



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y
APLICADAS**

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO MATEMÁTICO DE LA
PROPAGACIÓN DE DIVERSAS EXCITACIONES EN
SISTEMAS A CAPAS**

T e s i s
Para obtener el título de

Licenciado en Ciencias (Física)

PRESENTA

Oscar Eduardo Nazario Sanchez

Director de Tesis

Dr. Rolando Pérez Álvarez

Cuernavaca, Morelos, Junio del 2018

Dedicada a mis padres y a mi hermana.

Agradecimientos

Primero que todo quiero agradecer a mis padres y a mi hermana por ser el apoyo más grande que he tenido en la carrera y en la vida; sin ustedes este logro no sería posible. A mi familia, quienes ajenos a la Universidad, me ayudaron a superar las dudas y los malos momentos, y quienes me motivaron a seguir adelante. Le agradezco también a todos mis compañeros y amigos, en especial a Brandon Bautista, José Tapia y Roel Rivas, quienes de primera mano, con palabras o acciones, me enseñaron a seguir adelante en la física.

Sin restar importancia, le agradezco a mi tutor, el Dr. Rolando Pérez Álvarez por su paciencia, sus consejos y por facilitarme los medios para este proyecto. A mi compañera Miladys Despaigne por sus comentarios y complementos para este documento.

Resumen

Cuando se estudia la propagación de diversas excitaciones en sistemas a capas, dentro de diferentes áreas de la física, aparece una ecuación diferencial matricial similar a la forma de Sturm-Liouville, pero con un término extra añadido. Por esa razón, en esta tesis se presenta un breve compendio de problemas actuales de la física que conducen a esa ecuación de movimiento. Dicho acopio pretende plantear la necesidad de introducir una pequeña generalización al problema de Sturm-Liouville clásico, cuando se tiene en cuenta la propagación oblicua a las intercaras del sistema estratificado. También se buscan soluciones linealmente independientes, algunas de las matrices de transferencia más importantes y la función de Green regular en el infinito para el problema homogéneo (coeficientes constantes).

Índice general

Resumen	VII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Sistema a capas	1
1.2. Ecuación de movimiento	2
1.3. Hermiticidad de la ecuación de movimiento	3
1.4. Matrices de transferencia	4
1.4.1. Matriz de transferencia completa	4
1.4.2. Matriz de transferencia asociada	5
1.4.3. Matriz de rigidez	6
1.4.4. Matriz de compliance	6
1.4.5. Matriz híbrida	7
1.5. Función de Green	7
1.6. Objetivos	8
2. Acopio de problemas que conducen a ecuaciones de la forma Sturm-Liouville	9
2.1. Ecuación de onda	9
2.1.1. Caso homogéneo e isótropo	9
2.1.2. Caso inhomogéneo y anisótropo	10
2.2. Ecuación de difusión	12
2.2.1. Caso homogéneo e isótropo	12
2.2.2. Caso inhomogéneo y anisótropo	13
2.3. Ecuación de masa efectiva en coordenadas cartesianas	14
2.3.1. Caso inhomogéneo e isótropo	15
2.3.2. Caso inhomogéneo y anisótropo	16
2.4. Ondas electromagnéticas guiadas	17
2.4.1. Ondas electromagnéticas TE	18
2.4.2. Ondas electromagnéticas TM	19
2.5. Comparación	20

3. Soluciones LI, matrices de transferencia y función de Green regular	23
3.1. Soluciones LI	23
3.2. Matriz de transferencia completa del problema homogéneo	25
3.3. Matriz de transferencia asociada del problema homogéneo	26
3.4. Matriz de rigidez del problema homogéneo	28
3.5. Matriz de compliance del problema homogéneo	29
3.6. Matriz híbrida del problema homogéneo	30
3.7. Función de Green	30
3.7.1. Forma lineal asociada a la función de Green	33
4. Conclusiones y perspectivas	35
4.1. Conclusiones	35
4.2. Perspectivas	35
Índice alfabético	37
Bibliografía	38

Índice de figuras

1.1. Sistema a capas	1
3.1. Contornos de integración.	32

Índice de tablas

2.1. Comparación de problemas en medios inhomogéneos e isotropos	20
2.2. Comparación de problemas en medios inhomogéneos y anisotropos	21

- LMR (capa L, capa M, capa R).
- LABR (capa L, capa A, capa B, capa R).
- LAB...ABR (capa L, sistema periódico de dos capas A y B como periodo, capa R).

Cualquiera que sea la combinación elegida para el sistema, las capas pueden estar construidas por un *medio homogéneo*, esto significa que todas las cantidades involucradas, como la velocidad de propagación, no dependen de la dirección. Por otra parte, si se tratara de un *medio inhomogéneo*, entonces existiría una dependencia con la posición, en particular, con la dirección de propagación del campo. En adelante, también vamos a considerar capas que pueden estar construidas por un *medio isótropo*, esto es, aquél cuyas propiedades físicas son idénticas en todas las direcciones. Esto se traduce en cantidades escalares que no cambian con el sistema de referencia. Por último, hay problemas que exigen tomar un *medio anisótropo*. En ellos, las cantidades relacionadas se caracterizan por ser tensores, que en caso de ser homogéneo o inhomogéneo, dependerá o no de la posición.

1.2. Ecuación de movimiento

Al estudiar la propagación de diversas excitaciones en un sistema a capas, como el descrito anteriormente, el problema se puede abordar atendiendo a las propiedades de simetría de la estructura, las cuales nos permiten justificar que la solución sea de la forma:

$$\mathbf{F}(\vec{r}, t) = \mathbf{F}(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)}, \quad (1.1)$$

en donde $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$, $\vec{\rho} = (x, y)$ y $\mathbf{F}(\vec{r}, t)$ es una matriz columna de N componentes, las cuales representan amplitudes de la magnitud de interés, como pueden ser los campos eléctrico o magnético en el caso de ondas electromagnéticas.

Con esta solución se puede encontrar que las ecuaciones de movimiento, para diferentes excitaciones en áreas como el electromagnetismo, la teoría de la elasticidad, la mecánica cuántica y otras, obtienen la misma forma particular. En efecto, para todos esos casos se puede demostrar que la ecuación de movimiento es de la forma [1, 2]:

$$\frac{d}{dz} \left[\mathbf{B}(z) \cdot \frac{d\mathbf{F}(z)}{dz} + \mathbf{P}(z) \cdot \mathbf{F}(z) \right] + \mathbf{Y}(z) \cdot \frac{d\mathbf{F}(z)}{dz} + \mathbf{W}(z) \cdot \mathbf{F}(z) = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

en donde los coeficientes \mathbf{B} , \mathbf{P} , \mathbf{Y} y \mathbf{W} son matrices de $N \times N$, en cuyas componentes se incluyen parámetros relacionados con las propiedades del material. Aquí tengamos cuidado, pues el punto en la ecuación anterior se refiere a la multiplicación de una matriz $N \times N$ y una matriz columna de N componentes, no al producto escalar.

Dentro de los corchetes en la ecuación (1.2) se observa una forma lineal que será parte importante en próximos análisis, por lo que es conveniente definir un campo auxiliar como sigue:

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{B}(z) \cdot \frac{d\mathbf{F}(z)}{dz} + \mathbf{P}(z) \cdot \mathbf{F}(z). \quad (1.3)$$

La importancia de esta cantidad radica en que es continua en z , lo cual se puede demostrar haciendo una integración entre $z - \varepsilon$ y $z + \varepsilon$, para posteriormente tomar el límite en el que $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.3. Hermiticidad de la ecuación de movimiento

Como es natural, la ecuación de movimiento (1.2) se puede escribir en términos de un *operador matricial* diferencial, el cual se define como:

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{d}{dz} \left[\mathbf{B}(z) \cdot \frac{d}{dz} + \mathbf{P}(z) \cdot \right] + \mathbf{Y}(z) \cdot \frac{d}{dz} + \mathbf{W}(z). \quad (1.4)$$

Este operador actúa sobre funciones que dependen de z y que pertenecen a un espacio dado, de modo que $\hat{\mathbf{L}} \mathbf{F}(z) = \mathbf{0}$. De esta forma no podemos evitar preguntarnos qué condiciones debe cumplir $\hat{\mathbf{L}}$ para que los *valores propios* asociados a la ecuación de movimiento sean reales. De hecho, sabemos de la teoría de operadores que lo anterior ocurre cuando $\hat{\mathbf{L}}$ es *hermitiano*, es decir, cuando $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}^\dagger$. Esta igualdad nos conduce a imponer condiciones sobre las matrices \mathbf{B} y \mathbf{W} , las cuales también deben ser hermitianas, y que \mathbf{P} sea el negativo de la matriz \mathbf{Y} conjugada, es decir

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^\dagger, \quad \mathbf{P} = -\mathbf{Y}^\dagger. \quad (1.5)$$

Estas relaciones se cumplen en muchos problemas de interés físico y establecen que el operador $\hat{\mathbf{L}}$ sea *formalmente hermitiano* [1].

En este punto es importante mencionar que, de ahora en adelante, vamos a suponer que el parámetro \mathbf{W} contiene el valor propio, que denotaremos por $\Omega \mathbf{I}_N$, en donde \mathbf{I}_N es la matriz identidad de $N \times N$. También es relevante señalar que los valores propios reales se definen, dentro de la teoría de dispersión, como

$$\Omega = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\Omega + i\eta), \quad (1.6)$$

que es conocida como *formulación causal*.

Dentro de lo mencionado en párrafos anteriores, no hemos atendido a las *condiciones de frontera* asociadas a la ecuación de movimiento, las cuales, por supuesto, están presentes en la manera de operar de $\hat{\mathbf{L}}$. Por ello, consideramos ahora que \mathcal{S}_1 es un espacio de funciones definidas sobre un intervalo finito $[a, b]$, con ciertas condiciones de frontera asociadas y que \mathcal{S}_2 es otro espacio de funciones definidas en el mismo intervalo, pero con condiciones de frontera que en principio pueden ser iguales o diferentes. Si denotamos a $\mathbf{F}_1(z)$ y $\mathbf{F}_2(z)$ como funciones representativas de esos espacios, respectivamente, entonces usando las relaciones de (1.5) se puede demostrar que [1]:

$$\langle \mathbf{F}_2 | \hat{\mathbf{L}}_1 \mathbf{F}_1 \rangle = \langle \mathbf{F}_1 | \hat{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_2 \rangle^\dagger + \mathcal{R}(b) - \mathcal{R}(a), \quad (1.7)$$

en donde $\hat{\mathbf{L}}_1$ y $\hat{\mathbf{L}}_2$ actúan sobre las funciones $\mathbf{F}_1(z)$ y $\mathbf{F}_2(z)$ de manera similar a como lo hace $\hat{\mathbf{L}}$, mientras que $\mathcal{R}(z)$ está dado por

$$\mathcal{R}(z) = \mathbf{F}_2^\dagger(z) \cdot \mathbf{A}_1(z) - \mathbf{A}_2^\dagger(z) \cdot \mathbf{F}_1(z). \quad (1.8)$$

Esto quiere decir que la descripción completa del operador incluye la especificación del espacio funcional sobre el que actúa, lo que significa determinar las condiciones en los extremos del intervalo de definición. En ese sentido las condiciones sobre \mathbf{F}_1 y \mathbf{A}_1 en los puntos a y b determinan \mathcal{S}_1 y de la misma manera las condiciones sobre \mathbf{F}_2 y \mathbf{A}_2 determinan \mathcal{S}_2 . Si con ellas se anula el término $\mathcal{R}(b) - \mathcal{R}(a)$, entonces $\hat{\mathbf{L}}_2$ será el conjugado de $\hat{\mathbf{L}}_1$; más aún, si \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son iguales, se dice que el operador $\hat{\mathbf{L}}$ es *totalmente hermitiano*. En nuestro caso, para que lo anterior se cumpla, vamos a considerar que las placas a los extremos del sistema a capas, que estamos designando con las letras L y R, son semiinfinitas, de modo que los campos y sus derivadas se anulan cuando $z \rightarrow \pm\infty$.

Puesto que los dominios que se encuentran entre las placas L y R son piezas finitas, es necesario establecer condiciones adicionales en sus extremos, en otras palabras, debemos agregar relaciones de continuidad en las interfaces en las que se encuentran dos medios diferentes. Estas relaciones son conocidas como *condiciones de empalme*.

1.4. Matrices de transferencia

Para resolver la ecuación de movimiento se pueden utilizar diferentes técnicas matemáticas, en particular nos interesan dos métodos: el de la *función de Green* (FG) y el de las *matrices de transferencia* (MT). La razón de seguir estos dos enfoques es que a pesar de que la función de Green es de gran utilidad física, es probable que obtener una forma analítica sea muy complicado, por lo que debemos recurrir a métodos numéricos. Esto puede resultar más sencillo cuando se trata con matrices y es por eso la importancia de estudiar las dos soluciones, y sobre todo, cómo se relacionan.

En este apartado vamos a discutir las matrices de transferencia que se utilizarán a lo largo del trabajo, pues en realidad se pueden definir muchas diferentes, esto dependiendo de qué cantidades son conocidas o cuáles son más útiles. Para ello comencemos diciendo que una MT es aquella que nos permite conocer la cantidad de interés $\mathbf{F}(z)$ en un punto cualquiera, dada su forma en un punto inicial. En otras palabras, permite resolver el sistema dadas sus *condiciones iniciales*. Es importante mencionar que la generalización del siguiente contenido y mucho más se puede encontrar en [1]. Aquí presentamos los asuntos requeridos para este documento.

1.4.1. Matriz de transferencia completa

Consideremos un dominio de constitución fijo del sistema a capas. Cuando $N = 1$ nuestro problema se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, por lo que podemos obtener una base con dos soluciones *linealmente independientes* (LI), que denotaremos por

$F_j(z)$, en donde el índice j toma los valores 1 y 2. Entonces podemos escribir el campo y su derivada en términos de esta base, como una combinación lineal:

$$F(z) = \sum_{j=1}^2 a_j F_j(z) \quad \text{y} \quad F'(z) = \sum_{j=1}^2 a_j F'_j(z), \quad (1.9)$$

en donde las a_j son constantes. Las dos ecuaciones anteriores se pueden resumir en una sola expresión del tipo matricial:

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} F(z) \\ F'(z) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} F_1(z) \\ F'_1(z) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} F_2(z) \\ F'_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ F'_1(z) & F'_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.10)$$

Con esta cantidad podemos definir una matriz $\mathbf{M}(z, z_0)$, que llamaremos *matriz de transferencia completa* (FTM del inglés «full transfer matrix»), que justo transfiere las amplitudes y sus derivadas de un punto z_0 a otro punto z , como [1]:

$$\Phi(z) = \mathbf{M}(z, z_0) \cdot \Phi(z_0). \quad (1.11)$$

Si expresamos esta ecuación en términos de la matriz \mathbf{N} podemos eliminar \mathbf{a} , de modo que al despejar la FTM encontramos que

$$\mathbf{M}(z, z_0) = \mathbf{N}(z) [\mathbf{N}(z_0)]^{-1}. \quad (1.12)$$

Esta ecuación es útil pues nos permite conocer $\mathbf{M}(z, z_0)$ en términos del producto de matrices cuyas componentes son las soluciones $F_j(z)$ y sus derivadas $F'_j(z)$.

1.4.2. Matriz de transferencia asociada

Dado que pueden existir problemas en los que la derivada del campo $F(z)$ no es continua, es conveniente buscar otra manera de construir una matriz de transferencia. Ante esto, en lugar de la derivada del campo, vamos ahora a considerar la forma lineal (1.3) asociada a la ecuación de movimiento, que como hemos mencionado anteriormente, es continua. En esa situación podemos definir una matriz $\mathbf{T}(z, z_0)$, llamada *matriz de transferencia asociada* (ATM del inglés «associated transfer matrix»), como aquella que transfiere a $F(z)$ y $A(z)$ de un punto z_0 a un punto z , de la forma [1]:

$$\Psi(z) = \mathbf{T}(z, z_0) \cdot \Psi(z_0), \quad (1.13)$$

en donde

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} F(z) \\ A(z) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} F_1(z) \\ A_1(z) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} F_2(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.14)$$

Aquí hemos expresado el campo $F(z)$ y la forma lineal $A(z)$ en términos de las soluciones LI, según la ecuación (1.9). Entonces al sustituir lo anterior y eliminar \mathbf{a} de (1.13) tendremos que

$$\mathbf{T}(z, z_0) = \mathbf{Q}(z) [\mathbf{Q}(z_0)]^{-1}. \quad (1.15)$$

De nuevo obtenemos una ecuación en términos de las funciones $F_j(z)$ y $A_j(z)$. Esto es de particular importancia porque ambas son cantidades continuas.

1.4.3. Matriz de rigidez

Una pequeña variante en la forma de transferir las cantidades $A(z)$ y $F(z)$ en la ATM, es pasar de los campos evaluados en z_0 y z a las formas lineales en esos mismos puntos. Esto es lo que hace la llamada *matriz de rigidez* (StM del inglés «stiffness matrix»), que denotamos por $\mathbf{E}(z, z_0)$ y la cual se define como:

$$\begin{pmatrix} A(z_0) \\ A(z) \end{pmatrix} = \mathbf{E}(z, z_0) \cdot \begin{pmatrix} F(z_0) \\ F(z) \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Para hallar una expresión de la matriz que buscamos, debemos notar que las matrices columna de la izquierda y la derecha en la ecuación anterior, se pueden escribir en términos de las soluciones LI según las relaciones de (1.9):

$$\begin{pmatrix} A(z_0) \\ A(z) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} A_1(z_0) \\ A_1(z) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} A_2(z_0) \\ A_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

y

$$\begin{pmatrix} F(z_0) \\ F(z) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} F_1(z_0) \\ F_1(z) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} F_2(z_0) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Al usar estos resultados en la ecuación (1.16) podemos eliminar \mathbf{a} en esa relación, por lo que al hacer un despeje obtenemos una expresión para la matriz de rigidez en términos de las soluciones LI del sistema:

$$\mathbf{E}(z, z_0) = \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.19)$$

Esta ecuación es la que vamos a utilizar para encontrar la matriz $\mathbf{E}(z, z_0)$.

1.4.4. Matriz de compliance

Hemos visto que la matriz de rigidez toma las formas lineales $A(z_0)$ y $A(z)$ como variables dependientes de las amplitudes $F(z_0)$ y $F(z)$. Sin embargo, podemos definir otra matriz que haga lo contrario, ésta se conoce como *matriz de compliance* (CM del inglés «compliance matrix»), denotada por $\mathbf{L}(z, z_0)$ y definida como:

$$\begin{pmatrix} F(z_0) \\ F(z) \end{pmatrix} = \mathbf{L}(z, z_0) \cdot \begin{pmatrix} A(z_0) \\ A(z) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Sabemos que en términos de las soluciones LI se cumplen las ecuaciones (1.17) y (1.18). Por lo que al sustituirlas en la ecuación que cumple $\mathbf{L}(z, z_0)$ y eliminar \mathbf{a} tenemos

$$\mathbf{L}(z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.21)$$

1.4.5. Matriz híbrida

Con la definición de las matrices $\mathbf{E}(z, z_0)$ y $\mathbf{L}(z, z_0)$ se puede construir una nueva matriz $\mathbf{H}(z, z_0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} F(z_0) \\ A(z) \end{pmatrix} = \mathbf{H}(z, z_0) \cdot \begin{pmatrix} A(z_0) \\ F(z) \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Esta matriz es conocida como *matriz compliance-stiffnes híbrida* o simplemente matriz híbrida (CSM del inglés «compliance-stiffnes matrix»). Despejando y expresando A y F en términos de las soluciones LI tenemos que

$$\mathbf{H}(z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.23)$$

1.5. Función de Green

Como ya señalamos anteriormente, el método de la función de Green también es importante al estudiar la ecuación de movimiento (1.2), por lo que conviene dar un pequeño repaso sobre ella. Entonces, para este propósito consideremos una ecuación diferencial ordinaria con la forma:

$$\hat{L}|u\rangle = |f\rangle, \quad (1.24)$$

en donde \hat{L} es un operador diferencial de segundo orden, f una función conocida y u una función desconocida. Supongamos que esa ecuación tiene asociada ciertas condiciones de frontera y que su intervalo de validez es $[a, b]$. En general existen dos grandes métodos para resolver este problema, el primero consiste en encontrar la representación espectral del operador estudiando las soluciones de la ecuación $\hat{L}u = \lambda u$, en donde λ es una constante arbitraria. El segundo, que estudiaremos aquí, propone encontrar un operador inverso de \hat{L} . Supongamos entonces que \hat{L} es un operador actuando sobre un espacio de funciones de la forma $u(x)$ y que tiene un inverso $\hat{L}^{-1} \equiv \hat{G}$. En ese caso, al multiplicar por el operador inverso ambos lados de la ecuación (1.24), tenemos $|u\rangle = \hat{G}|f\rangle$. Si ahora multiplicamos $\langle x|$ por la izquierda e insertamos el operador unitario¹ entre \hat{G} y $|f\rangle$, se sigue que

$$u(x) = \langle x|\hat{G}\hat{1}|f\rangle = \int_a^b \langle x|\hat{G}|y\rangle w(y) \langle y|f\rangle dy = \int_a^b G(x, y) w(y) f(y) dy, \quad (1.25)$$

es decir

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) w(y) f(y) dy. \quad (1.26)$$

Hemos encontrado que el inverso del operador diferencial \hat{L} es un operador integral cuyo núcleo (en inglés «kernel») es conocido como función de Green. Nuestro problema ahora se

¹ $\hat{1} = \int |y\rangle w(y) \langle y| dy$

reduce a encontrar $G(x, y)$, por lo que debemos notar que la ecuación anterior es válida si se cumple que

$$\hat{L} u(x) = \int_a^b \hat{L} G(x, y) w(y) f(y) dy = f(x). \quad (1.27)$$

De lo anterior podemos concluir que la función de Green debe satisfacer la ecuación:

$$\hat{L} G(x, y) = \frac{\delta(x - y)}{w(y)}, \quad (1.28)$$

en donde se suele escoger la función de peso $w(y) = 1$. Cabe destacar que una ecuación diferencial tiene asociada un número infinito de funciones de Green, de modo que para establecer una solución concreta necesitamos aplicar las condiciones de frontera. Todo el desarrollo anterior, más detalles y ejemplos se pueden encontrar en [3, 4, 5].

1.6. Objetivos

- Creación de un registro de problemas actuales en diferentes campos de la física que se reducen a ecuaciones con la forma de (1.2) en una dimensión ($N = 1$) y que ilustran la necesidad de introducir una pequeña generalización al problema de Sturm-Liouville clásico, cuando se tiene en cuenta la propagación oblicua a las intercaras del sistema estratificado.
- En el caso importante en donde los parámetros no dependen de la posición (problema homogéneo), buscar las soluciones linealmente independientes, las matrices de transferencia más importantes, así como la función de Green regular en el infinito. Todo lo anterior es una base muy útil para acometer la solución de diversos problemas de contorno en heteroestructuras a capas.

Capítulo 2

Acopio de problemas que conducen a ecuaciones de la forma Sturm-Liouville

2.1. Ecuación de onda

Uno de los fenómenos recurrentes en muchas áreas de la física, es el de la propagación de *ondas*. Una onda es una perturbación que viaja a través de un medio sin provocar un desplazamiento permanente y que transfiere energía a diferentes puntos del espacio. Por ejemplo, cuando una piedra cae en el agua quieta de un lago, se forman ondas que viajan de forma radial hacia todas direcciones de la superficie; cuando se rasga la cuerda de una guitarra, su vibración provoca ondas sonoras que se propagan a través del aire; cuando una estación de televisión transmite su contenido, se propagan ondas electromagnéticas a través del espacio [6]. Otros ejemplos físicos que pueden ser descritos por ondas son las vibraciones en un sólido elástico, mesones libres en la física nuclear y los movimientos sísmicos que se propagan a través de la tierra [7].

2.1.1. Caso homogéneo e isótropo

Cuando se considera un medio homogéneo e isótropo, todos los fenómenos mencionados anteriormente están modelados por una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, conocida como *ecuación de onda*, que está dada por [6]:

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

en donde $\phi(\vec{r}, t)$ es la perturbación de interés y c es la velocidad de propagación, que por las condiciones del medio resulta ser constante. Por ejemplo, en el caso de ondas sonoras $\phi(\vec{r}, t)$ es el potencial de velocidades, del cual se calcula la velocidad de las partículas del fluido con $\vec{v} = \nabla \phi$ y c es la velocidad del sonido a través del aire [6, 8].

Uno de los métodos que se utilizan para resolver ésta, y en general otras ecuaciones diferenciales parciales, es el de *separación de variables* [6, 9]. Este método consiste en suponer que la solución está dada por el producto de dos funciones, una que depende sólo del tiempo

y otra que depende sólo de las coordenadas: $\phi(\vec{r}, t) = F(\vec{r}) T(t)$. Esto implica que podemos escribir la ecuación de onda de la siguiente forma

$$F(\vec{r}) T''(t) = c^2 T(t) \nabla^2 F(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\nabla^2 F(\vec{r})}{F(\vec{r})}. \quad (2.2)$$

Como el lado izquierdo y el lado derecho de la última ecuación dependen de variables diferentes y su resta es cero, ambos términos deben ser iguales a una constante, que se conoce como *constante de separación*. Entonces, si dejamos de lado la parte temporal e igualamos a $-\lambda^2$, obtenemos la siguiente ecuación para la parte espacial:

$$\nabla^2 F(\vec{r}) + \lambda^2 F(\vec{r}) = 0. \quad (2.3)$$

En el desarrollo anterior no existe ninguna razón que justifique el uso del signo negativo al frente de la constante λ^2 , aunque no importa pues si el signo fuera positivo llegaríamos a las mismas soluciones. Sin embargo, lo que realmente importa es el signo de la constante en sí y su elección depende de las condiciones de frontera del problema. No obstante se suele escoger $\lambda^2 > 0$ porque nos permite encontrar soluciones no triviales en forma de senos y cosenos, o como la parte real de una exponencial compleja, pues como sabemos del análisis de Fourier, cualquier función puede escribirse como una suma infinita de componentes armónicas, o también porque es más fácil manipular exponenciales complejas.

Supongamos entonces el sistema a capas que hemos descrito anteriormente, en donde las placas están apiladas a lo largo de la dirección z . De este modo, como ya hemos mencionado, las soluciones se buscan en forma de exponenciales complejas de la forma:

$$F(\vec{r}) = F(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho})}, \quad (2.4)$$

con $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ y $\vec{\rho} = (x, y)$. Por lo tanto, al sustituir esta solución en la ecuación (2.3), obtenemos:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{dF(z)}{dz} \right] + (\lambda^2 - \kappa^2) F(z) = 0, \quad (2.5)$$

que es una ecuación con la forma de Sturm-Liouville, en donde no aparece el término lineal P y por lo tanto tampoco Y , esto según la relación $P = -Y^\dagger$ de las condiciones de hermiticidad. Por último, resulta interesante mencionar que en el caso de coordenadas esféricas, el método de separación de variables conduce a la ecuación de Legendre en Θ y en el caso cilíndrico obtenemos la ecuación de Bessel para R [6]. Estas dos ecuaciones también se pueden escribir en la forma de Sturm-Liouville.

2.1.2. Caso inhomogéneo y anisótropo

Para estudiar la ecuación de onda en un medio anisótropo, consideremos el caso electromagnético, en donde la permitividad y permeabilidad son tensores de segundo rango. Además, supongamos que no existen fuentes ni corrientes, por lo que las ecuaciones de Maxwell en la materia bajo esas condiciones, nos permiten construir una ecuación de onda dada por [10]:

$$\nabla \times \left[\vec{\eta} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) \right] + \frac{\vec{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

en donde $\vec{\eta}$ es el inverso del tensor de permeabilidad $\vec{\mu}_r$, $\vec{\mathbf{E}}$ es el campo eléctrico, $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ y en donde se ha tomado $\vec{\epsilon} = \epsilon_0\vec{\epsilon}_r$ y $\vec{\mu} = \mu_0\vec{\mu}_r$. Entonces, usando la separación de variables con $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{F}}(\vec{r})T(t)$ y considerando que la dependencia temporal es armónica, es decir, $T(t) = e^{i\omega t}$, obtenemos para la parte espacial una ecuación de la forma:

$$\nabla \times \left[\vec{\eta} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \right] - \lambda^2 (\vec{\epsilon}_r \cdot \vec{\mathbf{F}}) = 0, \quad (2.7)$$

en donde $\lambda = \omega/c$. Para reducir la expresión anterior vamos primero a calcular el rotacional del campo $\vec{\mathbf{F}}$, el cual es

$$\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \quad (2.8)$$

Ahora, si hacemos el producto del rotacional anterior con el tensor $\vec{\eta}$, obtenemos un vector $\vec{q} = \vec{\eta} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{F}})$ cuyas componentes son $q_j = \sum_l [\eta_{jl} (\nabla \times \vec{\mathbf{F}})_l]$ con j y l índices que toman los valores 1, 2 y 3. De esto se sigue que

$$\nabla \times \vec{q} = \left(\frac{\partial q_3}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial z}, \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial q_3}{\partial x}, \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right). \quad (2.9)$$

Con el desarrollo anterior hemos logrado llegar a una ecuación vectorial, por lo que vamos a tomar sólo la primer componente del rotacional del vector \vec{q} y como en este trabajo estudiamos problemas en los que el campo de interés es una función escalar, supongamos también que $F_2 = F_3 = 0$, es decir, vamos a analizar la ecuación:

$$\frac{\partial q_3}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial z} - \lambda^2 [\epsilon_{11}(z)F_1] = 0. \quad (2.10)$$

Si estudiamos un sistema a capas con un medio anisótropo e inhomogéneo, en donde las placas están apiladas a lo largo de la dirección z , los tensores involucrados dependerán de z , es decir, tenemos $\vec{\eta}(z)$ y $\vec{\epsilon}_r(z)$. Por otra parte, la componente x del campo se puede escoger como $F_1 = F(z)e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho})}$ con $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ y $\vec{\rho} = (x, y)$. Por lo tanto, al desarrollar los términos de la última ecuación obtenemos al fin que

$$\frac{d}{dz} \left[\eta_{22}(z) \frac{dF(z)}{dz} - i\kappa_y \eta_{23}(z) F(z) \right] - i\kappa_y \eta_{32}(z) \frac{dF(z)}{dz} + [\lambda^2 \epsilon_{11}(z) - \kappa_y^2 \eta_{33}(z)] F(z) = 0. \quad (2.11)$$

Aquí, los coeficientes son

$$B = \eta_{22}(z), \quad P = -i\kappa_y \eta_{23}(z), \quad Y = -i\kappa_y \eta_{32}(z), \quad W = \lambda^2 \epsilon_{11}(z) - \kappa_y^2 \eta_{33}(z). \quad (2.12)$$

Cabe destacar que en lo anterior, los valores $\eta_{23}(z)$ y $\eta_{32}(z)$ son iguales por ser $\vec{\eta}(z)$ un tensor simétrico. Por esta razón, es fácil ver que se cumple la relación $P = -Y^\dagger$.

2.2. Ecuación de difusión

Otra ecuación de la física matemática que tiene gran importancia teórica y práctica es la *ecuación de difusión*, pues ésta se utiliza para modelar diferentes fenómenos en muchas ramas de la física y áreas como la biología o la química. Por ejemplo, en mecánica de fluidos permite describir cómo cambia en el tiempo la concentración de una sustancia química, como un tinte, que se vierte en un líquido; en termodinámica, se utiliza para saber cómo se distribuye la temperatura en el espacio mientras transcurre el tiempo (véanse ejemplos 4 y 5 de [7]). En mecánica cuántica describe la evolución en el espacio y el tiempo de las probabilidades de una partícula. También se utiliza para modelar el movimiento browniano [8, sección 59] y los modelos de difusión para dinámica de la población [7]. En el libro [11] se puede encontrar mucha información sobre esta importante ecuación.

2.2.1. Caso homogéneo e isótropo

En un medio homogéneo e isótropo la ecuación de difusión, que se utiliza para modelar todos los problemas mencionados, toma la siguiente forma general [11]:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 u(\vec{r}, t), \quad (2.13)$$

en donde $u(\vec{r}, t)$ es la cantidad de interés que depende de la teoría que se estudie y D es una constante que se conoce como *factor de difusión*. Por ejemplo, en el caso termodinámico $u(\vec{r}, t)$ representa la temperatura y en el cuántico es la función de onda. Ahora, si utilizamos el método de separación de variables [9], es decir, si suponemos que $u(\vec{r}, t) = F(\vec{r}) T(t)$ y sustituimos en (2.13), obtenemos que

$$F(\vec{r}) T'(t) = D T(t) \nabla^2 F(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{D T(t)} = \frac{\nabla^2 F(\vec{r})}{F(\vec{r})}. \quad (2.14)$$

Por lo tanto haciendo a $-\lambda^2$ la constante de separación, obtenemos para la parte espacial, una ecuación similar al caso de ondas:

$$\nabla^2 F(\vec{r}) + \lambda^2 F(\vec{r}) = 0. \quad (2.15)$$

Como ya discutimos, en general la elección de la constante de separación depende de las condiciones de frontera y se deben estudiar todos los casos, aunque en general se escoge $\lambda^2 > 0$ pues esto conduce a soluciones no triviales en forma de series de Fourier.

Cuando estudiamos un sistema a capas de modo que la dirección z es perpendicular a las interfaces, la función $F(\vec{r})$ es tal que

$$F(\vec{r}) = F(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho})}, \quad (2.16)$$

con $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ y $\vec{\rho} = (x, y)$. Así, obtenemos:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{dF(z)}{dz} \right] + (\lambda^2 - \kappa^2) F(z) = 0, \quad (2.17)$$

que como era de esperarse es una ecuación similar al caso de ondas, en donde no aparecen los términos P y Y .

2.2.2. Caso inhomogéneo y anisótropo

En un medio inhomogéneo y anisótropo, el factor de difusión D depende de la dirección y se convierte en un tensor de segundo rango, por lo que la ecuación (2.13) toma la siguiente forma [12, sección 33]:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\vec{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot \nabla u(\vec{r}, t) \right], \quad (2.18)$$

en donde $\vec{\vec{D}}(\vec{r})$ es un coeficiente tensorial que en general es simétrico. Además, todos los valores principales de este tensor resultan ser positivos. Ahora, continuando con el proceso ya establecido en el caso isótropo, vamos a utilizar la separación de variables, de donde obtenemos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\nabla \cdot \left[\vec{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot \nabla F(\vec{r}) \right]}{F(\vec{r})}. \quad (2.19)$$

Igualando lo anterior a $-\lambda^2$ tenemos para la parte espacial la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \left[\vec{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot \nabla F(\vec{r}) \right] + \lambda^2 F(\vec{r}) = 0. \quad (2.20)$$

En un sistema a capas que está apilado a lo largo de la dirección z , perpendicular a las interfaces, el tensor de difusión será simétrico y dependerá sólo de la coordenada z , es decir, $\vec{\vec{D}}(\vec{r}) = \vec{\vec{D}}(z)$. Por otro lado, la función $F(\vec{r})$ será

$$F(\vec{r}) = F(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho})}, \quad (2.21)$$

con $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ y $\vec{\rho} = (x, y)$. Por lo tanto, al tomar el gradiente de F obtenemos:

$$\nabla F(\vec{r}) = \left(i\kappa_x F(z), i\kappa_y F(z), F'(z) \right) e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}}. \quad (2.22)$$

Para desarrollar la parte espacial vamos a tomar un vector auxiliar $\vec{q} \equiv \vec{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot \nabla F(\vec{r})$, cuyas componentes serán $q_j = \sum_{j=1}^3 D_{jl} [\nabla F(\vec{r})]_l$, de modo que al calcular la divergencia vamos a tener que

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} \quad (2.23)$$

$$= i\kappa_x q_1 + i\kappa_y q_2 + \frac{d}{dz} \left[i\kappa_x D_{31}(z)F(z) + i\kappa_y D_{32}(z)F(z) + D_{33}(z)F'(z) \right] e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}}. \quad (2.24)$$

Desarrollando lo anterior, agrupando términos e introduciendo los vectores $\vec{a} = (D_{31}, D_{32}, D_{33})$ y $\vec{b} = (D_{13}, D_{23}, D_{33})$, la parte espacial de la ecuación de difusión para el caso anisótropo, toma la siguiente forma:

$$\frac{d}{dz} \left[D_{33}(z) \frac{dF(z)}{dz} + i(\vec{\kappa} \cdot \vec{a}) F(z) \right] + i(\vec{\kappa} \cdot \vec{b}) \frac{dF(z)}{dz} + \left(\lambda^2 - \vec{\kappa} \cdot \vec{\vec{D}} \cdot \vec{\kappa} \right) F(z) = 0, \quad (2.25)$$

en donde

$$B = D_{33}(z), \quad (2.26)$$

$$P = i(\vec{\kappa} \cdot \vec{a}) = i\kappa_x D_{31}(z) + i\kappa_y D_{32}(z), \quad (2.27)$$

$$Y = i(\vec{\kappa} \cdot \vec{b}) = i\kappa_x D_{13}(z) + i\kappa_y D_{23}(z), \quad (2.28)$$

$$W = \left(\lambda^2 - \vec{\kappa} \cdot \vec{\vec{D}} \cdot \vec{\kappa} \right) = \left(\lambda^2 - \left[D_{11}(z)\kappa_x^2 + 2D_{21}(z)\kappa_x\kappa_y + D_{22}(z)\kappa_y^2 \right] \right). \quad (2.29)$$

Cabe destacar que en los coeficientes anteriores los vectores \vec{a} y \vec{b} son iguales por ser $\vec{\vec{D}}(z)$ un tensor simétrico, esa es la razón de que aparezca un 2 en frente de D_{21} del coeficiente W . Además, es fácil ver que se cumple la relación $P = -Y^\dagger$.

2.3. Ecuación de masa efectiva en coordenadas cartesianas

El estudio dinámico de los átomos en los sólidos cristalinos, es decir, en aquellos que tienen una estructura periódica y ordenada, resulta complejo debido a que la ecuación de Schrödinger asociada contiene tanto las energías cinéticas de los electrones y los iones, como las interacciones entre éstos: electrón-electrón, electrón-ión e ión-ión. Por esta razón, se recurre al uso de métodos aproximados que ayuden a estudiar de manera más sencilla el problema, como lo son la aproximación adiabática o las monoeléctricas [13, 14]. El método de aproximación que nos interesa aquí, se conoce como cálculo de *masa efectiva*. En él, se define un cuasi-electrón cuya masa es m^* , que en principio es diferente de la masa m_e del electrón libre. Entonces, al introducir m^* a la ecuación de Schrödinger del cristal, para describir al electrón, ésta se convierte en una relación particular que no contiene explícitamente su interacción con la red y con sus propiedades [13, capítulo 5]. Esto es particularmente útil al estudiar el problema del electrón en un cristal cuando hay presencia de campos externos. Por ejemplo, sea $U(\vec{r}, t)$ un campo externo, entonces el hamiltoniano dependiente del tiempo será:

$$\hat{H} = \hat{K} + U_p(\vec{r}) + U(\vec{r}, t), \quad (2.30)$$

en donde $U_p(\vec{r})$ es el potencial periódico y \hat{K} es el operador de energía cinética. Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger es:

$$\hat{H} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Para dar una solución utilizamos la representación de Wannier, en donde se propone una solución que es del tipo:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n \sum_m f_{nm}(t) a_{nm}(\vec{r}), \quad (2.32)$$

en donde a $f_{nm}(t)$ es una función conocida como *envolvente*. Así, cuando sustituimos la solución (2.32) en (2.31) para luego multiplicar por $a_{ls}^*(\vec{r})$ e integrar sobre todo el espacio,

se obtiene una ecuación que se debe resolver para la función envolvente. En esa ecuación ya no aparece el potencial periódico propio del cristal y en lugar del parámetro m_e aparece el factor de masa efectiva m^* .

2.3.1. Caso inhomogéneo e isótropo

En el caso general de un medio inhomogéneo e isótropo se puede demostrar que para sistemas con parámetros que varían suavemente con la posición, la ecuación para la función envolvente, denotada ahora por $F(\vec{r})$, es (ver [1] y las citas ahí):

$$\frac{1}{2} \hat{\vec{p}} \cdot \left[\frac{\hat{\vec{p}} F(\vec{r})}{m(\vec{r})} \right] + V(\vec{r}) F(\vec{r}) = E F(\vec{r}), \quad (2.33)$$

en donde $m(\vec{r})$ es la masa efectiva y $\hat{\vec{p}}$ es el operador de momento lineal, que en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla = -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right]. \quad (2.34)$$

Supongamos un sistema a capas en el que la dirección z es perpendicular a las interfaces. En ese caso, $m(\vec{r}) = m(z)$, $V(\vec{r}) = V(z)$ y las soluciones se pueden buscar en la forma

$$F(\vec{r}) = F(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho})}, \quad (2.35)$$

con $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ y $\vec{\rho} = (x, y)$. Entonces, al aplicar el operador de momento lineal a la función $F(\vec{r})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{p}} F(\vec{r}) &= -i\hbar \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \\ &= -i\hbar \left(i\kappa_x F(z), i\kappa_y F(z), F'(z) \right) e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}} \\ &= \left(\hbar\kappa_x F(z), \hbar\kappa_y F(z), -i\hbar F'(z) \right) e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}}. \end{aligned}$$

Haciendo $\vec{q} = [\hat{\vec{p}} F(\vec{r})]/m(\vec{r})$ y sustituyendo el resultado anterior en el primer término de la

ecuación (2.33), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{q} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 p_j q_j = -\frac{i\hbar}{2} \left[\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{i^2 \hbar \kappa_x}{2} q_1 - \frac{i^2 \hbar \kappa_y}{2} q_2 + \frac{i^2 \hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{F'(z)}{m(z)} \right] e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{p}} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{F'(z)}{m(z)} \right) - \frac{\kappa^2}{m(z)} F(z) \right] e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{p}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (2.33) resulta ser

$$\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{F'(z)}{m(z)} \right] + \left[E - \left(V(z) + \frac{\kappa^2 \hbar^2}{2m(z)} \right) \right] F(z) = 0. \quad (2.36)$$

Aquí hemos obtenido otra ecuación con la forma Sturm-Liouville con $P = 0$.

2.3.2. Caso inhomogéneo y anisótropo

En un medio inhomogéneo y anisótropo, la masa efectiva está caracterizada por un tensor $\vec{m}(\vec{r})$ que depende de la posición, de modo que si denotamos como $\vec{\nu}(\vec{r})$ el inverso de ese tensor, entonces la ecuación (2.33) para la función envolvente toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} \hat{\vec{p}} \cdot \left\{ \vec{\nu} \cdot \left[\hat{\vec{p}} F(\vec{r}) \right] \right\} + V(\vec{r}) F(\vec{r}) = E F(\vec{r}). \quad (2.37)$$

En un sistema a capas en donde las placas están apiladas a lo largo de la dirección z , el tensor de masa efectiva será simétrico y dependerá sólo de la coordenada z , es decir, $\vec{\nu}(\vec{r}) = \vec{\nu}(z)$. Por otro lado $V(\vec{r}) = V(z)$ y la función $F(\vec{r})$ es tal que

$$F(\vec{r}) = F(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{p})} \quad (2.38)$$

con $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ y $\vec{p} = (x, y)$. Además, como ya demostramos anteriormente, al aplicar el operador de momento lineal a la función F , se obtiene que

$$\hat{\vec{p}} F(\vec{r}) = \left(\hbar \kappa_x F(z), \hbar \kappa_y F(z), -i\hbar F'(z) \right) e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{p}}. \quad (2.39)$$

Para continuar, hagamos $\vec{q} = \vec{\nu} \cdot \left[\hat{\vec{p}} F(\vec{r}) \right]$, cuyas componentes son $q_j = \sum_l \nu_{jl} \left[\hat{\vec{p}} F(\vec{r}) \right]_l$ con j y l índices que toman los valores 1, 2 y 3. Por lo tanto, el primer término en la ecuación (2.37) será:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{q} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 p_j q_j = -\frac{i\hbar}{2} \left[\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{i^2 \hbar \kappa_x}{2} q_1 - \frac{i^2 \hbar \kappa_y}{2} q_2 - \frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \left[i(\kappa_x \nu_{31} + \kappa_y \nu_{32}) F(z) + \nu_{33} F'(z) \right] e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{p}}. \end{aligned}$$

Desarrollando los términos con q_1 y q_2 e introduciendo los vectores $\vec{\mathbf{a}} = (\nu_{31}, \nu_{32}, \nu_{33})$ y $\vec{\mathbf{b}} = (\nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{33})$, obtenemos al fin que la ecuación (2.37) será:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \left[\nu_{33}(z) \frac{dF(z)}{dz} + i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{a}}) F(z) \right] + \frac{i\hbar^2}{2} (\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \frac{dF(z)}{dz} \\ + \left[E - \left(V(z) + \frac{\hbar^2}{2} (\vec{\kappa} \cdot \vec{\nu} \cdot \vec{\kappa}) \right) \right] F(z) = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

en donde

$$B = \frac{\hbar^2 \nu_{33}(z)}{2}, \quad (2.41)$$

$$P = \frac{i\hbar^2}{2} (\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{a}}) = \frac{i\hbar^2}{2} [\kappa_x \nu_{31}(z) + \kappa_y \nu_{32}(z)], \quad (2.42)$$

$$Y = \frac{i\hbar^2}{2} (\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = \frac{i\hbar^2}{2} [\kappa_x \nu_{13}(z) + \kappa_y \nu_{23}(z)], \quad (2.43)$$

$$W = E - V(z) - \frac{\hbar^2}{2} [\nu_{11}(z) \kappa_x^2 + 2\nu_{12}(z) \kappa_x \kappa_y + \nu_{22}(z) \kappa_y^2]. \quad (2.44)$$

En esta forma es fácil ver que la relación de hermeticidad se cumple.

2.4. Ondas electromagnéticas guiadas

Un sistema físico mediante el cual se pueden propagar las ondas electromagnéticas siguiendo una trayectoria determinada, se conoce como una *guía de onda* [6]. Su estudio tiene como propósito general el construir dispositivos para transmitir energía e información entre dos puntos. La propagación de la onda depende de la geometría de la guía y los campos deben satisfacer condiciones de empalme en la superficie de separación de los materiales que la conforman. De este modo, en una guía de onda arbitraria, se encuentran tres tipos básicos de ondas electromagnéticas:

- **TE.** Son aquellas en las que el campo eléctrico es transversal a la dirección de propagación.
- **TM.** En estas ondas el campo magnético es transversal a la dirección de propagación.
- **TEM.** Aquí, tanto el campo eléctrico como el campo magnético son transversales a la dirección de propagación.

Supongamos una guía de onda compuesta por varias capas de caras paralelas y perpendiculares al eje cartesiano z . Las capas son de caras estrictamente paralelas, sin rugosidad ni otras imperfecciones. Las dimensiones del sistema en el plano (x, y) son tan grandes que se pueden considerar infinitas. Más aún, el número de capas puede ser pequeño o grande; para

el análisis siguiente no es relevante. Con estas condiciones y considerando una situación en la que no existen corrientes ni fuentes, las ecuaciones de Maxwell en la materia son:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad (2.45)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t}, \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad (2.47)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t}. \quad (2.48)$$

Separando los campos en su parte transversal (perpendicular a z), la cual denotaremos con un subíndice t, quedan como sigue:

$$\vec{\mathbf{D}}_t(\vec{\rho}, z, t) = (D_{0x}(z), D_{0y}(z)) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)}, \quad (2.49)$$

$$D_z(\vec{\rho}, z, t) = D_{0z}(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)}, \quad (2.50)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_t(\vec{\rho}, z, t) = (H_{0x}(z), H_{0y}(z)) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)}, \quad (2.51)$$

$$H_z(\vec{\rho}, z, t) = H_{0z}(z) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)}, \quad (2.52)$$

en donde $\vec{\rho} = (x, y)$ y $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$. Para los demás campos se supone una dependencia similar. Al sustituir lo anterior en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos un sistema de ecuaciones ordinarias en la variable independiente z :

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{D}}_t(z) + D'_z(z) = 0, \quad (2.53)$$

$$i \vec{\kappa} \times \vec{\mathbf{E}}(z) + \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{E}}'(z) = i\omega \vec{\mathbf{B}}(z), \quad (2.54)$$

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{B}}_t(z) + B'_z(z) = 0, \quad (2.55)$$

$$i \vec{\kappa} \times \vec{\mathbf{H}}(z) + \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{H}}'(z) = -i\omega \vec{\mathbf{D}}(z). \quad (2.56)$$

2.4.1. Ondas electromagnéticas TE

En el caso de ondas TE, es decir, cuando el campo eléctrico es transversal a la dirección de propagación ($D_z = 0$), las ecuaciones (2.53)-(2.56) toman la siguiente forma:

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{D}}_t(z) = 0, \quad (2.57)$$

$$i \vec{\kappa} \times \vec{\mathbf{E}}_t(z) + \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{E}}'_t(z) = i\omega \vec{\mathbf{B}}(z), \quad (2.58)$$

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{B}}_t(z) + B'_z(z) = 0, \quad (2.59)$$

$$i \vec{\kappa} \times \vec{\mathbf{H}}(z) + \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{H}}'(z) = -i\omega \vec{\mathbf{D}}_t(z). \quad (2.60)$$

De la primer ecuación podemos notar que $\vec{\mathbf{D}}_t(z)$ es perpendicular al vector de onda $\vec{\kappa}$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar el vector $\vec{\kappa}$ en la dirección y con $\kappa_y = \kappa$, de modo que $D_{0y}(z) = 0$. Por otro lado, de los productos vectoriales de la segunda ecuación podemos

notar que el campo magnético sólo tiene componentes en el plano (y, z) . Por lo tanto obtenemos:

$$-i\kappa E_x(z) = i\omega B_z(z), \quad (2.61)$$

$$E'_x(z) = i\omega B_y(z), \quad (2.62)$$

$$i\kappa B_y(z) + B'_z(z) = 0, \quad (2.63)$$

$$i\kappa H_z(z) - H'_y(z) = -i\omega D_x(z). \quad (2.64)$$

La tercera de estas ecuaciones carece de importancia pues se puede deducir de las dos primeras. Por otra parte, sabiendo que $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r(z) \vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu_r(z) \vec{\mathbf{H}}$, entonces podemos escribir la última ecuación como:

$$i\kappa \left[\frac{B_z(z)}{\mu_0 \mu_r(z)} \right] - \frac{d}{dz} \left[\frac{B_y(z)}{\mu_0 \mu_r(z)} \right] = -i\omega \epsilon_0 \epsilon_r(z) E_x(z). \quad (2.65)$$

Si a lo anterior sustituimos las ecuaciones (2.61) y (2.62) obtenemos una expresión para el campo eléctrico que, después de ciertos arreglos, queda como sigue:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\mu_0}{\mu_r(z)} E'_x(z) \right] + \left(\omega^2 \mu_0^2 \epsilon_0 \epsilon_r(z) - \frac{\mu_0}{\mu_r(z)} \kappa^2 \right) E_x(z) = 0. \quad (2.66)$$

Aquí tenemos una ecuación con la forma de Sturm-Liouville con $P = 0$.

2.4.2. Ondas electromagnéticas TM

Para las ondas TM, la componente H_z es nula, por lo que las ecuaciones (2.53)-(2.56) serán:

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{D}}_t(z) + D'_z(z) = 0, \quad (2.67)$$

$$i \vec{\kappa} \times \vec{\mathbf{E}}(z) + \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{E}}'(z) = i\omega \vec{\mathbf{B}}_t(z), \quad (2.68)$$

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{B}}_t(z) = 0, \quad (2.69)$$

$$i \vec{\kappa} \times \vec{\mathbf{H}}_t(z) + \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{H}}'_t(z) = -i\omega \vec{\mathbf{D}}(z). \quad (2.70)$$

De la ecuación (2.69) podemos ver que $\vec{\mathbf{B}}_t(z)$ es perpendicular al vector de onda $\vec{\kappa}$, entonces tomando $\vec{\kappa}$ en la dirección y con $\kappa_y = \kappa$, la componente B_{0y} será nula. Además, de los productos vectoriales de la ecuación (2.70) vemos que $\vec{\mathbf{D}}$ sólo tiene componentes en y y z . Por lo tanto obtenemos:

$$i \vec{\kappa} \cdot \vec{\mathbf{D}}_t(z) + D'_z(z) = 0, \quad (2.71)$$

$$i\kappa E_z(z) - E'_y(z) = i\omega B_x(z), \quad (2.72)$$

$$H'_x(z) = -i\omega D_y(z), \quad (2.73)$$

$$-i\kappa H_x(z) = -i\omega D_z(z). \quad (2.74)$$

La primera se deduce de las dos últimas, por lo que usando las relaciones $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r(z) \vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu_r(z) \vec{\mathbf{H}}$, podemos escribir la segunda ecuación como:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r(z)} H'_x(z) \right] + \left(\omega^2 \epsilon_0^2 \mu_0 \mu_r(z) - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r(z)} \kappa^2 \right) H_x(z) = 0. \quad (2.75)$$

Ahora tenemos una ecuación muy similar a la obtenida en el caso de ondas TE.

2.5. Comparación

Con el fin de tener una visión general de los coeficientes que aparecen en las ecuaciones de movimiento de los problemas estudiados hasta ahora, los reunimos en la tabla 2.1. Ahí se muestra una comparación de aquellos problemas que fueron estudiados en un medio isótropo, homogéneo para las ecuaciones de onda y de difusión e inhomogéneo para el resto. Todos estos ejemplos terminan en la ecuación clásica de la forma Sturm-Liouville.

Ecuación	B	P	$-P^\dagger$	W
Onda	1	0	0	$\lambda^2 - \kappa^2$
Difusión	1	0	0	$\lambda^2 - \kappa^2$
Masa Efectiva	$\frac{\hbar^2}{2m(z)}$	0	0	$E - \left(V(z) + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m(z)} \right)$
Ondas TE	$\frac{\mu_0}{\mu_r(z)}$	0	0	$\omega^2 \mu_0^2 \epsilon_0 \epsilon_r(z) - \frac{\mu_0}{\mu_r(z)} \kappa^2$
Ondas TM	$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r(z)}$	0	0	$\omega^2 \epsilon_0^2 \mu_0 \mu_r(z) - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r(z)} \kappa^2$

Tabla 2.1: Comparación de coeficientes en las ecuaciones de movimiento de los problemas del catálogo para medios inhomogéneos e isótropos.

De manera similar, en la tabla 2.2 mostramos los problemas que fueron analizados en medios inhomogéneos y anisótropos. En ella se puede observar de manera más clara que se cumple la hermeticidad del operador \hat{L} .

Es importante mencionar que en todos los casos de ambas tablas el parámetro W contiene el valor propio asociado a la ecuación de movimiento. Por ejemplo, en el caso de la masa efectiva es la energía E .

Ecuación	B	P	$-P^\dagger$	W
Onda	$\eta_{22}(z)$	$-i\kappa_y\eta_{23}(z)$	$-i\kappa_y\eta_{32}(z)$	$\lambda^2\epsilon_{11}(z) - \kappa_y^2\eta_{33}(z)$
Difusión	$D_{33}(z)$	$i[\kappa_x D_{31}(z) + \kappa_y D_{32}(z)]$	$i[\kappa_x D_{13}(z) + \kappa_y D_{23}(z)]$	$\left(\lambda^2 - [D_{11}(z)\kappa_x^2 + 2D_{21}(z)\kappa_x\kappa_y + D_{22}(z)\kappa_y^2]\right)$
Masa Efectiva	$\frac{\hbar^2}{2}\nu_{33}(z)$	$\frac{i\hbar^2}{2}[\kappa_x\nu_{31}(z) + \kappa_y\nu_{32}(z)]$	$\frac{i\hbar^2}{2}[\kappa_x\nu_{13}(z) + \kappa_y\nu_{23}(z)]$	$E - V(z) - \frac{\hbar^2}{2}[\nu_{11}(z)\kappa_x^2 + 2\nu_{12}(z)\kappa_x\kappa_y + \nu_{22}(z)\kappa_y^2]$

Tabla 2.2: Comparación de coeficientes en las ecuaciones del catálogo para medios inhomogéneos y anisótropos.

Capítulo 3

Soluciones LI, matrices de transferencia y función de Green regular

3.1. Soluciones LI

Anteriormente establecimos como objetivo el calcular algunas de las matrices de transferencia más importantes para el problema homogéneo, así como la obtención de la función de Green regular en el infinito. Sin embargo, el primer paso a seguir es encontrar las soluciones linealmente independientes del sistema, esto partiendo de la ecuación de movimiento para $N = 1$. En ese caso, la ecuación que debemos considerar es la siguiente (véase [1, sec. 7.1]):

$$\frac{d}{dz} \left[B(z) \frac{dF(z)}{dz} + P(z) F(z) \right] + Y(z) \frac{dF(z)}{dz} + W(z) F(z) = 0. \quad (3.1)$$

Ahora, como vamos a estudiar el problema homogéneo, los parámetros en la expresión anterior no deben ser funciones de z , es decir, deben ser constantes. Por lo tanto, lo que en realidad tenemos es:

$$B \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + (P + Y) \frac{dF(z)}{dz} + W F(z) = 0. \quad (3.2)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, por lo que podemos suponer que su solución es de la forma $F(z) = F_0 e^{ikz}$, en donde F_0 es una constante. Esto se justifica en la teoría de ecuaciones diferenciales [9].

Nótese que la primera y segunda derivadas de la solución propuesta, están relacionadas con la función $F(z)$ sin derivar, lo que se debe a la presencia de la función exponencial, por lo que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{dF(z)}{dz} = ik F(z) \quad \text{y} \quad \frac{d^2 F(z)}{dz^2} = i^2 k^2 F(z). \quad (3.3)$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación (3.2) se obtiene que

$$-k^2 B F(z) + i(P + Y)k F(z) + W F(z) = 0. \quad (3.4)$$

Eliminando $F(z)$ se llega a una ecuación cuadrática para k , la cual es

$$Bk^2 - i(P + Y)k - W = 0, \quad (3.5)$$

cuyas raíces están dadas por

$$k_1 = \frac{i(P + Y) + \sqrt{-(P + Y)^2 + 4BW}}{2B} \quad (3.6)$$

y

$$k_2 = \frac{i(P + Y) - \sqrt{-(P + Y)^2 + 4BW}}{2B}. \quad (3.7)$$

Así, con estas valores de k se pueden construir las dos soluciones LI del sistema, la cuales son

$$F_j(z) = F_{0j} e^{ik_j z}, \quad (3.8)$$

en donde el índice j toma los valores 1 y 2. Por su parte, las formas lineales asociadas para $N = 1$, que serán útiles en cálculos próximos, toman la forma:

$$A_j(z) = F_{0j}(P + ik_j B) e^{ik_j z}. \quad (3.9)$$

Antes de continuar, vamos a analizar algunos casos particulares de interés físico, que condicionan la forma de las raíces k_j . Primero que todo, sabemos de la sección 1.3, que bajo las condiciones de hermiticidad del operador \hat{L} , se tiene que $Y = -P^\dagger$ y que W y B resultan ser números reales, de modo que se puede dar una de las siguientes situaciones:

1. El caso más sencillo que puede ocurrir es que P sea igual a su adjunto, es decir, que se cumpla la relación $P + Y = P - P^\dagger = 0$. Bajo esas condiciones podemos observar que las raíces k_j tienen signos opuestos:

$$k_1 = \sqrt{\frac{W}{B}} \quad \text{y} \quad k_2 = -\sqrt{\frac{W}{B}}. \quad (3.10)$$

Veamos qué pasa con estas igualdades cuando consideramos los signos de los números B y W . Primero, si ambos tienen signos opuestos, las raíces serán números complejos puros, por lo que k_2 será el simétrico de k_1 , respecto del origen. Esto quiere decir que uno se encuentra en un semiplano opuesto al que pertenece el otro. Por otro lado, cuando B y W tienen signos iguales, las raíces k_1 y k_2 serán reales opuestos. Entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos para los análisis posteriores, con el supuesto $P + Y = 0$, que k_1 se encuentra en el semiplano superior o en la parte positiva del eje real, de modo que k_2 se encontrará en el semiplano inferior o en la parte negativa del eje real.

2. Resulta fácil caer en cuenta de que el caso más general ocurre cuando P no es igual a su adjunto y se cumple que $P + Y = P - P^\dagger \neq 0$. En este caso, las raíces son

$$k_1 = \frac{i(P - P^\dagger) + \sqrt{-(P - P^\dagger)^2 + 4BW}}{2B} \quad (3.11)$$

y

$$k_2 = \frac{i(P - P^\dagger) - \sqrt{-(P - P^\dagger)^2 + 4BW}}{2B}. \quad (3.12)$$

Separando el número P en su parte real y su parte compleja, es decir, poniendo $P = P_R + iP_I$, se tiene que $P - P^\dagger = 2iP_I$. Entonces las raíces, que para este caso escribiremos con q_1 y q_2 , toman la siguiente forma:

$$q_1 = -\frac{P_I}{B} + \sqrt{\frac{W}{B} + \frac{P_I^2}{B^2}} \quad \text{y} \quad q_2 = -\frac{P_I}{B} - \sqrt{\frac{W}{B} + \frac{P_I^2}{B^2}}. \quad (3.13)$$

Estos valores son simétricos ya no respecto del origen sino del número real $-P_I/B$. Entonces, cuando B y W tienen signos contrarios y $|W/B|$ es mayor a P_I^2/B^2 , las raíces serán complejas y se encontrarán en un semiplano opuesto al de la otra. Tal semiplano está determinado, de nuevo, por la recta real. Asimismo, si B y W tienen el mismo signo, entonces q_1 y q_2 son reales opuestos respecto al número $-P_I/B$, que también sería real. Por último, como en el caso anterior, vamos a suponer que q_1 se encuentra en el semiplano superior o en la parte derecha del punto $-P_I/B$.

3.2. Matriz de transferencia completa del problema homogéneo

Conociendo las soluciones LI del problema homogéneo, podemos calcular la matriz de transferencia completa con el uso de la ecuación (1.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z, z_0) &= \mathbf{N}(z) \cdot [\mathbf{N}(z_0)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ F_1'(z) & F_2'(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1'(z_0) & F_2'(z_0) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det [\mathbf{N}(z_0)]} \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ F_1'(z) & F_2'(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_2'(z_0) & -F_2(z_0) \\ -F_1'(z_0) & F_1(z_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det [\mathbf{N}(z_0)]} \begin{pmatrix} F_1(z)F_2'(z_0) - F_2(z)F_1'(z_0) & -F_1(z)F_2(z_0) + F_2(z)F_1(z_0) \\ F_1'(z)F_2'(z_0) - F_2'(z)F_1'(z_0) & -F_1'(z)F_2(z_0) + F_2'(z)F_1(z_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Recordando que las funciones primadas denotan derivadas, el determinante en la ecuación anterior es:

$$\det [\mathbf{N}(z_0)] = F_1(z_0)F_2'(z_0) - F_2(z_0)F_1'(z_0) = i(k_2 - k_1)F_1(z_0)F_2(z_0). \quad (3.14)$$

Usando este resultado, junto a las soluciones LI y sus derivadas, según la ecuación (3.8), obtenemos que la forma general de la matriz de transferencia completa es:

$$\mathbf{M}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{ik_2 F_1(z) F_2(z_0) - ik_1 F_1(z_0) F_2(z)}{i(k_2 - k_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} & \frac{-F_1(z) F_2(z_0) + F_2(z) F_1(z_0)}{i(k_2 - k_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} \\ \frac{i^2 k_1 k_2 [F_1(z) F_2(z_0) - F_2(z) F_1(z_0)]}{i(k_2 - k_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} & \frac{-ik_1 F_1(z) F_2(z_0) + ik_2 F_2(z) F_1(z_0)}{i(k_2 - k_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Al tomar el determinante de la matriz anterior se tiene

$$\det [\mathbf{M}(z, z_0)] = \frac{F_1(z) F_2(z)}{F_1(z_0) F_2(z_0)} = \exp \left(i[k_1 + k_2][z - z_0] \right). \quad (3.16)$$

Ahora vamos a estudiar el aspecto de la matriz de transferencia completa considerando los casos particulares para las raíces k_j , los cuales se discutieron anteriormente. Primero, si suponemos que $P + Y = 0$, entonces

$$k_1 = -k_2 = -\frac{k_2 - k_1}{2} = \sqrt{\frac{W}{B}}. \quad (3.17)$$

Al sustituir estas igualdades en la ecuación (3.15), obtenemos que

$$\mathbf{M}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \cos [k_1(z - z_0)] & \frac{1}{k_1} \operatorname{sen} [k_1(z - z_0)] \\ -k_1 \operatorname{sen} [k_1(z - z_0)] & \cos [k_1(z - z_0)] \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Como ya dijimos, el determinante de esta matriz debe ser la unidad según (3.16), lo cual en efecto ocurre:

$$\det [\mathbf{M}(z, z_0)] = \cos^2 [k_1(z - z_0)] + \operatorname{sen}^2 [k_1(z - z_0)] = 1. \quad (3.19)$$

3.3. Matriz de transferencia asociada del problema homogéneo

En los casos en que la derivada de la función $F(z)$ resulta no ser continua, es conveniente estudiar la matriz de transferencia asociada que hemos denotado por $\mathbf{T}(z, z_0)$. En ella, en lugar de transferir las amplitudes y sus derivadas, se transfieren las amplitudes y la forma lineal, ya que siempre resultan ser continuas. Así, según la ecuación (1.15) la matriz $\mathbf{T}(z, z_0)$

es tal que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(z, z_0) &= \mathbf{Q}(z) \cdot [\mathbf{Q}(z_0)]^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z_0) & A_2(z_0) \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{1}{\det [\mathbf{Q}(z_0)]} \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2(z_0) & -F_2(z_0) \\ -A_1(z_0) & F_1(z_0) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\det [\mathbf{Q}(z_0)]} \begin{pmatrix} F_1(z)A_2(z_0) - F_2(z)A_1(z_0) & -F_1(z)F_2(z_0) + F_2(z)F_1(z_0) \\ A_1(z)A_2(z_0) - A_2(z)A_1(z_0) & -A_1(z)F_2(z_0) + A_2(z)F_1(z_0) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Para reducir al máximo la forma de esta matriz, calculamos el determinante que aparece al frente de ella, y para eso debemos sustituir la forma lineal asociada $A(z_0)$, de donde obtenemos que

$$\det [\mathbf{Q}(z_0)] = F_1(z_0)A_2(z_0) - F_2(z_0)A_1(z_0) = iB(k_2 - k_1)F_1(z_0)F_2(z_0). \quad (3.20)$$

Si definimos los parámetros $T_1 = P + iBk_1$ y $T_2 = P + iBk_2$, entonces el determinante anterior toma la forma $(T_2 - T_1)F_1(z_0)F_2(z_0)$ y así al sustituir todo y desarrollar cada elemento de la matriz obtenemos:

$$\mathbf{T}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{T_2 F_1(z) F_2(z_0) - T_1 F_1(z_0) F_2(z)}{(T_2 - T_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} & \frac{-F_1(z) F_2(z_0) + F_2(z) F_1(z_0)}{(T_2 - T_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} \\ \frac{T_1 T_2 [F_1(z) F_2(z_0) - F_2(z) F_1(z_0)]}{(T_2 - T_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} & \frac{-T_1 F_1(z) F_2(z_0) + T_2 F_2(z) F_1(z_0)}{(T_2 - T_1) F_1(z_0) F_2(z_0)} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Esta expresión todavía parece muy complicada, pero si escribimos los campos según la ecuación (3.8) podemos verificar que coincide con la calculada en [1], en donde se toma $z_0 = 0$. Por otro lado, resulta importante verificar el determinante, el cual es similar al que se encontró para el caso de la matriz de transferencia completa:

$$\det [\mathbf{T}(z, z_0)] = \frac{F_1(z) F_2(z)}{F_1(z_0) F_2(z_0)} = \exp(i[k_1 + k_2][z - z_0]). \quad (3.22)$$

Vamos ahora a estudiar cómo se reduce la expresión (3.21) cuando consideramos el caso $P + Y = 0$. Primero, debemos recordar que aquí, las raíces se relacionan como $k_2 = -k_1$, por lo que al introducir las exponenciales de la ecuación (3.8), la matriz de transferencia asociada se transforma en

$$\mathbf{T}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \cos[k_1(z - z_0)] - \frac{P}{Bk_1} \operatorname{sen}[k_1(z - z_0)] & \frac{1}{Bk_1} \operatorname{sen}[k_1(z - z_0)] \\ \frac{-(P^2 + k_1^2 B^2)}{Bk_1} \operatorname{sen}[k_1(z - z_0)] & \cos[k_1(z - z_0)] + \frac{P}{Bk_1} \operatorname{sen}[k_1(z - z_0)] \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

cuyo determinante es

$$\det [\mathbf{T}(z, z_0)] = \cos^2 [k_1(z - z_0)] + \sen^2 [k_1(z - z_0)] = 1. \quad (3.24)$$

Este resultado concuerda con el esperado en la ecuación (3.22).

3.4. Matriz de rigidez del problema homogéneo

Para calcular la matriz de rigidez vamos a utilizar la ecuación (1.19) que encontramos anteriormente, la cual está dada por:

$$\mathbf{E}(z, z_0) = \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.25)$$

Si el determinante de la segunda matriz, al lado derecho de la ecuación, lo denotamos por D , es decir, si

$$D \equiv F_1(z_0)F_2(z) - F_2(z_0)F_1(z), \quad (3.26)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, z_0) &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2(z) & -F_2(z_0) \\ -F_1(z) & F_1(z_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_1(z_0)F_2(z) - A_2(z_0)F_1(z) & -A_1(z_0)F_2(z_0) + A_2(z_0)F_1(z_0) \\ A_1(z)F_2(z) - A_2(z)F_1(z) & -A_1(z)F_2(z_0) + A_2(z)F_1(z_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desarrollando los formas lineales $A(z)$ y $A(z_0)$ en los términos de la matriz anterior, obtenemos por fin:

$$\mathbf{E}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{T_1 F_1(z_0) F_2(z) - T_2 F_2(z_0) F_1(z)}{F_1(z_0) F_2(z) - F_1(z) F_2(z_0)} & \frac{(T_2 - T_1) F_1(z_0) F_2(z_0)}{F_1(z_0) F_2(z) - F_1(z) F_2(z_0)} \\ \frac{-(T_2 - T_1) F_1(z) F_2(z)}{F_1(z_0) F_2(z) - F_1(z) F_2(z_0)} & \frac{-T_1 F_1(z) F_2(z_0) + T_2 F_2(z) F_1(z_0)}{F_1(z_0) F_2(z) - F_1(z) F_2(z_0)} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos en las demás matrices, tenemos

$$\det [\mathbf{E}(z, z_0)] = T_1 T_2, \quad (3.28)$$

en donde ya sabemos que $T_j = ik_j B + P$.

Si consideramos $P + Y = 0$, entonces $k_2 = -k_1$, por lo que al escribir las soluciones $F_j(z)$ en sus formas exponenciales y desarrollando, obtenemos que la matriz (3.27) toma la forma:

$$\mathbf{E}(z, z_0) = \begin{pmatrix} P - k_1 B \cot [k_1(z - z_0)] & k_1 B \csc [k_1(z - z_0)] \\ -k_1 B \csc [k_1(z - z_0)] & P + k_1 B \cot [k_1(z - z_0)] \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Según la ecuación (3.28) el determinante de la matriz anterior se debe reducir a $P^2 + k_1^2 B^2$, lo que ocurre efectivamente:

$$\det [\mathbf{E}(z, z_0)] = P^2 + k_1^2 B^2 \left[\csc^2 [k_1(z - z_0)] - \cot^2 [k_1(z - z_0)] \right] = P^2 + k_1^2 B^2, \quad (3.30)$$

en donde hemos utilizado la identidad $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$.

3.5. Matriz de compliance del problema homogéneo

La matriz de compliance se calcula con la ecuación (1.21). Entonces, si ahora D representa el determinante de la segunda matriz en esa ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(z, z_0) &= \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(z) & -A_2(z_0) \\ -A_1(z) & A_1(z_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_1(z_0)A_2(z) - F_2(z_0)A_1(z) & -F_1(z_0)A_2(z_0) + F_2(z_0)A_1(z_0) \\ F_1(z)A_2(z) - F_2(z)A_1(z) & -F_1(z)A_2(z_0) + F_2(z)A_1(z_0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en donde

$$D = A_1(z_0)A_2(z) - A_1(z)A_2(z_0) = T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]. \quad (3.31)$$

Desarrollando cada término obtenemos que la matriz de compliance en el caso general es

$$\mathbf{E}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{T_2 F_1(z_0)F_2(z) - T_1 F_2(z_0)F_1(z)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} & \frac{-(T_2 - T_1)F_1(z_0)F_2(z_0)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} \\ \frac{(T_2 - T_1)F_1(z)F_2(z)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} & \frac{-T_2 F_1(z)F_2(z_0) + T_1 F_2(z)F_1(z_0)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Al calcular el determinante hay términos que desaparecen y resulta al final que

$$\det [\mathbf{L}(z, z_0)] = \frac{1}{T_1 T_2}. \quad (3.33)$$

De manera similar a las secciones anteriores, para $P + Y = 0$, se tiene que $k_2 = -k_1$, por lo que la matriz anterior se reduce a la siguiente:

$$\mathbf{L}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{P}{P^2 + k_1^2 B^2} + \frac{k_1 B \cot [k_1(z - z_0)]}{P^2 + k_1^2 B^2} & -\frac{k_1 B \csc [k_1(z - z_0)]}{P^2 + k_1^2 B^2} \\ \frac{k_1 B \csc [k_1(z - z_0)]}{P^2 + k_1^2 B^2} & \frac{P}{P^2 + k_1^2 B^2} - \frac{k_1 B \cot [k_1(z - z_0)]}{P^2 + k_1^2 B^2} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Aunque en principio puede parecer muy complicada, el determinante concuerda con lo esperado en la ecuación (3.33):

$$\det [\mathbf{L}(z, z_0)] = \frac{1}{P^2 + k_1^2 B^2} = \frac{1}{T_1 T_1}. \quad (3.35)$$

3.6. Matriz híbrida del problema homogéneo

De acuerdo con la ecuación (1.23), la matriz híbrida en términos de las soluciones LI, está dada por

$$\mathbf{H}(z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.36)$$

Como antes, si D denota el determinante de la segunda matriz en la ecuación anterior, tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, z_0) &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_2(z) & -A_2(z_0) \\ -F_1(z) & A_1(z_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_1(z_0)F_2(z) - F_2(z_0)F_1(z) & -F_1(z_0)A_2(z_0) + F_2(z_0)A_1(z_0) \\ A_1(z)F_2(z) - A_2(z)F_1(z) & -A_1(z)A_2(z_0) + A_2(z)A_1(z_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aquí

$$D = A_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)A_2(z_0) = T_1 F_1(z_0)F_2(z) - T_2 F_1(z)F_2(z_0). \quad (3.37)$$

Así, la forma general de la matriz híbrida es:

$$\mathbf{H}(z, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{T_2 F_1(z_0)F_2(z) - T_1 F_2(z_0)F_1(z)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} & \frac{-(T_2 - T_1)F_1(z_0)F_2(z_0)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} \\ \frac{(T_2 - T_1)F_1(z)F_2(z)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} & \frac{-T_2 F_1(z)F_2(z_0) + T_1 F_2(z)F_1(z_0)}{T_1 T_2 [F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0)]} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

3.7. Función de Green

Otra manera de resolver la ecuación de movimiento en el problema homogéneo, es utilizando el método de la función de Green [3, 4, 5], el cual establece la existencia de una función $G(z, z')$ que cumple las mismas condiciones de frontera que el campo $F(z)$, y que según lo discutido en la sección 1.5 satisface la ecuación:

$$B \frac{d^2 G(z, z')}{dz^2} + (P + Y) \frac{dG(z, z')}{dz} + W G(z, z') = \delta(z - z'), \quad (3.39)$$

en donde $\delta(z - z')$ es la función delta de Dirac.

Como podemos notar, nuestro problema ahora es encontrar la forma de la función $G(z, z')$. Para ello, vamos a resolver la ecuación diferencial anterior utilizando *transformadas de Fourier* [3], de donde se sigue que:

$$-Bk^2 \tilde{G}(k) + i(P + Y)k \tilde{G}(k) + W \tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.40)$$

Aquí hemos utilizado el conocido resultado de que la transformada de Fourier de la función delta es la constante $1/\sqrt{2\pi}$, entre otras propiedades, y en donde

$$\tilde{G}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z') e^{-ikz} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-Bk^2 + i(P + Y)k + W}. \quad (3.41)$$

Entonces, usando la definición de transformada inversa se tiene:

$$G(z, z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{ik(z-z')} dk, \quad (3.42)$$

de modo que al sustituir $\tilde{G}(k)$ obtenemos que

$$G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(z-z')}}{-Bk^2 + i(P + Y)k + W} dk. \quad (3.43)$$

Una manera muy útil de resolver integrales definidas como la anterior es utilizar las técnicas del cálculo complejo, en particular nos interesa la teoría de *integración por residuos* [3, 15, 16]. En ella se establece que la integral de una función compleja sobre un contorno cerrado es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de la función, evaluada en los puntos singulares dentro del contorno. Siendo formales, el *teorema del residuo* nos dice que si $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ es una *función analítica* en una región que contiene a todos los puntos en el interior y sobre una *curva de Jordan* γ , excepto por un número finito de singularidades $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ en el interior de γ , entonces

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}[f(w_j)], \quad (3.44)$$

en donde $w \in \mathbb{C}$. Así, al extender la integral (3.43) al plano complejo, tenemos que la función a integrar es

$$f(w) = F(w) e^{iw(z-z')} \quad \text{con} \quad F(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-Bw^2 + i(P + Y)w + W}. \quad (3.45)$$

Para comenzar a buscar el resultado de integrar la función anterior debemos notar que las raíces k_1 y k_2 discutidas en la sección 2.1 son puntos singulares de $F(w)$ y por tanto de $f(w)$. Además, como son polos simples y así lo requiere la ecuación (3.44), encontramos los residuos usando que

$$\text{Res}[f(w_0)] = \lim_{w \rightarrow w_0} [(w - w_0) f(w)]. \quad (3.46)$$

En nuestro caso,

$$\text{Res}[F(k_1)] = \lim_{w \rightarrow k_1} \left[(w - k_1) F(w) \right] = \lim_{w \rightarrow k_1} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{w - k_1}{-Bw^2 + i(P + Y)w + W} \right]. \quad (3.47)$$

Para encontrar el límite anterior usamos la *regla de l'Hopital*, de la cual obtenemos que

$$\text{Res}[F(k_1)] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-2Bk_1 + i(P + Y)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{B(k_2 - k_1)}. \quad (3.48)$$

Por lo tanto,

$$\text{Res}[f(k_1)] = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_1(z-z')}}{B(k_2 - k_1)}. \quad (3.49)$$

De manera similar, para k_2 , obtenemos:

$$\text{Res}[f(k_2)] = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik_2(z-z')}}{B(k_2 - k_1)}. \quad (3.50)$$

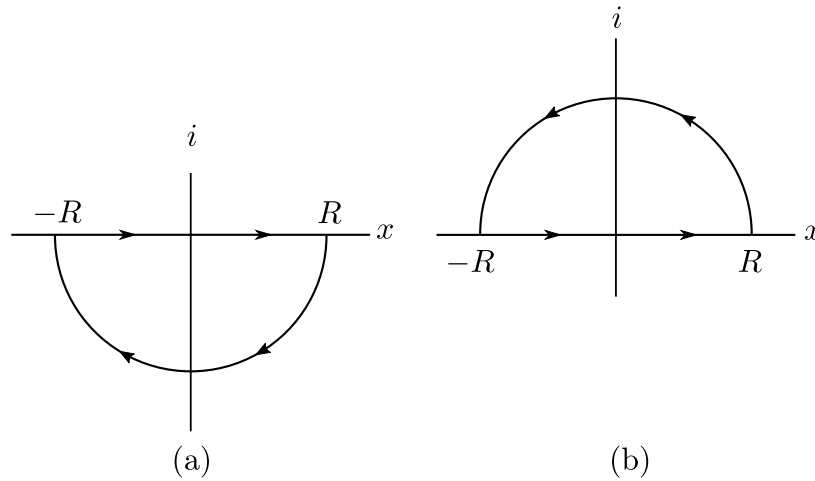


Figura 3.1: Contornos de integración.

Teniendo estos dos resultados falta establecer la curva sobre la que vamos a integrar. Normalmente, para la resolución de integrales por residuos se suelen escoger circuitos que consisten del intervalo $[-R, R]$ del eje real y el semicírculo superior (o inferior) con centro en el origen, y que tiene radio R (véase la figura 3.1). Posteriormente se toma el límite en el que $R \rightarrow \infty$ y usamos el *lema de Jordan* para garantizar que el semicírculo escogido no contribuye al resultado, por lo cual obtenemos una integral sobre el eje real. Con formalidad, el lema de Jordan establece que dado el contorno γ_{\uparrow} que consiste del semicírculo superior de radio R centrado en el origen (figura 3.1a) y una función compleja F que tiende a cero conforme $|w| \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{\uparrow}} F(w) e^{i\alpha w} dw = 0, \quad (3.51)$$

en donde α es un parámetro positivo. Como consecuencia de lo anterior

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(w) dw + \int_{\gamma_{\uparrow}} f(w) dw \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(w) dw \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}[f(w_j)], \end{aligned}$$

con w_j dentro de γ . Cabe mencionar que lo anterior es válido sólo cuando $\alpha \geq 0$, los polos no se encuentran en el eje real y se toma el semicírculo superior. Si $\alpha < 0$, entonces se toma el semicírculo inferior y se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk = -2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}[f(w_j)]. \quad (3.52)$$

En nuestro problema, la presencia de la exponencial determina qué mitad del plano complejo vamos a escoger. Si $(z - z') \geq 0$, tomamos el semiplano superior y en otro caso, tomamos el inferior. Así, bajo estas consideraciones el resultado de la integral (3.43) será $2\pi i$ (o $-2\pi i$) veces la suma de los residuos que se encuentran dentro del semiplano correspondiente. Entonces, para encontrar una forma explícita de la función de Green, consideremos lo discutido en la sección 3.1, en donde se menciona que supondremos a k_1 en el semiplano superior y a k_2 en el inferior, por ser éstos simétricos respecto al eje real. Así, según los residuos (3.49) y (3.50), obtenemos que la integral (3.43) es

$$G(z, z') = \frac{1}{iB(k_1 - k_2)} \times \begin{cases} e^{ik_1(z-z')} & \text{si } z - z' \geq 0 \\ e^{ik_2(z-z')} & \text{si } z - z' < 0 \end{cases}. \quad (3.53)$$

3.7.1. Forma lineal asociada a la función de Green

De manera similar a como definimos $A(z)$ en la ecuación de movimiento, podemos definir una nueva forma lineal asociada a la función de Green, la cual es

$$A_G(z, z') = B \frac{dG(z, z')}{dz} + P G(z, z'). \quad (3.54)$$

Despejando la derivada de $G(z, z')$ e integrando entre $z' - \varepsilon$ y $z' + \varepsilon$, tenemos

$$\int_{z' - \varepsilon}^{z' + \varepsilon} \frac{dG(z, z')}{dz} dz = B^{-1} \int_{z' - \varepsilon}^{z' + \varepsilon} A_G(z, z') dz - PB^{-1} \int_{z' - \varepsilon}^{z' + \varepsilon} G(z, z') dz. \quad (3.55)$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, las integrales al lado derecho de la igualdad se anulan y tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[G(z' + \varepsilon, z') - G(z' - \varepsilon, z') \right] = 0. \quad (3.56)$$

Esta ecuación expresa la continuidad de la función de Green. Por otro lado, si hacemos una integración similar con la ecuación (3.39), tendríamos que

$$\int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon} \frac{dA_G(z, z')}{dz} dz + Y \int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon} \frac{dG(z, z')}{dz} dz + W \int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon} G(z, z') dz = \int_{z'-\varepsilon}^{z'+\varepsilon} \delta(z - z') dz \quad (3.57)$$

La integral al lado derecho se reduce a la unidad por definición de la función delta de Dirac, mientras que al tomar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el segundo y tercer término del lado izquierdo de la igualdad se anulan. Esto nos conduce a establecer una relación de salto en la forma lineal:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[A_G(z' + \varepsilon, z') - A_G(z' - \varepsilon, z') \right] = 1. \quad (3.58)$$

Debemos darnos cuenta que si el segundo argumento se acerca al primero desde la derecha/izquierda es lo mismo que dejar que el primer argumento se acerque al segundo desde la izquierda/derecha, lo cual es válido para cualquier sistema [1].

La continuidad de la función de Green y el salto en la forma lineal son dos propiedades que debe cumplir la expresión (3.53), lo que en efecto ocurre.

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas

4.1. Conclusiones

En el segundo capítulo logramos establecer un pequeño compendio de problemas físicos actuales, los cuales conducen a una ecuación de movimiento que tiene la forma de Sturm-Liouville o la forma de (1.2) para el caso $N = 1$. La diferencia de estas ecuaciones se reduce a la aparición de los términos $\mathbf{P}(z)$ y $\mathbf{Y}(z)$, que están relacionados por las condiciones de hermiticidad del operador $\hat{\mathbf{L}}$, las cuales se cumplen en cada problema. Además, podemos observar que la forma clásica de Sturm-Liouville aparece cuando estudiamos medios isótropos y la forma de la ecuación (1.2) aparece cuando se consideran medios anisótropos (véanse las tablas 2.1 y 2.2). Entonces, la cuestión de si se debe o no hacer una generalización, se traduce en la importancia que tienen los problemas dentro del estudio de sistemas a capas con medios anisótropos.

Una vez sentada la importancia de la ecuación general de movimiento, continuamos con su análisis en el caso más sencillo: el problema homogéneo con $N = 1$. Aquí encontramos las dos soluciones linealmente independientes con las que se pudieron calcular algunas de las matrices de transferencia, como la completa \mathbf{M} y la asociada \mathbf{T} . En principio obtuvimos expresiones complejas que se reducen bastante cuando usamos la condición $P + Y = P - P^\dagger = 0$.

Por último, calculamos la función de Green del problema homogéneo y discutimos la continuidad de la misma y la condición de salto de la forma lineal asociada que surge en su consideración. Esto utilizando la teoría de integración por residuos del análisis complejo.

4.2. Perspectivas

A estas alturas del proyecto, e incluso durante su desarrollo, resulta natural interesarse en cómo se puede extender el contenido; cómo utilizar este conocimiento para generar otro; qué puntos no se tocaron aquí y sobre todo en qué podría mejorarse. Ante esto, el primer objetivo que se puede plantear para continuar con este trabajo, es seguir ampliando el acopio de problemas con $N = 1$, así como añadir los cálculos en otros sistemas de referencia. Por ejemplo, en el problema de masa efectiva (sección 2.3) señalamos explícitamente que los

cálculos se realizaron en coordenadas cartesianas, pero en otros sistemas podríamos llegar a una ecuación similar que en ese caso.

Lo siguiente que podemos hacer es llevar el estudio al caso general, es decir, considerar problemas que conducen a ecuaciones de movimiento con $N = 2, 3$, etc. Dentro de esa investigación se puede incluir el análisis con materiales cuyas relaciones constitutivas sean menos comunes, por ejemplo, los *magnetoeléctricos*.¹ Otro ejemplo de interés para $N = 4$, es encontrar la ecuación de movimiento para los potenciales electromagnéticos en sistemas a capas construidos a partir de materiales *bianisotrópicos*.

En el artículo [2] se postula una *densidad lagrangiana* general que conduce a las ecuaciones de movimiento para casos dentro de la teoría electromagnética, la teoría de la elasticidad y otros problemas particulares de la física. Lo interesante radica en que cuando los casos mencionados son estudiados en sistemas a capas, es decir, cuando los parámetros dependen de una de las coordenadas cartesianas, todos ellos conducen a un problema matricial del tipo Sturm-Liouville, con la misma estructura de la ecuación (1.2). Por lo tanto, otro gran paso a seguir como objetivo es estudiar las densidades lagrangianas particulares para cada una de las ecuaciones del compendio presentado aquí.

Cuando estudiamos las condiciones de hermiticidad del operador $\hat{\mathbf{L}}$ nos vimos en la necesidad de introducir condiciones de frontera que anulen la diferencia $\mathcal{R}(b) - \mathcal{R}(a)$ en la ecuación (1.7). Como consecuencia, en todo el trabajo hemos considerado que las capas que nombramos L y R son semiinfinitas, y que cuando $z \rightarrow \pm\infty$ la magnitud de interés tiende a cero. Sin embargo, éstas no son las únicas soluciones que conducen a la hermiticidad total del operador $\hat{\mathbf{L}}$ por lo que resulta ser importante estudiar el comportamiento del campo \mathbf{F} para distintas condiciones de contorno de interés experimental.

¹Materiales que presentan fenómenos magnéticos y eléctricos relacionados entre sí.

Índice alfabético

- Bianisotrópicos, 36
- Condiciones
 - iniciales, 4
- Condiciones de empalme, 4
- Condiciones de frontera, 3
- Constante de separación, 10
- Curva de Jordan, 31
- Densidad lagrangiana, 36
- Dominio de constitución, 1
- Ecuación
 - de difusión, 12
 - de onda, 9
- Envolvente, 14
- Factor de difusión, 12
- Formalmente hermitiano, 3
- Formulación causal, 3
- Función analítica, 31
- Función de Green, 4
- Guía de onda, 17
- Hermitiano, 3
- Integración por residuos, 31
- Lema de Jordan, 32
- Linealmente independiente, 4
- Magnetoeléctricos, 36
- Masa efectiva, 14
- Matriz de rigidez, 6
- Matriz de transferencia, 4
 - asociada, 5
 - completa, 5
- Medio
 - anisótropo, 2
 - homogéneo, 2
 - inhomogéneo, 2
 - isótropo, 2
- Medio constitutivo, 1
- Onda, 9
- Operador
 - matricial, 3
- Regla de l'Hopital, 32
- Separación de variables, 9
- Sistema a capas, 1
- Teorema del residuo, 31
- Totalmente hermitiano, 4
- Transformadas de Fourier, 31
- Valor propio, 3

Bibliografía

- [1] Pérez-Álvarez, R. and F. García-Moliner: *Transfer matrix, Green function and related techniques: tools for the study of multilayer heterostructures*. Universitat Jaume I, Castelló de la Plana, Spain, 1st edition, 2004, ISBN 84-8021-472-4.
- [2] Pérez-Álvarez, R. and R. Pernas-Salomón: *Ubiquity of the Sturm-Liouville problem in multilayer systems*. EPL (Europhysics Letters), 115(1):10010, 2016.
- [3] Hassani, Sadri: *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. Springer, 7th edition, 1999, ISBN 0-387-98579-4.
- [4] B. Arfken, George, Hans J. Weber, and Frank E. Harris: *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Elsevier, 225 Wyman Street, Waltham, MA 02451, USA; The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5 1GB, UK, 7th edition, 2013, ISBN 978-0-12-384654-9.
- [5] Friedman, Bernard: *Principles and techniques of applied mathematics*. John Wiley & Sons, 1956.
- [6] Coulson, C. A.: *Waves*. Longman Group Limited, 2nd edition, 1977, ISBN 0-582-44954-5.
- [7] Strauss, Walter A.: *Partial Differential Equations: An introduction*. John Wiley & Sons, Brown University, 2nd edition, 2008, ISBN 978-0470-05456-7.
- [8] Landau, L. D. y E. M. Lifshitz: *Mecánica de fluidos*, volumen 6. Reverté, 2ª edición, 1985, ISBN 84-291-4087-5.
- [9] Zill, Dennis G. y Michael R. Cullen: *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. CENGAGE Learning, 7ª edición, 2009, ISBN 13:978-0-495-10836-8.
- [10] Lee, Jinyoung and Seoktae Lee: *General solution of em wave propagation in anisotropic media*. Korean Physical Society, 57:55, 2010. <https://www.doi.org/10.3938/jkps.57.55>.
- [11] Widder, D. V.: *The heat equation*. Academic Press, 111 Fifth Avenue, New York, New York 10003, 1875, ISBN 0-12-748540-6.
- [12] Landau, L. D. y E. M. Lifshitz: *Teoría de la elasticidad*, volumen 7. Reverté, 1969.

- [13] Davidov, A. S.: *Teoría del sólido*. Editorial Mir Moscú, 1981.
- [14] Grosso, G. and G. Pastori: *Solid State Physics*. Academic Press, 2000, ISBN 0-12-304460-X.
- [15] Derrik, William R.: *Variable compleja con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1987, ISBN 968-7270-35-7.
- [16] Marsden, Jerrold E. and Michael J. Hoffman: *Basic complex analysis*. W. H. Freeman, 3rd edition, 1999, ISBN 0-7167-2877.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS



Control Escolar de Licenciatura

VOTOS DE APROBATORIOS

Secretaria ejecutiva del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó el C. **OSCAR EDUARDO NAZARIO SÁNCHEZ** con número de matrícula **20114007748** cuyo título es:

“Contribución al estudio matemático de la propagación de diversas excitaciones en sistemas a capas”

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

Cuernavaca, Mor a 13 de agosto del 2021

Atentamente
Por una universidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DR. LUIS MANUEL GAGGERO SAGER
DR. ROLANDO PÉREZ ÁLVAREZ
DRA. GABRIELA HINOJOSA PALAFOX
DR. OSCAR GERARDO SOTOLONGO COSTA
DR. MIGUEL EDUARDO MORA RAMOS

PRESIDENTE
SECRETARIO
VOCAL
PRIMER SUPLENTE (NO SE ANEXA FIRMA)
SEGUNDO SUPLENTE



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2021-08-15 13:09:37 | Firmante

iRxVrAo0CZMczMfCop4O9p/KESfLgfH+VzgVNUCKFI77JxiwVXGqtAgkMQcSu+CzXaAHdWf05E4plw6NsyHpfSigQZDUzNnbQsG13db95ldZI/YIO5o8h86hGZoE/xWFNcmcbFhUHL9hF+r6gk/pDgUR+xKxO1y7IZUvy+v/grNbDu1rel74+wrWs9+6/FOt/hf3VGoX+g682GjheoIHFlvMLarDNd9RLwKQPEm02cG8g4h3b/cnYh23A6rkOEzj2K9VvIWn44kNRUaVqvaxG3o9kGB9FN1+ISV4Gneh4n2+NI2FS+nPkfPSdHgKa+yEiHh0IPuNLUJyNdWqVLEApw==

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2021-08-15 14:41:18 | Firmante

itEzZ/z65D17P+80/WysUdej/E/qZJ3oH2xxa1NnxMHKTP1dumLD3dHBtC/P94Jb3zJmqVMROyrLdGYf9pU+XrRz+Ap/BLTmDCkk18nsy51nwnwzDMYc0BDwGKL6Z5X69eWEv3/21NZugblNb50rxU9KZwB2/7lcvsouLidR+8lyCPSSct5HarqOQKPU7DIzW31JqrBDA7qMDSySBlamGCKRDKZ7a42BwjllE2NPKHyAD7jOxQa80IMhVpWfywNsFi5M3CjTr17iUNuoeU7e6dFdRgPmmtxupy46hX3gN7dF5vkMvsR1MLfDGuHisFy0j9ks5clbEWcNiY28tx6lDeQ==

MIGUEL EDUARDO MORA RAMOS | Fecha:2021-08-15 17:04:23 | Firmante

I9GJ2Fvbt+UMcilZq2eGH6QnUARxJHPK/0qoXjc/kqu5yvgot3M21WLvq0VCPkcHie0d2Ee34EQj9zVz3DKjyEqzyvLsOesr4AG9DYzQVdvcxsB9gpfrIm/vyvjY7kqEYXhMUJp+cXGNAP6A+6EIJhWlxEqSs9AwjrkgdYcOnFHd0xPCSmYMJqJ6vxPNzECy093DoyUeKHRvr9mFgPOMyuuOUx2k9jrbWcT8TYE2jZ2UuxtpB9beUdl9wFqrcrc7Lsijq+Ktq4QJR4JR18QodAITctOR2dZ/1rx1TInmLJpy8H5H3J6Jd/nJQRywZhagv/NBu6DUF+KadjAF+/CBQ==

LUIS MANUEL GAGGERO SAGER | Fecha:2021-08-19 15:11:20 | Firmante

Z0vocu1f2nVMHw3KG45WyxUdU6iOu/tzCvIEzObxbF+43boJFY0aOPXBID7tfnFfgV7ntZLtkJRGBS3xAx2+6+8oFEOp6WnJW1/xYP0SaCnup4YOWYuR93yjrI8xnZWYjowiV8riDqoiP+S10zFqS0ypJtu9PRJmkPrHUvc1pBa6YnoZZbOdflMY6hK+eptu8OrZA3Wwui+GOhwvyD0Eg81jc2G1gROOkWdOHWmlqll/SnGriaHnqDwZ+YVsiKuvDcG7iRVYKCClqZgwyw4xn6zAZEVEWELPTFAbt86NdNuN+ZzZiEaTQ4hilLG7zZzc9kZrHO5kstJeBwGJ/uZiBw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



CrAaW9

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/HyOgVLmBFG83XhOil8At5HJ6OTrEofhy>

