanto, el operador

$$D_{m,\infty} := \begin{bmatrix} P_m^- A_{+-} P_m^- & P_m^- A_{+-} P_m^+ \\ P_m^+ A_{+-} P_m^- & P_m^+ A_{+-} P_m^+ \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

el cual actua del espacio $P_m^- l^p \dot{+} P_m^+ l^p$ en el espacio $P_m^- l^p \dot{+} P_m^+ l^p$ y pertenece al álgebra de Banach $(P_m^- + P_m^+)\mathfrak{A}_p(P_m^- + P_m^+)$, también es invertible para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande junto con los operadores (2.26), ya que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| P_m^- A_{+-} P_m^+ \right\|_{\mathcal{B}(P_m^+ l^p, P_m^- l^p)} = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \left\| P_m^+ A_{+-} P_m^- \right\|_{\mathcal{B}(P_m^- l^p, P_m^+ l^p)} = 0.$$

Así, por el Corolario 2.2.1(b),el operador inverso $D_{m,\infty}^{-1}$ está en el álgebra $\mathcal{B}((P_m^- + P_m^+)l^p)$ también está en $(P_m^- + P_m^+)\mathfrak{A}_p(P_m^- + P_m^+)$.

Definiendo $\tilde{D}_{m,0} := P_m^0 A_{+-} P^0_{m-N_-,m+N_+}$,

$$D_{m,1} := \begin{bmatrix} P_m^0 A_{+-} P_m^- & P_m^0 A_{+-} P_m^+ \end{bmatrix}, \quad D_{m,2} := \begin{bmatrix} P_m^- A_{+-} P^0_{m-N_-,m+N_+} \\ P_m^+ A_{+-} P^0_{m-N_-,m+N_+} \end{bmatrix},$$

Podemos reescribir el operador matricial A_{+-} dado por (2.25) en la forma

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{m,0} & D_{m,1} \\ D_{m,2} & D_{m,\infty} \end{bmatrix},$$

con los bloques $\tilde{D}_{m,0} \in P_m^0 \mathfrak{A}_p P^0_{m-N_-,m+N_+}$, $D_{m,1} \in P_m^0\mathfrak{A}_p(P_m^- + P_m^+)$, $D_{m,2} \in (P_m^- + P_m^+)\mathfrak{A}_p P^0_{m-N_-,m+N_+}$, y $D_{m,\infty} \in (P_m^- + P_m^+)\mathfrak{A}_p(P_m^- + P_m^+)$. Ya que el bloque $D_{m,\infty}$ es invertible, obtenemos que

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{m,0} & D_{m,1} \\ D_{m,2} & D_{m,\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_{m,1} \\ 0 & D_{m,\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_{m,0} - D_{m,1} D_{m,\infty}^{-1} D_{m,2} & 0 \\ D_{m,\infty}^{-1} D_{m,2} & I \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Por lo que, la invertibilidad izquierda (resp., derecha) del operador D es equivalente a la invertibilidad izquierda (resp., derecha) del operador

$$D_{m,0} := \tilde{D}_{m,0} - D_{m,1} D_{m,\infty}^{-1} D_{m,2} \in P_m^0 \mathfrak{A}_p P^0_{m-N_-,m+N_+}, \tag{2.29}$$

donde $N_+ \leq 0 \leq N_-$ en el caso de invertibilidad izquierda, y N_- en el caso de la invertibilidad derecha, el cual es posible en el caso 4) sólo si $N_+ = N_- = 0$. Entonces nuevamente concluimos que el inverso lateral correspondiente del operador $D_{m,0}^L$ o $D_{m,0}^R$ pertenece al conjunto $P^0_{m-N_-,m+N_+}\mathfrak{A}_p P_m^0$. Por lo tanto, el operador inverso por la izquierda $\tilde{D} = D^L$ (resp., el operador inverso por la derecha $\tilde{D} = D^R$) para el operador D puede ser escrito en la forma

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} P_m^- \tilde{D} P_m^- & P_m^- \tilde{D} P_m^0 & P_m^- \tilde{D} P_m^+ \\ P^0_{m-N_-,m+N_+} \tilde{D} P_m^- & P^0_{m-N_-,m+N_+} \tilde{D} P_m^0 & P^0_{m-N_-,m+N_+} \tilde{D} P_m^+ \\ P_m^+ \tilde{D} P_m^- & P_m^+ \tilde{D} P_m^0 & P_m^+ \tilde{D} P_m^+ \end{bmatrix},$$

donde para cada $\nu \in \{-,+,0\}$,

$$P_m^{\pm}\tilde{D}P_m^{\nu} \in P_m^{\pm}\mathfrak{A}_p P_m^{\nu}, \quad P^0_{m-N_-,m+N_+}\tilde{D}P_m^{\nu} \in P^0_{m-N_-,m+N_+}\mathfrak{A}_p P_m^{\nu}.$$

Ya que todo operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es el límite uniforme de una sucesión de operadores discretos de banda en $\mathcal{B}(l^p)$, se sigue que $\tilde{D} \in (P_m^- + P^0_{m-N_-,m+N_+} + P_m^+)\mathfrak{A}_p$. Por lo tanto el operador inverso por la izquierda (resp., por la derecha) $\tilde{D}$ a el operador $D = A_{+-}$ pertenece al conjunto $(P_m^- + P^0_{m-N_-,m+N_+} + P_m^+)\mathfrak{A}_p$. Tomando los operadores $(W_n^{\pm})^{-1} \in P^{\pm}_{n\pm N_\pm}\mathfrak{A}_p P_n^{\pm}$, concluimos que el operador

$$\operatorname{diag}\left\{(W_n^-)^{-1}, P^0_{n-N_-,n+N_+}, (W_n^+)^{-1}\right\}\tilde{D}$$

pertenece al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ y es un operador inverso por la izquierda (resp., por la derecha) del operador A en el caso $N_+ \le 0 \le N_-$, donde $N_\pm = 0$ para la invertibilidad derescha.

Identificando el operador $D_{m,0} \in P_m^0\mathfrak{A}_p P^0_{m-N_-,m+N_+}$ con la correspondiente matriz de tamaño $(2m-1) \times (2m-1+N_+-N_-)$, denotamos por $\varrho(D_{m,0})$ el rango de esta matriz. Así el operador A es invertible por la izquierda en el espacio l^p en el caso 4) sí y sólo si $N_+ \le 0 \le N_-$ y $\varrho(D_{m,0}) = 2m-1+N_+-N_-$. El operador A es invertible por la derecha en el espacio l^p en el caso 4) sí y sólo si $N_\pm = 0$ y $\varrho(D_{m,0}) = 2m-1$ (en este caso A es invertible en el espacio l^p).

Similarmente, en los casos 1)–3) los operadores

$$\begin{aligned}
D &:= A_{++} :\ (P_n^- + P^0_{n-N_-,n+N_+} + P^+_{n+N_+})l^p \to (P_n^- + P_n^0 + P^+_{n+N_+})l^p,\\
D &:= A_{--} :\ (P^-_{n-N_-} + P^0_{n-N_-,n+N_+} + P_n^+)l^p \to (P^-_{n-N_-} + P_n^0 + P_n^+)l^p,\\
D &:= A_{-+} :\ l^p \to (P^-_{n-N_-} + P_n^0 + P^+_{n+N_+})l^p
\end{aligned}$$

pueden ser representados en la forma (2.25), y entonces su inversa por la izquierda (resp., por la derecha) es equivalente a la invertibilidad izquierda (resp. derecha) del operador $D_{m,0}$ definido por (2.29) para cada $D \in \{A_{++}\ A_{--},\ A_{-+}\}$, donde, respectivamente,

$$1)\ N_\pm \ge 0, \quad 2)\ N_\pm \le 0, \quad 3)\ N_- \le 0 \le N_+.$$

La invertibilidad lateral del operador (2.29) es equivalente a la igualdad

$$\varrho(D_{m,0}) = \min\{2m-1+N_+-N_-,\ 2m-1\}. \tag{2.30}$$

Por lo tanto, el operador A es invertible por la izquierda en el espacio l^p sí y sólo si (2.30) se tiene y $0 \le N_+ \le N_-$ en el caso 1), $N_+ \le N_- \le 0$ en el caso 2), y $N_+ = N_- = 0$ en el caso 3). Análogamente, el operador A es invertible por la derecha en el espacio l^p sí y sólo si (2.30) se tiene y $N_+ \ge N_- \ge 0$ in the case 1), $0 \ge N_+ \ge N_-$ en el caso 2), y $N_+ \ge 0 \ge N_-$ en el caso 3). Claramente un inverso lateral del operador A pertenece al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ en todos los casos.

En lo que sigue, $D_{m,0}(A)$ denotará a ambos, el operador $D_{m,0}$ definido por (2.29) para toda $D \in \left\{A_{++}, A_{--}, A_{-+}, A_{+-}\right\}$ y su matriz asociada, donde los operadores A_{++}, A_{--}, A_{-+} y A_{+-} son dados para A por (2.24).

Teorema 2.3.4. *Sea* $p \in (1,\infty)$ *y sea* $A \in \mathfrak{A}_p$ *un operador de Fredholm. Entonces* A *es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio* l^p *sí y sólo si* $N_+ \leq N_-$ *(resp.,* $N_+ \geq N_-$*) y para toda* $m \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande, el rango de la matriz* $D_{m,0}(A)$ *es igual a* $2m-1+N_+-N_-$ *(resp.,* $2m-1$*). Bajo esas condiciones existe un inverso izquierdo (resp., derecho) de* A *el cual pertenece al álgebra de Banach* $\mathfrak{A}_p$*.*

Corolario 2.3.2. *Sea* $p \in (1,\infty)$ *y sea* $A \in \mathfrak{A}_p$*. Si el operador* A *es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio* l^p*, entonces cualquier inverso izquierdo (resp. derecho) pertenece al álgebra de Banach* $\mathfrak{A}_p$*.*

Demostración. Sea $p \in (1,\infty)$ y sea $A \in \mathfrak{A}_p$ un operador A invertible por la izquierda en el espacio l^p. Por el Teorema 2.3.4, hay un inverso izquierdo A_0^L de A que pertenece al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$. Entonces cualquier inverso izquierdo de A es de la forma $A^L = A_0^L P$, donde P es una proyección de l^p en $\operatorname{Im} A$ (ver [6] Capítulo 2, Teorema 5.1). Por lo tanto

$$A^L = A_0^L P = A_0^L - A_0^L \tilde{P}, \tag{2.31}$$

donde $\tilde{P} = I - P$ es una proyección de rango finito en $\mathcal{B}(l^p)$ ya que $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Entonces $A_0^L \tilde{P} \in \mathcal{K}(l^p)$, el cuál implica por el Corolario 2.2.1 (a) que $A_0^L \tilde{P} \in \mathfrak{A}_p$. Por (2.31), $A^L \in \mathfrak{A}_p$ junto con A_0^L y $A_0^L \tilde{P}$.
Pasando a operadores adjuntos, concluimos que cualquier inverso derecho de $A \in \mathfrak{A}_p$ (si es que existe) también pertenece a $\mathfrak{A}_p$ $\square$

De esto sigue que el Teorema 2.2.2 admite la siguiente generalización: El álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ para $p \in (1,\infty)$ es lateral inversamente cerrada.

2.4 Criterios de invertibilidad lateral en términos de norma inferior

Proposición 2.4.1. *Sean* X_j *para* $j = 1,2,3,4$ *espacios de Banach,* $A_1 \in \mathcal{B}(X_2, X_1)$*,* $A_2 \in \mathcal{B}(X_3, X_2)$*,* $A_3 \in \mathcal{B}(X_4, X_3)$*, y los operadores* A_1 *y* A_3 *invertibles, entonces la norma inferior del operador* $A = A_1A_2A_3$ *es positivo sí y sólo si la norma inferior del operador* A_2 *es positivo.*

Demostración. Supongamos que la norma inferior $|A_2|_+$ del operador A_2 es positivo. Ya que $|A_1|_+ > 0$ y $|A_3|_+ > 0$ para los operadores invertibles A_1 y A_3, concluimos que $\ker A_j = \{0\}$ para toda $j = 1,2,3$. Entonces

$$\begin{aligned} |A|_+ = \inf_{0 \neq x \in X_4} \frac{\|Ax\|_{X_1}}{\|x\|_{X_4}} &= \inf_{0 \neq x \in X_4} \left(\frac{\|A_1A_2A_3x\|_{X_1}}{\|A_2A_3x\|_{X_2}} \frac{\|A_2A_3x\|_{X_2}}{\|A_3x\|_{X_3}} \frac{\|A_3x\|_{X_3}}{\|x\|_{X_4}} \right) \\ &\geq |A_1|_+ |A_2|_+ |A_3|_+ > 0. \end{aligned}$$

Inversamente, si $|A|_+ > 0$, entonces $A_2 = A_1^{-1} A A_3^{-1}$, y por lo tanto $|A_2|_+ > 0$ por la parte ya probada. $\square$

Teorema 2.4.1. *Sea $p \in (1,\infty)$ y sea $A \in \mathfrak{A}_p$. Entonces el operador A es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio l^p sí y sólo si $|A|_+ > 0$ en el espacio l^p (resp., $|A^*|_+ > 0$ en el espacio l^q), donde $1/p + 1/q = 1$.*

Demostración. Suficiencia. Si $|A|_+ > 0$, entonces la imagen de A es cerrada en el espacio l^p, y $\ker A = \{0\}$. Por lo tanto el operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es n-normal. Entonces, por el Teorema 2.2.3, el operador A es de Fredholm en el espacio l^p. Siguiendo la prueba del Teorema 2.3.4, tomamos uno de los operadores A_{++}, A_{--}, A_{-+}, A_{+-} dependiendo de los números $N_\pm \in \mathbb{Z}$. Sea $D = A_{+-}$ este operador. Por la construcción de A_{+-} y por la Proposición 2.4.1, $|D|_+ = |A_{+-}|_+ > 0$ junto con $|A|_+ > 0$. Entonces, tomando el operador invertible $D_{m,\infty}$ dado por (2.27) y aplicando la descomposición (2.28) y Proposición 2.4.1, obtenemos que $|D_{m,0}|_+ > 0$ junto con $|D_{m,\infty}|_+ > 0$, donde el operador $D_{m,0} \in \mathcal{B}(P^0_{m-N_-,m+N_+} l^p, P^0_m l^p)$ es dado por (2.29). Ya que $|D_{m,0}|_+ > 0$ y el operador $D_{m,0}$ tiene rango finito, su imagen tiene un complemento directo de dimensión finita. Así, el operador $D_{m,0}$ es invertible por la izquierda y actúa del espacio $P^0_{m-N_-,m+N_+} l^p$ al espacio $P^0_m l^p$, el cual implica la invertibilidad izquierda del operador $D = A_{+-}$ del espacio $(P_n^- + P^0_{n-N_-,n+N_+} + P_n^+) l^p$ en el espacio $(P_n^- + P_n^0 + P_n^+) l^p = l^p$, y por lo tanto la invertibilidad izquierda del operador A en el espacio l^p.

Pasando al operador adjunto A^* y aplicando la parte ya probada, obtenemos la invertibilidad izquierda del operador A^* en el espacio l^q si $|A^*|_+ > 0$, el cual es equivalente a la invertibilidad derecha del operador A en el espacio l^p.

Necesidad es evidente. □

Considere el operador discreto de banda dominada

$$A = P_0^- + V^{-1} P_1^+, \quad B = P_0^- + V P_2^+ + y P^0_{0,2} \tag{2.32}$$

en la C^*-álgebra $\mathfrak{A}_2$, donde la columna $y := \big((|n|+1)^{-1}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ esta en $l^2 \setminus l^1$. Entonces $A \in \mathcal{W}_2$, $B \in \mathfrak{A}_2 \setminus \mathcal{W}_2$, y B es un inverso izquierdo de A en $\mathfrak{A}_2$ que no pertenece a $\mathcal{W}_2$. Así, en contraste con el Corolario 2.3.2, no podemos garantizar que para toda $p \in (1,\infty)$ y cualquier operador invertible por la izquierda (resp., derecha) $A \in \mathcal{W}_p$, todos sus inversos izquierdos (resp., derechos) pertenecen al álgebra $\mathcal{W}_p$.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. *Si $p \in (1,\infty)$ y un operador $A \in \mathcal{W}_p$ es invertible por la izquierda (resp., derecha) en el espacio l^p, entonces existe un inverso izquierdo (resp., derecho) de A que pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$.*

Proof. Reemplazando $\mathfrak{A}_p$ por $\mathcal{W}_p$ y aplicando el Teorema 2.3.2, podemos modificar la prueba del Teorema 2.3.4. Por el teorema Teorema 2.3.1, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ los operadores

$$A_n^+ : P^+_{n+N_+} l^p \to P_n^+ l^p \quad \text{y} \quad A_n^- : P^-_{n-N_-} l^p \to P_n^- l^p,$$

son operadores de Fredholm de índices cero. Por la prueba del Teorema 2.3.2, $A_n^\pm = \hat{W}_n^\pm + \hat{K}_n^\pm$, donde los operadores $\hat{W}_n^\pm : P^\pm_{n\pm N_\pm} l^p \to P_n^\pm l^p$ son invertibles, los operadores $\hat{K}_n^\pm : P^\pm_{n\pm N_\pm} l^p \to P_n^\pm l^p$ son compactos debido a (2.15),

$$\hat{W}_n^\pm,\ \hat{K}_n^\pm \in P_n^\pm \mathcal{W}_p P^\pm_{n+N_\pm} \quad \text{y} \quad \big(\hat{W}_n^\pm\big)^{-1} \in P^\pm_{n+N_\pm} \mathcal{W}_p P_n^\pm. \tag{2.33}$$

Similarmente a la prueba del Teorema 2.3.4,consideramos los casos $N_- \geq 0 \geq N_+$ (los casos $N_\pm \geq 0$, $N_\pm \leq 0$ y $N_- \leq 0 \leq N_+$ son análogos). Sea $W_n^\pm := \hat{W}_n^\pm$, $K_n^\pm := \hat{K}_n^\pm$ y siguiendo la prueba de Teorema 2.3.4, como $A \in \mathcal{W}_p$ obtenemos que los bloques más extremos A_{+-}^- y A_{+-}^+ del operador

$$A_{+-}:\ (P_n^- + P_{n-N_-,n+N_+}^0 + P_n^+)l^p \to (P_n^- + P_n^0 + P_n^+)l^p = l^p$$

definido por (2.24) tienen la forma

$$\begin{aligned} A_{+-}^- &:= P_n^- A P_{n-N_-}^- (W_n^-)^{-1} P_n^- = I_n^- + \tilde{K}_n^-, \\ A_{+-}^+ &:= P_n^+ A P_{n+N_+}^+ (W_n^+)^{-1} P_n^+ = I_n^+ + \tilde{K}_n^+, \end{aligned}$$

donde $I_n^\pm$ son los operadores identidad en los espacios $P_n^\pm l^p$, $\tilde{K}_n^\pm$ son operadores compactos en esos espacios y $\tilde{K}_n^\pm \in P_n^\pm \mathcal{W}_p P_n^\pm$, respectivamente. Entonces escogemos las proyecciones $P_m^\pm$ tal que para toda $m > n$ suficientemente grande los operadores

$$\begin{aligned} P_m^- A_{+-}^- P_m^- &= P_m^-(I_n^- + \tilde{K}_n^-)P_m^-, \\ P_m^+ A_{+-}^+ P_m^+ &= P_m^+(I_n^+ + \tilde{K}_n^+)P_m^+ \end{aligned} \tag{2.34}$$

son invertibles en los espacios $P_m^+ l^p$ y $P_m^- l^p$, respectivamente. Más aún, esos operadores y sus inversas pertenecen a las álgebras de Banach $P_m^\pm \mathcal{W}_p P_m^\pm$, respectivamente.

De $A_{+-} \in (P_n^- + P_n^0 + P_n^+)\mathcal{W}_p(P_n^- + P_{n-N_-,n+N_+}^0 + P_n^+)$, y de la representación (2.25) del operador $D = A_{+-}$ que el operador $D_{m,\infty}$ dado por (2.27) pertenece al álgebra de Banach $(P_m^- + P_m^+)\mathcal{W}_p(P_m^- + P_m^+)$y es invertible en el espacio $P_m^- l^p \dot{+} P_m^+ l^p$ para toda $m > n$ suficientemente grande, junto con los operadores (2.34). Por lo tanto el operador inverso $D_{m,\infty}^{-1}$ que está en el álgebra $\mathcal{B}((P_m^- + P_m^+)l^p)$ también pertenece al álgebra de Banach $(P_m^- + P_m^+)\mathcal{W}_p(P_m^- + P_m^+)$.

Representando el operador matricial $D = A_{+-}$ en la forma

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{m,0} & D_{m,1} \\ D_{m,2} & D_{m,\infty} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{m,0} &\in P_m^0 \mathcal{W}_p P_{m-N_-,m+N_+}^0, & D_{m,1} &\in P_m^0 \mathcal{W}_p (P_m^- + P_m^+), \\ D_{m,2} &\in (P_m^- + P_m^+)\mathcal{W}_p P_{m-N_-,m+N_+}^0, & D_{m,\infty} &\in (P_m^- + P_m^+)\mathcal{W}_p(P_m^- + P_m^+), \end{aligned}$$

y tomando en cuenta la invertibilidad del bloque $D_{m,\infty}$ en el álgebra de Banach $(P_m^- + P_m^+)\mathcal{W}_p(P_m^- + P_m^+)$, y (2.28) obtenemos que la invertibilidad izquierda (resp., derecha) del operador D es equivalente a la invertibilidad izquierda (resp., derecha) del operador

$$D_{m,0} := \tilde{D}_{m,0} - D_{m,1} D_{m,\infty}^{-1} D_{m,2} \in P_m^0 \mathcal{W}_p P_{m-N_-,m+N_+}^0. \tag{2.35}$$

Similarmente a la prueba del Teorema 2.3.4, concluimos que el inverso lateral correspondiente del operador $D_{m,0}^L$ o $D_{m,0}^R$ está en el conjunto $P_{m-N_-,m+N_+}^0 \mathcal{W}_p P_m^0$. Por lo tanto el inverso izquierdo$\tilde{D} = D^L$ (resp., el inverso derecho $\tilde{D} = D^R$) del operador $D = A_{+-}$ pertenece al conjunto $(P_m^- + P^0_{m-N_-,m+N_+} + P_m^+)\mathcal{W}_p$. Finalmente, ya que $(W_n^{\pm})^{-1} \in P^{\pm}_{n\pm N_\pm}\mathcal{W}_p P_n^{\pm}$, concluimos que el operador

$$\operatorname{diag}\big\{(W_n^-)^{-1}, P^0_{n-N_-,n+N_+}, (W_n^+)^{-1}\big\}\tilde{D}$$

pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$ y es un inverso izquierdo (resp., derecho) del operador A en el caso $N_- \geq 0 \geq N_+$, donde $N_\pm = 0$ para el caso de la invertibilidad derecha, lo cual completa la prueba. □

El Teorema 2.4.2 inmediatamente implica el siguiente corolario.

Corolario 2.4.1. *Si el operador $A \in \mathcal{W}$ es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio l^p con $p \in (1, \infty)$, entonces es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en todos los espacios l^p con $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$.*

2.4.1 Otros criterios de invertibilidad lateral

Para un operador $A \in \mathcal{W}_p$, sea $A^\diamond \in \mathcal{W}_p$ su operador formalmente adjunto dado por (2.18).

Teorema 2.4.3. *Dado $p \in (1, \infty)$, un operador $A \in \mathcal{W}_p$ es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio l^p sí y sólo el operador $A^\diamond A$ (resp., $AA^\diamond$) es invertible en el espacio l^p. En este caso uno de los inversos izquierdos (resp., derechos) es dado por$A^L = (A^\diamond A)^{-1}A^\diamond$ (resp., por $A^R = A^\diamond(AA^\diamond)^{-1}$) y pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$.*

Demostración. Los operadores $A^\diamond A$ y $AA^\diamond$ pertenecen al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$ junto con A. Por lo tanto, si el operador $A^\diamond A$ (resp., $AA^\diamond$) es invertible en el espacio l^p, entonces por [17, Teorema 2..5.2] que el operador inverso $(A^\diamond A)^{-1}$ (resp., $(AA^\diamond)^{-1}$) también pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$. Obviamente, los operadores $A^L = (A^\diamond A)^{-1}A^\diamond$ and $A^R = A^\diamond(AA^\diamond)^{-1}$, los cuales pertenecen al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$ son inversos izquierdo y derecho de A, respectivamente en el espacio l^p.

Inversamente, si $A \in \mathcal{W}_p$ es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio l^p, entonces existe su inverso izquierdo A^L (resp., su inverso derecho A^R) que pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$ por el Teorema 2.4.2. Entonces el operador A^L (resp., A^R) pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_2$ contenido en la C^*-algebra $\mathcal{B}(l^2)$. Acorde a [14, § 23, Corolario 2], la invertibilidad izquierda (resp., derecha) de un elemento b en una C^*-algebra $\mathcal{B}$ es equivalente a la invertibilidad del elemento b^*b (respectivamente, bb^*) en la C^*-algebra $\mathcal{B}$. Aplicando este heho a la C^*-algebra $\mathcal{B}(l^2)$, inmediatamente tenemos que el operador $A^\diamond A = A^*A$ (resp., $AA^\diamond = AA^*$) es invertible en el espacio l^2. Ya que el álgebra de Banach $\mathcal{W}_2$ es inversamente cerrada en la C^*-algebra $\mathcal{B}(l^2)$, concluimos que el operador inverso $(A^\diamond A)^{-1}$ (resp., $(AA^\diamond)^{-1}$) pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_2$, y por lo tanto al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$. Consecuentemente el operador $A^\diamond A$ (resp., $AA^\diamond$) es invertible en el espacio l^p y su inversa pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$ para toda $p \in (1, \infty)$. □

El Teorema 2.4.3 y el Corolario 2.4.1 inmediatamente implican el siguiente resultado.

Teorema 2.4.4. *Si $|A|_+ > 0$ (resp., $|A^\diamond|_+ > 0$) para un operador $A \in \mathcal{W}_p$ en el espacio l^p para algún $p \in (1,\infty)$, entonces $|A|_+ > 0$ (resp.,$|A^\diamond|_+ > 0$) para el operador $A \in \mathcal{W}_p$ en todos los espacios l^p con $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$. En este caso A es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en los espacios l^p para toda $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$, y uno de sus inversos izquierdos (resp., derechos) es dado por $A^L = (A^\diamond A)^{-1}A^\diamond$ (resp., by $A^R = A^\diamond(AA^\diamond)^{-1}$).*

El Teorema 2.4.4 es relacionado con los temas estudiados en los artículos: [1], [23] y [24].

2.4.2 Invertibilidad de los operadores $A^\diamond A$ y $AA^\diamond$

Dado $p \in (1,\infty)$, sea $A \in \mathcal{W}_p$. Si A es de Fredholm en el espacio l^p, entonces los números $N_\pm \in \mathbb{Z}$ son dados por (2.5). Sea $D_{m,0}(A)$ la matriz $D_{m,0}$ definida en (2.35) para toda $N_\pm \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.3.4 combinado con el Teorema 2.4.2 implican inmediatamente la siguiente analogía tipo Wiener del Teorema 2.3.4.

Teorema 2.4.5. *Sea $p \in (1,\infty)$ y $A \in \mathcal{W}_p$ un operaor de Fredholm. Entonces el operador A es invertible por la izquierda en el espacio l^p sí y sólo si $N_+ \leq N_-$ y para toda $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, el rango de la matriz $D_{m,0}(A)$ es igual a $2m - 1 + N_+ - N_-$, y el operador A es invertible por la derecha en el espacio l^p sí y sólo si $N_+ \geq N_-$ y para toda $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, el rango de la matriz $D_{m,0}(A)$ es igual a $2m - 1$. Bajo esas condiciones existe un inverso izquierdo (resp., derecho) de A el cual pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$.*

Asi, la invertibilidad lateral de el operador $A \in \mathcal{W}_p$ en Teorema 2.4.5 depende del rango de la matriz finita $D_{m,0}(A)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. La construcción de esta matriz es relacionada con la invertibilidad de las matrices infinitas de la forma $D_m^\pm = P_m^\pm D P_m^\pm$ asociadas con los bloques más extremos modificados de las matrices iniciales. En el otro lado, para el operador de Fredholm A, las matrices infinitas $D_m^\pm$ son invertibles para toda $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y por lo tanto el criterio de invertibilidad lateral puede ser escrita en términos de los rangos de las matrices finitas $D_{m,0}(\cdot)$ solamente.

Este enfoque se basa en representar matrices infinitas de operadores A en álgebras de Banach $\mathfrak{A}_p$ o $\mathcal{W}_p$ como matrices de 3×3 bloques y el estudio posterior de su invertibilidad lateral e invertibilidad permite establecer los criterios de de invertibilidad lateral de operadores $A \in \mathfrak{A}_p$ en términos de sus normas inferiores para toda $p \in (1,\infty)$ (ver Teorema 2.4.1), a mostrar la existencia de inversos laterales en las álgebras de Banach $\mathcal{W}_p$ para todos los operadores $A \in \mathcal{W}_p$ y toda $p \in (1,\infty)$ (ver Teorema 2.4.2), a probar la equivalencia de la invertibilidad izquierda (resp., derecha) del operador $A \in \mathcal{W}_p$ y la invertibilidad de los operadores $A^\diamond A$ (resp., $AA^\diamond$) para toda $p \in (1,\infty)$ en lugar de $p = 2$ (ver Teorema 2.4.3).

Sea $p \in (1,\infty)$. Aplicando el Teorema 2.3.3 podemos mejorar el criterio de invertibilidad para los operadores $A^\diamond A \in \mathcal{W}_p$ y $AA^\diamond \in \mathcal{W}_p$ en términos de sus bloques, donde el operador $A^\diamond$ relacionado con A es dado por (2.18). Además, en ese criterio seguido del Teorema 2.4.5, podemos simplificar la contrucción de las matrices $D_{m,0}(B)$ para los operadores $B \in \{AA^\diamond, A^\diamond A\{$ mediante el uso de la invertibilidad los bloques más extremos

$B_n^{\pm} = P_n^{\pm} B P_n^{\pm}$ en los espacios $P_n^{\pm} l^p$, respectivamente. Sea $B \in \{AA^\diamond,\ A^\diamond A\{$. Por el Corolario 2.4.1 el operador $B \in \mathcal{W}_p$ es invertible en el espacio l^p para $p \in (1,\infty)$ sí y solo si es invertible en el espacio l^2. Más aún, sus inversas en el espacio l^p y l^2 coinciden y pertenecen al álgebra $\mathcal{W}$. Por el Corolario 2.3.1, $N_{\pm} = 0$ para B. Ya que B es positivo en el espacio l^2, esto sigue del Teorema 2.3.3 que toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande los operadores $B_n^{\pm} = P_n^{\pm} B P_n^{\pm}$ son invertibles en los espacios $P_n^{\pm} l^2$, respectivamente. Ya que $B_n^{\pm} \in P_n^{\pm} \mathcal{W} P_n^{\pm}$, se tiene que $(B_n^{\pm})^{-1} \in P_n^{\pm} \mathcal{W} P_n^{\pm}$, y por lo tanto los operadores $B_n^{\pm}$ son invertibles en los espacios $P_n \pm l^p$ para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Representando al operador B de manera similar como en (2.23)

$$B = \begin{bmatrix} P_n^- B P_n^- & P_n^- B P_n^0 & P_n^- A P_n^+ \\ P_n^0 A P_n^- & P_n^0 A P_n^0 & P_n^0 A P_n^+ \\ P_n^+ A P_n^- & P_n^+ A P_n^0 & P_n^+ A P_n^+ \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

obtenemos de la invertibilidad de los bloques más extremos $P_n^- B P_n^-$ y $P_n^+ B P_n^+$ y de la igualdad

$$\lim_{m\to\infty} ||P_n^- B P_n^+||_{\mathcal{B}(P_n^+ l^p, P-n^- l^p)} = \lim_{n\to\infty} ||P_n^+ B P_n^-||_{\mathcal{B}(P_n^- l^P, P_n^+ l^p)} = 0$$

que para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande el operador

$$B_{n,\infty} := \begin{bmatrix} P_n^- B P_n^- & P_n^- B P_n^+ \\ P_n^+ B P_n^- & P_n^+ B P_n^+ \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

es invertible en el espacio $P_n^- l^p \dot{+} P_n^+ l^P$. Definiendo $\tilde{B}_{n,0} := P_n^0 B P_n^0$,

$$B_{n,1} := \begin{bmatrix} P_n^0 B P_n^- & P_n^0 B P_n^+ \end{bmatrix},\ B_{n,2} := \begin{bmatrix} P_n^- B P_n^0 \\ P_n^+ B P_n^0 \end{bmatrix}$$

podemos reescribir el operador matricial B dado por (2.36) de la forma

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{n,0} & B_{n,1} \\ B_{n,2} & B_{n,\infty} \end{bmatrix}.$$

Ya que el bloque $B_{n,\infty}$ dado por (2.37) es invertible, concluimos que la invertibilidad del operador B en el espacio l^p es equivalente a la invertibilidad de la matriz de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$ identificado con el operador

$$B_{n,0} := \tilde{B}_{n,0} - B_{n,1} B_{n,\infty}^{-1} B_{n,2} \tag{2.38}$$

$\mathcal{B}(l^p)$, el operador inverso B^{-1} pertenece a cw_p y $\mathcal{B}(l^p)$. Ya que la álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach

Teorema 2.4.6. *Si $p \in (1,\infty)$ y $A \in \mathcal{W}_p$, entonces el operador $B \in \{A^\diamond A,\ AA^\diamond\}$ es invertible en el espacio l^p sí y solo si para suficientemete grande $n \in \mathbb{N}$ los operadores $B_n^{\pm} = P_n^{\pm} B P_n^{\pm}$ son invertibles en los espacios $P_n^{\pm} l^p$, respectivamente, y la matriz $B_{n,0}$ de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$ definida por (2.38)es invertible. En este caso $B^{-1} \in \mathcal{W}_p$.*

Teoremas 2.3.4, 2.4.3 y 2.4.6 implican inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2. *Si $p \in (1,\infty)$ y $A \in \mathcal{W}_p$ es un operador de Fredhol, entonces A es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio l^p sí y sólo si para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande la matriz $B_{n,0}(B)$ de tamaño $(2n-1)\times(2n-1)$ dado por (2.38) para $B = A^\diamond A$ (resp., para $B = AA^\diamond$) es invertible. En este caso uno de sus inversos izquierdos (resp., derechos) es dado por $A^L = (A^\diamond A)^{-1}A^\diamond$ (resp., por $A^R = A^\diamond(AA^\diamond)^{-1}$) y pertenece al álgebra de Banach $\mathcal{W}_p$.*

2.5 Operadores discretos del tipo Wiener E-módulo

Sea Π el conjunto de todos los mapeos inyectivos $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y sea $l^p = l^p(\mathbb{Z})$ para $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$. Introducimos el conjunto $\mathcal{E}$ de todos los operadores $E = E_\pi \in \mathcal{B}(l^p)$ y $E^\diamond = E^\diamond_\pi \in \mathcal{B}(l^p)$ para $\pi \in \Pi$, los cuales son dados para funciones $f \in l^p$ por la regla:

$$(Ef)(n) = f(\pi(n)), \quad (E^\diamond f)(n) = \begin{cases} f(m) & \text{if } n = \pi(m), \\ 0 & \text{if } n \notin \pi(\mathbb{Z}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.39}$$

De donde, $EE^\diamond = I$ y $E^\diamond E = d_\pi I$, donde $d_\pi \in l^p$ y $d_\pi(n) = 1$ si $n \in \pi(\mathbb{Z})$ y $d_\pi(n) = 0$ si $n \notin \pi(\mathbb{Z})$. En particular E permuta los valores de $f(n)$ si π es una biyección de $\mathbb{Z}$ en sí mismo.

Para $E, E^\diamond \in \mathcal{E}$ y para todo $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$, definimos el operador discreto de tipo Wiener actuando en el espacio l^p dado por

$$\begin{aligned} A_E &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E V^k, \quad \tilde{A}_E := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E^\diamond V^k, \\ A^\diamond_E &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-k} E^\diamond \overline{a_k} I, \quad \tilde{A}^\diamond_E := \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-k} E \overline{a_k} I, \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde el operador isométrico $V \in \mathcal{B}(l^p)$ es dado por $(Vf)(n) = f(n+1)$ para $f \in l^p$ y $n \in \mathbb{Z}$, los coeficientes $a_k \in l^\infty$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y

$$\|A_I\|_{\mathcal{W}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty \quad \text{para} \quad A_I := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k V^k. \tag{2.41}$$

Ya que π es un mapeo inyectivo de $\mathbb{Z}$ en sí mismo, es fácil checar que las funciones $a_k \in l^\infty$son definidas de forma única para cada operador en (2.40). Como $||E||_{\{}\mathcal{B}(l^p)\} = 1$ y $||E^\diamond||_{\mathcal{B}(l^p)} = 1$, se sigue de (2.41) y de la estimación

$$\max\left\{\|A_E\|_{\mathcal{B}(l^p)}, \|\tilde{A}_E\|_{\mathcal{B}(l^p)}, \|A^\diamond_E\|_{\mathcal{B}(l^p)}, \|\tilde{A}^\diamond_E\|_{\mathcal{B}(l^p)}\right\} \le \|A_I\|_{\mathcal{W}}$$

que los operadores en (2.40) son acotados en los espacios l^p para $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$.

Llamamos a los operadores A_E y $\tilde{A}_E$ dados por (2.40) y satisfaciendo (2.41) los operadores discretos del tipo Wiener E-módulo, mientras los operadores $A^\diamond_E$ y $\tilde{A}^\diamond_E$ en (2.40) son los operadores formales adjuntos a los operadores A_E y $\tilde{A}_E$, respectivamente.

Claramente los operadores A_E y $\tilde{A}_E$ dados por (2.40) y satisfaciendo (2.41) pueden ser escritos formalmente como operadores discretos de banda dominada del tipo Wiener

$$A_E = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k V^k, \quad \tilde{A}_E = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k V^k \quad (\text{con } \; b_k, c_k \in l^\infty),$$

sin embargo estos operadores no pertenecen al álgebra de Banach $\mathcal{W}$ porque puede pasar que

$$\|A_E\|_{\mathcal{W}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|b_k\|_{l^\infty} = \infty, \quad \|\tilde{A}_E\|_{\mathcal{W}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|c_k\|_{l^\infty} = \infty. \tag{2.42}$$

En efecto, tomando $\pi(n) = nm$ y $a_k(n) = 2^{-|k|}$ para toda n, m, $k \in \mathbb{Z}$, donde $|m| > 1$ podemos obtener (2.41) y (2.42). Es claro que (2.41) se tiene y para probar que (2.42) se obtiene, podemos considerar las matrices $(g_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ y $(\tilde{g}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ de los operadores A_E y $\tilde{A}_E$, respectivamente. Ya que $a_0(n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que $g_{n,mn} = \tilde{g}_{mn,n} = 1$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Tomando $s = (m-1)n$, deducimos que $b_s(n) = g_{n,mn} = 1$ y $c_{-s}(mn) = \tilde{g}_{mn,n} = 1$. Por lo tanto, $\|b_s\|_{l^\infty} = 1$ y $\|c_{-s}\|_{l^\infty} = 1$ para todo s en el conjunto contable $(m-1)\mathbb{Z}$, el cual prueba (2.42). Más aún, si

$$\pi(p) = p^2, \quad \pi(p^2) = p \;\; \text{para } p \text{ primo } \; \text{y} \;\; \pi(n) = n \;\; \text{para todos los otros enteros,} \tag{2.43}$$

entonces el operador $A := E$ no es de banda dominada.

Para cada $a \in l^\infty$ notamos que $EaE^\diamond, E^\diamond aE \in l^\infty$, donde

$$(EaE^\diamond)(k) = (a \circ \pi)(k), \quad (E^\diamond aE)(k) = (a \circ \pi^{-1})(k) \quad \text{para toda } \; k \in \mathbb{Z}, \tag{2.44}$$

y $(a \circ \pi^{-1})(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z} \setminus \pi(\mathbb{Z})$.

Lema 2.5.1. *Los operadores $A_E^\diamond A_E$ y $\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E$ son operadores discretos de banda dominada de la forma*

$$A_E^\diamond A_E = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n V^n \in \mathcal{W} \quad y \quad \tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n V^n \in \mathcal{W}$$

con coeficientes $d_n, \tilde{d}_n \in l^\infty$ dados por

$$d_n(k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\overline{a_l} a_{l+n} \circ \pi^{-1})(k-l), \quad \tilde{d}_n(k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\overline{a_l} a_{l+n} \circ \pi)(k-l) \tag{2.45}$$

para toda $n, k \in \mathbb{Z}$, y las siguientes estimaciones se tienen:

$$\|A_E^\diamond A_E\|_{\mathcal{W}} \le \|A_I\|^2_{\mathcal{W}}, \quad \|\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E\|_{\mathcal{W}} \le \|A_I\|^2_{\mathcal{W}}. \tag{2.46}$$

Demostración. Por (2.44), las funciones $h_{l,n} := V^{-l} E^\diamond \overline{a_l} a_{l+n} E V^l \in l^\infty$ son dadas por

$$h_{l,n}(k) = (\overline{a_l} a_{l+n} \circ \pi^{-1})(k-l) \quad \text{para toda} \quad l, n, k \in \mathbb{Z},$$

y por lo tanto $d_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{l,n}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ en vista de (2.45). Ya que

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|h_{l,n}\|_{l^\infty} &\le \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\overline{a_l}\|_{l^\infty} \|a_{l+n}\|_{l^\infty} \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \|\overline{a_l}\|_{l^\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} = \|A_I\|^2_{\mathcal{W}} < \infty, \end{aligned} \tag{2.47}$$

concluimos que $d_n \in l^\infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|d_n\|_{l^\infty} < \infty$.

Aplicando (2.40) y (2.47), obtenemos

$$\begin{aligned} A_E^\diamond A_E &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-l} E^\diamond \overline{a_l} a_k E V^k = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (V^{-l} E^\diamond \overline{a_l} a_{l+n} E V^l) V^n \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{l,n} V^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{l,n} V^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n V^n, \end{aligned} \tag{2.48}$$

Donde el operador $A_E^\diamond A_E = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n V^n \in \mathcal{W}$ es de banda dominada debido a la siguiente estimación

$$\|A_E^\diamond A_E\|_{\mathcal{W}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|d_n\|_{l^\infty} \le \|A_I\|_{\mathcal{W}}^2 < \infty. \tag{2.49}$$

Por (2.40), obtenemos similarmente a (2.48) que

$$\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-l} E \overline{a_l} a_k E^\diamond V^k = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_{l,n} V^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n V^n, \tag{2.50}$$

donde las funciones $\tilde{h}_{l,n} := V^{-l} E \overline{a_l} a_{l+n} E^\diamond V^l \in l^\infty$ son dadas en (2.44) por

$$\tilde{h}_{l,n}(k) = (\overline{a_l} a_{l+n} \circ \pi)(k-l) \quad \text{para toda} \quad l, n, k \in \mathbb{Z},$$

y $\tilde{d}_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_{l,n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ por (2.45). Entonces, similarmente a (2.47), obtenemos

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\tilde{h}_{l,n}\|_{l^\infty} \le \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\overline{a_l}\|_{l^\infty} \|a_{l+n}\|_{l^\infty} = \|A_I\|_{\mathcal{W}}^2 < \infty. \tag{2.51}$$

Por lo tanto $\tilde{d}_n \in l^\infty$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y, en vista de (2.50) y de (2.51),

$$\|\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E\|_{\mathcal{W}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\tilde{d}_n\|_{l^\infty} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \|\tilde{h}_{l,n}\|_{l^\infty} \le \|A_I\|_{\mathcal{W}}^2 < \infty. \tag{2.52}$$

Por lo tanto, el operador $\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n V^n \in \mathcal{W}$ es de banda dominada, y (2.49) junto con (2.52) dan (2.46). $\square$

Sea $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un mapeo inyectivo que satisface alguna de las siguientes condiciones:

(A) *existe un número mínimo $M \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ y números distintos por parejas $n_j \in \mathbb{Z}$ para toda $j \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |\pi(i+j) - \pi(i) - n_j| \le M; \tag{2.53}$$

(B) *existe un número mínimo $M \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ y números distintos por parejas $n_j \in \mathbb{Z}$ para toda $j \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\sup_{i\in\pi(\mathbb{Z}),\, i+j\in\pi(\mathbb{Z})} |\pi^{-1}(i+j) - \pi^{-1}(i) - n_j| \le M. \tag{2.54}$$

Para todos $i, j, n \in \mathbb{Z}$, definimos los números

$$d_{i,j}^{(n)} := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \pi(i) + n = \pi(j), \\ 0 & \text{si} \quad \pi(i) + n \neq \pi(j); \end{cases} \tag{2.55}$$

$$\tilde{d}_{i,j}^{(n)} := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i, j \in \pi(\mathbb{Z}) \ \text{ y } \ \pi^{-1}(i) + n = \pi^{-1}(j), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.56}$$

Lema 2.5.2. *El operador* $A_E A_E^\diamond$ *bajo la condición* (A) *y el operador* $\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond$ *bajo la condición* (B) *son operadores discretos de banda dominada de la forma* $A_E A_E^\diamond = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j V^j \in \mathcal{W}$ *y* $\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{b}_j V^j \in \mathcal{W}$ *con coeficientes dados por*

$$b_j(i) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} a_l(i) d_{i,i+j}^{(n_j+k)} \overline{a_{l-n_j-k}(i+j)},$$
$$\tilde{b}_j(i) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} a_l(i) \tilde{d}_{i,i+j}^{(n_j+k)} \overline{a_{l-n_j-k}(i+j)}$$

para todos $j, i \in \mathbb{Z}$, *y*

$$\|A_E A_E^\diamond\|_{\mathcal{W}} \leq (2M+1)\|A_I\|_{\mathcal{W}}^2, \quad \|\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond\|_{\mathcal{W}} \leq (2M+1)\|A_I\|_{\mathcal{W}}^2. \tag{2.57}$$

Demostración. Aplicando (2.39) y (2.55), obtenemos

$$(EV^n E^\diamond f)(i) = (V^n E^\diamond f)(\pi(i)) = (E^\diamond f)(\pi(i) + n) = d_{i,j}^{(n)} f(j), \tag{2.58}$$

and therefore $EV^n E^\diamond = \big(d_{i,j}^{(n)}\big)_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

Ahora vamos a probar que $A_E A_E^\diamond$ es un operador de tipo Wiener de banda dominada bajo la condición (A). Haciendo uso de (2.40), obtenemos

$$A_E A_E^\diamond = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_l E V^{l-k} E^\diamond \overline{a_k} I = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_l E V^n E^\diamond \overline{a_{l-n}} I. \tag{2.59}$$

Representando al operador $A_E A_E^\diamond$, el cuál satisface (2.53) como un operador de multiplicación por una matriz infinita $B = (b_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, de (2.58) y (2.59) obtenemos que

$$b_{i,j} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_l(i) d_{i,j}^{(n)} \overline{a_{l-n}(j)} \quad \text{para toda} \quad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.60}$$

donde los números $d_{i,j}^{(n)}$ son dados por (2.55). Definiendo las funciones $b_j : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ por $b_j(i) = b_{i,i+j}$ para todas $i, j \in \mathbb{Z}$, concluimos que

$$A_E A_E^\diamond = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j V^j. \tag{2.61}$$

Para probar que el operador (2.61) es de banda dominada, sólo resta mostrar que

$$b_j \in l^\infty \ \text{ para toda } \ j \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|b_j\|_{l^\infty} < \infty. \tag{2.62}$$

Por (2.53) y (2.55), para toda $j \in \mathbb{Z}$ existe un número $n_j \in \mathbb{Z}$ tal que la igualdad $d_{i,i+j}^{(n)} = 1$ se tiene sólo para los números $n = n_j + k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \leq M$. Por lo tanto, de (2.60) y (2.55), concluimos que

$$\begin{aligned} b_j(i) = b_{i,i+j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_l(i) d_{i,i+j}^{(n)} \overline{a_{l-n}(i+j)} \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} a_l(i) d_{i,i+j}^{(n_j+k)} \overline{a_{l-n_j-k}(i+j)} \quad \text{para toda} \quad i,j\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

De (2.63) obtenemos

$$\begin{aligned} \|b_j\|_{l^\infty} = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |b_{i,i+j}| &\leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} |a_l(i)| d_{i,i+j}^{(n_j+k)} |a_{l-n_j-k}(i+j)| \\ &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \sup_{i\in\mathbb{Z}} \big(|a_l(i)||a_{l-n_j-k}(i+j)|\big) \\ &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \|a_l\|_{l^\infty} \|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Por lo que, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|b_j\|_{l^\infty} &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \|a_l\|_{l^\infty} \|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty} \\ &= \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Big(\|a_l\|_{l^\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty} \Big), \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde, para toda $l \in \mathbb{Z}$, toda $k \in \{-M, \dots, M\}$ y toda $j \in \mathbb{Z}$, los números $l - n_j - k \in \mathbb{Z}$ son distintos por parejas por la condición (A), y por lo tanto $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty} \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_j\|_{l^\infty}$. Entonces, por (2.65) y (2.41)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|b_j\|_{l^\infty} \leq \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \|a_l\|_{l^\infty} \Big) \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_j\|_{l^\infty} \Big) = (2M+1) \|A_I\|_{\mathcal{W}}^2,$$

lo cual prueba (2.62) e implica la priera igualdad en (2.57) en vista de (2.61). Por lo tanto, $A_E A_E^\diamond = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j V^j \in \mathcal{W}$.

Ahora, bajo la condición (B) probamos que $\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond$ es también un operador de banda dominada en $\mathcal{W}$. Similarmente a (2.59), obtenemos de (2.40) que

$$\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_l E^\diamond V^{l-k} E \overline{a_k} I = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_l E^\diamond V^n E \overline{a_{l-n}} I. \tag{2.66}$$

Aplicando (2.39) y (2.56), obtenemos que

$$\begin{aligned} (E^\diamond V^n E f)(i) &= \begin{cases} (V^n E f)(s) & \text{si} \ \ i = \pi(s), \\ 0 & \text{si} \ \ i \notin \pi(\mathbb{Z}), \end{cases} = \begin{cases} (Ef)(s+n) & \text{si} \ \ i = \pi(s), \\ 0 & \text{si} \ \ i \notin \pi(\mathbb{Z}), \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\pi(s+n)) & \text{si} \ \ i = \pi(s), \\ 0 & \text{si} \ \ i \notin \pi(\mathbb{Z}), \end{cases} = \begin{cases} f(j) & \text{si} \ \ i = \pi(s), \ j = \pi(s+n), \\ 0 & \text{si} \ \ i,j \notin \pi(\mathbb{Z}), \end{cases} \\ &= \tilde{d}_{i,j}^{(n)} f(j), \end{aligned} \tag{2.67}$$

por lo tanto $E^\diamond V^n E = \big(\tilde{d}_{i,j}^{(n)}\big)_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

Representando el operador $\tilde{A}_E\tilde{A}_E^\diamond$, el cual satisface (2.54) como un operador de multiplicación por una matriz infinita $\tilde{B} = (\tilde{b}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, obtenemos de (2.66) y de (2.67) que

$$\tilde{b}_{i,j} = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_l(i)\tilde{d}_{i,j}^{(n)}\overline{a_{l-n}(j)}, \tag{2.68}$$

donde los números $\tilde{d}_{i,j}^{(n)}$ son dados por (2.56). Definiendo las funciones $\tilde{b}_j : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{b}_j(i) = \tilde{b}_{i,i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\tilde{A}_E\tilde{A}_E^\diamond = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{b}_j V^j. \tag{2.69}$$

Por (2.54) y (2.56), para toda $j \in \mathbb{Z}$ hay un número $n_j \in \mathbb{Z}$ tal que la igualdad $\tilde{d}_{i,i+j}^{(n)} = 1$ se tiene sólo para los números $n = n_j + k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \le M$. Entonces, por analogía con (2.63), obtenemos de (2.68)

$$\tilde{b}_j(i) = \tilde{b}_{i,i+j} = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} a_l(i)\tilde{d}_{i,i+j}^{(n_j+k)}\overline{a_{l-n_j-k}(i+j)}, \tag{2.70}$$

donde similarmente a (2.64),

$$\begin{aligned}\|\tilde{b}_j\|_{l^\infty} = \sup_{i\in\mathbb{Z}}|\tilde{b}_{i,i+j}| &\le \sup_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} |a_l(i)|\tilde{d}_{i,i+j}^{(n_j+k)}|a_{l-n_j-k}(i+j)| \\ &\le \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \|a_l\|_{l^\infty}\|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty}. \end{aligned}\tag{2.71}$$

Consecuentemente, de (2.71) y (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\tilde{b}_j\|_{l^\infty} &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\{-M,\dots,M\}} \|a_l\|_{l^\infty}\|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty} \\ &= \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Big(\|a_l\|_{l^\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|a_{l-n_j-k}\|_{l^\infty}\Big), \\ &\le \sum_{k\in\{-M,\dots,M\}}\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\|a_l\|_{l^\infty}\Big)\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|a_j\|_{l^\infty}\Big) \\ &= (2M+1)\|A_I\|_{\mathcal{W}}^2,\end{aligned}$$

pues, de la condición (B), para todo $l \in \mathbb{Z}$, para todo $k \in \{-M, \dots, M\}$ y toda $j \in \mathbb{Z}$, los números $l - n_j - k \in \mathbb{Z}$ son distintos por parejas. Esto prueba la segunda igualdad en (2.57) en vista de (2.69). Por lo tanto, $\tilde{A}_E\tilde{A}_E^\diamond = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{b}_j V^j \in \mathcal{W}$, lo cual completa la prueba. $\square$

Ya que $\tilde{b}_j(i) = 0$ para toda $j \in \mathbb{Z}$ y toda $i \notin \pi(\mathbb{Z})$ debido a (2.56) y a (2.70), se sigue que el operador $\tilde{A}_E\tilde{A}_E^\diamond$ puede ser invertible en espacio l^p para $p \in (1,\infty)$ solo sí E es una matriz de permutación.

Sea $p \in (1, \infty)$. Bajo las condiciones de los Lemas 2.5.1–2.5.2, los operadores

$$A_E^\diamond A_E, \quad \tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E, \quad A_E A_E^\diamond, \quad \tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond \tag{2.72}$$

Son operadores de banda dominada en $\mathcal{W}$. Más aún por el Corolario 2.3.1,

$$\begin{aligned} N_\pm = \mathrm{ind}_p^\pm(A_E^\diamond A_E) = 0, \quad N_\pm = \mathrm{ind}_p^\pm(\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E) = 0, \\ N_\pm = \mathrm{ind}_p^\pm(A_E A_E^\diamond) = 0, \quad N_\pm = \mathrm{ind}_p^\pm(\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond) = 0. \end{aligned}$$

Por Teorema 2.4.3, el operador A_E es invertible por la izquierda (resp. por la derecha) en el espacio l^p si el operador $A_E^\diamond A_E \in \mathcal{W}$ (resp., $A_E A_E^\diamond \in \mathcal{W}$) es invertible en este espacio. Análogamente, el operador $\tilde{A}_E$ es invertible por la izquierda (resp. por la derecha) en el espacio l^p si el operador $\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E \in \mathcal{W}$ (resp., $\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond \in \mathcal{W}$) es invertible en este espacio. Aplicando Corolario 2.4.2 a los operadores (2.72), inmediatamente establecemos las siguientes condiciones de suficiencia para la invertibilidad izquierda y para la invertibilidad derecha de los operadores A_E y $\tilde{A}_E$ en el espacio l^p con $p \in (1, \infty)$.

Teorema 2.5.1. *El operador A_E dado por* (2.40) *y satisfaciendo* (2.41) *es invertible por la izquierda en el espacio l^p para $p \in (1, \infty)$ si es un operador de Fredholm y la matriz $B_{n,0}$ de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$ definida por $B = A_E^\diamond A_E$ por* (2.38) *es invertible para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. El operador A_E dado por* (2.40) *y satisfaciendo* (2.41) *y condición* (A) *es invertible por la derecha en el espacio l^p para $p \in (1, \infty)$ si es un operador de Fredholm y la matriz $B_{n,0}$ de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$ definida por $B = A_E A_E^\diamond$ por* (2.38) *es invertible para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Bajo esas condiciones, uno de los inversos izquierdos (resp. derecho) del operador A_E es dado por $A_E^L = (A_E^\diamond A_E)^{-1} A_E^\diamond$ (resp., por $A_E^R = A_E^\diamond (A_E A_E^\diamond)^{-1}$).*

Teorema 2.5.2. *El operador $\tilde{A}_E$ dado por* (2.40) *y satisfaciendo* (2.41) *es invertible por la izquierda en el espacio l^p para $p \in (1, \infty)$ si es un operador de Fredholm y la matriz $B_{n,0}$ de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$ definida por $B = \tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E$ por* (2.38) *es invertible para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande . El operador $\tilde{A}_E$ dado por* (2.40) *y satisfaciendo* (2.41) *y la condición* (B) *es invertible por la derecha en el espacio l^p para $p \in (1, \infty)$ si es un operador de Fredholm, E es un operador de permutación y la matriz $B_{n,0}$ de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$ definida por $B = \tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond$ por* (2.38) *es invertible para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Bajo esas condiciones uno de los inversos izquierdos (resp., derechos) del operador $\tilde{A}_E$ es dado por $\tilde{A}_E^L = (\tilde{A}_E^\diamond \tilde{A}_E)^{-1} \tilde{A}_E^\diamond$ (resp., por $\tilde{A}_E^R = \tilde{A}_E^\diamond (\tilde{A}_E \tilde{A}_E^\diamond)^{-1}$).*

2.6 Operadores del tipo Wiener de inclinación dominada

Dado $m \in \mathbb{N}$, consideramos la matriz de tamaño $1 \times m$ $S_m := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ y las matrices infinitas de inclinación dominada

$$\mathcal{E}_m := \left(S_m \delta_{k,j} \right)_{k,j \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{E}_{-m} := \left(S_m \delta_{k,-j} \right)_{k,j \in \mathbb{Z}}, \tag{2.73}$$

donde $\delta_{k,j}$ es la delta de Kronecker. Para toda $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y toda $p \in [1,\infty]$, introducimos el operador $E_m = \mathcal{E}_m I \in \mathcal{B}(l^p)$ asociado con el mapeo inyectivo $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $\pi(n) = mn$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, y consideramos los operadores

$$A_{E_m} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E_m V^k, \quad \tilde{A}_{E_m} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E_m^\diamond V^k, \tag{2.74}$$

donde $a_k \in l^\infty$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, $E_m^\diamond = \mathcal{E}_m^t I \in \mathcal{B}(l^p)$, $\mathcal{E}_m^t$ es la matriz transpuesta a $\mathcal{E}_m$ dada por (2.73) para $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, y $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty$. Entonces los operadores (2.74) son acotados en todo espacio l^p con $p \in [1,\infty]$, y

$$\|A_{E_m}\|_{\mathcal{B}(l^p)} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty, \quad \|\tilde{A}_{E_m}\|_{\mathcal{B}(l^p)} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty. \tag{2.75}$$

Llamamos a los operadores A_{E_m} y $\tilde{A}_{E_m}$ dados por (2.74) para toda $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y satisfaciendo (2.75) los operadores de tipo Wiener de inclinación dominada. Esos operadores forman un subconjunto de los operadores del tipo Wiener E-módulo. Los operadores A_{E_m} y $\tilde{A}_{E_m}$ son los operadores de multiplicación por matrices infinitas de inclinación dominada $\mathcal{A}_{E_m}$ y $\tilde{\mathcal{A}}_{E_m}$, respectivamente. Directamente se puede probar que

$$E_m V^k E_m^\diamond = \begin{cases} V^{k/m} & \text{si} \quad k/m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.76}$$

Para toda $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, consideremos los operadores $(A_{E_m})^\diamond, \tilde{A}_{E_m}^\diamond \in \mathcal{B}(l^p)$, los cuales son los operadores formalmente adjuntos de los operadores $A_{E_m}, \tilde{A}_{E_m}$ dados por

$$A_{E_m}^\diamond := \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-k} E_m^\diamond \overline{a_k} I, \quad \tilde{A}_{E_m}^\diamond := \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-k} E_m \overline{a_k} I. \tag{2.77}$$

Aplicando (2.77), para toda $p \in [1,\infty]$, obtenemos

$$\|A_{E_m}^\diamond\|_{\mathcal{B}(l^p)} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty, \quad \|\tilde{A}_{E_m}^\diamond\|_{\mathcal{B}(l^p)} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|_{l^\infty} < \infty.$$

De (2.74) y (2.77) se sigue que

$$A_{E_m}^\diamond A_{E_m} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-l} E_m^\diamond \overline{a_l} a_k E_m V^k, \tag{2.78}$$

$$\tilde{A}_{E_m}^\diamond \tilde{A}_{E_m} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-l} E_m \overline{a_l} a_k E_m^\diamond V^k, \tag{2.79}$$

$$A_{E_m} A_{E_m}^\diamond = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_l E_m V^{l-k} E_m^\diamond \overline{a_k} I, \tag{2.80}$$

$$\tilde{A}_{E_m} \tilde{A}_{E_m}^\diamond = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_l E_m^\diamond V^{l-k} E_m \overline{a_k} I. \tag{2.81}$$

Ya que $E_m = E_\pi$ y $E_m^\diamond = E_\pi^\diamond$ para el mapeo inyectivo $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $\pi(n) = mn$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, inmediatamente deducimos del Lema 2.5.1 y (2.76) el siguiente.

Lema 2.6.1. *Los operadores* $A_{E_m}^{\diamond} A_{E_m}$ *y* $\tilde{A}_{E_m}^{\diamond} \tilde{A}_{E_m}$ *dados por* (2.78) *y* (2.79), *respectivamente, son operadores discretos de banda dominada de la forma*

$$A_{E_m}^{\diamond} A_{E_m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n V^n \in \mathcal{W}, \quad \tilde{A}_{E_m}^{\diamond} \tilde{A}_{E_m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n V^n \in \mathcal{W},$$

donde las funciones $d_n, \tilde{d}_n \in l^\infty$ *para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *son dadas por*

$$d_n(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\overline{a_l} a_{l+n})((k-l)/m), \quad \tilde{d}_n(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\overline{a_l} a_{l+n})(m(k-l))$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$, *y* $a_l(k/m) = 0$ *para toda* $l \in \mathbb{Z}$ *y tada* $k \notin m\mathbb{Z}$.

Sea $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ el mapeo inyectivo dado por $\pi(n) = mn$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Entonces la condición (A) junto con las desigualdades (2.53) se satisface para $M = 0$ y $n_j = mj$, mientras la condición (B) junto con las desigualdades (2.54) se tienen para $M = 0$ y $n_j = j/m$. En este caso $d_{i,i+j}^{(mj)} = 1$ para toda $i, j \in \mathbb{Z}$ en vista de (2.55), mientras, por (2.56), $\tilde{d}_{i,i+j}^{(j/m)} = 1$ si $i, j \in m\mathbb{Z}$, y $\tilde{d}_{i,i+j}^{(j/m)} = 0$ en otro caso. Por lo tanto, inmediatamente de Lemma 2.5.2 y fórmulas (2.61), (2.63), (2.69) y (2.70) obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.6.2. *Los operadores* $A_{E_m} A_{E_m}^{\diamond}$ *y* $\tilde{A}_{E_m} (\tilde{A}_{E_m})^{\diamond}$ *dados por* (2.80) *y* (2.81), *respectivamente, son operadores discretos de banda dominada de la forma*

$$A_{E_m} A_{E_m}^{\diamond} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j V^j \in \mathcal{W}, \quad \tilde{A}_{E_m} \tilde{A}_{E_m}^{\diamond} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_j V^j \in \mathcal{W}, \tag{2.82}$$

donde las funciones $b_j, \tilde{b}_j \in l^\infty$ *son dadas por*

$$\begin{aligned} b_j(i) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l(i) \overline{a_{l-mj}(i+j)} \quad \textit{para toda} \;\; i, j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{b}_j(i) &= \begin{cases} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l(i) \overline{a_{l-j/m}(i+j)} & \textit{para toda} \;\; i, j \in m\mathbb{Z}, \\ 0 & \textit{en otro caso} . \end{cases} \end{aligned} \tag{2.83}$$

Por (2.82) y (2.83), el operador $\tilde{A}_{E_m} \tilde{A}_{E_m}^{\diamond} \in \mathcal{W}$ no puede ser invertible en el espacio l^p con $p \in [1, \infty]$ si $|m| > 1$.

Ahora vamos aplicar los resultados de la sección anterior al estudio de la invertibilidad lateral de operadores discretos del tipo Wiener de inclinación dominada en el espacio l^p con $p \in (1, \infty)$. Lemas 2.6.1, 2.6.2, Teorema 2.5.1 y 2.5.2 nos permite establecer condiciones suficientes para la invertibilidad lateral de los operadores A_{E_m} y $\tilde{A}_{E_m}$ dados por (2.74) y satisfaciendo (2.75).

Teorema 2.6.1. *Sea* $p \in (1, \infty)$ *y* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Entonces el operador discreto del tipo Wiener de inclinación dominada* A_{E_m} *es invertible por la izquierda (resp. derecha) en el espacio* l^p *si es un operador de Fredholm y la matriz* $B_{n,0}$ *de tamaño* $(2n-1) \times (2n-1)$ *definida en* (2.38) *y dada por* $B = A_{E_m}^{\diamond} A_{E_m}$ *(resp., por* $B = A_{E_m} A_{E_m}^{\diamond}$*) es invertible para toda* $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande. Bajo esas condiciones, unos de los inversos izquierdos (resp. derechos) del operador* A_{E_m} *es dado por* $A_{E_m}^L = (A_{E_m}^{\diamond} A_{E_m})^{-1} A_{E_m}^{\diamond}$ *(resp., por* $A_{E_m}^R = A_{E_m}^{\diamond} (A_{E_m} A_{E_m}^{\diamond})^{-1}$*).*

Teorema 2.6.2. *Sea* $p \in (1, \infty)$ *y* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*. Entonces el operador discreto del tipo Wiener de inclinación dominada* $\tilde{A}_{E_m}$ *es invertible por la izquierda (resp. por la derecha) en el espacio* l^p *si es un operador de Fredholm y la matriz* $B_{n,0}$ *de tamaño* $(2n-1) \times (2n-1)$ *definida en* (2.38) *y dada por* $B = \tilde{A}^{\diamond}_{E_m} \tilde{A}_{E_m}$ *(resp., por* $B = \tilde{A}_{E_m} \tilde{A}^{\diamond}_{E_m}$*) es invertible para toda* $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande, donde* $|m| = 1$ *en el caso de la invertibilidad derecha. Bajo esas condiciones, uno de los inversos izquierdos (resp. derechos) del operador* $\tilde{A}_{E_m}$ *es dado por* $\tilde{A}^{L}_{E_m} = (\tilde{A}^{\diamond}_{E_m} \tilde{A}_{E_m})^{-1} \tilde{A}^{\diamond}_{E_m}$ *(resp., por* $\tilde{A}^{R}_{E_m} = \tilde{A}^{\diamond}_{E_m} (\tilde{A}_{E_m} \tilde{A}^{\diamond}_{E_m})^{-1}$*).*

Capítulo 3

Operadores continuos

3.1 Operadores continuos con coeficientes acotados

Sea α un homeomorfismo que preserva la orientación de $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ en sí mismo, el cuál tiene dos puntos fijos, el 0 y el ∞. Así $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(\infty) = \infty$, pero $\alpha(t) \neq t$ para toda $t \in (0, \infty)$. La función α es llamada un *cambio*. Como la función α es monóticamente creciente en $\overline{\mathbb{R}}_+$, se tiene que la derivada α' existe y es positiva en casi todo $\overline{\mathbb{R}}_+$. Definimos $\alpha_0(t) := t$ y $\alpha_n(t) = \alpha[\alpha_{n-1}(t)]$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}$. Sea $G := \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el grupo cíclico generado por el cambio α. Entonces G es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}$. Dado $\tau \in \mathbb{R}_+$ definimos

$$\tau_- := \lim_{n\to-\infty} \alpha_n(\tau), \quad \tau_+ := \lim_{n\to\infty} \alpha_n(\tau).$$

Los puntos τ_+ y τ_- son llamados atractor y repulsor, respectivamente. Entonces puede pasar que $\tau_- = 0$ y $\tau_+ = \infty$ o $\tau_- = \infty$ y $\tau_+ = 0$.

Fijado $\tau \in \mathbb{R}_+$ y sea γ un semisegmento de $\mathbb{R}_+$ con puntos finales τ y $\alpha(\tau)$, donde $\tau \in \gamma$ y $\alpha(\tau) \notin \gamma$. Obtenemos la siguiente descomposición orbital de $\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{R}_+ = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n(\gamma), \quad \alpha_i(\gamma) \cap \alpha_j(\gamma) = \emptyset, \quad \text{para } i \neq j. \tag{3.1}$$

Lema 3.1.1. *Sean $p \in [1, \infty]$ y α un cambio con $\log \alpha' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces el operador de peso $U_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ definido por*

$$U_\alpha f := (\alpha')^{1/p}(f \circ \alpha), \quad \textit{para } f \in L^p(\mathbb{R}_+). \tag{3.2}$$

es una isometría en el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Demostración. Sea $p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned}
||U_\alpha f||^p_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}_+} \left((\alpha')^{1/p}(f \circ \alpha)\right)^p (t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} ((\alpha')^{1/p}(t))^p (f \circ \alpha)^p(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \alpha'(t) f^p(\alpha(t))dt
\end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $u = \alpha(t)$ y considerando que α es un cambio que preserva la orientación de $\overline{\mathbb{R}_+}$ tenemos que la última igualdad de la ecuación anterior es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}_+} f^p(u)du = ||f||_{L^p(\mathbb{R}_+)},$$

lo cual implica que el cambio U^α es una isometría. □

El lema anterior implica que U_α es invertible en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$ para $p \in [1,\infty]$. Podemos pensar al operador $U_\alpha : L^p \to L^p$ como la versión continua del operador $V : l^p \to l^p$, $(Vf)(n) = f(n+1)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ que estudiamos en el capítulo 2, por lo que, en lo que sigue los operadores U_α y V estarán relacionados. Dada una función $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ y debido a que α_n son funciones absolutamente continuas para toda $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que a es medible en $\mathbb{R}_+$ si y sólo si $a \circ \alpha_n$ lo es.

Sea $\mathfrak{A}_{W,p}$ el álgebra de Banach con unidad que consiste de todos los operadores de la forma

$$A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k U_\alpha^k \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+)), \tag{3.3}$$

donde $a_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $p \in [1,\infty]$ y satisfaciendo

$$||A||_W := \sum_{k\in\mathbb{Z}} ||a_k||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty. \tag{3.4}$$

por la analogía con el álgebra de Wiener de series de Fourier absolutamente convergentes llamamos al álgebra $\mathfrak{A}_{W,p}$ el álgebra de operadores funcionales del tipo Wiener.

Teorema 3.1.1. *[2, Teorema 4.1.] El álgebra de Wiener $\mathfrak{A}_{W,p}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ para toda $p \in [1,\infty]$.*

Dado $p \in [1,\infty]$ consideramos el álgebra unitaria de Banach $\mathcal{W} = \mathcal{W}_p$ el cual consiste de todos los operadores discretos del tipo Wiener de la forma

$$\mathcal{D} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k V^k \in \mathcal{B}(l^p), \quad \text{con } d_k \in l^\infty \text{ y } ||\mathcal{D}||_{\mathcal{W}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ||d_k||_{l^\infty} < \infty,$$

definida en el capítulo 2.

Sea $p \in [1,\infty]$, por analogía con [14, Capítulo V, Sección 26.5], decimos que una función $f : t \mapsto f(t)$ con valores en l^p y definida para casi toda $t \in \mathbb{R}_+$ es medible en $\mathbb{R}_+$ si para cualquier $\eta \in l^q$ $(1/p + 1/q = 1)$ la función compleja $t \mapsto (f(t), \eta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} [f(t)(n)]\overline{\eta(n)}$ es Lebesgue medible en $\mathbb{R}_+$, la función $\mathcal{A}\xi : t \mapsto \mathcal{A}(t)\xi(t)$ con valores en l^p definida para casi toda $t \in \mathbb{R}_+$ es medible en $\mathbb{R}_+$. Es sabido que si $\mathcal{A} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(l^p)$ es una función medible en $\mathbb{R}_+$, entonces la función $t \mapsto ||\mathcal{A}(t)||_{\mathcal{B}(l^p)}$ es medible en $\mathbb{R}_+$ también.

3.1.1 Relación con operadores discretos

Siguiendo la línea como en [8, Sección 3.2] consideramos el isomorfismo isométrico

$$\sigma : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\gamma, l^p), \qquad f \mapsto \psi \quad \text{donde} \quad \psi : \gamma \to l^p, \qquad t \mapsto \{(U_\alpha^n f)(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{3.5}$$

Lema 3.1.2. *[8, Lema 7] Sea $A \in \mathfrak{A}_p$, entonces el operador $\hat{A} := \sigma A \sigma^{-1} \in \mathcal{B}(L^p(\gamma, l^p))$ es dado por $(\hat{A}\psi)(t) = \mathcal{A}(t)\psi(t)$ para casi toda $t \in \gamma$, donde $\mathcal{A}$ es una función con valores en $L^\infty(\gamma, \mathcal{B}(l^p))$ el cual tiene la forma*

$$\mathcal{A} = (a_{j-i}[\alpha_i(t)])_{i,j\in\mathbb{Z}} \quad \textit{para casi toda} \quad t \in \gamma. \tag{3.6}$$

El operador $\mathcal{A}$ es llamado el operador discreto asociado al operador continuo A. La importancia de estos operadores radica en el siguiente hecho.

Teorema 3.1.2. *Un operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es invertible en L^p si y sólo si para casi toda $t \in \gamma$ los operadores $\mathcal{A}(t)$ dados en el lema 3.1.2, son invertibles en l^p y la función $\mathcal{A}^{-1} : \gamma \to \mathcal{B}(L^p)$, $\quad t \mapsto (\mathcal{A}(t))^{-1}$ pertenece a $L^\infty(\gamma, \mathcal{B}(l^p))$.*

Ahora consideramos a el espacio de Banach $L^p(\gamma, l^p)$ de todas las funciones medibles con valores en l^p definidas en γ con la norma

$$||f||_{L^p(\gamma,l^p)} := \begin{cases} (\int_\gamma ||f(t)||_{l^p}^p dt)^{1/p} & \text{si} \quad p \in [1, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in\gamma} ||f(t)||_{l^\infty} & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Reemplazando $(1, 0)$ por $\mathbb{R}_+$ y del mismo modo que en [2, Lema 4.2] tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. *Sea $p \in [1, \infty]$ y $A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k U_\alpha^k \in \mathfrak{A}_{W,p} \subset \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$, entonces el operador $\mathcal{A} : t \mapsto \mathcal{A}(t)$ definido por*

$$\mathcal{A}(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k,t} V^k \in \mathcal{W} \subset \mathcal{B}(l^p) \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.7}$$

donde $a_{k,t}(n) := a_k[\alpha_n(t)]$ para toda $k, n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}_+$ es una función acotada medible con valores en $\mathcal{B}(l^p)$ definida en $\mathbb{R}_+$ y

$$||A||_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))} = ess \sup_{t\in\gamma} ||\mathcal{A}(t)||_{\mathcal{B}(l^p)} = ess \sup_{t\in\mathbb{R}_+} ||\mathcal{A}(t)||_{\mathcal{B}(l^p)} \leqslant ||A||_W.$$

Más aún $\mathcal{A}|_\gamma I = \sigma A \sigma^{-1} \in \mathcal{B}(L^p(\gamma, l^p))$, donde $\sigma : L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\gamma, l^p)$ es el isomorfismo isométrico dado para $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ por

$$\sigma f : \gamma \to l^p, \quad t \mapsto (\sigma f)(t), \quad [\sigma f(t)](n) = (U_\alpha^n f(t)) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Teorema 3.1.4. *[2, Teorema 4.3] Un operador $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ dado por 3.3 y satisfaciendo 3.4 es invertible en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si para casi toda $t \in \gamma$ los operadores discretos $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{W}$ dados por 3.7 son invertibles en los espacios l^p y la función $\mathcal{A}^{-1} : \gamma \to \mathcal{B}(l^p)$, $t \mapsto \mathcal{A}(t)^{-1}$ pertenece al álgebra de Banach $L^\infty(\gamma, \mathcal{B}(l^p))$.*

3.2 Invertibilidad lateral de operadores funcionales

Lema 3.2.1. *[2, Lema 4.5] Sea $p \in [1, \infty]$, un operador $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ dado por 3.3 y satisfaciendo 3.4 es invertible por la izquierda en el espacio $L^P(\mathbb{R}_+)$ si para casi toda $t \in \gamma$ los operadores discretos asociados $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{W}$ dados por 3.7 son invertibles por la izquierda en el espacio l^p y existen inversos izquierdos $\mathcal{A}(t)^L$ tal que la función $\mathcal{A}^L : \gamma \to \mathcal{B}(l^p)$, $t \mapsto \mathcal{A}(t)^L$ pertenece al álgebra de Banach $L^\infty(\gamma, \mathcal{B}(l^p))$.*

Dado un operador $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+)$ definimos su norma inferior $|A|_+$ por

$$|A|_+ := \inf_{f \in L^p(\mathbb{R}_+), ||f||_{L^p(\mathbb{R}_+)}=1} ||Af||_{L^p(\mathbb{R}_+)}.$$

Lema 3.2.2. *Sea $p \in [1, \infty)$ y sea $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ de la forma*

$$A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k U_\alpha^k$$

con $a_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces las normas inferiores de A y de los operadores discretos asociados $\mathcal{A}(t)$ son relacionadas por la fórmula

$$|A|_+ = \operatorname*{ess\,inf}_{t \in \gamma} |\mathcal{A}(t)|_+. \tag{3.8}$$

Demostración. Sea $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $||f||_{L^p(\mathbb{R}_+)} = 1$ y $\varphi = \sigma f \in L^p(\gamma, l^p)$ definida por $t \mapsto \varphi(t) = \{U_\alpha^n f(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^p$,

$$||\mathcal{A}(t)\varphi(t)||_{l^p} \geqslant |\mathcal{A}(t)|_+ ||\varphi(t)||_{l^p} \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{t \in \gamma} |\mathcal{A}(t)|_+ ||\varphi(t)||_{l^p}. \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} ||Af||^p_{L^p(\mathbb{R}_+)} = ||\sigma(Af)||^p_{L^p(\gamma, l^p)} &= \int_\gamma ||\mathcal{A}(t)(\sigma f)(t)||^p_{l^p} dt \\ = \int_\gamma ||\mathcal{A}(t)\varphi(t)||^p_{l^p} dt &\geqslant (\operatorname*{ess\,inf}_{t \in \gamma} |\mathcal{A}(t)|_+)^p \int_\gamma ||\varphi(t)||^p_{l^p} dt \\ &= (\operatorname*{ess\,inf}_{t \in \gamma} |\mathcal{A}(t)|_+)^p ||f||^p_{L^p(\mathbb{R}_+)}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$|A|_+ = \operatorname*{ess\,inf}_{f \in L^p(\mathbb{R}_+), ||f||_{L^p(\mathbb{R}_+)}=1} ||Af||_{L^P(\mathbb{R}_+)} \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{t \in \gamma} |\mathcal{A}(t)|_+,$$

el cual en vista de [2, Lema 4.6] implican (3.8). □

Teorema 3.2.1. *Sea $p \in (1, \infty)$ y sea $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$, entonces el operador A dado por (3.3) y satisfaciendo (3.4) es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio l^p sí y sólo si $|A|_+ > 0$ en el espacio l^p (resp., $|A^*|_+ > 0$ en el espacio l^q) donde $1/p + 1/q = 1$.*

Demostración . Suficiencia. Solo probaremos el caso de $|A|_+ > 0$, el caso $|A^*|_+ > 0$ es tratado similarmente.
Si $|A|_+ > 0$, entonces por propiedades del ínfimo esencial y por Lema 3.2.2 obtenemos

$$|\mathcal{A}(t)|_+ \geq \operatorname*{ess\,inf}_{t \in \gamma} |\mathcal{A}(t)|_+ = |A|_+ > 0, \quad \forall t \in \gamma,$$

donde $\mathcal{A}(t) \in \mathfrak{A}_p, \forall t \in \gamma$, entonces concluimos por Teorema 2.4.1 que $\mathcal{A}(t)$ es invertible por la izquierda en el espacio l^p. Por Lema 3.2.1 concluimos que A es invertible por la izquierda.

Necesidad. es evidente. □

Dado $p \in (1,\infty)$ y un operador $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ dado por (3.3) definimos su operador adjunto $A^* \in \mathfrak{A}_{W,q}$ de la forma

$$A^* := \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_\alpha^{-k}\overline{a_k}I \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}_+)), \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{3.11}$$

Lema 3.2.3. *Sea $p \in (1,\infty)$ y $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ un operador de la forma (3.3) y satisfaciendo (3.4), entonces los operadores A^*A y AA^* pertenecen al álgebra $\mathfrak{A}_{W,p}$, y son dados por*

$$A^*A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n U_\alpha^n \in \mathfrak{A}_{W,p} \quad y \quad AA^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n U_\alpha^n \in \mathfrak{A}_{W,p}, \tag{3.12}$$

con coeficientes $d_n \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ dados por

$$d_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\overline{a_l}a_{l+n}) \circ \alpha_{-l} \quad y \quad \tilde{d}_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{l+n}(\overline{a_l} \circ \alpha_n). \tag{3.13}$$

Demostración. Haciendo las multiplicaciones correspondientes obtenemos

$$\begin{aligned} A^*A &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} U_\alpha^{-l}\overline{a_l}a_k U_\alpha^k = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} U_\alpha^{-l}\overline{a_l}a_{l+n}U_\alpha^{(l+n)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(U_\alpha^{-l}\overline{a_l}a_{l+n}U_\alpha^l\right)U_\alpha^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} (\overline{a_l}a_{l+n}) \circ \alpha_{-l}U_\alpha^n. \\ AA^* &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k U_\alpha^{k-l}\overline{a_l} = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{l+n}U_\alpha^n\overline{a_l} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{l+n}(\overline{a_l} \circ \alpha_n)U_\alpha^n. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Definiendo los operadores

$$d_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\overline{a_l}a_{l+n}) \circ \alpha_{-l} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{l+n}(\overline{a_l} \circ \alpha_n). \tag{3.15}$$

obtenemos(3.13). Calculado sus normas

$$\begin{aligned} ||d_n||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} &= \sup_{t\in\gamma} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\overline{a_l}a_{l+n}) \circ \alpha_{-l}(t) \leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}} ||\overline{a_l}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}||a_{l+n}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} ||\overline{a_l}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\Big)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} ||a_{l+n}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\Big) \leq ||A||_W^2 < \infty. \\ ||\tilde{d}_n||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} &= \sup_{t\in\gamma} \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{l+n}[\overline{a_l} \circ \alpha_n](t) \leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} ||a_{l+n}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}||\overline{a_l}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} ||a_{l+n}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\Big)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} ||\overline{a_l}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\Big) \leq ||A||_W^2 < \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por último calculando las normas de los operadores A^*A y AA^*

$$||A^*A||_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||d_n||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} ||\overline{a_l}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}||a_{l+n}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \le ||A||_W^2, \tag{3.17}$$

lo que termina la prueba. □

Teorema 3.2.2. *Sea $p \in (1,\infty)$, entonces un operador $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ es invertible por la izquierda (resp., por la derecha) en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si el operador A^*A (resp., AA^*) es invertible en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$, en este caso uno de sus inversos izquierdos (resp., derechos) tiene la forma $A^L = (A^*A)^{-1}A^*$ (resp., $A^R = A^*(AA^*)^{-1}$) y pertenece al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_{W,p}$.*

Demostración. Los operadores A^*A y AA^* pertenecen al álgebra $\mathfrak{A}_{W,p}$ junto con A, por lo que si A^*A (resp., AA^*) es invertible en el espacio $L^P(\mathbb{R}_+)$ por [2, Teorema 4.1] se tiene que su inverso $(A^*A)^{-1}$ (resp., $(AA^*)^{-1}$) también pertenece al álgebra $\mathfrak{A}_{W,p}$. Claramente $A^L = (A^*A)^{-1}A^*$ (resp., $A^R = A^*(AA^*)^{-1}$) es un inverso izquierdo de A (resp., derecho).

Inversamente. Si $A \in \mathfrak{A}_{W,p}$ es invertible por la izquierda, entonces $|A|_+ > 0$, por Lema 3.2.2 y por propiedades de ínfimo esencial tenemos que $|\mathcal{A}(t)|_+ > 0$ lo cual implica que $\mathcal{A}(t) \in \mathfrak{A}_p$ es invertible por la izquierda en el espacio l^p para casi todo $t \in \gamma$. Por lo tanto $\mathcal{A}(t)$ es invertible por la izquierda en todos los espacios l^p con $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$, tomando $p = 2$ y en vista de [14, Sección 2, Corolario 2] la invertibilidad izquierda de un elemento b en una C^*-álgebra es equivalente a la invertibilidad del elemento b^*b en la C^*- álgebra, así el operador $\mathcal{A}(t)^*\mathcal{A}(t)$ es invertible en el espacio l^2 para casi toda $t \in \gamma$ y como el álgebra $\mathcal{W}_2$ es inversamente cerrada en la C^*-álgebra $\mathcal{B}(l^2)$ tenemos que $(\mathcal{A}(t)^*\mathcal{A}(t))^{-1}$ pertenece al álgebra $\mathcal{W}_p$ para toda $p \in \{0\} \cup [1,\infty]$. Por último el operador discreto asociado al operador A^*A es dado por $\mathcal{A}(t)^*\mathcal{A}(t)$ y como este último es invertible para casi todo $t \in \gamma$ concluimos por Teorema 3.1.4 que A^*A es invertible en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$.

El caso de invertibilidad derecha es tratado de forma análoga. □

3.3 Operadores continuos con coeficientes de oscilación lenta

Sea $C_b(\mathbb{R}_+)$ el C^*-álgebra de todas las funciones acotadas en $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$, una función $\varphi \in C_b(\mathbb{R}_+)$ es llamada de oscilación lenta (en 0 y ∞) si para cada (equivalentemente, para algún) $\lambda \in (0,1)$

$$\lim_{r\to s} \operatorname{osc}(f,[\lambda r, r]) = 0, \quad s \in \{0,\infty\},$$

donde

$$\operatorname{osc}(f,[\lambda r, r]) := \sup\{|f(t) - f(\tau)| : t,\tau \in [\lambda r, r]\}$$

es la oscilación de la función f en el segmento $[\lambda r, r] \subset \mathbb{R}_+$. Obviamente el conjunto $\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$ de todas las funciones de oscilación lenta (en 0 y ∞) en $C_b(\mathbb{R}_+)$ es una C^*-álgebra conmutativa con unidad. Esta álgebra contiene propiamente a $C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, la C^*-álgebra de todas las funciones

continuas en $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$.
Si $\log \alpha' \in L^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, entonces el operador peso de cambio U_α definido por

$$U_\alpha \varphi = (\alpha')^{1/p}(\varphi \circ \alpha), \tag{3.18}$$

es una isometría en el espacio de Lesbesgue $L^p(\overline{\mathbb{R}}_+)$ para todo $p \in [1, \infty]$, y por lo tanto el operador U_α es invertible en este espacio.
Decimos que el homeomorfismo considerado $\alpha : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es un cambio de oscilación lenta si su restricción a $\mathbb{R}_+$ es un un difeomorfismo y $\log \alpha' \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$. El conjunto de todos los cambios de todos los cambios de oscilación lenta es denotado por $\mathrm{SOS}(\mathbb{R}_+)$.
Dado $p \in [1, \infty]$, sea $\mathfrak{A}_{p,\mathrm{SO}}$ el subálgebra de Banach unitaria de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$, el cual es generado por todos los operadores de multiplicación por funciones en $\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$ y por los operadores U_α y U_α^{-1}, donde $\alpha \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$. Los operadores $A \in \mathfrak{A}_{p,\mathrm{SO}}$ son llamados operadores funcionales.
Sea $\mathfrak{A}_W := W_{p,\mathrm{SO}}$ el álgebra unitaria de Banach de todos los operadores de la forma:

$$A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k U_\alpha^k \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+)) \tag{3.19}$$

donde $a_k \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$ y norma dada por

$$||A||_W := \sum_{k \in \mathbb{Z}} ||a_k||_{C_b(\mathbb{R}_+)} < \infty. \tag{3.20}$$

Por la analogía con el álgebra de Wiener de series de Fourier absolutamente convergentes, llamamos a $\mathfrak{A}_W$ el álgebra de Wiener de operadores funcionales con coeficientes de oscilación lenta.

3.4 Funciones de oscilación lenta y cambios

Sea $M(\mathfrak{A})$ el espacio de ideales maximales de un álgebra unitaria conmutativa de Banach $\mathfrak{A}$. Identificamos los puntos $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ con las funcionales de evaluación $t(f) = f(t)$ para $f \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, y obtenemos $M(C(\overline{\mathbb{R}}_+)) = \overline{\mathbb{R}}_+$. Consideremos las fibras

$$M_s(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)) := \{\xi \in M(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)) : \xi|_{C(\overline{\mathbb{R}}_+)} = s\}$$

del espacio de ideales maximales $M(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+))$ sobre los puntos $s \in \{0, \infty\}$. Como $M_t(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)) = \{t\}$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$, obtenemos $M(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)) = \Delta \cup \mathbb{R}_+$, donde $\Delta := M_0(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)) \cup M_\infty(\mathrm{SO}(\mathbb{R}_+))$. En lo que sigue escribiremos $a(\xi) = \xi(a)$ para toda $a \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$ y toda $\xi \in \Delta$.

Lema 3.4.1. *[16, Proposición 2.1] El conjunto $\Delta := M_0(SO(\mathbb{R}_+)) \cup M_\infty(SO(\mathbb{R}_+))$ coincide con el conjunto $clos_{SO^*}\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$, donde $clos_{SO^*}\mathbb{R}_+$ es la clausura asterisco-débil de $\mathbb{R}_+$ en el espacio dual de $SO(\mathbb{R}_+)$.*

Lema 3.4.2. *[16, Proposición 2.2] Suponga que $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un subconjunto contable del espacio $SO(\mathbb{R}_+)$ y $s \in \{0, \infty\}$. Para cada $\xi \in M_s(SO(\mathbb{R}_+))$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \to s$ cuando $n \to \infty$ y*

$$\xi(a_k) = a_k(\xi) = \lim_{n \to \infty} a_k(t_n) \quad \textit{para toda } k \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Inversamente, si $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ *es una sucesión tal que* $t_n \to s$ *cuando* $n \to \infty$ *y los límites* $\lim_{n\to\infty} a_k(t_n)$ *existen para toda* $k \in \mathbb{N}$*, entonces existe una funcional* $\xi \in M_s(SO(\mathbb{R}_+))$ *tal que (3.21) se tiene.*

Lema 3.4.3. *[14, Lema 2.2] Las fibras* $M_0(SO(\mathbb{R}_+))$ *y* $M_\infty(SO(\mathbb{R}_+))$ *son espacios conexos y compactos de Hausdorff.*

Para los resultados siguientes se asume que $\alpha \in \mathrm{SOS}(\mathbb{R}_+)$, esto es, la restricción de α a $\mathbb{R}_+$ es un diffeomorfismo y $\log \alpha' \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$.

Lema 3.4.4. *[13, Lemas 2.3-4] Si* $c \in SO(\mathbb{R}_+)$ *y* $\alpha \in SOS(\mathbb{R}_+)$*, entonces* $\alpha_{-1} \in SOS(\mathbb{R}_+)$*,* $c \circ \alpha$ *pertenece a* $SO(\mathbb{R}_+)$ *y*

$$\lim_{r\to s}[c(t) - c(\alpha(t))] = 0, \qquad \textit{para } s \in \{0, \infty\}.$$

Lema 3.4.5. *[5, Corolario 2.5] Si* $\alpha \in SOS(\mathbb{R}_+)$*, entonces* $\alpha_j \in SOS(\mathbb{R}_+)$ *para toda* $j \in \mathbb{Z}$*.*

Sea $p \in [1, \infty]$, y sea $\mathfrak{A}_W = W_{p,\mathrm{so}} \subset C_b(\mathbb{R}_+)$ el álgebra unitaria de Banach que consiste de todos los operadores de la forma 3.19 con norma 3.20, donde $a_k \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathrm{SOS}(\mathbb{R}_+)$. Claramente $\mathfrak{A}_W \subset \mathfrak{A}_{p,\mathrm{so}} \subset C_b(\mathbb{R}_+)$ para toda $p \in [1, \infty]$, donde $\mathfrak{A}_{p,\mathrm{so}}$ es la clausura de $\mathfrak{A}_W$ en $C_b(\mathbb{R}_+)$.

Dado $p \in [1, \infty]$, consideramos el espacio de Banach l^p y definimos el álgebra de Banach conmutativa con unidad $\hat{\mathcal{D}} \subset \mathcal{B}(l^p)$ dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}} := \{d = \mathrm{diag}\{d_j\}_{j\ \ n\mathbb{Z}} I : d_j \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\pm\infty}(d_{n+j} - d_n) = 0, \text{ para toda } j \in \mathbb{Z}, \\ ||d||_{\mathcal{B}(l^p)} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |d_j| < \infty\}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Es claro que para toda $a \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}_+)$ y toda $t \in \mathbb{R}_+$ los operadores asociados $d = \mathrm{diag}\{a[\alpha_j(t)]\}_{j\in\mathbb{Z}} I$ pertenecen al álgebra $\hat{\mathcal{D}}$.

Nuevamente, considerando el isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned} \sigma : L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\gamma, l^p), \quad f \mapsto \psi; \\ \psi : \gamma \to l^p, \quad t \mapsto \{(U_\alpha^n f)(t)\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Definimos χ_n, $(n \in \mathbb{Z})$ como la función caracterista de $\alpha_n(\gamma)$ y dada una función inyectiva $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definimos el operador $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\pi \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ dado por

$$\mathcal{E} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_n U_\alpha^{\pi(n)-n} \chi_{\pi(n)} \tag{3.24}$$

donde $U_\alpha^{\pi(n)-n}$ es definido como en 3.18. Al igual que el operador U_α es la versión continua del operador V, podemos pensar al operador $\mathcal{E}$ como la versión continua del operador E definido en el capítulo anterior por 2.39 y entonces podemos definir el álgebra de Banach de todos los operadores de la forma

$$A = \sum_{k\ \ n\mathbb{Z}} a_k \mathcal{E} U_\alpha^k \tag{3.25}$$

y deforma análoga a [8], definimos el operador discreto $\mathcal{A}$ asociado al operador A definido en 3.25 como el operador dado por

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{diag}\{d_i(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} IEV^n, \quad d_i(t) = \{a_i[\alpha_j(t)]\}_{j\in\mathbb{Z}} \tag{3.26}$$

En contraste con [5, Teorema 3.1] el operador discreto adjunto puede no ser un operador acotado, ver ejemplo 2.43

Teorema 3.4.1. *Sea $A = \sum_{k\ n\mathbb{Z}} a_k \mathcal{E} U_\alpha^k$, entonces el operador $\hat{A} := \sigma A \sigma^{-1}$ es dado por $(\hat{A}\psi)(t) = \mathcal{A}(t)\psi(t)$ para casi toda $t \in \gamma$, donde $\mathcal{A}$ es un operador de la forma*

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} diag\{d_i(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} IEV^n, \quad d_i(t) = \{a_i[\alpha_j(t)]\}_{j\in\mathbb{Z}} \tag{3.27}$$

Demostración. Para $\psi \in L^p(\gamma, l^p)$ y casi toda $t \in \gamma$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\hat{A}\psi)(t) = (\sigma A \sigma^{-1}\psi)(t) = \{U_\alpha^i (Af(t))\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{U_\alpha^i (\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathcal{E}_\pi U_\alpha^k f(t))\}_{i\in\mathbb{Z}} \\
= \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] U_\alpha^i \mathcal{E} U_\alpha^k f(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] U_\alpha^i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_n U_\alpha^{\pi(n)-n} \chi_{\pi(n)} U_\alpha^k f(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} \\
= \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_n U_\alpha^{\pi(n)-n+i+k} \chi_{\pi(n)} f(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] U_\alpha^{\pi(i+k)} f(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} \\
= \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] \psi_{\pi(i+k)}(t)\}_{i\in\mathbb{Z}}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(t)\psi(t) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k E_\pi V^k)(t)\psi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] E_\pi V^k \psi(t) = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] E_\pi V^k \psi_i(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} \\
= \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] E_\pi \psi_{i+k}(t)\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\alpha_i(t)] \psi_{\pi(i+k)}(t)\}_{i\in\mathbb{Z}}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Esto es el operador $\hat{A}$ es el operador de multiplicación por la función matriz de la forma 3.27, donde los coeficientes a_k son los coeficientes del operador A.

□

El Teorema 3.4.1 junton con el Teorema 3.1.2 da la posibilidad de estudiar la invertibilidad de estos nuevos operadores en términos de los operadores discretos tipo Wiener E- módulo definidos en la sección 2.5.

Bibliografía

[1] Aldroubi, A., Baskakov, A., Krishtal, I.: Slanted matrices, Banach frames, and sampling. J. Funct. Anal. **255**, 1667–1691 (2008)

[2] Asekritova, I., Karlovich, Yu., Kruglyak, N.: One-sided invertibility of discrete operators and their applications. Aequat. Math. **92**, 39–73 (2018)

[3] Böttcher, A., Karlovich, Yu.I., Spitkovsky, I.M.: Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Birkhäuser, Basel (2002)

[4] Böttcher, A., Silbermann, B.: Introduction to large Truncated Toeplitz Matrices. Springer, New York (1999)

[5] Fernández-Torres, G., Karlovich, Yu.: Two-sided and one-sided invertibility of Wiener-type functional operators with a shift and slowly oscillating data. Banach J. Math. Anal. **11**, no. 3, 554–590 (2017)

[6] Gohberg, I., Krupnik, N.: One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. I. Introduction. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 53. Birkhäuser, Basel (1992)

[7] Hagen, R., Roch, S., Silbermann, B.: C^*-algebras and Numerical Analysis. Marcel Dekker, New York (2001)

[8] Karlovich, A.Yu., Karlovich, Yu.I.: Invertibility in Banach algebras of functional operators with non-Carleman shifts. In: Functional Analysis. Proceedings of the Ukrainian Math. Congress-2001, pp. 107–124. Inst. of Math. of NAS of Ukraine, Kiev (2002)

[9] Krein, S.G.: Linear Equations in Banach Spaces. Birkhäuser, Basel (1982)

[10] Kurbatov, V.G.: Functional-Differential Operators and Equations. Mathematics and its Applications, vol. 473. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999)

[11] Lindner, M.: Infinite Matrices and Their Finite Sections. An Introduction to the Limit Operator Method. Birkhäuser, Basel (2006)

[12] Lindner, M., Seidel, M.: An affirmative answer to a coreissue on limit operators. J. Funct. Anal. **267**, 901–917 (2014)

[13] Murphy, G.J.: C*-Algebras and Operator Theory, Academic Press, Boston, 1990.

[14] Naimark, M.A.: Normed Algebras. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands (1972)

[15] Rabinovich, V.S., Roch, S., Roe, J.: Fredholm indices of band-dominated operators. Integr. Equ. Oper. Theory **49**, 221–238 (2004)

[16] Rabinovich, V.S., Roch, S., Silbermann, B.: Fredholm theory and finite section method for band-dominated operators. Integr. Equ. Oper. Theory **30**, 452–495 (1998)

[17] Rabinovich, V.S., Roch, S., Silbermann, B.: Limit Operators and Their Applications in Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications **150**, Birkhäuser, Basel (2004)

[18] Roch, S., Santos, P.A., Silbermann, B.: Non-commutative Gelfand Theories. A Tool-kit for Operator Theorists and Numerical Analysts. Springer, London (2011)

[19] Roch, S.: Band-dominated operators on l^p-spaces: Fredholm indices and finite sections, Acta Sci. Math. **70**, no. 3–4, 783–797 (2004)

[20] Ronald G. Douglas.: Banach Algebra Techniques in Operador Theory. Academic Press, INC. (London) LTD. (1972)

[21] Seidel, M.: Fredholm theory for band-dominated and related operators: A survey. Linear Algebra Appl. **445**, 373–394 (2014)

[22] Seidel, M.: On semi-Fredholm band-dominated operators. Integr. Equ. Oper. Theory **83**, 35–47 (2015)

[23] Sun, Q.: Wiener's lemma for infinite matrices II. Constr. Approx. **34**, 209–235 (2011)

[24] Tessera, R.: Left inverses of matrices with polynomial decay. J. Funct. Anal. **259**, 2793–2813 (2010)

[25] Walter Rudin.: Functional Analysis. McGraw-Hill, Inc.-2nd ed (1991)

DR. JEAN MICHEL GRÉVY MACQUART
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada: **Invertibilidad lateral de operadores funcionales con desplazamientos,** que presenta el alumno **Luis Eduardo Flores Zapotitla (10033413)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias.**

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Gennadiy Burlak CIICap-UAEM	APROBADO	
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Natig Atakishiyev IM-UNAM	APROBADO	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Yuriy Karlovych CInC-UAEM	APROBADO	

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

YURIY KARLOVYCH | Fecha:2022-10-25 11:39:46 | Firmante

fM7ezebhxDGF21BaJSlileHLmxbtYA+egDLJJB7eFm+EKFudxs4rugkFSeNtnZKW+kguP9udXFu+BAgNNOsu0Y3A9o9vWKV/Z24D2/ICnQsm+oHN3ZSPTmPgvpJE3uq1qUP6fT
baBXqxfdFIz9buHmcZVIjhdvXlrObX+19YrTkysfwLdMGyOtpMSQucYFEFLs3L2GZI3xKgV3mX1fQjIVHUnBFtEYVHGRCY42x/rkK27tdnmYoml8pR8tkzc9elZs7prfpijlIDIIfxOQU67f
lVvOcyC5pzmVppM4QGUHIi8x51RA4hfKUC8hvKG6lbjXp254NYMK0s/sAXN9PYOw==

GENNADIY BURLAK | Fecha:2022-10-25 11:53:53 | Firmante

rh0z2iFy6x/1VKfJlm3OEOg15M3LB73VABi0oExH8Iu21l7AGxuGytmZJTN+Ef9k6kbdnjTe0Eh5qoVVCPc+Vi747zyPfk0BOJlNtgWan9hSxFvzWKfTaT7xyOUJ988NMLijYsgWlzyIR
sJLoiVRTF8EUnxPtwFgIRP9altDTtteOapMcpeq6Rs6h4EEW8R1kHdLLzG0mHxHpXv5rOS4r8AZL2FGT4IhMVH2uycSxb+eSDHdKUisomEF0LZUJUMbO/3U+i8iQ4NDDCKTXO
N7vfSPUlqiZxHesznmnD1y3alNuhsoWMKtaIxA2ksRXeZQMLD963F3guGsYvPD6BZyvA==

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2022-10-25 12:54:34 | Firmante

toVc8+0CWdBCZq0BDR8vEqYVV5FyMoRJ5PB4KZd0GQotUFDXkWiO4MkwProUi1Rk2NpB66rk4Wofopr3+G2CNqMligYZd0PtJZZ1BXz8DU8ydx+B0HixbJYluxr1GcvXC8RJfA
onZw0HQ3VabJUUqwqVfmvrL6onvH6Jr8WnHUJ5dyEriFvNtCZiX2vNONUok968K6tEomhXIwGCrBWCKFUY7ekwPhrK6SYPh2KrD+DuyO7WSJYqsLx3pLjWpiDxoPaQkfEkKVv
vL56QgNUR6QCHSCrZVho4LYw51brum2iBLKPJSAZdsrlzelDtDufOntNgZ6vrDagBlDkuOxNXJQ==

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2022-10-25 13:06:16 | Firmante

l7bilw3zSckPcGpsGA3KxdbdlmJjCG+46mL8XrsB3VoFemaIenfaTryOF8z+wHW8PBJgpR99jnDANekwno1/FL/I2rZJg6tJfCvf5+YH1fbxee8r1sIEkpdMaIgo7pWtfYq9mRqhEsWt+b
XC+ldA0R1LfOXlIH3OtYb4Zw1Gfko+jQtvbBRwjuolY0VUV/u0mYFElupCB8+fSTmr8ovgjbiKywP8+rg5bHey0IszNZBwoMNYZb5YioitxOyqDx1ujoF8+mdo/9AVVaQE3n7jKb4kAE
OUO6/KWYvk4VB7CUEOxtzp/t2B0A87NpHhL4YkhahyzhJ193YoGlZR3N8OEw==

NATIG ATAKISHIYEV . | Fecha:2022-10-27 14:39:41 | Firmante

O/NRr51cPppmw3HKgA3UddUmHjHxWPYDJQwLKUNQLh+j3TBQ91NxOaBA1KBq8x9/Lr4B2221d76em2m/zD2V53i4O9r2iKoB/PgL6Si6dt4KcFSOYr+7u+MljfCzbFDXzk01bDk
XZma6tAc4cEDrYwtxnlePnavXcBD5GquX8sKCrerrDz6MXgEnKs53JoW3iEHy75Y9vitZksVG9LyQJ16d6V2fFWRSK6GrWtMipAyZP8r2yzXECOlSqvoqV1bobpi8OnG9y6sn/29pK
qC5w2Hi25ogqSK2iBmAa5khhbXo+VqU6++lMMyBoC49Pj2/GR16CRvnJM9uWKdbFYyaRA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:

gECSbpGmf

https://efirma.uaem.mx/noRepudio/KLDF4DcDYCRDyZghobJuQN7NiTh4H0P2