

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

FLUJOS GENERADOS ELECTROMAGNÉTICAMENTE EN
ESFERAS CONCÉNTRICAS

T E S I S

QUE PRESENTA:

DARIEL JONDALAR RODRÍGUEZ PROAL

PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN CIENCIAS
(FÍSICA)

ASESOR:

DR. ALDO FIGUEROA LARA
(CONACYT-CINCA, UAEM)



Cuernavaca, Morelos, Mayo 2022

Sinodales:

Dr. Federico Vázquez Hurtado
(CInC, UAEM)

Dra. Gloria Suzanne Koenigsberger Horowitz
(ICF, UNAM)

Dr. Marco Antonio Rivera Islas
(CInC, UAEM)

Dr. Sergio Cuevas García
(IER, UNAM)

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por CONACYT, México, bajo el proyecto 258623 y por lo cual doy gracias.

Quiero agradecer a mi comité sinodal y especialmente a mi asesor, por su apoyo, comprensión y tolerancia a lo largo de este proceso. Sé que no fue rápido ni de la mejor manera, pero aún así no me dejaron de lado.

Un agradecimiento especial a mis abuelos José Bernardo Proal Nájera, Pilar Isolda Moncloa Moncloa y María Dolores Gómez Gómez, sin los cuales no habría podido salir adelante. Así mismo agradezco a mi madre Amanda Liliana Proal Moncloa y mis hermanos Ana y Elie, por su compañía y cariño incondicional.

Quiero agradecer a mis compañeros por su amistad y apoyo a lo largo de toda mi estancia en el CInC, muchos de ellos de otros centros y facultades, que me hicieron disfrutar del proceso, son tantos que no me parece justo mencionar a unos pocos, pero ellos sabrán que sin duda pienso en ellos y agradezco haberlos conocido. Si alguna vez disfrutamos siquiera una plática casual, quiero que sepas que este agradecimiento también te incluye.

Resumen

El campo magnético de la Tierra es todavía un fenómeno de estudio y la manera en que es generado no está completamente explicado, por lo que enfocamos la presente investigación para encaminarnos un poco más a entender la física detrás de esto. En el presente trabajo se analiza el flujo impulsado por el forzamiento electromagnético en un sistema de esferas concéntricas con rotación diferencial. El fluido de trabajo es una solución electrolítica, su dinámica de flujo se estudia experimental y teóricamente en régimen laminar. La fuerza electromagnética se genera por la interacción de una corriente continua inyectada radialmente a través de electrodos ubicados en la zona ecuatorial de las esferas y un campo magnético dipolar producido por un imán permanente dentro de la esfera interna. Esta configuración simula algunas de las condiciones al interior de la Tierra tales como: un sistema de esferas concéntricas, un fluido interior conductor de la electricidad, una rotación diferencial y la existencia de un campo magnético dipolar. Aunque los flujos estudiados son completamente tridimensionales, bajo algunas suposiciones, se pueden modelar matemáticamente con una solución unidimensional a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Las observaciones experimentales se realizan a través de un análisis de velocimetría de imagen de partículas (PIV). Los resultados teóricos reproducen cualitativamente las observaciones experimentales.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1 Introducción	3
2 Modelo experimental	9
2.1. Especificaciones del aparato experimental	9
2.2. Análisis experimental	12
3 Modelo matemático	15
3.1. Ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos	15
3.2. Ecuaciones del campo electromagnético	16
3.3. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD)	19
3.4. Adimensionalización	20
3.5. Parámetros adimensionales	21
3.6. Formulación del problema	21
3.7. Navier-Stokes adimensional	22
3.8. Coordenadas esféricas	23
3.9. Solución analítica	24
3.10. Corriente y campo magnético aplicados	26
3.11. Solución de la ecuación diferencial	27
4 Resultados	31
4.1. Forzamiento electromagnético entre esferas concéntricas estacionarias	32
4.2. Flujo de arrastre con esfera interna en rotación constante	33
4.3. Flujo de arrastre con esfera externa en rotación constante	34
4.4. Flujo de arrastre con esferas interna y externa en rotación constante	35
4.5. Forzamiento electromagnético entre esferas concéntricas con esfera externa en rotación constante	36
4.6. Forzamiento electromagnético entre esferas concéntricas con esfera interna en rotación constante	37
5 Conclusiones y trabajo futuro	39
Referencias	41

Capítulo 1

Introducción

El campo magnético de la Tierra se caracteriza por una dirección e intensidad que se pueden medir. A menudo, los parámetros medidos son la declinación magnética, D , la intensidad horizontal, H y la intensidad vertical, Z . A partir de estos elementos, se pueden calcular todos los demás parámetros del campo magnético. Estos componentes pueden medirse en unidades de Gauss, pero generalmente se reportan en nanoTesla ($1 \text{ Gauss} = 100000 \text{ nT}$). La intensidad del campo magnético de la Tierra está aproximadamente entre $25000 - 65000 \text{ nT}$ ($0.25 - 0.65 \text{ Gauss}$) y es variable, cambia con la ubicación y el tiempo, de hecho es tan irregular que debe medirse en muchos lugares para obtener una imagen satisfactoria de su distribución. Esto se realiza mediante satélites y aproximadamente 200 observatorios magnéticos en funcionamiento en todo el mundo, así como varios sitios temporales más. Sin embargo, hay algunas características regulares del campo magnético. En los polos magnéticos, la intensidad horizontal es cero y una brújula no muestra la dirección (D no está definida). En el polo norte magnético, el extremo norte de la aguja de inmersión (o círculo de inmersión, que es un aparato utilizado para medir el ángulo entre el horizonte y el campo magnético) está hacia abajo. En el polo sur magnético, el extremo norte de la aguja de inmersión está hacia arriba. En el ecuador magnético, la inclinación de la aguja de inmersión es cero. Gracias a esto, sabemos que la Tierra actúa como un gran imán esférico que está rodeado por un campo magnético que cambia con el tiempo y la ubicación. El campo es generado de manera fundamentalmente dipolar como se puede ver en la Figura 1.1, es decir, como si un imán recto con un polo norte y un polo sur estuviera ubicado en el centro de la Tierra. El eje del dipolo está desplazado del eje de rotación de la Tierra en aproximadamente 11 grados. Esto significa que los polos geográficos norte y sur y los polos magnéticos norte y sur no están ubicados en el mismo lugar. A diferencia del ecuador geográfico de la Tierra, el ecuador magnético no es fijo, sino que cambia lentamente [1].

Los registros paleomagnéticos indican que el campo geomagnético ha existido durante al menos tres mil millones de años, sin embargo, según el tamaño y la conductividad eléctrica del núcleo de la Tierra, el campo, si no se generara continuamente, se desintegraría en solo unos 20000 años, ya que la temperatura del núcleo es demasiado alta para mantener el magnetismo permanente (temperatura de Curie). Además, los registros paleomagnéticos muestran que la polaridad dipolar del campo geomagnético se ha invertido muchas veces en el pasado, el tiempo medio entre inversiones fue de aproximadamente 200000 años con eventos de inversión individuales que solo tomaron un par de miles de años. Estas observaciones abogan por un mecanismo dentro del interior de la Tierra que genera continuamente el campo geomagnético. Se ha especulado durante mucho tiempo que este mecanismo es un dínamo convectivo que opera en el núcleo líquido externo de la Tierra, que rodea su núcleo interno sólido como se muestra en la Figura 1.2, ambos compuestos principalmente de Hierro. El núcleo interno sólido es aproximadamente

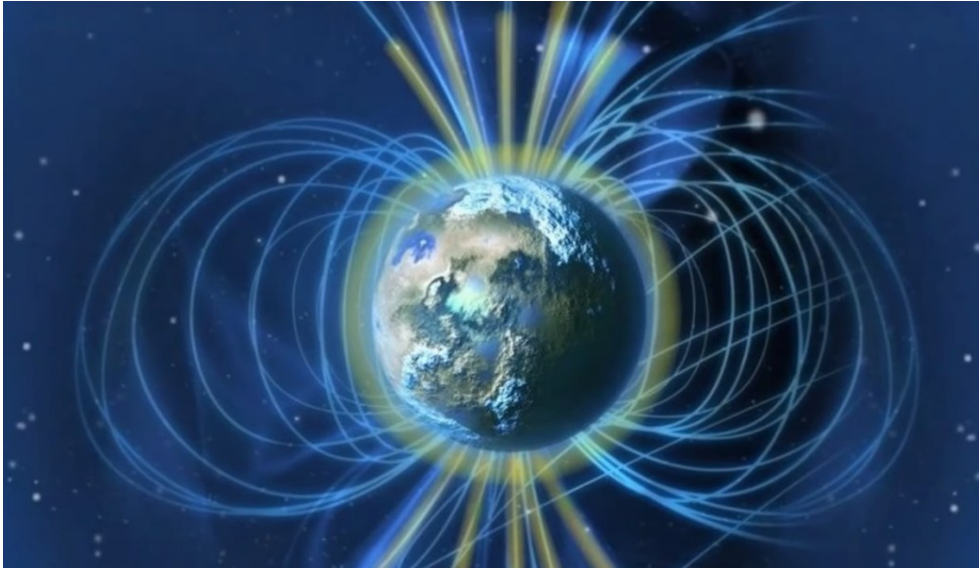


Figura 1.1: Visualización de las líneas de campo magnético de la Tierra [2].

del tamaño de la Luna pero con una temperatura similar a la temperatura de la superficie del sol. Se cree que la convección en el núcleo externo del fluido es impulsada por fuentes de flotabilidad térmica y composicional en el límite del núcleo interno que se producen a medida que la Tierra se enfría lentamente y el Hierro en la aleación de fluido rico en éste se solidifica en el núcleo interno emitiendo calor latente y liberando a los componentes ligeros de la aleación. Estas fuerzas de flotabilidad hacen que el fluido ascienda y las fuerzas de Coriolis, debido a la rotación de la Tierra, hacen que los flujos de fluido sean helicoidales. Presumiblemente, este movimiento fluido retuerce y corta el campo magnético, generando un nuevo campo magnético para reemplazar el que se difunde [3].

El campo geomagnético medido en cualquier punto de la superficie de la Tierra es una combinación de varios campos magnéticos generados por diversas fuentes. Estos campos se superponen e interactúan entre sí. Más del 90% del campo medido se genera en el interior del planeta, es decir, en el núcleo externo de la Tierra; esta porción del campo geomagnético a menudo se conoce como el campo principal. El campo principal varía lentamente en el tiempo y puede describirse mediante modelos matemáticos como el campo internacional de referencia geomagnética (IGRF) y el modelo magnético mundial (WMM). El campo principal de la Tierra domina sobre el campo magnético interplanetario en el área llamada magnetosfera. La magnetosfera tiene la forma de un cometa en respuesta a la presión dinámica del viento solar; se comprime en el lado que se encuentra hacia el sol a unos 10 radios terrestres y se extiende en forma de cola en el lado alejado del sol a más de 100 radios terrestres, como lo muestra la Figura 1.3. La magnetosfera desvía el flujo de la mayoría de las partículas del viento solar alrededor de la Tierra, mientras que las líneas del campo geomagnético guían el movimiento de las partículas cargadas dentro de la magnetosfera. El flujo diferencial de iones y electrones dentro de la magnetosfera y en la ionosfera forma sistemas de corrientes, que causan variaciones en la intensidad del campo magnético de la Tierra. Estas corrientes externas en la atmósfera superior ionizada y la magnetosfera varían en una escala de tiempo mucho más corta que el Campo Principal interno y pueden crear campos magnéticos de hasta el 10% del Campo Principal [1].

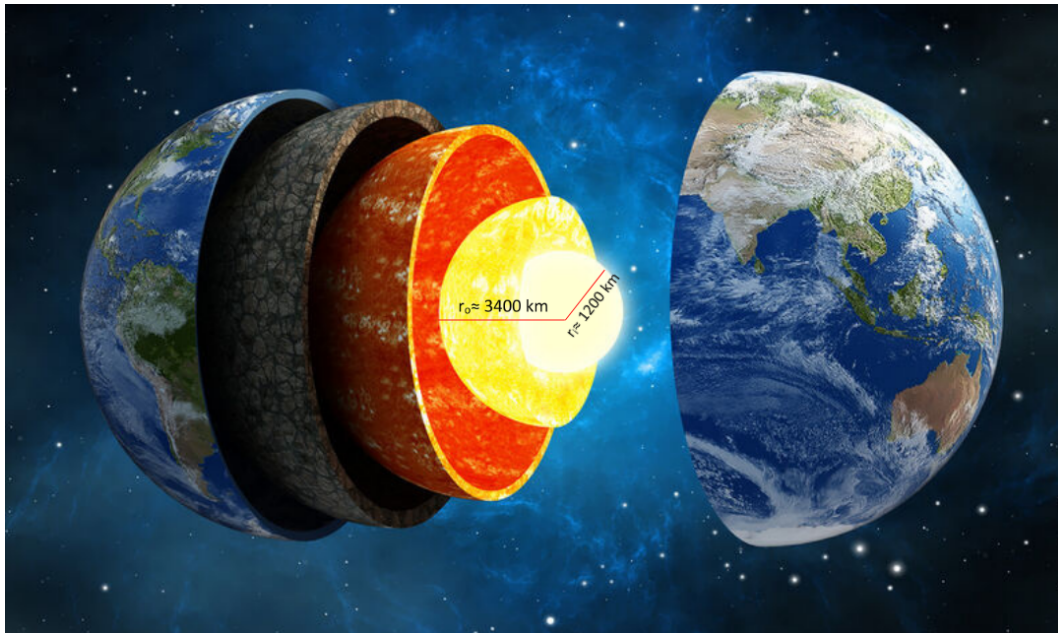


Figura 1.2: Esquema del núcleo terrestre, con el núcleo interno sólido con radio r_i y el núcleo externo líquido con radio r_o . [4].

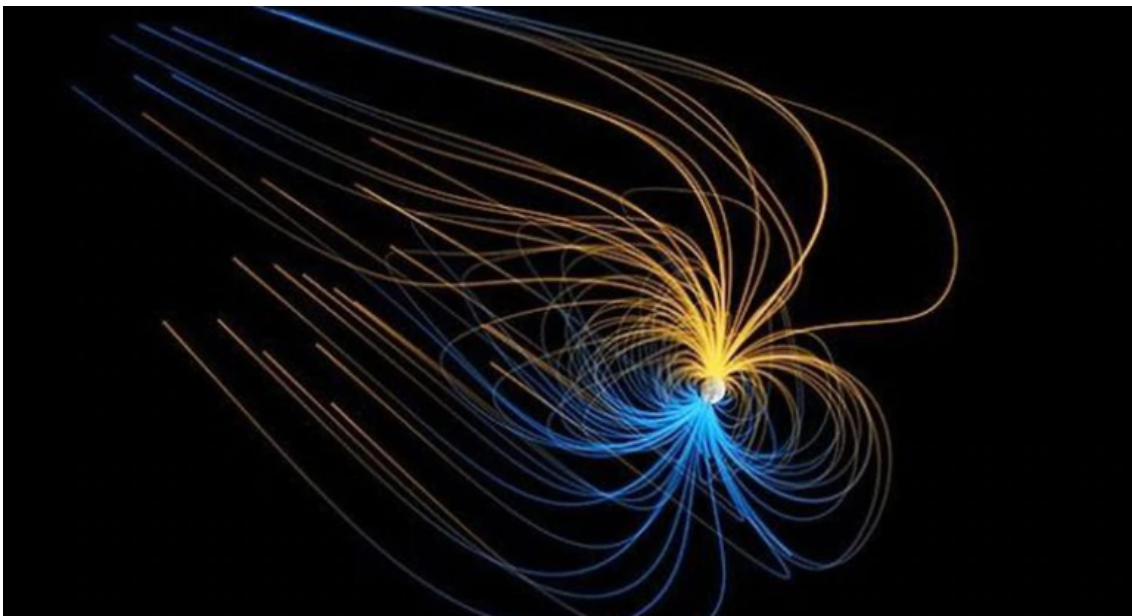


Figura 1.3: Magnetosfera de la Tierra [5].

Aunque la investigación sobre dínamos está motivada esencialmente por observaciones de dínamos planetarios y estelares, las condiciones que prevalecen en tales objetos naturales no se pueden reproducir en el laboratorio. Los experimentos y los programas numéricos solo se pueden ejecutar en regímenes de parámetros bastante diferentes, pero ambos brindan información útil sobre las características de las dínamos naturales. El modelo Glatzmaier-Roberts, simula la convección y la generación de campo magnético en un núcleo fluido externo que rodea un núcleo interno sólido con las dimensiones, la velocidad de rotación, el flujo de calor y (en la medida de lo posible) las propiedades materiales del núcleo de la Tierra, para probar la hipótesis del dínamo convectivo [57–61]. Las ecuaciones magnetohidrodinámicas que describen este problema se resuelven utilizando un método espectral armónico esférico y expansiones polinómicas de

Chebyshev, que trata todos los términos lineales implícitamente y no linealmente [60]. Un ejemplo de estos modelos se muestra en la Figura 1.5, donde las líneas del campo magnético son azules cuando el campo se dirige hacia adentro y amarillas cuando se dirige hacia afuera. El eje de rotación del modelo de la Tierra es vertical y pasa por el centro. Se produce una transición en el límite entre el núcleo y el manto, desde la intensa y complicada estructura de campo en el núcleo fluido, donde se genera el campo, hasta la estructura de campo potencial suave fuera del núcleo. La simulación numérica tridimensional resultante del geodínamo, se ejecuta en supercomputadoras en paralelo en el Centro de Supercomputación de Pittsburgh y el Laboratorio Nacional de Los Álamos. El campo magnético simulado tiene una intensidad y una estructura dipolar dominante que es muy similar a la de la Tierra y una deriva hacia el oeste de las estructuras no dipolares del campo en la superficie que es esencialmente igual a los 0.2 grados por año medidos en la Tierra [3]. Este modelo, sin embargo, se enfoca en el movimiento del campo y no del fluido que lo genera y simplemente trata de reproducir un comportamiento similar al observado en la Tierra. Los experimentos no se pueden rotar tan rápido como lo hacen los sistemas reales, el movimiento convectivo no puede ser tan fuerte, etc., pero funcionan con fluidos reales y se realizan mediciones a las que no se puede acceder desde observaciones remotas de dínamos naturales. Los experimentos numéricos registran los campos dinámicos completos en el espacio y el tiempo (pero con valores de parámetros bastante alejados), mientras que los experimentos de laboratorio solo prueban una parte limitada de la velocidad y los campos magnéticos [6–9]. Por lo que ambos enfoques son complementarios. Las dificultades de ingeniería generalmente aumentan con el tamaño del experimento, mientras que los costos operativos se asocian con la entrada de energía. Se debe usar entonces un fluido con la mejor conductividad eléctrica y la densidad más baja (como sodio líquido), con un tamaño y un consumo de energía razonable.

Una vez elegida una geometría, pequeñas variaciones en el flujo pueden tener un gran impacto en la potencia o el tamaño del caudal necesario para llegar al efecto dínamo [6]. Además, el estudio en dínamos de geometrías simples se ve impedida [10], por lo que experimentalmente aún no se tiene un modelo esférico que aporte toda la información sobre el comportamiento en geodínamos. En este sentido, los detalles del arrastre de flujo y las condiciones de contorno de ajuste han sido esenciales para todos los experimentos que tratan de reproducir la dínamo hasta el momento [6]. Por ejemplo, en [11] se resumen los resultados de los experimentos con metales líquidos dedicados al efecto dínamo y varias inestabilidades magnéticas, donde a pesar del trasfondo motivacional de las dínamos planetarias que trabajan en geometría (casi) esférica, se opta por una geometría cilíndrica debido que se puede lograr un forzamiento del fluido más fuerte, impulsado por la presión, para el cual también existe una gran cantidad de datos analíticos y numéricos. Por ahora, el umbral “mágico” para la autoexcitación del campo magnético se ha alcanzado en tres experimentos a gran escala con sodio líquido en Riga [12–14], Karlsruhe [15–17], y Cadarache [18–20]. Los experimentos de metal líquido relacionados con la dínamo y la Inestabilidad Magneto Rotacional (MRI por sus siglas en inglés) se llevaron a cabo, o están en construcción, en todo el mundo, por ejemplo, en Madison [21], Maryland [22], Socorro [23], Princeton [24], Perm [25], Grenoble [26] y Zúrich [27]. La mayoría de las veces, la necesidad de diseñar y optimizar esos experimentos, y de comprender sus resultados ocasionalmente inesperados, ha incitado trabajos teóricos y numéricos complementarios, que en algunos casos también impulsaron nuevas discusiones en el dominio geofísico o astrofísico original.

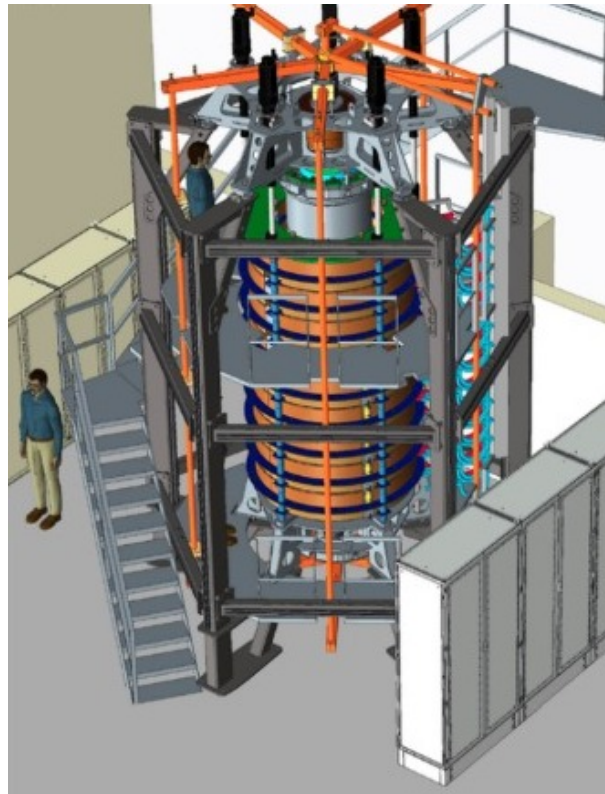


Figura 1.4: Experimento MRI/TI [11].

Con el objetivo de comprender la física en el núcleo de la Tierra, se han investigado los flujos de fluidos conductores de electricidad en presencia de un campo magnético en geometría esférica. El flujo inicialmente investigado corresponde al flujo esférico de Couette (SC por sus siglas en inglés), en el que un fluido llena el espacio entre dos esferas concéntricas con una o ambas esferas girando alrededor de sus ejes. En el caso más simple, y justificado por los requisitos de caracterización experimental, la esfera interior gira mientras que la exterior permanece estacionaria [29]. El flujo SC está completamente definido en términos de la relación de radios y el número de Reynolds [30–32]. En la mayoría de estos flujos, la rotación se produce por medios mecánicos de un acoplamiento rígido, que se ha informado que tiene poca influencia en el flujo [33]. Independientemente del origen del movimiento, estos flujos son relevantes para comprender la dinámica de los flujos geofísicos, ya que pueden revelar aspectos de la física detrás de la climatología o la meteorología, sin embargo, no son suficientes para comprender la generación del campo magnético de la tierra.

En el caso de que el fluido sea eléctricamente conductor y no magnético (metales líquidos) y el sistema esté sumergido en un campo magnético aplicado externamente, el flujo SC puramente hidrodinámico se convierte en magnetohidrodinámico (MHD). Es decir, la interacción del flujo y el campo magnético induce corrientes eléctricas. La interacción de estas corrientes eléctricas con el campo magnético da lugar a la fuerza de Lorentz que podría afectar el flujo. Este flujo se ha denominado flujo de Couette esférico “magnetizado” (MSC) [35–41]. La interacción de las fuerzas de cizallamiento, por las esferas giratorias, y la fuerza de Lorentz requiere nuevos parámetros adimensionales para describir completamente el flujo que surge de la interacción de fuerzas viscosas, inerciales y electromagnéticas [40, 42–44]. El flujo MSC se ha investigado numéricamente [37, 39, 44], teóricamente [35, 45, 46] y experimentalmente [38, 47–49] dada su relevancia para comprender el efecto dínamo. A pesar de que estos flujos están lejos de las condiciones reales, son útiles en el desarrollo de herramientas (modelos teóricos y códigos nu-

méricos robustos) para abordar los fenómenos MHD.

Otro enfoque para investigar los flujos de fluidos eléctricamente conductores en coordenadas esféricas son los denominados flujos impulsados electromagnéticamente (EMD), en los que el flujo es impulsado por la interacción de un campo magnético y una corriente eléctrica aplicada externamente. La investigación de estos flujos es escasa. Hollerbach y colaboradores [50] investigaron teóricamente el flujo impulsado por la interacción de una corriente eléctrica que fluye desde la esfera interior a un electrodo en forma de anillo alrededor del ecuador de la esfera exterior y un campo magnético axial y demostraron la viabilidad de un dispositivo experimental con dimensiones similares a las configuraciones de flujo de Couette existentes. El paso a dar en el presente trabajo es pues, presentar la investigación teórica-experimental del flujo de ESC (Electromagnetic Spherical Couette, por sus siglas en inglés) en coordenadas esféricas con una fuerza de Lorentz impuesta producida por la interacción de un campo magnético dipolar que simula las condiciones del campo magnético terrestre principal y una corriente eléctrica continua inyectada a través de electrodos ubicados en el plano ecuatorial. Para este propósito, se discute una investigación sistemática de 6 diferentes configuraciones de flujo para comprender la dinámica que rije nuestro sistema.

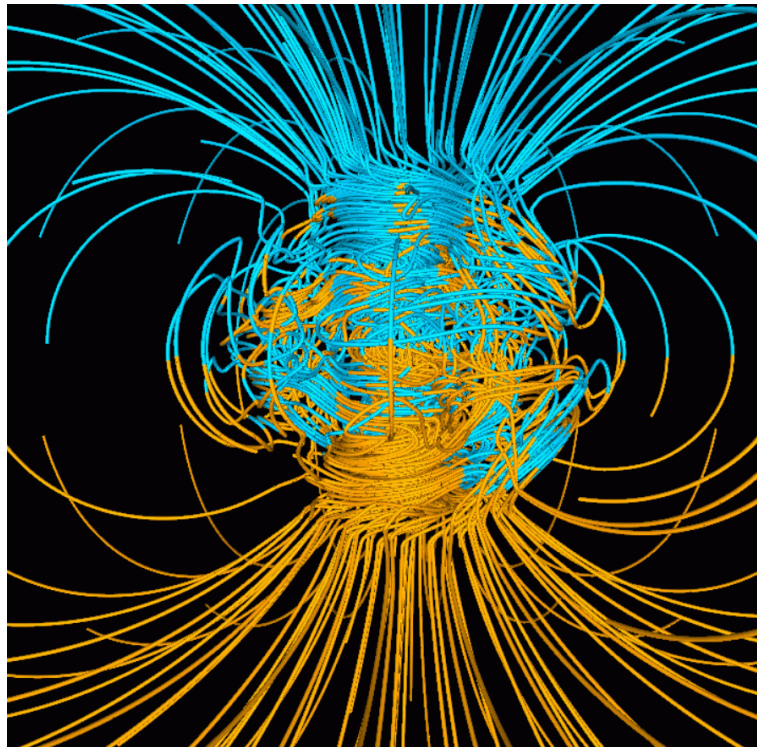


Figura 1.5: Una captura instantánea de la estructura del campo magnético 3D simulada numéricamente con el modelo geodínamo de Glatzmaier-Roberts. Las líneas de campo se dibujan a dos radios terrestres [63].

Capítulo 2

Modelo experimental

2.1. Especificaciones del aparato experimental

Para el trabajo experimental, se utilizó un dispositivo construido específicamente para la realización de este experimento, que es similar al utilizado en un estudio anterior por [51]. El experimento se realizó en una configuración con esferas concéntricas, ver Figura 2.1. Las esferas son de plexiglás, con un espesor de 0.0125 m para la esfera externa y 0.003 m en la esfera interna. Los radios de las esferas exterior e interior son $r_o = 0.105$ m y $r_i = 0.035$ m, respectivamente, para obtener una relación $r_o/r_i = 3$, que coincide con la relación de los radios exterior/interior de la Tierra. La esfera interna está sujeta por un eje de plexiglás de 0.009 m de diámetro que transmite el movimiento de rotación. El espacio entre las esferas se llena con una solución electrolítica débil de sal de mesa (NaCl) al 8.7% en peso. La densidad de masa, la viscosidad cinemática y la conductividad eléctrica del electrolito son $\rho = 1090$ kg/m³, $\nu = 10^{-6}$ m²/s y $\sigma = 6.36$ S/m, (medidos con un picnómetro, un viscosímetro y un conductímetro) respectivamente. Un par de motorreductores de corriente continua permiten la rotación independiente de las esferas. Estos motores estaban controlados por un regulador de voltaje que permitía que las esferas giraran de 0 a 3.14 rad/s en la esfera interna y de 0 a 2.24 rad/s en la esfera externa. Para los experimentos discutidos en este trabajo, las esferas interna y externa giran a una velocidad angular constante $\Omega_i = 0.457$ rad/s y $\Omega_o = 0.305$ rad/s, como se especifica para cada caso, escogidas así para que el flujo se mantenga laminar y con fuerzas más o menos equilibradas, aunque el aparato experimental puede variar las velocidades como lo muestra la tabla de revoluciones por minuto siguiente:

Tabla 1. Revoluciones por minuto de giro de las esferas.		
Capacidad de giro (%)	Ω_i Esfera interna (rad/s)	Ω_o Esfera externa (rad/s)
10 %	0.087	0
20 %	0.483	0.217
30 %	0.897	0.465
40 %	1.163	0.698
50 %	1.495	0.942
60 %	1.847	1.208
70 %	2.094	1.461
80 %	2.464	1.722
90 %	2.793	1.963
100 %	3.142	2.244

Un campo magnético dipolar se genera por un imán cilíndrico de neodimio con un diámetro y una altura de 40 mm. El imán se encuentra dentro de la esfera interior hueca. El eje z del imán está alineado con el vector de gravedad vertical y coincide con el eje de rotación. El valor del campo magnético en el ecuador de la esfera interior es 0.0987 T. La componente polar del campo magnético en el ecuador del dispositivo esférico se midió con un medidor de Tesla FW Bell 6010, asegurando un campo magnético dipolar como se muestra en la Figura 2.1 a continuación:

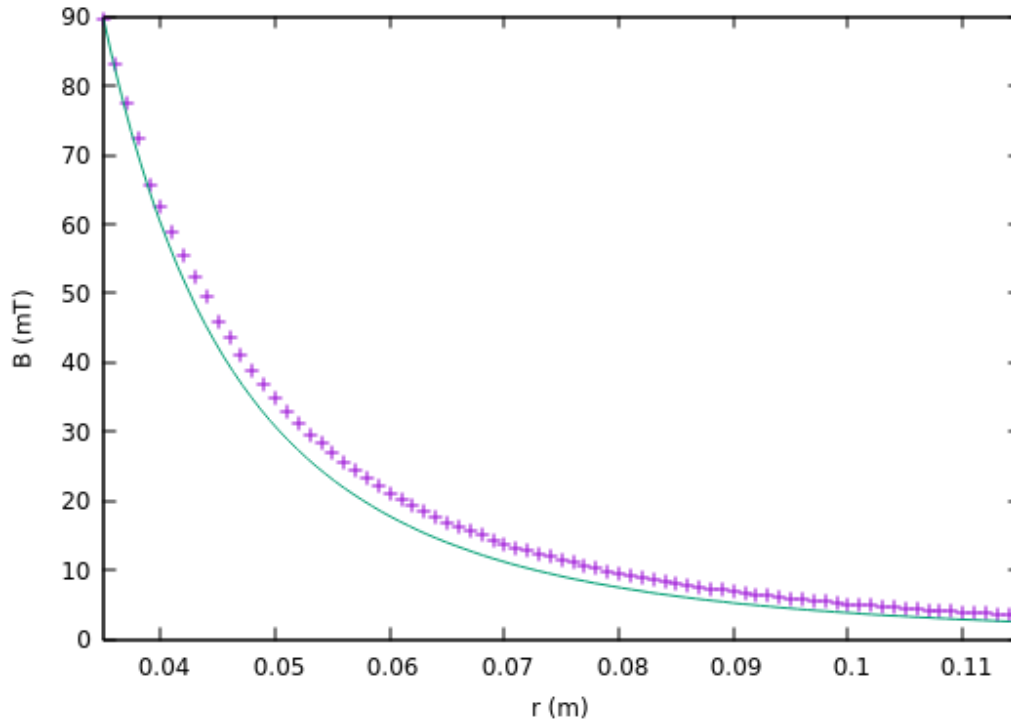


Figura 2.1: Componente polar B_ϕ del campo magnético como función de la coordenada radial r en el ecuador ($\phi = \pi/2$). Los puntos denotan valores experimentales mientras que la línea continua es una función analítica dada por $89.73(0,035)^3/r^3$ a partir de valores experimentales.

Se inyecta una corriente eléctrica continua (cc) a través de dos anillos de grafito de 0.005 m de ancho. Los anillos se ubicaron externa e internamente en el ecuador de la esfera interna y externa, respectivamente. La corriente eléctrica en cc se obtiene de una fuente de alimentación regulable marca Zurich modelo DPS-2512M que produce un voltaje de 2.4 V. La amplitud de la corriente inyectada se fijó en 50 mA con un potenciómetro conectando el circuito en serie. La corriente eléctrica interactúa con la distribución no uniforme del campo magnético generando una fuerza de Lorentz rotacional que pone el fluido en movimiento en la dirección angular.

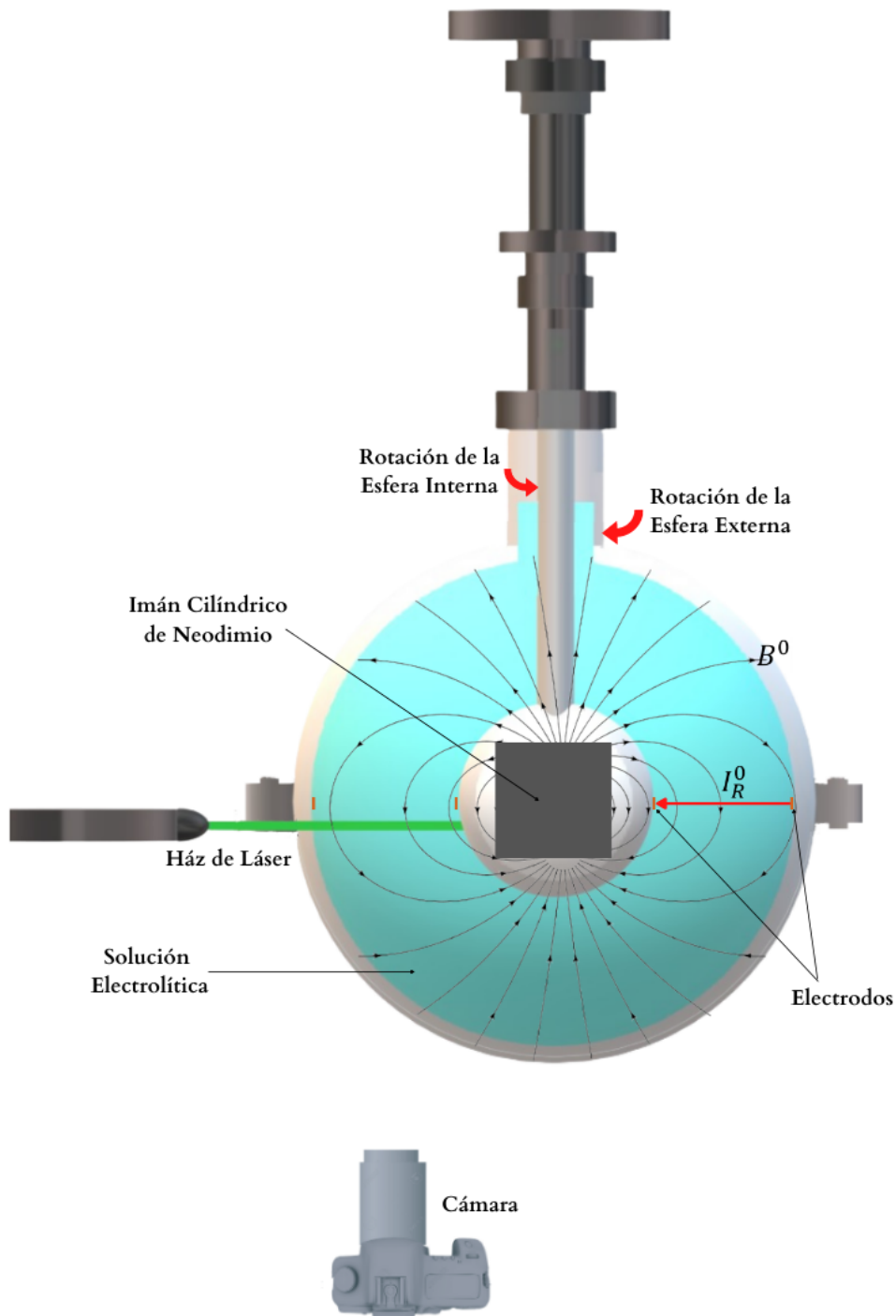


Figura 2.2: Esquema de la configuración experimental, no dibujado a escala. El flujo principalmente azimutal se visualiza en una sección del plano ecuatorial mediante la técnica PIV.

2.2. Análisis experimental

Para poder observar un fenómeno con velocimetría por imágenes de partículas (PIV por sus siglas en inglés), es necesario que el fluido sea transparente. En este flujo insertaremos partículas esféricas de vidrio recubiertas de plata, con un diámetro aproximado de $10\ \mu\text{m}$ y con misma densidad que el medio, para que estén homogéneamente repartidas en todo el espacio y que además sean reflectoras, para que sean observables con luz. Una vez decidido el plano de observación, se debe iluminar con un láser como se muestra en la Figura 2.3. Una cámara debe estar paralela al plano de observación bien enfocada para capturar el movimiento de las partículas a lo largo de nuestra superficie de interés.

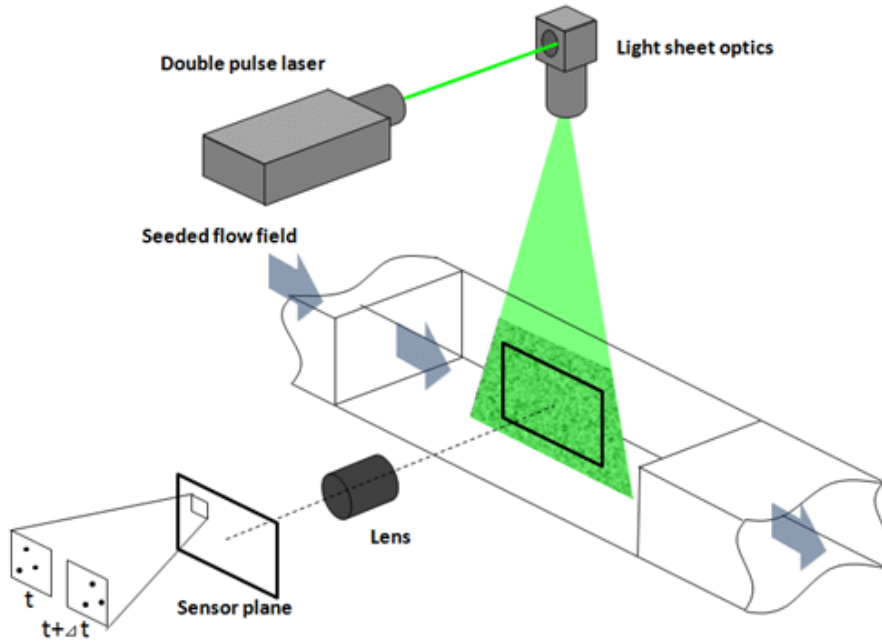


Figura 2.3: Esquema del funcionamiento de la técnica PIV [67].

Aplicando este método de observación, finalmente se obtendrán imágenes como en la Figura 2.4, que corresponde a un fotograma de un vídeo tomado experimentalmente en el laboratorio.



Figura 2.4: Fotograma experimental de partículas en nuestro aparato experimental, tomada para el caso en que el sistema tiene densidad de corriente aplicada y la esfera interna está en rotación.

Para hacer el análisis se empleó PIVlab, que es un software de PIV resuelta en el tiempo que se actualiza regularmente con correcciones de software y nuevas funciones. Se utiliza para derivar, mostrar y exportar múltiples parámetros del patrón de flujo. Una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) fácil de usar hace que los análisis PIV y el procesamiento posterior de datos sean rápidos y eficientes [64]. Este software hace una comparación entre fotogramas consecutivos para calcular el desplazamiento de cada una de las partículas captadas con la cámara y nos permitió realizar diversos análisis, tales como campos vectoriales de velocidad, a partir de los cuales pudimos realizar un promedio temporal del movimiento en la zona de observación, que en nuestro caso es un corte ecuatorial de las esferas como se muestra en la Figura 2.5. Es importante destacar también que la región cercana a la esfera externa es menos nítida, como se nota en la Figura 2.4, esto debido a la curvatura de la esfera que genera un cambio de grosor respecto al plano de observación de la cámara, la cual se colocó por debajo del experimento, como se muestra en la Figura 2.2 y no por encima debido a que en la parte superior existe la maquinaria y estorbaría a la cámara, mientras que la parte inferior está libre para colocarla.

Como el electrolito usado es un medio transparente, los campos de velocidad se obtuvieron experimentalmente mediante PIV, para esto, se colocó un módulo láser verde con longitud de onda de 532 nm y una potencia de 5000 mW para crear un plano de luz, paralela al ecuador de las esferas. La hoja de luz se colocó 5 mm por debajo del plano ecuatorial, para evitar los electrodos, como se muestra en la Figura 2.2. Los trazadores PIV son esferas de vidrio huecas recubiertas de plata de Dantec Dynamics con 10 μm de diámetro con una densidad de 1.4 g/cm^3 . Las imágenes de flujo se extrajeron de un vídeo capturado con una cámara Nikon D80 con un lente AF micro-nikkor 60 mm f/2.8 D a 30 fps. La cámara se apoyó en un soporte ubicado 30 cm por debajo de la configuración experimental. El área real de la imagen capturada fue de 0.14 m \times 0.08 m con una resolución de 1280 \times 720 píxeles. En el presente estudio, se descartó el flujo transitorio. Para el PIV se implementaron áreas de interrogación de 16 \times 16 píxeles con un 50% de superposición en las direcciones horizontal y vertical, y validación vectorial. Estas condiciones nos dieron una resolución espacial de $1.1 \text{ E}^4 \times 1.1 \text{ E}^4 \text{ m}^2$ [53]. El análisis PIV solo consideró la región entre las esferas, mientras que las zonas restantes (incluidas las esferas) estaban enmascaradas, los parámetros de calibración fueron la distancia r entre las esferas ($r = 0.07 \text{ m}$) y el tiempo entre fotogramas de 0.0167 segundos.

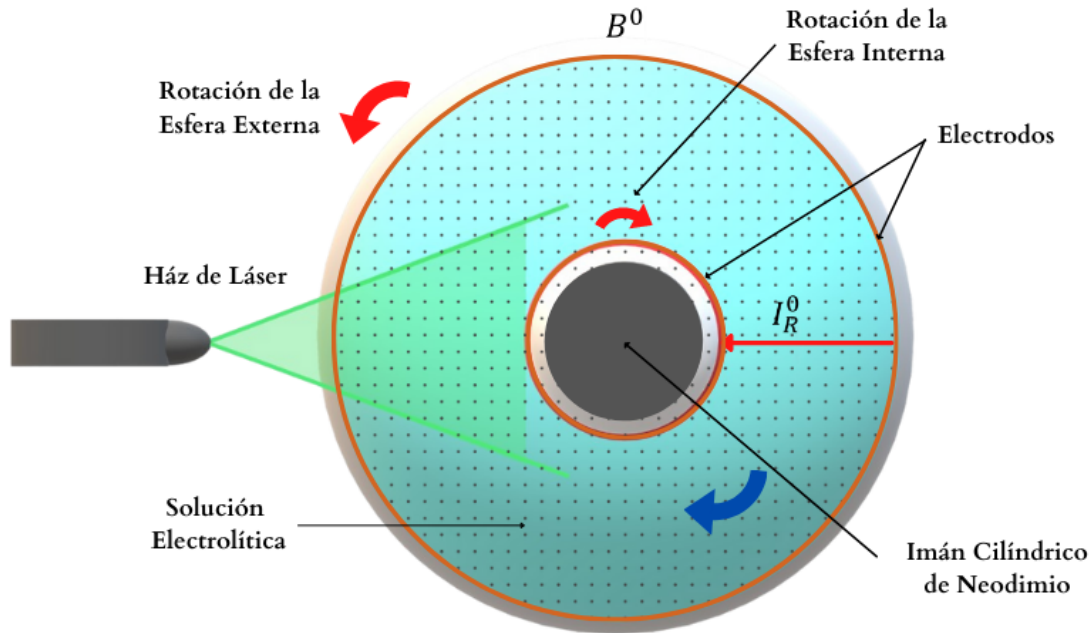


Figura 2.5: Boceto de la configuración experimental, no dibujado a escala. Corte ecuatorial vista inferior en el plano de observación de interés.

Se analizaron diferentes configuraciones experimentales que serán presentadas más adelante en el Capítulo 4, donde una vez teniendo la configuración deseada, se esperó hasta que el sistema alcanzó un estado estacionario (esto se hace esperando un tiempo de aproximadamente 5 a 10 minutos antes de comenzar a grabar). Una vez alcanzado el estado estacionario se realizó una grabación de aproximadamente 20 a 30 segundos de duración, después el vídeo se separa en fotogramas que pasamos al programa PIVlab donde se efectuó el análisis PIV. Una vez hecho esto, se trazó una línea radial en el PIV para registrar los vectores que atraviesan por esta (para medir la velocidad angular en función del radio). Luego se realizó un promedio temporal a los campos vectoriales de velocidades para así obtener gráficas experimentales de la velocidad angular en función de r . Cabe mencionar que los experimentos se realizaban con una mezcla preparada el mismo día, pues las partículas se decantaban al fondo de la esfera externa después de aproximadamente un día.

Para los respectivos análisis utilizamos vídeos de diferente duración que iban de 20 a los 35 segundos aproximadamente, sin embargo, es importante destacar que debido a la construcción de nuestro aparato experimental, cuando la esfera externa giraba había tornillos (16 equidistantes colocados en la circunferencia del ecuador), los cuales eran necesarios para sellar y unir las dos mitades de la esfera externa pero que ocasionaban sombras en el área de observación por lo que los fotogramas en los que estos tornillos pasan en la grabación fueron retirados y únicamente conservamos un Δt de entre 2.5 a 9.8 segundos de grabación para estos casos, siendo entre 74 a 295 fotogramas promediados, mientras que en los casos en que la esfera externa se mantenía quieta obtuvimos promedios correspondiente a un Δt entre 23 a 37 segundos de duración con entre 697 a 1137 fotogramas. También cabe señalar que se encontró una imperfección perceptible a través de la cámara en la esfera externa, pues había zonas que se notaban más borrosas, esto atribuido a un desenfoque del plano de observación que bien podría ser un cambio en el grosor de la esfera o un ligero cambio en su curvatura pero que en general no se aprecia que afecte significativamente el promedio temporal.

Capítulo 3

Modelo matemático

En este capítulo se explican las consideraciones a tomar en cuenta para la resolución de las ecuaciones analíticas que pretenden describir el comportamiento observado con PIV en los experimentos en la zona ecuatorial de un sistema en esferas concéntricas, el cual se genera a través de inducir movimiento por campos electromagnéticos a un fluido conductor con una corriente radial en la zona ecuatorial y campo magnético permanente alineado con el eje z al interior de la esfera interna.

3.1. Ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos

Cuando se describe el movimiento de un fluido, es necesario tomar en cuenta la ecuación de conservación de masa dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad de fluido y \vec{u} es el vector velocidad. En gran cantidad de aplicaciones, los fluidos pueden considerarse incompresibles, es decir, su volumen se mantiene constante ante esfuerzos normales de compresión, por lo que su densidad se mantiene constante. En particular, el electrolito que utilizamos en los experimentos puede suponerse incompresible, siendo que su densidad será constante en el tiempo durante los experimentos, por lo que la ecuación de conservación de masa toma la forma:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

que es conocida como la ec. de continuidad. Por otra parte, podemos modelar al electrolito como un fluido Newtoniano, de manera que la ecuación de balance de la cantidad de movimiento, conocida también como la ecuación de Navier-Stokes queda:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{F}, \quad (3.3)$$

donde P es el campo de presión, ρ y ν son la densidad de masa y la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente y \vec{F} es una fuerza de cuerpo. El primer término del lado izquierdo es la aceleración inercial, el segundo término del lado izquierdo la aceleración convectiva, el primer término de lado derecho es el gradiente de presión, el segundo término del lado derecho es la difusión de la velocidad y el tercer término de lado derecho es alguna fuerza de cuerpo.

La ecuación de conservación de energía cuando existe interacción electromagnética tiene la forma:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{J^2}{\sigma} + \Phi_\nu, \quad (3.4)$$

donde T es el campo de temperatura, Φ_ν denota una fuente de disipación viscosa que explícitamente involucra términos cuadráticos de los gradientes de velocidad, c_p es el calor específico a presión constante, k es la conductividad térmica y σ es la conductividad eléctrica del medio. El segundo término del lado derecho denota la disipación de Joule presente en el fluido debido a la circulación de corrientes eléctricas en el medio [66]. Esta ecuación está desacoplada de las dos anteriores y se presenta sólo por completez ya que no será considerada para la descripción de nuestro problema pues no estudiaremos la transferencia de calor.

El considerar la interacción electromagnética lleva a que las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos sean insuficientes para lograr una descripción adecuada del sistema. Por lo tanto, debemos complementarlas con las ecuaciones del campo electromagnético, que comprenden a las ecuaciones de *Maxwell*, y las ecuaciones constitutivas que caracterizan a los campos en distintos medios.

3.2. Ecuaciones del campo electromagnético

En un medio isotrópico y lineal, las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son:

ley de Gauss para campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (3.5)$$

ley de Gauss para campo magnético (inexistencia de monopolos magnéticos)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.6)$$

ley de inducción de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico en V/m, \vec{B} es el vector del campo magnético en T, \vec{J} es la densidad de corriente en A/m², ρ_e denota a la densidad de carga eléctrica total en C/m³, ϵ es la permitividad eléctrica del material y μ es la permeabilidad magnética. Al segundo término de la ecuación (3.8) se le conoce como la corriente de desplazamiento de Maxwell; dicho término es de relevancia cuando las oscilaciones de los campos son de alta frecuencia, sin embargo no es nuestro caso experimental. En general, ϵ y μ pueden depender del estado termodinámico del medio, sin embargo, para la gran mayoría de problemas tratados en MHD, estas cantidades pueden considerarse constantes. En particular, la permeabilidad magnética puede considerarse igual a la del vacío, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am.

Ahora bien, se necesita una ecuación constitutiva que establezca la relación entre la densidad de corriente eléctrica y los campos eléctrico y magnético. Dicha ecuación, usada comúnmente en líquidos y gases conductores es la llamada ley de Ohm, que en un medio conductor en reposo se expresa como:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}', \quad (3.9)$$

donde \vec{E}' es el campo magnético en el sistema en reposo, y la conductividad eléctrica se puede suponer constante como una buena aproximación. Si el conductor se desplaza respecto al sistema de laboratorio con velocidad \vec{u} , la ley de Ohm toma la forma:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho_e \vec{u}, \quad (3.10)$$

donde el primer término de lado derecho es el campo eléctrico efectivo y el segundo término de lado derecho se denomina la corriente de convección.

La fusión de las ecuaciones de la mecánica de fluidos con las ecuaciones del campo electromagnético presenta algunas dificultades. Las primeras son ecuaciones clásicas no relativistas, y por ende son invariantes ante transformaciones Galilenas. Por su parte, las ecuaciones del campo electromagnético son ecuaciones relativistas, por tanto invariantes ante transformaciones de Lorentz. La mezcla de ecuaciones con distintas propiedades de invarianza podría dar lugar a una descripción errónea del fenómeno en consideración. Esto se resuelve utilizando lo que se conoce como la aproximación MHD que consiste básicamente en restringir los fenómenos estudiados a aquellos en donde:

- a) La velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz.
- b) Los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias.
- c) Los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz inducida por el movimiento del fluido en el campo electromagnético [65].

Debido a esta aproximación se puede despreciar la corriente de desplazamiento de la ecuación (3.8). Físicamente, lo que se está despreciando es el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas. Asimismo, la aproximación MHD lleva también a establecer la invarianza del campo magnético en los distintos sistemas de referencia. También se establece que la corriente de convección en la ec. (3.10) es despreciable respecto a la corriente de conducción \vec{J} .

Tomando en cuenta estas simplificaciones, las ecuaciones del campo magnético en un conductor en movimiento son:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}, \quad (3.13)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (3.14)$$

Con esta aproximación es apropiado ignorar la ley de Gauss para campo eléctrico (3.5), ya que el campo electromagnético está completamente determinado por las ecuaciones rotacionales y la ley de Ohm. Al despreciar la corriente de desplazamiento, las ecuaciones (3.11)-(3.14) pierden su invarianza ante transformaciones de Lorentz, conservando únicamente invarianza ante transformaciones Galileanas. Asumiendo también que el campo electromagnético se puede definir como el gradiente de un potencial eléctrico, entonces:

$$\vec{E} = -\nabla\phi. \quad (3.15)$$

Y esto lo podemos sustituir en (3.14), por lo que:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \sigma (-\nabla\phi + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (3.16)$$

Además, de (3.13) se sigue que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (3.17)$$

por lo que la divergencia de \vec{J} es:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \sigma (-\nabla^2\phi + \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{B})). \quad (3.18)$$

Por último, en nuestro caso consideramos un campo magnético dipolar puntual, para el cual conocemos su ecuación dada por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2 \cos \phi \vec{r} + \sin \phi \vec{\phi} \right). \quad (3.19)$$

Estas ecuaciones junto con las de balance para fluidos forman un sistema completo de ecuaciones con la que podemos describir el comportamiento de un fluido conductor en un campo magnético.

3.3. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD)

Ahora necesitamos una ecuación que nos describa el movimiento del fluido tomando en cuenta las ecuaciones de movimiento de fluido con el respectivo efecto electromagnético, i.e. una ecuación de movimiento magnetohidrodinámica. El sistema de ecuaciones que describe el movimiento de un fluido viscoso, incompresible y eléctricamente conductor en un campo magnético es:

la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.20)$$

y la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \left(\vec{J} \times \vec{B} \right), \quad (3.21)$$

Nótese que la ecuación (3.21) difiere de la ecuación para el caso puramente hidrodinámico (3.3) por un término llamado la fuerza de Lorentz $(\vec{J} \times \vec{B})$ que es la fuerza que actúa en el sistema y que es la única relevante para el experimento.

La ecuación de transporte que obedece el campo magnético \vec{B} es:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} = \lambda \nabla^2 \vec{B} + \left(\vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{u}, \quad (3.22)$$

donde $\lambda = 1/\mu_0\sigma$ es la difusividad magnética.

Cuando se inyecta corriente en un fluido conductor, ésta interactúa con el campo magnético dando lugar a la fuerza de Lorentz $(\vec{J} \times \vec{B})$ que provoca el movimiento del fluido. Cuando el fluido conductor tiene un movimiento relativo al campo magnético al campo magnético aplicado, de acuerdo con la ley de inducción de Faraday, se genera una fuerza electromotriz (fem) que induce una corriente en el fluido. De esta manera existen dos corrientes, la corriente aplicada y la corriente inducida:

$$\vec{J} = \vec{J}^0 + \vec{J}^i, \quad (3.23)$$

que igualando con la ecuación (3.16) obtenemos:

$$\vec{J}^0 + \vec{J}^i = \sigma \left(-\nabla\varphi + \vec{u} \times \vec{B} \right), \quad (3.24)$$

donde

$$\vec{J}^0 = -\sigma\nabla\varphi, \quad (3.25)$$

es la corriente aplicada y

$$\vec{J}^i = \sigma \left(\vec{u} \times \vec{B} \right), \quad (3.26)$$

es la corriente inducida.

Asimismo, de acuerdo a la ley de Ampère, las corrientes inducen campos magnéticos, por lo que el campo magnético total será la suma del campo magnético aplicado y el campo magnético inducido:

$$\vec{B} = \vec{B}^0 + \vec{B}^i, \quad (3.27)$$

donde \vec{B}^0 es el campo magnético aplicado y \vec{B}^i es el campo magnético inducido

3.4. Adimensionalización

Ahora bien, debemos definir las variables adimensionales involucradas en nuestras ecuaciones, las cuales son:

$$t^* = \frac{tu_0}{L}, P^* = \frac{P}{\rho u_0^2}, \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{u_0}, \nabla^* = L\nabla, \vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_0}, \vec{J}^* = \frac{\vec{J}}{J^0}, \varphi^* = \frac{\varphi}{\varphi_0}. \quad (3.28)$$

Las propiedades del fluido conductor, es decir, la densidad de masa (ρ), la viscosidad cinemática (ν) y la conductividad eléctrica (σ) se suponen conocidas.

Estas variables se sustituirán en nuestras ecuaciones, por ejemplo, la ec. de Navier-Stokes adimensionalizada

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{u}^* \cdot \nabla^* \right) \vec{u}^* = -\nabla^* P^* + \frac{\nu}{Lu_0} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{LB_0 J^0}{u_0^2 \rho} \left(\vec{J}^* \times \vec{B}^* \right), \quad (3.29)$$

y la divergencia de la ley de Ohm adimensional

$$\nabla^* \cdot \vec{J}^* = -\frac{\sigma \varphi_0}{J^0 L} \nabla^{*2} \varphi^* + \frac{\sigma u_0 B_0}{J^0} \nabla^* \cdot \left(\vec{u}^* \times \vec{B}^* \right). \quad (3.30)$$

obviaremos las adimensionalizaciones en todas nuestras ecuaciones y eliminaremos el (*) de nuestras variables de aquí en adelante.

3.5. Parámetros adimensionales

Existen números importantes en magnetohidrodinámica que aparecen en nuestras ecuaciones adimensionalizadas, por ejemplo, en la ec. (3.29), el segundo término de lado derecho el factor resulta ser lo mismo que $1/Re$, donde Re se conoce como número de Reynolds:

Re se define como la relación entre las fuerzas inerciales (o convectivas) y las fuerzas viscosas presentes en un fluido.

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu}, \quad (3.31)$$

donde L es una longitud característica (m) del sistema, u_0 es la velocidad máxima medida en el experimento (m/s) y ν es la viscosidad cinemática del fluido (m²/s), este parámetro da una estimación de la importancia del transporte de cantidad de movimiento por convección comparado con el transporte por difusión viscosa.

Por otra parte, en la ec. (3.29), el segundo término del lado derecho tiene un factor que podemos definir como N , el cual es conocido como número de Stuart o parámetro de interacción:

$$N = (Ha)^2 / Re. \quad (3.32)$$

que cuantifica la razón de la fuerza magnética y la inercial. Este también nos introduce la existencia de Ha , que se define como el número de Hartmann:

$(Ha)^2$ representa la relación entre la fuerza de fricción ocasionada por la inducción magnética, y la viscosidad del fluido. [70].

$$Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \begin{cases} \ll 1 & \text{despreciable a términos superiores,} \\ \gg 1 & \text{valores significativos,} \end{cases} \quad (3.33)$$

Este parámetro adimensional se hace presente cuando hay efectos inducidos, esto es, cuando un fluido eléctricamente conductor es sometido a campos magnéticos grandes o corrientes eléctricas altas. El valor de Ha aumenta cuando el campo magnético incrementan, y viceversa. Es importante destacar que estamos empleando un electrolito con $Ha \ll 1$ en nuestro experimento, por lo que los términos multiplicados por Ha son muy pequeños y a términos superiores serán despreciables.

3.6. Formulación del problema

El desarrollo de un modelo teórico para la configuración experimental, requiere varios supuestos. El modelo físico simplificado consiste en un sistema con esferas concéntricas huecas no conductoras inmersas en un campo magnético dipolar (\vec{B}^0) que interactúa con una densidad de corriente radial (\vec{J}_r^0) inyectada en el plano ecuatorial debido a una diferencia de potencial generada por un par de anillos colocados en la parte externa de la esfera interna y en la parte interna de la esfera externa, generando una fuerza electromagnética o fuerza de Lorentz (F_θ) sobre el fluido en la dirección azimutal, como se observa en la Fig. 3.1. Además, las esferas pueden rotar independientemente con velocidad angular constante (Ω_i y Ω_o) alrededor del eje

vertical (en dirección azimutal). El fluido de trabajo contenido en el espacio anular (y en general en el espacio entre las esferas) es un electrolito.

Los flujos impulsados electromagnéticamente de soluciones electrolíticas débiles se han modelado con éxito al despreciar los efectos inducidos en modelos cuasi-bidimensionales [54, 55] y tridimensionales [52, 56]. Esto significa que las corrientes eléctricas inducidas por la interacción del flujo de fluido y el campo magnético, así como las fuerzas de Lorentz producidas por estas corrientes, pueden ignorarse por completo. Es decir, la fuerza de Lorentz tiene un solo componente: que es el producto de la corriente eléctrica inyectada con el campo magnético dipolar del imán.

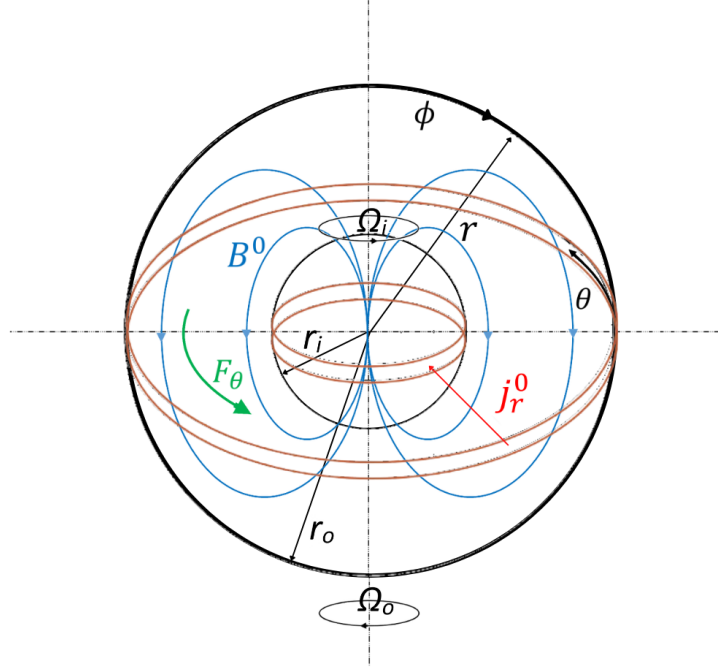


Figura 3.1: Modelo físico del problema. Una solución electrolítica llena el espacio entre las esferas exterior e interior de radios r_o y r_i , respectivamente. Las esferas pueden girar a velocidades angulares constantes Ω_o y Ω_i . La esfera interior encierra un imán permanente cilíndrico, que produce el campo magnético dipolar impuesto B^0 . La corriente eléctrica en cc es principalmente radial j_r^0 y se inyecta a través de dos electrodos anulares de cobre ubicados en el ecuador de las esferas, mientras que la dirección principal de la fuerza de Lorentz se denota por F_θ en dirección del ángulo azimutal.

3.7. Navier-Stokes adimensional

De la ecuación (3.30) de la divergencia de la ley de Ohm adimensionalizada aparecen parámetros adimensionales:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\sigma\varphi_0}{J^0 L} \nabla^2 \varphi + \frac{\sigma u_0 B_0}{J^0} \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\sigma\varphi_0}{J^0 L} \nabla^2 \varphi + \frac{H\sigma^2}{Re} \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = 0, \quad (3.34)$$

donde el segundo término de lado derecho es despreciable tomando en cuenta lo discutido en la sección 3.5., por lo que se reduce a:

$$\frac{J^0 L}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} = -\varphi_0 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (3.35)$$

de aquí deducimos las unidades del potencial, pues la igualdad indica que $[J^0 L/\sigma] = [\varphi_0]$ y siendo así podemos cancelarlas entre sí, para finalmente quedarnos con:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\nabla^2 \varphi = 0, \quad (3.36)$$

que es la ecuación diferencial adimensional que se debe resolver para la densidad de corriente eléctrica en nuestro sistema.

Por otro lado, para la ec. (3.29) de Navier-Stokes adimensionalizada, definimos el parámetro “Q” de la siguiente manera:

$$Q = \frac{U_0}{u_0}, \quad (3.37)$$

donde

$$U_0 = \frac{L^2 j^0 B_0}{\nu \rho}, \quad (3.38)$$

es una velocidad asociada a los efectos electromagnéticos, mientras que

$$u_0 = \frac{\nu}{L}, \quad (3.39)$$

es una velocidad asociada a los efectos viscosos. Por lo que la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada por resolver finalmente queda como:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla P + \nabla^2 \vec{u} + Q (\vec{J} \times \vec{B}). \quad (3.40)$$

3.8. Coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas, nuestros vectores y ecuaciones son:

vector de posición

$$\vec{r} = (r, \theta, \phi), \quad (3.41)$$

vector velocidad

$$\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi). \quad (3.42)$$

La ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas está dada por:

La ecuación de Navier-Stokes en la componente radial \hat{r}

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho f_r, \quad (3.43)$$

La ecuación de Navier-Stokes en dirección $\hat{\theta}$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} \cot \theta \right) = \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho f_\theta, \end{aligned} \quad (3.44)$$

La ecuación de Navier-Stokes en dirección $\hat{\phi}$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\phi u_\theta}{r} \cot \theta \right) = \\ & - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 u_\phi + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \rho f_\phi, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.46)$$

3.9. Solución analítica

Ya que hemos definido todas nuestras ecuaciones, debemos resolverlas analíticamente para poder entender el movimiento que se presenta en el sistema descrito. Sin embargo, el problema es aún bastante complejo pero podemos justificar ciertas condiciones que lo simplifiquen.

Con el fin de simplificar el sistema, a la vez que centramos la atención en lo que queremos medir, tomaremos en cuenta las siguientes condiciones del sistema:

1.- El sistema está en un estado estacionario. Esto implica que el movimiento en nuestro sistema ha llegado a un punto en que es independiente del tiempo y no varía su perfil de velocidades, manteniéndose aproximadamente igual en todo momento. Esto es posible por estar dentro de los parámetros de flujo laminar.

2.- No hay gradiente de presión en el sistema. No tenemos cambios de presión aplicados en nuestro experimento en ningún momento, por lo que el término de la presión de Navier-Stokes no contribuye al movimiento (o es igual a cero).

3.- El plano de observación es en $(r, \phi = 90)$, por lo que no hay dependencia para la velocidad en función de θ . Dado que nuestro sistema tiene simetría axial en θ (o sea que es axisimétrico), la velocidad no tendrá ninguna variación con el ángulo θ , por lo que la velocidad no dependerá de esta coordenada.

4.- El campo magnético incide perpendicularmente al plano de observación en dirección $\hat{\phi}$ y la corriente es radial en dirección \hat{r} , por lo que la fuerza de Lorentz está en dirección $\hat{\theta}$, lo cual implica que $u_\phi = 0$ y $u_r = 0$. Esto debido a las propiedades vectoriales del producto cruz

aplicado en la zona ecuatorial de nuestro experimento, que será la zona de observación.

Al aplicar estas condiciones en la ec. de Navier-Stokes, las ecuaciones (3.43), (3.44), (3.45) y (3.46) se reducen a:

La componente radial de la ecuación de Navier-Stokes (\hat{r}) se reduce a

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = \\ & -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho f_r, \end{aligned} \quad (3.47)$$

La ecuación de Navier-Stokes en dirección $\hat{\theta}$ se reduce a

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} \cot \theta \right) = \\ & -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho f_\theta, \end{aligned} \quad (3.48)$$

La ecuación de Navier-Stokes en dirección $\hat{\phi}$ se reduce a

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\phi u_\theta}{r} \cot \theta \right) = \\ & -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 u_\phi + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \rho f_\phi, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.50)$$

Las ecuaciones (3.47) y (3.49) quedan anuladas por completo, quedando únicamente la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\rho}{\mu} (f_\theta), \quad (3.51)$$

donde $f_\theta = J_r^0 B_\phi^0$, luego, aplicando el laplaciano reducido (3.51) queda:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_\theta}{dr} \right) = \frac{\rho}{\mu} (f_\theta). \quad (3.52)$$

3.10. Corriente y campo magnético aplicados

Nuestra ecuación diferencial adimensional a resolver es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_\theta}{dr} \right) = Q (J_r^0 B_\phi^0), \quad (3.53)$$

Aplicando las condiciones iniciales a esta ecuación nos da:

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = Q J_r^0 B_\phi^0. \quad (3.54)$$

Dado que de la ecuación (3.36) sabemos que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\nabla^2 \varphi = 0,$$

que en coordenadas esféricas queda como:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3.55)$$

Por lo que tenemos una ecuación diferencial dependiente de r (pues φ no depende de θ ni de ϕ) para el potencial eléctrico:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad (3.56)$$

que aplicando la regla de la cadena y simplificando queda:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (3.57)$$

Al resolver la ecuación diferencial, nos queda que:

$$\varphi(r) = \frac{c_1}{r} + c_2.$$

y tomando en cuenta que la corriente aplicada es:

$$\vec{J} = J_r^0 = -\frac{\sigma u_0}{L J^0} \nabla \varphi. \quad (3.58)$$

podemos imponer las condiciones de frontera adimensionales $J_r^0(r_i) = -\frac{d\varphi(r_i)}{dr} = 1$ y $\varphi(r_o) = 0$, que nos da valores de las constantes $c_1 = r_1^2$ y $c_2 = \frac{r_i^2}{r} - \frac{r_i^2}{r_0}$.

Entonces, a partir de la ecuación (3.58) la solución de la densidad de corriente queda dada por:

$$J_r^0 = \frac{r_i^2}{r^2}. \quad (3.59)$$

Por otra parte, el campo magnético adimensional, tomando en cuenta el comportamiento dipolar del campo magnético B_ϕ^0 y que estamos en la región $\phi = \frac{\pi}{2}$, es:

$$\mathbf{B}^0 = \frac{r_i^3}{r^3} \left(2 \cos \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\phi} \right) = \frac{r_i^3}{r^3} \hat{\phi}. \quad (3.60)$$

Por lo que nos queda:

$$B_\phi^0 = \frac{r_i^3}{r^3}. \quad (3.61)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (3.59) y (3.61) en (3.54) obtenemos:

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = Q \frac{r_i^5}{r^5}. \quad (3.62)$$

Que es una ecuación diferencial adimensional para u_θ en función de r , que es justamente lo que queremos conocer.

3.11. Solución de la ecuación diferencial

Ya tenemos la ecuación diferencial que describe el movimiento del fluido en la zona ecuatorial, ahora sólo queda resolverla, para lo cual nos conviene ver la ec. (3.62) como:

$$r^2 \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + 2r \frac{du_\theta}{dr} - u_\theta = Q \frac{r_i^5}{r^3}. \quad (3.63)$$

Para que tome la forma de una ecuación diferencial de Cauchy-Riemann i.e. del tipo:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y. \quad (3.64)$$

En nuestro caso, estamos manejando una ecuación diferencial de Cauchy-Riemann de segundo orden, por lo que lo primero será proponer una solución del tipo

$$u_\theta = r^m,$$

así como su primera y segunda derivada, dadas por:

$$\begin{aligned} u'_\theta &= m r^{m-1}, \\ u''_\theta &= m(m-1) r^{m-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones propuestas en la ecuación (3.63) obtenemos:

$$\begin{aligned} r^2 m(m-1)r^{m-2} + 2r m r^{m-1} - r^m &= Q \frac{r_i^5}{r^3}, \\ \Rightarrow [m(m-1) + 2m - 1]r^m &= Q \frac{r_i^5}{r^3}. \end{aligned}$$

Para calcular la solución general, debemos obtener la solución homogénea, que resulta de igualar la ecuación diferencial de Cauchy-Riemann a cero y la particular o inhomogénea, que resulta de considerar la igualdad en la ecuación (3.63), donde la suma de estas será la solución general.

Para la parte homogénea, tenemos que:

$$\begin{aligned} [m(m-1) + 2m - 1]r^m &= 0 \Rightarrow m^2 + m - 1 = 0, \\ \therefore m &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$u_\theta = u_{\theta_1} + u_{\theta_2} = C_1 r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + C_2 r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Ahora, para la solución particular, necesitaremos la solución homogénea:

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = Q \frac{r_i^5}{r^5},$$

y proponemos:

$$u_\theta = u_1 u_{\theta_1} + u_2 u_{\theta_2} = u_1 r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + u_2 r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Ahora bien, lo que queremos determinar es u_1 y u_2 de donde tendremos que resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} u'_1 u_{\theta_1} + u'_2 u_{\theta_2} &= 0, \\ u'_1 u'_{\theta_1} + u'_2 u'_{\theta_2} &= f(r) = Q \frac{r_i^5}{r^5}, \end{aligned}$$

donde

$$u'_{\theta_1} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) r^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \text{ y } u'_{\theta_2} = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) r^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}},$$

y la teoría nos dice que $u'_1 = \frac{W_1}{W}$ y $u'_2 = \frac{W_2}{W}$ donde W , W_1 y W_2 están determinados por:

$$W = \det \begin{bmatrix} u_{\theta_1} & u_{\theta_2} \\ u'_{\theta_1} & u'_{\theta_2} \end{bmatrix}, \quad W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & u_{\theta_2} \\ f(r) & u'_{\theta_2} \end{bmatrix} \text{ y } W_2 = \det \begin{bmatrix} u_{\theta_1} & 0 \\ u'_{\theta_1} & f(r) \end{bmatrix}.$$

Por lo que debemos resolver estos Wronskianos.

$$W = \det \begin{bmatrix} r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} & r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} & \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)r^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r^{-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)r^{-2} = \sqrt{5}r^{-2},$$

$$W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ Q\frac{r_i^5}{r^5} & \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)r^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = -Qr_i^5r^{\frac{-11+\sqrt{5}}{2}},$$

$$W_2 = \det \begin{bmatrix} r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} & Q\frac{r_i^5}{r^5} \end{bmatrix} = Qr_i^5r^{\frac{-11-\sqrt{5}}{2}},$$

$$\Rightarrow u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-Qr_i^5r^{\frac{-11+\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5}r^{-2}} = \frac{-Qr_i^5r^{\frac{-7+\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5}},$$

$$\text{y } u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{Qr_i^5r^{\frac{-11-\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5}r^{-2}} = \frac{Qr_i^5r^{\frac{-7-\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5}}.$$

Para encontrar u_1 y u_2 sólo debemos integrar u'_1 y u'_2 respectivamente, quedando:

$$u_1 = \frac{-Qr_i^5}{\sqrt{5}} \frac{2}{-5 + \sqrt{5}} r^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}, \quad u_2 = \frac{Qr_i^5}{\sqrt{5}} \frac{2}{-5 - \sqrt{5}} r^{\frac{-5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Recordemos que la solución particular estaba definida por:

$$u_{\theta p} = u_1 u_{\theta 1} + u_2 u_{\theta 2},$$

por lo que sustituyendo las soluciones

$$\Rightarrow U_{\theta p} = \frac{-Qr_i^5}{\sqrt{5}} \frac{2}{-5 + \sqrt{5}} r^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} \left(r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) + \frac{Qr_i^5}{\sqrt{5}} \frac{2}{-5 - \sqrt{5}} r^{\frac{-5-\sqrt{5}}{2}} \left(r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \right).$$

Aún es posible simplificar la solución, dando como resultado:

$$u_{\theta p} = \frac{1}{5} Qr_i^5 r^{-3}.$$

Finalmente, nuestra ecuación general, sumando la parte homogénea y la particular, queda como:

$$u_{\theta} = c_1 r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + c_2 r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{5} Qr_i^5 r^{-3}. \quad (3.65)$$

Para encontrar las constantes c_1 y c_2 debemos tomar en cuenta las condiciones de frontera $u_{\theta}(r_i) = u_i$ y $u_{\theta}(r_o) = u_o$, con u_o y u_i las velocidades azimutales de las esferas externa e interna respectivamente. Para el caso general, las constantes c_1 y c_2 son:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{5}Q \left(r_i^{5+\sqrt{5}} r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} r_o^{\sqrt{5}} \right) - u_o r_i^{\sqrt{5}} r_o^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + u_i r_i^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} r_o^{\sqrt{5}}}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}},$$

$$c_2 = \frac{\frac{1}{5}Q \left(r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^5 r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} \right) + u_o r_o^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - u_i r_i^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}}.$$

La solución general completa es:

$$u_\theta = \left(c_1 = \frac{\frac{1}{5}Q \left(r_i^{5+\sqrt{5}} r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} r_o^{\sqrt{5}} \right) - u_o r_i^{\sqrt{5}} r_o^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + u_i r_i^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} r_o^{\sqrt{5}}}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}} \right) r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \quad (3.66)$$

$$+ \left(\frac{\frac{1}{5}Q \left(r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^5 r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} \right) + u_o r_o^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - u_i r_i^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}} \right) r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{5}Q r_i^5 r^{-3}$$

Para el caso puramente electromagnético, donde $u_\theta(r_i) = 0$ y $u_\theta(r_o) = 0$, tenemos que:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{5}Q \left(r_i^{5+\sqrt{5}} r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} r_o^{\sqrt{5}} \right)}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}},$$

$$c_2 = \frac{\frac{1}{5}Q \left(r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^5 r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} \right)}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}},$$

por lo que la solución para $u_\theta(r)$ en este caso sería:

$$u_\theta = \frac{1}{5}Q \left(\frac{r^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \left(r_i^{5+\sqrt{5}} r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} r_o^{\sqrt{5}} \right) + r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \left(r_i^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - r_i^5 r_o^{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}} \right)}{r_o^{\sqrt{5}} - r_i^{\sqrt{5}}} + r_i^5 r^{-3} \right) \quad (3.67)$$

En cada caso se deben escoger las condiciones de frontera. Para nuestra solución analítica usaremos $Q = 0.5$ al momento de graficar nuestros casos, analíticamente los valores para u_i y u_o serán escogidos de manera que se asemejen cualitativamente a las gráficas experimentales. Las gráficas se hicieron con el programa Mathematica (de Wolfram Alpha).

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo realizaremos la comparación cualitativa de los resultados experimentales explicados en el Capítulo 2, junto con las gráficas analíticas obtenidas a partir de la ecuación (3.66) del Capítulo 3, esto para seis casos con diferentes configuraciones del problema. Utilizando la ec. (3.31) calculamos el número de Reynolds para cada caso experimental, con el fin de garantizar que nuestros experimentos se encuentran en el límite laminar para el cual supusimos nuestras ecuaciones analíticas. El número de Reynolds varía en cada caso debido a las diferentes fuerzas actuando en el sistema. Los valores de velocidad analíticos se eligen arbitrariamente para comparar visualmente con los perfiles de velocidad experimentales. Debemos tener en cuenta que la solución analítica está adimensionalizada y solo se puede hacer una comparación teórico-experimental de manera cualitativa. En cada caso se mostrará un esquema que explique las fuerzas implicadas, se mostrará el campo vectorial obtenido a través del promedio temporal de los fotogramas de la cámara, así como las gráficas experimentales y analíticas de la velocidad angular u_θ en función del radio r .

La longitud característica para las gráficas experimentales de la velocidad angular es de 0.7 m, pues es la distancia entre las paredes de las esferas interna y externa, mientras que las gráficas analíticas de la velocidad angular están adimensionalizadas, por lo que la longitud característica en estas es 1 (de 0.6 a 1.6, esto escogido arbitrariamente de modo que se tome en cuenta que las esferas tienen radios distintos de cero).

El número de Reynolds cambia para cada caso, esto se debe únicamente a la velocidad máxima registrada en cada experimento, puesto que ni la viscosidad ni la longitud característica del experimento se están variando. El cambio en la velocidad se debe a las fuerzas implicadas en cada caso, siendo así que, por ejemplo, las fuerzas de arrastre mueven con mayor fuerza al fluido que la fuerza de Lorentz.

4.1. Forzamiento electromagnético entre esferas concéntricas estacionarias

Una comparación cualitativa y validación del modelo analítico con estos resultados experimentales requiere graficar la velocidad azimutal como función del radio en el plano ecuatorial. El primer caso a estudiar, corresponde a cuando se inyecta una corriente eléctrica radialmente que interactúa con el campo magnético generando una fuerza azimutal de Lorentz en dirección antihoraria y en ausencia de velocidad angular en las esferas, i.e. $\Omega_i = 0$, $\Omega_o = 0$, $B^0 = B_\phi^0$ y $J^0 = J_r^0$, como se muestra en la Figura 4.1 (a).

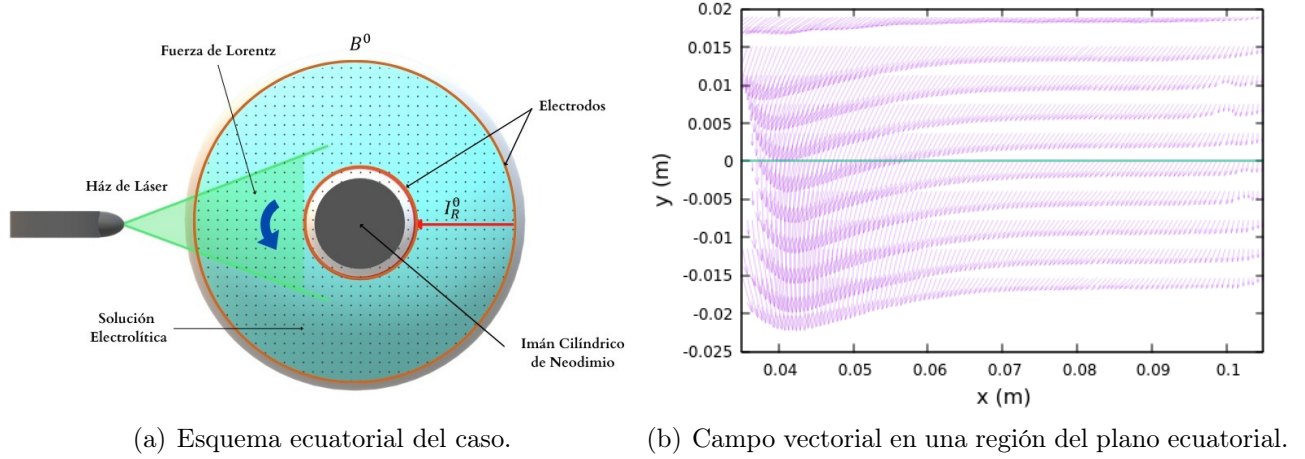


Figura 4.1: Observación experimental.

Por la ec. (3.31), sabemos que el número de Reynolds en este caso es $Re = \frac{u_{max}L}{\nu} = 525$, donde la longitud característica del sistema es $L = 0.07$ m y u_{max} es la velocidad máxima en el sistema. En la Figura 4.1 (b) se muestra el campo vectorial promediado en el tiempo de las mediciones experimentales en una región del plano ecuatorial ($\phi = \pi/2$), donde podemos apreciar que la velocidad máxima se ubica cerca de la esfera interior, como se reporta en [51]. Esto se puede explicar si consideramos que la fuerza de Lorentz está confinada a la región cercana a la esfera interior, donde tanto el campo magnético como la corriente inyectada son más intensos y decae como r^{-5} . Para este caso particular, la fuerza de Lorentz promueve una rotación del fluido en sentido horario, pero puede ser invertida al cambiar el campo magnético o la dirección de la corriente inyectada, siendo esta última una implementación más sencilla.

La comparación cualitativa de la velocidad angular u_θ entre el experimento y el análisis matemático se muestra en la Figura 4.2, donde notamos que tanto en (a) como en (b) el máximo de la velocidad está dado cerca a la esfera interna debido a la acción de la fuerza de Lorentz que es más fuerte cerca al imán dentro de la esfera interna debido a la magnitud del campo magnético, aunque no pegado a la esfera interna pues está la condición de no deslizamiento en las paredes. En la Figura 4.2 (a) notamos que cerca a la esfera externa hay un pico, el cual atribuimos a un error experimental, quizá debido a la curvatura de la esfera que interfiere con nuestras observaciones en esa zona.

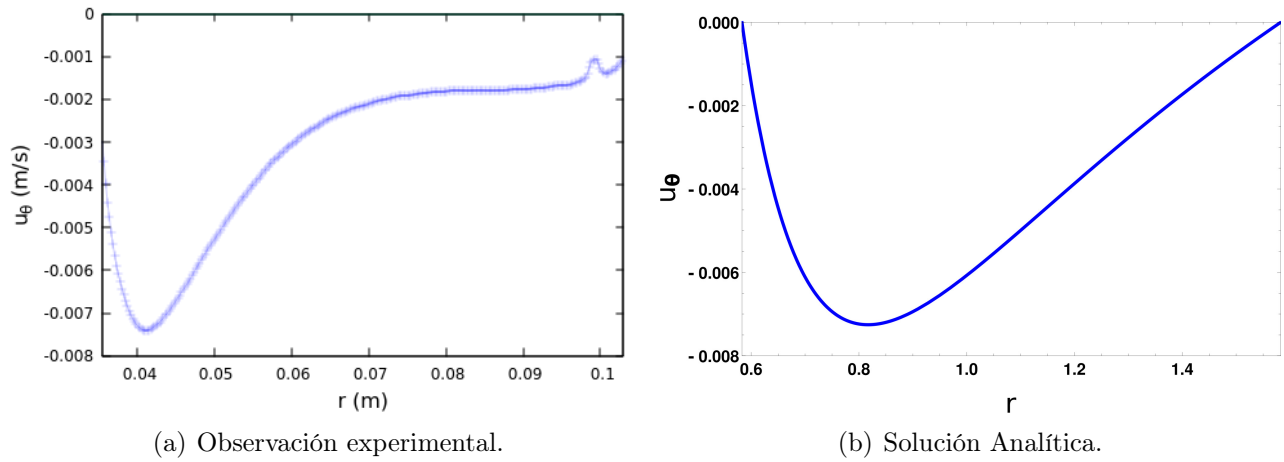


Figura 4.2: Perfil de velocidad u_θ en función del radio.

4.2. Flujo de arrastre con esfera interna en rotación constante

El segundo caso a estudiar, corresponde a un flujo generado por el arrastre de la esfera interna sobre el fluido al girar en sentido horario en ausencia de fuerza de Lorentz, i.e. $\Omega_i = 0.457$ rad/s, $\Omega_o = 0$, $B^0 = B_\phi^0$ y $J^0 = 0$, como se muestra en la Figura 4.3 (a).

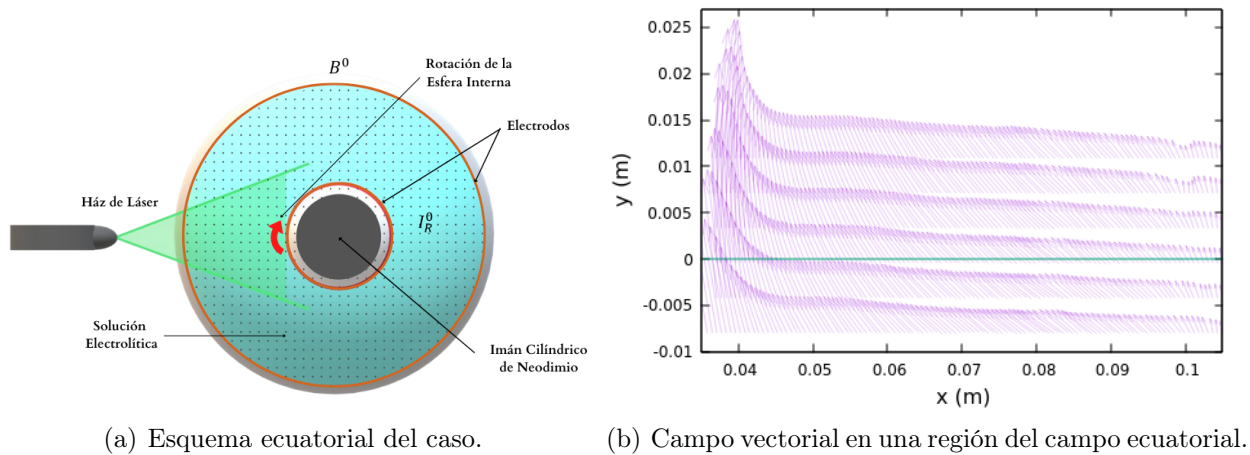


Figura 4.3: Observación experimental.

En la Figura 4.3 (b) tenemos un $Re = 1050$, donde la rotación promueve un flujo cuya magnitud máxima se observa pegado a la esfera interna y llega a cero en la esfera exterior en reposo debido a la condición de no deslizamiento, que se visualiza mediante la longitud de los vectores y se corrobora con la Figura 4.4, cuyos perfiles describen cualitativamente un comportamiento en la velocidad angular conforme se avanza radialmente, aunque cabe destacar que la caída es más suave en la gráfica analítica y la mayor diferencia entre la parte analítica y experimental está en la zona cercana a la esfera interna, además, en la gráfica experimental hay un efecto de borde pegado a la esfera externa antes de caer a cero, nuevamente atribuimos esto a un error experimental, debido a la falta de visibilidad en la región cercana a la esfera externa por la curvatura y el grosor de nuestro aparato experimental. El comportamiento observado en la Figura 4.4 entre (a) y (b) es principalmente diferente en la región cercana a la esfera interna.

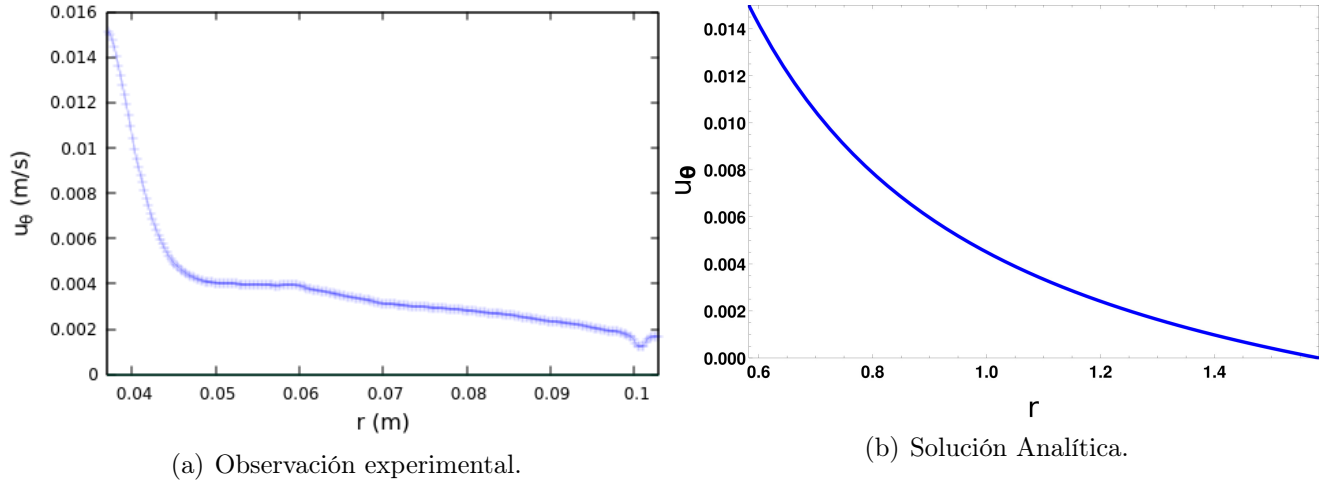


Figura 4.4: Perfil de velocidad u_θ en función del radio.

4.3. Flujo de arrastre con esfera externa en rotación constante

El tercer caso a estudiar, corresponde a un flujo generado por el arrastre de la esfera externa sobre el fluido al girar en sentido antihorario en ausencia de fuerza de Lorentz, i.e. $\Omega_i = 0$, $\Omega_o = 0.305$ rad/s, $B^0 = B_\phi^0$ y $J^0 = 0$, como se muestra en la Figura 4.5 (a).

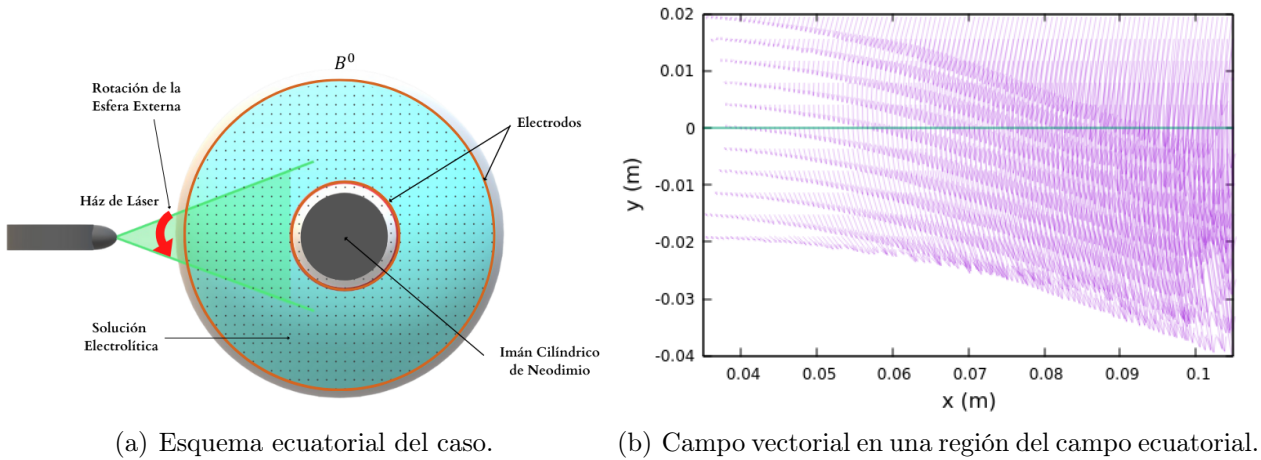


Figura 4.5: Observación experimental.

En la Figura 4.10 donde $Re = 1800$, el arrastre de la esfera externa promueve un flujo principalmente en la dirección negativa en y , cuya magnitud máxima se observa pegado a la esfera externa y llega a cero en la esfera interior en reposo debido a la condición de no deslizamiento, lo cual se visualiza mediante la longitud de los vectores. Así mismo, las gráficas experimental de la Figura 4.6 (a) y analítica de la Figura 4.6 (b) muestran este comportamiento pero con una concavidad opuesta que los diferencia, el por qué de esta y otras diferencias se podrían deber al régimen en que se llevan a cabo la parte analítica y experimental, siendo la primera para un número de Reynolds $Re < 1$ y la segunda la tenemos para $Re \approx 10^3$.

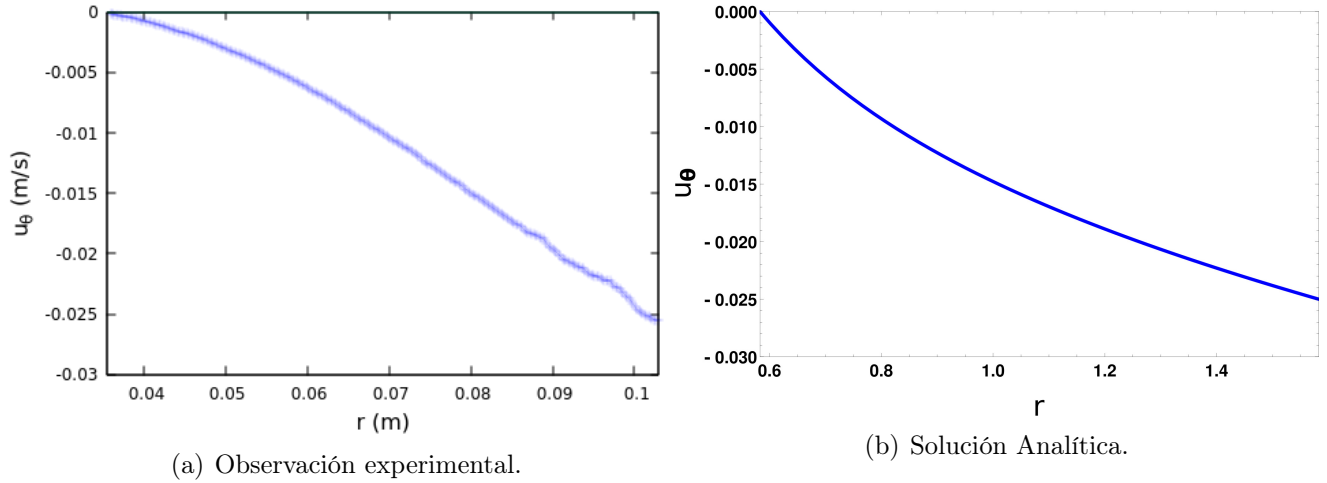


Figura 4.6: Perfil de velocidad u_θ en función del radio.

4.4. Flujo de arrastre con esferas interna y externa en rotación constante

El cuarto caso a estudiar, corresponde a un flujo generado por el arrastre de las esferas externa sobre el fluido al girar en sentido antihorario e interna al girar en sentido horario en ausencia de fuerza de Lorentz, i.e. $\Omega_i = 0.457$ rad/s, $\Omega_o = 0.305$ rad/s, $B^0 = B_\phi^0$ y $J^0 = 0$, como se muestra en la Figura 4.7 (a).

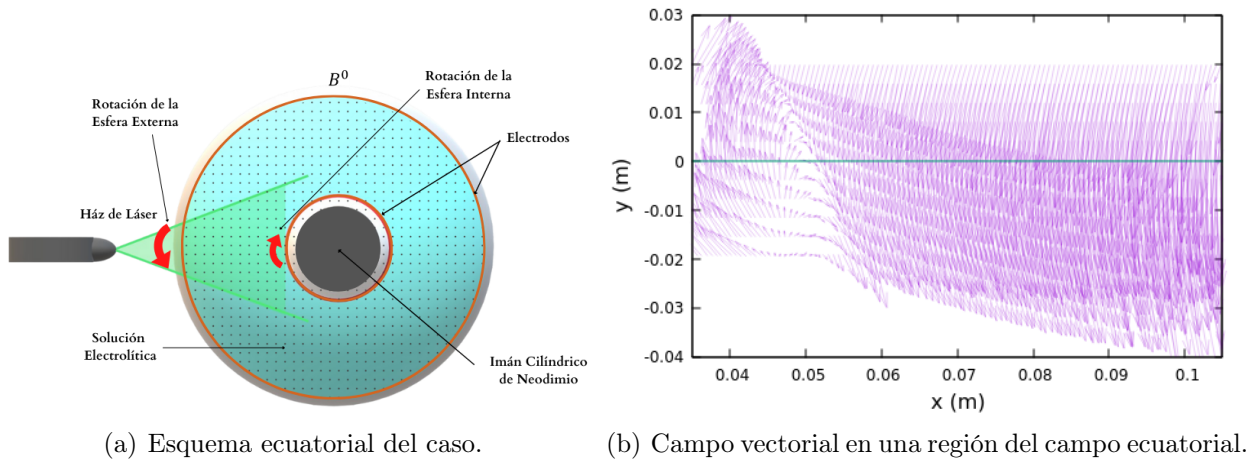


Figura 4.7: Observación experimental.

Cuando ambas esferas giran en sentido contrario, se observan regiones con velocidades positivas y negativas, siendo positivas en la región cercana a la esfera interna debido al arrastre de esta y negativas en la región media y cercana a la esfera externa debido al arrastre de esta última como se aprecia vectorialmente en la Figura 4.7 (b), donde tenemos $Re = 1750$. ES interesante notar que el flujo es mayormente influenciado por el arrastre de la esfera externa, esto debido a que gira con mayor velocidad, generando así mayor fuerza de arrastre, lo cual puede comprobarse al analizar los números de Reynolds de las secciones 4.2 y 4.3. Además, los resultados experimentales muestran la aparente aparición de un punto de inflexión que cambia la concavidad de la gráfica como se muestra en la Figura 4.8 (a) aunque podría ser simplemente una zona en la que el promedio saliera extraño, pues a grandes rasgos la concavidad pareciera

mantenerse convexa, mientras que en la gráfica analítica en la Figura 4.8 (b) se observa que la concavidad convexa se mantiene en todo momento. Para este caso particular, se puede observar que analíticamente y experimentalmente (Figura 4.8) los perfiles tienen cierta similitud entre sí, mucho mejor que los casos dos casos anteriores de las secciones 4.2 y 4.3, que involucran también únicamente fuerzas de arrastre.

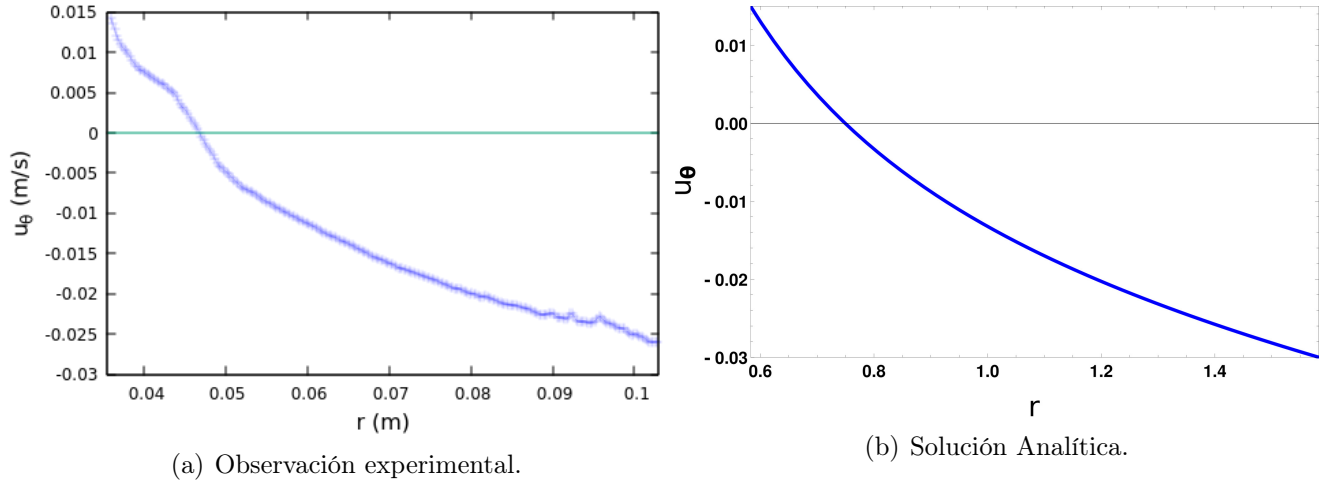


Figura 4.8: Perfil de velocidad u_θ en función del radio.

4.5. Forzamiento electromagnético entre esferas concéntricas con esfera externa en rotación constante

El quinto caso a estudiar es finalmente la superposición de ambos efectos, que corresponde a un flujo generado por la fuerza de Lorentz en sentido horario y por el arrastre de la esfera externa sobre el fluido al girar en sentido antihorario, i.e. $\Omega_i = 0$, $\Omega_o = 0.305$ rad/s, $B^0 = B_\phi^0$ y $J^0 = J_r^0$, como se muestra en la Figura 4.9 (a).

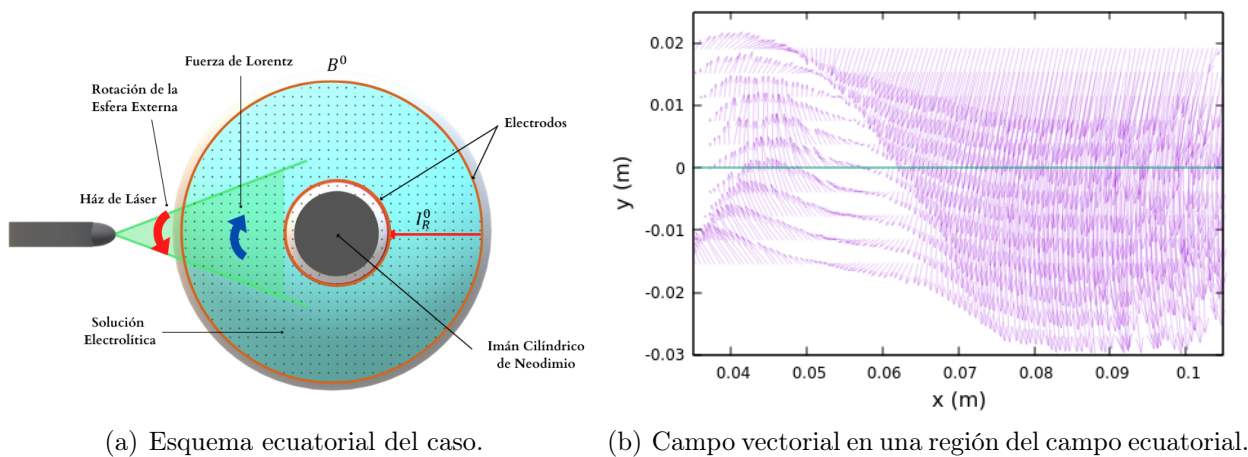


Figura 4.9: Observación experimental.

En los resultados experimentales obtenidos para el caso electromagnético de la sección 4.1, la velocidad máxima se obtiene más cerca de la esfera interna, mientras que en el caso de arrastre por movimiento en la esfera externa en la sección 4.3, la velocidad máxima se encuentra justo en la esfera externa. Ahora bien, si la esfera externa gira y se aplica la fuerza electromagnética,

se puede obtener una amplia variedad de flujos dependiendo de las condiciones. Sin embargo, las comparaciones mostradas en la Figura 4.10 valida los supuestos asumidos para la solución analítica, ajustando bastante bien el perfil experimental (Figura 4.10 (a)) cualitativamente con el perfil analítico (Figura 4.10 (b)). En ambas gráficas de la Figura 4.10 podemos notar que hay un máximo positivo cercano a la esfera interna, esto sucede debido a que la condición de no deslizamiento mantiene la velocidad en cero pegado a la esfera interna (impidiendo así el movimiento debido a la fuerza de Lorentz en este punto), sin embargo después domina el término de la fuerza de Lorentz que promueve un flujo antihorario (de acuerdo con la Figura 4.9 (b)), también tenemos la esfera externa en rotación pero en sentido horario (de acuerdo con la Figura 4.9 (a)), por lo que esta fuerza es opuesta a la de Lorentz, lo cual ocasiona un cruce por cero en el momento en que las fuerzas son equiparables. Esto explica que el máximo positivo sea debido a la Fuerza de Lorentz, ubicado entre la condición de no deslizamiento y la fuerza de arrastre por la esfera externa.

Para este caso tenemos un $Re = 770$ y además vale la pena mencionar el número de Ekman, el cual está dado por $Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2}$, donde Ω es la velocidad angular. En general, para estos experimentos se espera un valor de $Ek \ll 1$ y para este caso experimental tenemos $Ek = 8.89 \times 10^{-5}$, que es un valor aceptable para nuestro experimento.

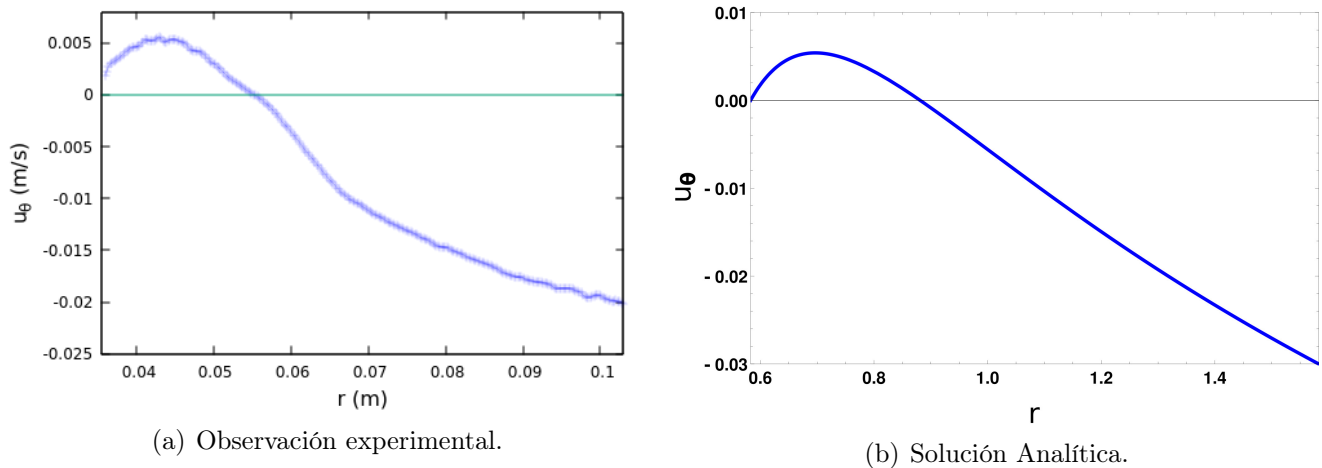


Figura 4.10: Perfil de velocidad u_θ en función del radio.

Este caso es el que más se asemeja (en la medida de las posibilidades de este experimento) con las condiciones del núcleo terrestre, pues toma en cuenta el movimiento angular en la esfera externa que simula el límite del núcleo externo y también una fuerza de Lorentz.

4.6. Forzamiento electromagnético entre esferas concéntricas con esfera interna en rotación constante

El sexto caso a estudiar es nuevamente la superposición de los efectos electromagnéticos y de arrastre que corresponde a un flujo generado por la fuerza de Lorentz en sentido horario y por el arrastre de la esfera interna sobre el fluido al girar en sentido horario, i.e. $\Omega_i = 0.457$ rad/s, $\Omega_o = 0$, $B^0 = B_\phi^0$ y $J^0 = J_r^0$, como se muestra en la Figura 4.11 (a).

En este caso, estamos juntando los casos de las secciones 4.1 y 4.2 para la parte experimental, lamentablemente, este caso experimental presentó errores de los que nos dimos cuenta muy tarde, puesto que difería de la gráfica analítica en algo que no podía diferir, esto es, en

la condición de no deslizamiento en la esfera externa, por lo que descartamos estos resultados atribuyendo los errores a no haber esperado tiempo suficiente para llegar a un estado estacionario del flujo respecto al experimento anterior. Podemos observar en la Figura 4.11 (b) que la fuerza de Lorentz actúa débilmente en este caso, pues como vimos en los casos 4.1 y 4.5, su mayor efecto se alcanza cercano a la esfera interna pero en este caso es sobrepasada por la fuerza de arrastre de la esfera interna en rotación, por lo que las fuerzas electromagnéticas apenas y contribuyen al movimiento en la zona media de observación.

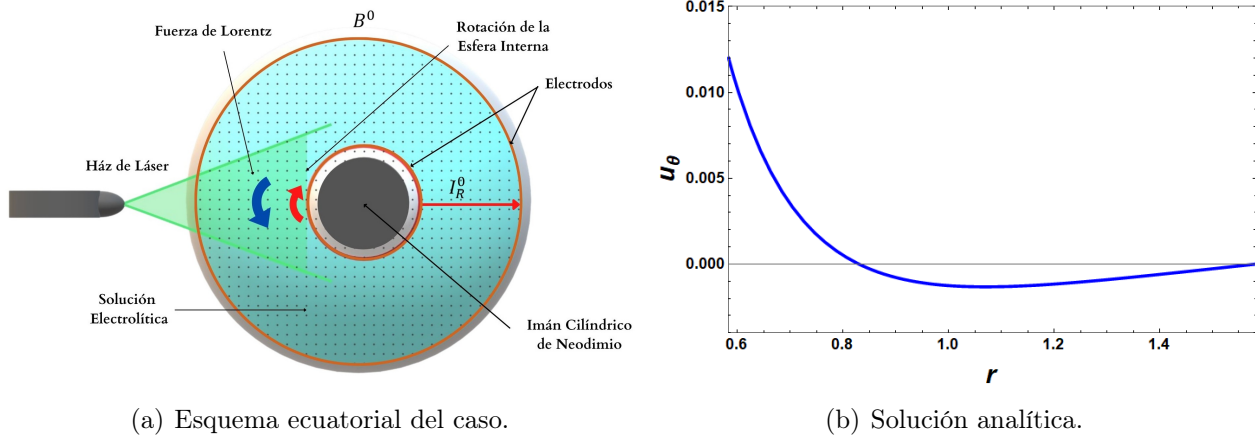


Figura 4.11: Resultados analíticos.

Finalmente queda mencionar que en estas condiciones, el error máximo en las observaciones experimentales fue del 15%. Por un lado, este error se puede deber a errores intrínsecos al método PIV, como la velocidad de grabado de la cámara, el paralelismo entre el plano de observación y el lente de la cámara o errores en el software PIVlab con las partículas prueba y por otro lado, cabe mencionar que nuestro sistema está filmando a través de una esfera sólida traslúcida, que respecto a la visión de la cámara cambia su curvatura y en menor medida su grosor conforme el plano de observación avanza en la coordenada r . Debido a esto, se presentan efectos de borde a los que atribuimos mayoritariamente los errores.

La región de observación de las figuras del campo de velocidades difieren en el eje y debido únicamente a la longitud de los vectores, los cuales, para alcanzar a apreciarlos bien cada caso, se ajustaron únicamente en la componente del eje y .

En todos los casos, se puede observar una cierta concordancia entre los resultados teóricos y las mediciones experimentales, sin embargo, en el caso que más nos interesa por la naturaleza de nuestro sistema magnetohidrodinámico, que es el caso 4.5, los perfiles se ajustan particularmente mejor que en los casos de fuerzas aisladas de las secciones 4.1, 4.2 y 4.3. El caso 4.6 que hubiera sido también de particular interés lamentablemente no pudo ser comparado exitosamente. El caso 4.4, pese a no tener efectos electromagnéticos en el sistema también se ajusta muy bien en el perfil analítico respecto al experimental.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo abordamos teórica y experimentalmente el flujo impulsado electromagnéticamente entre dos esferas concéntricas considerando la rotación diferencial y la agitación electromagnética en el régimen laminar, que ha sido poco investigado. La fuerza electromagnética azimutal se genera mediante la interacción de una corriente continua inyectada radialmente en la región ecuatorial y un campo magnético dipolar. Esta configuración es una versión modificada de uno de los problemas fundamentales de la dinámica de fluidos: el flujo de Couette esférico giratorio. Sin embargo, dado que la agitación electromagnética está presente, el flujo ahora depende de un mayor número de parámetros que dan lugar a un conjunto más amplio de estructuras de flujo, que son una investigación en curso. Debido a la simetría del problema, se presenta una solución analítica para $Re < 1$. La caracterización experimental se realizó mediante la técnica PIV en una sección del plano ecuatorial. Para la validación de los modelos analíticos se consideró una revisión sistemática de seis diferentes casos, tres de ellos puramente hidrodinámicos, uno que sólo involucraba forzamiento electromagnético y dos casos combinados. En condiciones experimentales exploradas, el número de Reynolds varía de 525 a 1800 aproximadamente, lo que confirma el régimen de flujo laminar. A pesar de que se han desatendido diferentes fenómenos en la obtención de la solución analítica, las comparaciones mostradas en este trabajo confirman su validez en el régimen de flujo progresivo ($Re < 1$). Además, los perfiles de velocidad experimentales y analíticos se compararon con éxito de forma cualitativa para algunos de los casos, sin embargo, mostraron diferencias para otros, lo cual puede ser explicado en términos del régimen obtenido experimentalmente que tiene un Reynolds de aproximadamente 3 órdenes de magnitud mayor, lo cual da validez a los modelos y suposiciones matemáticas realizadas y nos confirma que vamos por buen camino en la comprensión de flujos generados en dínamos esféricos y que al menos para electrolitos podemos estar confiados para intentar resolver las ecuaciones numéricamente y ver fluidos tridimensionales tomando especial atención en el régimen para futuras comparaciones. Existe ya un artículo publicado con los datos de este trabajo donde se agrega una comparación numérica y un análisis más extenso [?]. A pesar de que obtuvimos una buena concordancia entre los resultados teóricos y experimentales, aún quedan varios temas por entender, tales como: la estabilidad del flujo en función de las fuerzas impulsoras y la extensión del modelo hacia otros planos. A diferencia de la ecuación, la validez de estos resultados para líquidos altamente conductores, entre otros, requiere una investigación separada, por lo que el trabajo con metales líquidos como el galinstan ya se está llevando a cabo.

Bibliografía

- [1] Geomagnetism Frequently Asked Questions. (s. f.). NATIONAL CENTERS FOR ENVIRONMENTAL INFORMATION. Recuperado 20 de febrero de 2020, de <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/faqgeom.shtml>
- [2] El campo magnético de la Tierra está cambiando rápidamente y no se sabe la causa. (2020, 20 febrero). Televisa.News. <https://noticieros.televisa.com/historia/norte-magnetico-tierra-esta-cambiando-rapidamente/>
- [3] Glatzmaier, G. A. (s. f.). The Geodynamo. Gary A Glatzmaier. Recuperado 20 de febrero de 2020, de <https://websites.pmc.ucsc.edu/~glatz/geodynamo.html>
- [4] títulos.com.ar. (2020a, 15 de junio). BAE Negocios: Encuentran estructuras grotes y misteriosas cerca del núcleo de la Tierra . Recuperado el 3 de mayo de 2022, de <https://titulos.com.ar/general/BAE%20Negocios/encuentran-estructuras-enormes-y-misteriosas-cerca-del-nucleo-de-la-tierra/4851283>
- [5] Ec, R. (4 de junio de 2015). China y Europe se unen para estudiar la magnetósfera terrestre . El Comercio Perú. Recuperado el 3 de mayo de 2022, de <https://elcomercio.pe/tecnologia/ciencias/china-europa-unen-estudiar-magnetosfera-terrestre-369858-noticia/>
- [6] Gautier Verhille, Nicolas Plihon, Mickaël Bourgoïn, Philippe Odier, Jean-François Pinton. Laboratory Dynamo Experiments. Space Science Reviews, Springer Verlag, 2010, 153, pp.543-564. 10.1007/s11214-009-9546-1. hal-01140483 DOI : 10.1007/s11214-009-9546-1
- [7] B. Gallet, S. Aumaître, J. Boisson, F. Daviaud, B. Dubrulle, N. Bonnefoy, M. Bourgoïn, Ph. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, G. Verhille, S. Fauve, and F. Pétrélis Phys. Rev. Lett. 108, 144501 – Published 2 April 2012
- [8] F. Stefani, A. Gailitis, G. Gerbeth, A. Giesecke. Th. Gundrum, G. Ruediger, M. Seilmayer, T. Vogt. Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic elds. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (2008) <https://doi.org/10.1002/zamm.200800102>
- [9] F., Petretlis, N. Mordant, S. Fauve, On the magnetic fields generated by experimental dynamos, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 101(3-4), 289 (2007) <https://doi.org/10.1080/03091920701523410>
- [10] H. K. Moffatt, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids, Cambridge University Press, Cambridge, (1978)
- [11] Stefani, F., Gailitis, A., Gerbeth, G., Gundrum, A. G., Ruediger, G., Seilmayer, M., Vogt, T. (2018). Laboratory experiments on dynamo action and magnetically triggered flow instabilities. arXiv preprint arXiv:1803.03421. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.03421>

- [12] Agris Gailitis, Olgerts Lielausis, Sergej Dement'ev, Ernests Platacis, Arnis Ciferons, Gunter Gerbeth, Thomas Gundrum, Frank Stefani, Michael Christen, Heiko Hänel, and Gotthard Will *Phys. Rev. Lett.* 84, 4365 – Published 8 May 2000 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4365>
- [13] Gailitis, A., Lielausis, O., Platacis, E., Gerbeth, G. and Stefani, F. (2003) The Riga Dynamo Experiment. *Surveys in Geophysics*, 24, 247-267. <https://doi.org/10.1023/A:1024851818821>
- [14] Gailitis, A., Lielausis, O., Platacis, E., Gerbeth, G. and Stefani, F., Riga dynamo experiment and its theoretical background. *Phys. Plasmas* 2004, 11, 2838-2843. <https://doi.org/10.1063/1.1666361>
- [15] Müller and Stieglitz, R., Can the Earth's magnetic field be simulated in the laboratory? *Naturwissenschaften* 2000, 87, 381-390. DOI: 10.1007/s001140050746
- [16] Stieglitz R. and Müller U., Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids* 2001, 13, 561-564. <https://doi.org/10.1063/1.1331315>
- [17] Müller, U., Stieglitz, R. and Horanyi, S., A two-scale hydromagnetic dynamo experiment. *J. Fluid Mech.* 2004, 498, 31-71. DOI: 10.1017/S0022112003006700
- [18] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoin, M. Moulin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet *Phys. Rev. Lett.* 98, 044502 – Published 25 January 2007 DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.044502>
- [19] Romain Monchaux¹, Michael Berhanu², Sébastien Aumaître¹, Arnaud Chiffaudel¹, François Daviaud¹, Bérengère Dubrulle¹, Florent Ravelet¹, Stephan Fauve², Nicolas Mordant², François Pétrélis², Mickael Bourgoin³, Philippe Odier³, Jean-François Pinton³, Nicolas Plihon³, and Romain Volk³, The von Kármán sodium experiment: Turbulent dynamical dynamos. *Phys. Fluids* 2009, 21, 035108. <https://doi.org/10.1063/1.3085724>.
- [20] Sophie Miralles, Nicolas Bonnefoy, Mickaël Bourgoin, Philippe Odier, Jean-François Pinton, Nicolas Plihon, Gautier Verhille, Jean Boisson, François Daviaud, Bérengère Dubrulle, Dynamo threshold detection in the von Kármán sodium experiment. *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, American Physical Society, 2013, 88, pp.013002. [10.1103/PhysRevE.88.013002](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.013002). hal 00941503 DOI: 10.1103/PhysRevE.88.013002
- [21] E. J. Spence, M. D. Nornberg, C. M. Jacobson, R. D. Kendrick, and C. B. Forest *Phys. Rev. Lett.* 96, 055002 – Published 9 February 2006; Erratum *Phys. Rev. Lett.* 96, 169902 (2006) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.055002>
- [22] Zimmermann, D.S., Triana, S.A., Nataf, H.-C. and Lathrop, D.P., A turbulent, high magnetic Reynolds number experimental model of Earth's core. *J. Geophys. Res. - Sol. Earth* 2010, 119, 4538–4557 DOI: 10.1002/2013JB010733
- [23] Stirling A. Colgate, Howard Beckley, Jiahe Si, Joe Martinic, David Westpfahl, James Slutz, Sebastian Westrom, Brianna Klein, Paul Schendel, Cletus Scharle, Travis McKinney, Rocky Ginanni, Ian Bentley, Timothy Mickey, Regnar Ferrel, Hui Li, Vladimir Pariev, and John Finn *Phys. Rev. Lett.* 106, 175003 – Published 28 April 2011 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.175003>

- [24] Nornberg, M.D., Ji, H., Schartman, E., Roach, A., and Goodman, J., Observation of magnetocoriolis waves in a liquid metal Taylor-Couette experiment. *Phys. Rev. Lett.* 2010, 104, 074501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.074501>
- [25] Peter Frick, Vitaliy Noskov, Sergey Denisov, and Rodion Stepanov, Direct measurement of effective magnetic diffusivity in turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.* 2010, 105, 184502 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.184502>
- [26] Denys Schmitt, Philippe Cardin, Patrick La Rizza, Henri-Claude Nataf., Magneto-Coriolis waves in a spherical Couette flow experiment. *Eur. J. Mech. - B/Fluids* 2013, 37, 10-22. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.09.001
- [27] Rainer Hollerbach, Xing Wei, Jérôme Noir and Andrew Jackson, Electromagnetically driven zonal flows in a rapidly rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* 2013, 725, 428-445. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.195>
- [28] Hollerbach, R. and Rüdiger, G., New type of magnetorotational instability in cylindrical Taylor-Couette flow. *Phys. Rev. Lett.* 2005, 95, 124501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.124501>
- [29] M. Mahloul, A. Mahamdia, M. Kristiawan, The spherical Taylor–Couette flow, *European Journal of Mechanics – B/Fluids* 59 (2016) 1–6. doi:10.1016/j.euromechflu.2016.04.002.
- [30] I. Proudman, The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres, *Journal of Fluid Mechanics* 1 (5) (1956) 505–516. doi:10.1017/S0022112056000329.
- [31] K. Stewartson, On almost rigid rotations. Part 2, *Journal of Fluid Mechanics* 26 (1) (1966) 131–144. doi:10.1017/S0022112066001137.
- [32] J. Wicht, Flow instabilities in the wide-gap spherical Couette system, *Journal of Fluid Mechanics* 738 (2014) 184–221. doi:10.1017/jfm.2013.545.
- [33] R. Hollerbach, R. J. Wiener, I. S. Sullivan, R. J. Donnelly, C. F. Barenghi, The flow around a torsionally oscillating sphere, *Physics of Fluids* 14 (12) (2002) 4192–4205. doi:10.1063/1.1518029.
- [34] F. Box, A. B. Thompson, T. Mullin, Torsional oscillations of a sphere in a Stokes flow, *Experiments in Fluids* 56 (12) (2015) 209. doi:10.1007/s00348-015-2075-7.
- [35] C. Gissinger, H. Ji, J. Goodman, Instabilities in magnetized spherical Couette flow, *Phys. Rev. E* 84 (2011) 026308. doi:10.1103/PhysRevE.84.026308.
- [36] D. Schmitt, P. Cardin, P. La Rizza, H.-C. Nataf, Magneto–coriolis waves in a spherical couette flow experiment, *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 37 (2013) 10–22. doi:10.1016/j.euromechflu.2012.09.001.
- [37] A. Figueroa, N. Schaeffer, H.-C. Nataf, D. Schmitt, Modes and instabilities in magnetized spherical Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics* 716 (2013) 445–469. doi:10.1017/jfm.2012.551.
- [38] C. Kasprzyk, E. Kaplan, M. Seilmayer, F. Stefani, Transitions in a magnetized quasi-laminar spherical Couette flow, *Magnetohydrodynamics* 53 (2) (2017) 393–401. doi:10.22364/mhd.53.2.19.
- [39] E. Kaplan, H.-C. Nataf, N. Schaeffer, Dynamic domains of the Derviche Tourneur sodium experiment: Simulations of a spherical magnetized Couette flow, *Physical Review Fluids* 3 (3) (2018) 34608. doi:10.1103/PhysRevFluids.3.034608.

- [40] F. Garcia, F. Stefani, Continuation and stability of rotating waves in the magnetized spherical Couette system: Secondary transitions and multistability, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 474 (2220). doi:10.1098/rspa.2018.0281.
- [41] J. Ogbonna, F. Garcia, T. Gundrum, M. Seilmayer, F. Stefani, Experimental investigation of the return flow instability in magnetized spherical Couette flows, *Physics of Fluids* 32 (12) (2020) 124119. doi:10.1063/5.0029570.
- [42] G. Schrauf, The first instability in spherical Taylor-Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics* 166 (1986) 287–303. doi: 10.1017/S0022112086000150.
- [43] V. Travnikov, K. Eckert, S. Odenbach, Influence of an axial magnetic field on the stability of spherical Couette flows with different gap widths, *Acta Mechanica* 219 (3-4) (2011) 255–268. doi:10.1007/s00707-011-0452-8.
- [44] F. Garcia, M. Seilmayer, A. Giesecke, F. Stefani, Chaotic wave dynamics in weakly magnetized spherical Couette flows, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 30 (4) (2020) 043116. doi:10.1063/1.5140577.
- [45] R. Hollerbach, Non-axisymmetric instabilities in magnetic spherical Couette flow, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 465 (2107) (2009) 2003–2013. doi:10.1098/rspa.2009.0004.
- [46] A. M. Soward, E. Dormy, Shear-layers in magnetohydrodynamic spherical Couette flow with conducting walls, *Journal of Fluid Mechanics* 645 (2010) 145–185. doi:10.1017/S0022112009992539.
- [47] D. R. Sisan, N. Mujica, W. A. Tillotson, Y. M. Huang, W. Dorland, A. B. Hassam, T. M. Antonsen, D. P. Lathrop, Experimental observation and characterization of the magnetorotational instability, *Physical Review Letters* 93 (11) (2004) 8–11. doi:10.1103/PhysRevLett.93.114502.
- [48] D. Brito, T. Alboussière, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault, P. La Rizza, J.-P. Masson, H.-C. Nataf, D. Schmitt, Zonal shear and super-rotation in a magnetized spherical couette-flow experiment, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 066310. doi:10.1103/PhysRevE.83.066310.
- [49] G. Rüdiger, L. L. Kitchatinov, R. Hollerbach, Magnetic Spherical Couette Flow, in: *Magnetic Processes in Astrophysics*, Wiley-VCH, Weinheim, 2013, Ch. 7, pp. 287–326. doi:10.1002/9783527648924.ch7.
- [50] R. Hollerbach, X. Wei, J. Noir, A. Jackson, Electromagnetically driven zonal flows in a rapidly rotating spherical shell, *Journal of Fluid Mechanics* 725 (2013) 428–445. doi:10.1017/jfm.2013.195.
- [51] A. Figueroa, J. A. Rojas, J. Rosales, F. Vázquez, Electromagnetically driven flow between concentric spheres: Experiments and simulations, in: J. Klapp, L. D. G. Sigalotti, A. Medina, A. López, G. Ruiz-Chavarría (Eds.), *Recent Advances in Fluid Dynamics with Environmental Applications*, Springer International Publishing, Cham, 2016, pp. 253–264. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.397>
- [52] A. Figueroa, M. Rivero, J. Núñez, J. A. Rojas, I. Rivera, Oscillatory flow between concentric spheres driven by an electromagnetic force, *Journal of Fluid Mechanics* 920 (2021) A5. doi:10.1017/jfm.2021.397.
- [53] W. Thielicke, E. J. Stamhuis, Towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in matlab, *J. Open. Res. Softw.* 2 (2014) pe30. doi:10.5334/jors.bl.

- [54] A. Figueroa, F. Demiaux, S. Cuevas, E. Ramos, Electrically driven vortices in a weak dipolar magnetic field in a shallow electrolytic layer, *Journal of Fluid Mechanics* 641 (2009) 245–261. doi:10.1017/S0022112009991868.
- [55] A. Figueroa, P. Meunier, S. Cuevas, E. Villiermaux, E. Ramos, Chaotic advection at large Péclet number: Electromagnetically driven experiments, numerical simulations, and theoretical predictions, *Physics of Fluids* 26 (1) (2014) 013601. doi:10.1063/1.4861004.
- [56] A. Figueroa, S. Cuevas, E. Ramos, Electromagnetically driven oscillatory shallow layer flow, *Physics of Fluids* 23 (1) (2011) 013601. doi:10.1063/1.3531729.
- [57] G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts, A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 91, 63-75 (1995).
- [58] Glatzmaier, G., Roberts, P. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* 377, 203–209 (1995). <https://doi.org/10.1038/377203a0>
- [59] G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts, On the magnetic sounding of planetary interiors, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 98, 207-220 (1996).
- [60] G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts, An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection, *Physica D*, 97, 81-94 (1996).
- [61] G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts, Rotation and magnetism of Earth's inner core, *Science*, 274, 1887-1891 (1996). DOI: 10.1126/science.274.5294.1887
- [62] Song, X., Richards, P. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core. *Nature* 382, 221–224 (1996). <https://doi.org/10.1038/382221a0>
- [63] Geodynamo: Figure 2. (s. f.). pmc. Recuperado 20 de febrero de 2020, de <https://websites.pmc.ucsc.edu/%7Eglatz/field.html>
- [64] Thielicke, W. (2019). PIVlab - particle image velocimetry (PIV) tool with GUI. PIVlab - Particle Image Velocimetry (PIV) Tool with GUI - File Exchange - MATLAB CentralFile Exchange - MATLAB Central. Recuperado 20 de febrero de 2020, de <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27659-pivlab-particle-image-velocimetry-piv-tool-with-gui>
- [65] Cuevas, S., Introducción a la magnetohidrodinámica, Memorias de la XII Escuela de Verano en Física, Agosto 2-20, 2004. Eds. J. Recamier, Rocío Jáuregui, Facultad de Ciencias, UAEMor., Instituto de Física, UNAM y Centro de Ciencias Físicas, UNAM. pp. 15-36
- [66] Figueroa Lara, Aldo. (2006). "Generacion de vorticidad mediante fuerzas magneticas". (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México. Recuperado de <https://repositorio.unam.mx/contenidos/90524>
- [67] Ze Sun, Haiou Ni, Hang Chen, Suzhen Li, Guimin Lua and Jianguo Yua, (2015). Designing and optimizing a stirring system for a cold model of a lithium electrolysis cell based on CFD simulations and optical experiments [Imágen 3] <https://doi.org/10.1039/C5RA13856F>
- [68] colaboradores de Wikipedia. (2021, 18 marzo). Número de Reynolds. Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado 7 de noviembre de 2021, de https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Reynolds:%E:text=Si%20el%20n%C3%BAmero%20de%20Reynolds,4000%2C%20el%20flujo%20ser%C3%A1%20turbulento.

- [69] Proal, D., Segura, S., Domínguez-Lozoya, D., Rivero, M., Figueroa, A. (2022). Study of the spherical Couette flow with electromagnetic stirring. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 92, 40–48. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2021.11.002>
- [70] colaboradores de Wikipedia. (2021, 5 marzo). Número de Hartmann. Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado 24 de febrero de 2022, de https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hartmann.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS



Control Escolar de Licenciatura

VOTOS DE APROBATORIOS

Secretaria ejecutiva del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó el C. **RODRÍGUEZ PROAL DARIEL JONDALAR** con número de matrícula **20154010945** cuyo título es:

"Flujos generados electromagnéticamente en esferas concéntricas"

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **Licenciado Ciencias Área Terminal en Física.**

Cuernavaca, Mor a 05 de abril de 2022

Atentamente
Por una universidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DR FEDERICO VAZQUEZ HURTADO
DRA. GLORIA SUZANNE KOENIGSBERGER HOROWITZ
DR. ALDO FIGUEROA LARA
DR. MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS
DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA

PRESIDENTE
SECRETARIO
VOCAL
PRIMER SUPLENTE
SEGUNDO SUPLENTE



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ALDO FIGUEROA LARA | Fecha:2022-04-05 17:42:27 | Firmante

lmyBi0MJMvjpmPJ8ZtU0pt+7n7JcY+StTxFnkzSev93d1glyzWqwl6HMRWCWb+ldDoSfH2lncRZUNZ0BhLhgLup6fdf0l0o0vwr16FD3c706PPtrkKvC7HDjp2i+PVen/0/+F3+12SbnKn5znZKuOysrMgPmmFm8LR1Xt4z64qGw0ijjP0UdnHEwhTfDt0KLfxqZKND88gEFxvU9Td4GcGg9z84fvLoDzviV2WEotjSeFc379s2FAW5KaOil9AT9gxCbUgRpTOfaj2Xx6BhNVFaEC5Vjd23yealfhQrQSCVGSdhjCX5XlgtK+ln2ox71r1sLBwRw10Wf5VzW4Qg==

FEDERICO VAZQUEZ HURTADO | Fecha:2022-04-05 20:10:07 | Firmante

TdzDvEnpDdJRMjPL0iTB65Yn4kHAZpB2WDCtDsUQOILd3CDpzMH2lMgcSkPPcQuc5rTJmCV1aTtA3LmGEADTTVY/ZopfEPIgo0YmMqKkVegij5zelznsRn+EG7GXLI/OJ Mlvif7WhPOT6/qo4GOY4cl0kpveUXFTaxdtgP+AeSc9eGlvzK24fJh/bagHEQRnPxqGc9jTbHISRWZCYksqxfipg7dKHMm+PM6TzJwNpZV93axl2OZrBSdrrXhGzULJ0mJsXbdQvAt0i3VHa2nEBkC3pk7qRJIYgAio0APMELjFKTYyWEi692hSlwV60mKnH2wSXHJLbnTtw==

MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS | Fecha:2022-04-06 14:54:52 | Firmante

Gn0VbH/EOR912ISrfJrwmxjuel1ROdqgeTJvhmFAt3InBP47bqQJ3FaXS0NaP3LUgtienQcevHaHh4rE6gptUqbKEV+WNfgA0+Qzbtmm3XCOhcU/ACfFi4o7E9nih3yTO23p1zOMG 0aOlzWCiWocNM3tlEutS1S6sSCj/d7LDxdSp3odU3vaYtgNyKMr9GDgmWEDIVieFQT80s9dlF4GtyCpRGXe0VqEj6xElUBoZpdScxE6o7n4veaDvomBG8EyGdgeoE+q1VsHZ4H+x3Y04MugVBvKysRyXeh7k8tyZqcesAQbCufTuBgd536u/SdEZ8A2GbNcCU9a81FT+wg==

SERGIO CUEVAS GARCÍA | Fecha:2022-04-26 14:10:27 | Firmante

g6w/COATPeRL7tvlv+q/0XmPmqTvhQr4EmcHts731jQz/+Y49fEAe1dnlDpYxdpV006nC40w/mr+Zl2Oi4MyeEGGEhBALdUjPniO2XwFxyZDOQU+e4qe9432gH9+F7eGIS83Ar mdYZz0y7vgWwJkNDxVmdkJe0R6wKxjsQBkITYW6Lei+UqjXVqppM87gNGTA0qXUdZZIfA6UAJQ09FTyC98j6BUmUEXdpSo33uYO0/8SUOAioBdx+1Qtru/sa0i+rw/TLrVKFi 79neVNpmrLzklrXiF7emVdaToctIG0Omz5/C5QilqV4QTit4rw7YpejHVTfNWLvutkduug==

GLORIA SUZANNE KOENIGSBERGER HOROWITZ | Fecha:2022-04-27 07:15:42 | Firmante

Fr5ghdR3lyP4feZa/YTtcF4z1WDzOWJPrqKlaN0cEfwR0nykHFVwC4HAz4vQdBzimUEVLB2pljO8O28ZYGTTW9CgZKeTHuGx2ct5uipuDieQtD+3FhbSsz3XQRZYjBRBbnwoZv9 3YSfAaT6nEWZ5taMq3VTRTCEiJsA1AgmDeXhQxa5/07tUeJZ7vUA89DUVQhzV0kJKBY2EzW8LrM4iPeG9k1vMfa/7s+KOJLGKEfwrRh4fSRwtR4WYJjujV4yaONPo00UYCxu G8tksqUuimPbwFZTn/UCwHnx/19X6dly2q4Tb73Yp9Ch/UlvNtHGm0AuyQzf77YhEH4QrFw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



IBKpeQiy6

https://efirma.uaem.mx/noRepudio/ysyl1gUrRQL7Ny3UtABRaTr8P2VlFZO

