



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**“Modelación numérica de la deformación superficial de una
esfera de fluido con efectos magnetohidrodinámicos”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

L. en C. Fernando Alexis Morales Garzón

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Aldo Figueroa Lara

CO-DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Cuevas García

CUERNAVACA, MORELOS

30 DE SEPTIEMBRE 2022

Lista de comité tutorial:

Dr. Aldo Figueroa Lara

(Director de Tesis)

Dr. Sergio Cuevas García

(Co-director de Tesis)

Dr. Raúl Salgado García

Comite revisor de tesis:

Dr. Markus Franziskus Muller

(Presidente)

Dr. Federico Vázquez Hurtado

(Secretario)

Dr. Frédéric Sylvain Masset

(Vocal)

Dr. Raúl Salgado García

(Suplente)

Dr. Sergio Cuevas García

(Suplente)

A mi primo Lalo,

Q. E. P. D.

Resumen

Se presenta un estudio teórico sobre la dinámica de una gota de fluido en gravedad cero ante perturbaciones. El fluido de trabajo es viscoso y eléctricamente conductor no magnetizable en presencia de un campo magnético uniforme. La metodología analítica está basada en un estudio sobre el comportamiento puramente hidrodinámico (Aalilija *et al.* [1]). El enfoque MHD consiste en incorporar la fuerza de Lorentz en la ecuación de balance de momento lineal (ec. de Navier-Stokes) y obtener la ecuación de balance de energía para encontrar la función de deformación en el régimen lineal que depende del tiempo para diferentes modos de oscilación. La solución analítica MHD no ha sido reportada previamente en la literatura científica y se da a conocer explícitamente en este trabajo por primera vez. Por otra parte, se hace uso del método numérico *smoothed particle hydrodynamics* de partículas Lagrangianas para resolver el modelo MHD 3D que rige la dinámica completa de la gota esférica conductora. Para resolver el modelo MHD, se desarrolla un código numérico basado en [2]. El código fue escrito en Fortran y paralelizado con la plataforma CUDA. El método numérico fue validado con distintos casos de flujo hidrodinámico y MHD. Para el caso de estudio, los resultados de la simulación SPH concuerdan cuantitativamente con la solución analítica. El presente estudio muestra que el comportamiento de la gota depende de la viscosidad y la conductividad eléctrica del sistema, y del campo magnético impuesto, los cuales están cuantificados en la tasa de amortiguamiento viscoso y en la tasa de amortiguamiento magnético derivado del efecto Joule.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis padres Silvia y Fernando por su infinito amor y apoyo para la realización de este trabajo.

A mi familia.

Al Dr. Aldo Figueroa, Dr. Sergio Cuevas y Dr. Raúl Salgado por sus invaluable aportaciones a este trabajo.

A CONACYT México por el apoyo económico a través del programa Beca Nacional para estudios de posgrado, sin su apoyo no hubiera sido elaborado esta obra.

Al Centro de Investigación en Ciencias y al Laboratorio de Medios Continuos de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

A CONACYT por el apoyo al Proyecto de Ciencia Básica No. 258623.

Contenido

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | Marco teórico | 6 |
| 2.1 | Ecuaciones de la Hidrodinámica | 6 |
| 2.1.1 | Ecuación de Conservación de Masa | 6 |
| 2.1.2 | Ecuación de Balance de Momento | 7 |
| 2.1.3 | El modelo de Tensión superficial | 8 |
| 2.2 | Teoría Electromagnética | 9 |
| 2.3 | Teoría Magnetohidrodinámica (MHD) | 11 |
| 2.3.1 | Ecuación de transporte para b | 12 |
| 2.4 | Ecuaciones fundamentales de la MHD con tensión superficial | 13 |
| 2.5 | Análisis teórico de la deformación superficial de una esfera de fluido con efectos MHD | 14 |
| 2.5.1 | Ecuación de balance de energía | 14 |
| 2.5.2 | Modelo de la esfera de fluido | 16 |
| 2.5.3 | Dinámica conservativa | 19 |
| 2.5.4 | Dinámica no conservativa | 21 |
| 2.5.5 | Dinámica con efectos MHD | 22 |
| 3 | El método numérico de resolución, <i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> (SPH) | 25 |
| 3.1 | Descripción del método lagrangiano SPH | 26 |
| 3.1.1 | Kernel de interpolación | 27 |
| 3.1.2 | Operadores matemáticos | 28 |
| 3.1.3 | Tratado numérico de la tensión superficial para el método SPH | 30 |

| | |
|--|-----------|
| Contenido | 6 |
| 3.1.4 Tratado numérico de las ecuaciones fundamentales de la MHD | 32 |
| 3.1.5 Integración temporal | 33 |
| 3.1.6 Tratado de la frontera | 34 |
| 3.1.7 El algoritmo SPMHD | 36 |
| 4 Resultados principales | 38 |
| 5 Conclusiones | 52 |
| A Caso 1: Flujo de Poiseuille | 54 |
| B Caso 2: Flujo de Hartmann | 57 |
| C Caso 3: DamBreaking | 61 |
| D Caso 4: Square Shaped Droplet | 69 |
| E Caso 5: Una esfera de agua en gravedad cero | 73 |
| Referencias | 78 |

Capítulo 1

Introducción

El estudio de “esferas de fluido que oscilan” (*oscillating fluid globes*) es un problema clásico en la mecánica de fluidos, fue estudiado analíticamente por Sir Lamb en 1932 [3]. Lamb no desarrolló una solución exacta pero analizó las oscilaciones del sistema cuando la interface del globo (gota) se perturba por alguna fuerza externa y calculó la tasa de amortiguamiento viscoso a través de un método disipativo usando sólo un flujo irrotacional. Fue hasta 1968 cuando Miller & Scriven desarrollaron una solución exacta en gotas de fluido sumergidos en otro fluido [4], obteniendo una tasa de amortiguamiento viscoso similar a la encontrada por Lamb. El estudio de efectos viscosos sobre pequeñas oscilaciones de una masa de fluido de forma esférica es igual al problema de los efectos de la viscosidad sobre ondas oscilatorias de aguas profundas, esto fue demostrado analíticamente por Wang & Joseph en 2006 [5] donde usaron la teoría de *flujos potenciales viscosos (FPV)* para replicar los resultados descritos por Lamb con excelentes resultados. La teoría FPV fue descrita por primera vez por G. Gabriel Stokes en 1851 [6] donde muestra los efectos de la viscosidad sobre atenuación de ondas de pequeñas amplitudes sobre una interface fluido-gas. Se considera un flujo potencial por la teoría FPV aquel fluido viscoso cuya velocidad es irrotacional, la presión está dada por la ecuación de Bernoulli y la componente normal del tensor de esfuerzos viscosos se evalúa sobre el mismo flujo irrotacional. Más tarde en 2020, una gota de fluido viscoso en gravedad cero que oscila alrededor de su posición de equilibrio debido a una deformación inicial, fue estudiado teóricamente por A. Aalilija *et al.* [1] donde utilizó la teoría FPV para encontrar la tasa de amortiguamiento por viscosidad sobre la gota a diferentes modos de oscilación. Los resultados concuerdan teóricamente con lo encontrado por Sir Lamb en 1932, además se pudo encontrar una expresión analítica de la forma de la interface agua-gas que no pudo describir Lamb, incluso una solución numérica del problema fue presentada por A. Aalilija *et al.* a través del método de elementos finitos (MEF)

que contrasta la teoría analítica FPV con excelentes resultados.

Por otra parte, el estudio de gotas de fluido eléctricamente conductor en presencia de campos magnéticos es muy interesante. Los metales conducen efectivamente las corrientes eléctricas debido a su configuración atómica y molecular, esta característica aún se mantiene en su estado líquido. El metal líquido ha sido objeto de estudio en las últimas décadas a raíz de la explosión tecnológica. Las aplicaciones son muy variadas tales como disipadores de calor en reactores nucleares, bombas de fluido, baterías y levitación de metal líquido. Se han realizado numerosos experimentos sobre un flujo de metal líquido que fluye en un canal donde se impone un campo magnético localizado [7, 8]; en ellos se observa el frenado magnético. El campo teórico encargado del comportamiento de este sistema es la *magnetohidrodinámica* (MHD). La magnetohidrodinámica es un área de los medios continuos que estudia el comportamiento de flujos de fluidos eléctricamente conductores que se mueven relativos a un campo magnético; un fluido bajo estas condiciones genera una fuerza electromotriz FEM en todo el dominio debido a la ley de inducción de Faraday que es proporcional a la velocidad relativa y al campo magnético. Las corrientes eléctricas inducidas por el movimiento del fluido generan un campo magnético inducido debido a la ley de Ampère, el cual se suma al campo magnético externo que puede verse drásticamente alterado. Finalmente, ambos campos magnéticos interactúan con las corrientes inducidas lo que da lugar a la fuerza de Lorentz, la cual generalmente actúa en sentido contrario al movimiento del flujo de fluido, a este fenómeno se le conoce como “frenado magnético” [9]. En 1979, J. Walker estudió por primera vez el comportamiento de gotas de metal líquido en presencia de campos magnéticos [10] y se concluyó que la fuerza electromagnética resultante actúa en sentido opuesto a la dirección del movimiento de la gota sin importar el signo del gradiente del campo magnético impuesto, comportándose como un arrastre electromagnético. Más recientemente, el estudio numérico de una gota de metal líquido que cae en presencia de un campo magnético externo fue elaborado por Tagawa en el año 2005 [11], donde la gota impacta sobre una capa delgada del mismo material, encontrando que para campos magnéticos intensos la dispersión del impacto se reduce, además se crea un pequeño bulto en la superficie libre después del impacto.

El estudio numérico de la superficie libre de fluidos es un gran reto para los métodos basados en mallas (Eulerianos), siendo la principal razón el hecho de que el dominio de simulación no

se puede deformar para replicar la evolución temporal de la interface. Los métodos basados en partículas (Lagrangianos), en conjunto, pueden deformarse y adaptarse a la topología de los cuerpos de frontera, por esta razón éstos métodos son mejores que aquellos mallados para estudiar la dinámica de la superficie libre de fluidos.

El enfoque Euleriano es el comúnmente utilizado por la comunidad científica para el CFD (*Computational Fluid Dynamics*) siendo los métodos computacionales por mallas más utilizados los de volumen finito, diferencias finitas y elemento finito. La mayor dificultad al usar un método mallado es la consistencia, el tratamiento de las interfaces, las geometrías complejas y los cambios topológicos. Existen técnicas para tratar con estos problemas como el remallado, sin embargo el costo computacional puede incrementar exponencialmente.

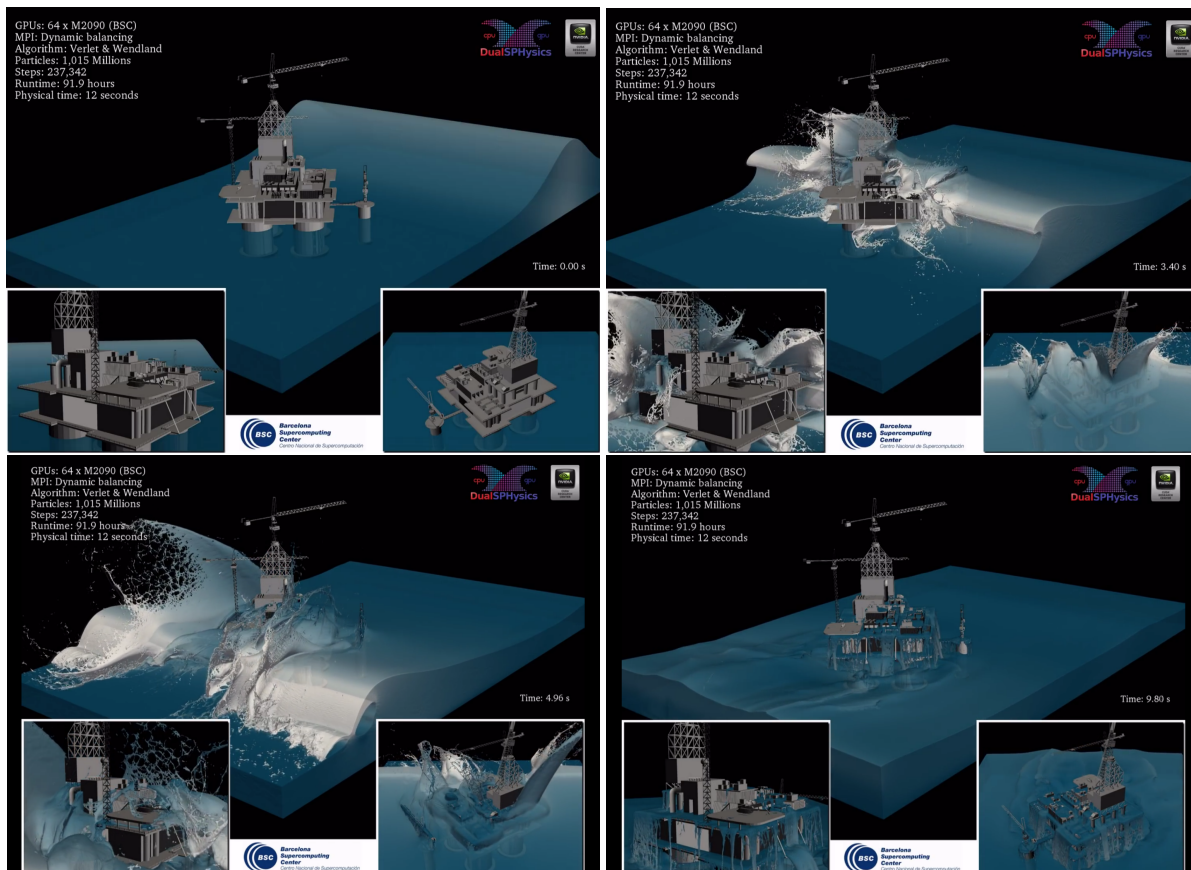


Fig. 1.1 Simulación de una ola que incide sobre una plataforma petrolera utilizando el método Lagrangiano SPH, DualSPHysics 2012 [12]. Se simuló mas de mil millones de partículas de fluido acelerados por un piston de frontera que no aparece en escena .

Por otra parte, el enfoque Lagrangiano consiste en discretizar el dominio a través de partículas con masa y volumen localizadas en el tiempo y en el espacio, cada partícula recibe su propiedad a cada instante de tiempo. El método Lagrangiano sin mallas está siendo cada vez más utilizado por la comunidad científica debido a sus múltiples beneficios sobre aquellos por mallas, por lo que se pueden tratar situaciones donde existen cambios topológicos como los obstáculos móviles tales como las compuertas y los pistones, geometrías complejas cuyas formas están trazadas principalmente por partículas, además de la fácil paralelización debido a que las propiedades de las partículas pueden ser calculadas de manera independiente. En un enfoque Lagrangiano para la CFD, la superficie libre de un fluido se resuelve de manera natural, el comportamiento preciso de la superficie puede verse bien simulado con el modelo teórico adecuado; el método numérico debe resolver las ecuaciones dominantes de conservación en su forma lagrangiana. El tratamiento numérico Lagrangiano que da mejores resultados es el llamado SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), donde una función *kernel* de interpolación regula el comportamiento de cada partícula localmente a través de un radio de acción finito, κh . El método SPH es un método numérico de bajo orden, es decir que el error en el método va como la longitud de acción, o también conocido como *longitud de suavizado*, $\sim O((\kappa h)^2)$.

Sin embargo, los modelos Lagrangianos se dejaron de lado a favor de los modelos Eulerianos por mucho tiempo debido a su alto costo computacional, ya que el enfoque Euleriano era más sencillo y preciso. Actualmente, el avance tecnológico permite contar con multi-procesadores capaces de ejecutar múltiples hilos de ejecución a la vez y las diferentes técnicas de paralelización, hacen posible el uso de los métodos por partículas. La plataforma CUDA por NVIDIA hace posible simular más de un millón de partículas en la discretización del dominio de manera estable [13]. El método SPH fue desarrollado a finales de 1970 para el estudio del comportamiento de sistemas astrofísicos en los que no era posible usar los métodos por mallas debido a las condiciones de frontera [14]. Después, fue adaptado para el modelado de medios elásticos [15]. Fue rápidamente mejorado para ser aplicado a los fluidos, primero para flujos débilmente compresibles, después para fluidos altamente compresibles y por último para fluidos incompresibles [16] [17].

El método SPH para estudiar la dinámica de fluidos débilmente compresibles ha sido optimizados con el paso del tiempo; existen un sin fin de programas para simular escenarios tales como el estudio de olas y diseño de rompe olas; por ejemplo el programa “*SPHysics*” fue presentado

por primera vez a principios del año 2004 en la Universidad de Vigo en España [18] para el tratamiento de problemas en el área de ingeniería de costas. Posteriormente el proyecto fue mejorado y se extendió a otras aplicaciones tales como flujos multifásicos, estructuras flotantes y partes móviles tales como propelas [19, 20]. Dicho software altamente optimizado fue finalmente nombrado como “*DualSPHysics*”, además se agregó la posibilidad de usar múltiples nodos de procesamiento y GPUs usando NVIDIA CUDA para la paralelización de los cálculos. En la figura 1.1 se presenta un ejemplo de los resultados de DualSPHysics donde se muestra el impacto de una ola sobre una plataforma petrolera.

En este trabajo, se utiliza la teoría magnetohidrodinámica para estudiar la dinámica de gotas de fluido viscoso y eléctricamente conductor que se deforman en una elipsoide en presencia de un campo magnético constante y uniforme en gravedad cero. La tasa de amortiguamiento por efectos magnéticos encontrado en este trabajo, no ha sido reportado previamente y se da a conocer por primera vez. Además, se resuelven numéricamente las ecuaciones fundamentales de la MHD para modelar la dinámica de la superficie libre de la gota de fluido conductor y viscoso bajo perturbaciones de baja amplitud y bajo un campo magnético uniforme cuya dirección coincide con el eje de simetría. El método utilizado es el método Lagrangiano *smoothed particle hydrodynamics* (SPH) descrito por Dutra F. [2] donde las partículas Lagrangianas interactúan entre sí a través de la ecuación de Navier-Stokes para flujos débilmente compresibles. Los resultados de la simulación contrastan muy bien cuantitativa y cualitativamente con la solución analítica.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presenta un compendio de las ecuaciones fundamentales de la teoría magnetohidrodinámica, dicha teoría es necesaria para el estudio de la dinámica de la gota de fluido conductor que se desarrollará en capítulos siguientes.

2.1 Ecuaciones de la Hidrodinámica

2.1.1 Ecuación de Conservación de Masa

Una cantidad de fluido de masa m en un volumen V arbitrario tiene una densidad $\rho = m/V$. La ley de conservación de masa establece que el cambio en el tiempo t de la cantidad de masa debe ser exactamente cero, esto es

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.1)$$

donde el operador $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ es la derivada material siendo \mathbf{u} es el vector velocidad del fluido medido desde un sistema de laboratorio. Utilizando el teorema del transporte de Reynolds [21] sobre la ecuación (2.1) se obtiene

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0, \quad (2.2)$$

dado que V es un volumen arbitrario, el argumento de la integral es idénticamente cero, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

usando la definición de derivada material y después de un poco de álgebra

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

En esta forma se mezcla la notación *Lagrangiana*¹ con la *Euleriana*². Frecuentemente se escribe de esta manera para manipular y reducir las ecuaciones gobernantes de los fluidos a formas alternas. Las simulaciones Smoothed Particle Hydrodynamics utilizan la forma (2.4) con muy buenos resultados [22, 23].

2.1.2 Ecuación de Balance de Momento

El momento lineal en un volumen de control V es $\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{u} dV$. Se considera que existe un balance entre las fuerzas de superficie \mathbf{F}_{sup} sobre el volumen V , *i. e.* fricción, fuerzas de cuerpo o externas \mathbf{F}_{ext} tales como la gravedad, coriolis, electromagnéticas, flotación, etc. y el cambio temporal del momento lineal. La expresión matemática resultante de la segunda Ley de Newton aplicada al volumen V es

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV &= \mathbf{F}_{sup} + \mathbf{F}_{ext}, \\ &= \int_S \mathbf{P} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV. \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde la fuerza por unidad de superficie \mathbf{P} puede ser escrito como el producto punto del *tensor de esfuerzos* por la normal a la superficie que encierra el volumen de control, es decir $\mathbf{P} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$. Usando nuevamente el teorema de Reynolds y el teorema de Gauss para el primer término del lado derecho de (2.5), la ecuación (2.5) es reescrita como

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dV = \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{u} \mathbf{u} := u_i u_j$ es un tensor. Después de algo de álgebra, eliminando términos e igualando el integrando se obtiene la ecuación de conservación de momento Lagrangiano,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.7)$$

¹ La descripción Lagrangiana se distingue debido a que el sistema de medición está montado sobre la partícula, por lo tanto las cantidades como la velocidad, presión, temperatura, etc son dependientes únicamente del tiempo.

² En la descripción Euleriana se considera un volumen de control que está fijo en el espacio de modo que las variables dependientes como la velocidad, presión, temperatura, etc. son funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo.

La forma final de la ecuación (2.7) depende de la forma del tensor de esfuerzos, $\overleftrightarrow{\sigma}$. Por ejemplo, para un fluido Newtoniano el segundo término del lado derecho de (2.7) tiene la forma

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma} := -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

donde p es la presión termodinámica y μ es la viscosidad dinámica; la presión puede ser conocida a través de una ecuación de estado para un método de resolución Lagrangiana. Sustituir (2.8) en (2.7) da lugar a la llamada *ecuación de Navier-Stokes*.

2.1.3 El modelo de Tensión superficial

La tensión superficial es una característica inherente de la interface de los fluidos. En la interface las moléculas de fluido experimentan una fuerza desigual de atracción. El método de fuerza superficial en el continuo fue desarrollado por Brackbill en 1992 [24]. La fuerza debido a la tensión que actúa sobre la superficie del fluido por unidad de área interfacial está dado por

$$\rho \mathbf{f}_s(\mathbf{r}) = \sigma_s \kappa \hat{n} \delta_\epsilon + \nabla_s \sigma_s, \quad (2.9)$$

donde ρ es la densidad del fluido, κ es la curvatura de la interface, \hat{n} es el vector normal que apunta hacia adentro del dominio del fluido, δ_ϵ es una función que alcanza su máximo valor en la interface y es cero en el resto del dominio de fluido y σ_s es el coeficiente de tensión superficial que puede ser variable a lo largo de la interface. El segundo término del lado derecho de la ecuación (2.9) indica que el fluido se mueve desde donde hay menor tensión superficial hacia donde hay mayor tensión. A la expresión (2.9), se le conoce como *modelo de curvatura explícita*, su finalidad es minimizar el área y por esta razón el modelo de curvatura explícita tiene problemas en aquellas zonas donde la curvatura es muy grande como “picos” pronunciados o “puntas” en la geometría de la interface, por eso en [25] se propone un modelo más sencillo de tensión superficial donde no hay explícitamente una curvatura, la fuerza está dado por

$$\mathbf{f}_{ab} = -\gamma m(\mathbf{n}_a - \mathbf{n}_b) \delta_\epsilon, \quad (2.10)$$

donde los subíndices denotan que la fuerza se ejerce desde b a a y \mathbf{n} es la normal de la interface en ese punto, γ es un parámetro que debe ser calibrado³ y δ_ϵ es la misma función que en el

³ No confundir con el coeficiente de tensión superficial σ_s .

modelo de curvatura explícita. A este modelo se le llama *aproximación sin curvatura*. Se debe notar que en geometrías planas, la fuerza de tensión superficial evaluada con (2.10) es cero.

2.2 Teoría Electromagnética

En esta sección se recuerdan las leyes fundamentales de la teoría electromagnética para derivar las ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica en la siguiente sección. Estas leyes son las de Gauss para el campo magnético, de Ampère y de Faraday. La ley de Gauss para el campo eléctrico no es relevante en MHD. Adicionalmente se debe considerar una ecuación constitutiva conocida como ley de Ohm.

La ley de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}, \quad (2.11)$$

describe la relación entre el campo magnético \mathbf{B} y la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} , donde esta relación es proporcional a través de la constante μ es la permeabilidad magnética del medio. Si C es una curva cerrada en el espacio y S es una superficie delimitada por dicha curva, entonces la ley de Ampère se puede escribir como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.12)$$

usando el teorema de Stokes para el lado izquierdo de (2.12) se obtiene la ecuación (2.11).

La ley de Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (2.13)$$

La ley de Faraday habla sobre la generación de una fuerza electromotriz (FEM) que desplaza las cargas eléctricas en un medio conductor debido a dos fenómenos, i) una variación temporal del campo magnético y ii) el movimiento del conductor eléctrico dentro de un campo magnético. Nuevamente, si C es una curva cerrada en el espacio y S es cualquier superficie que abarca esa curva, entonces la ley de Faraday se puede escribir en términos de la FEM como

$$\text{FEM} = \oint_C \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.14)$$

usando el teorema de Stokes para el lado derecho de (2.14) se obtiene la ecuación (2.13). Aquí \mathbf{E}_r es el campo eléctrico efectivo $\mathbf{E}_r = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ con \mathbf{u} la velocidad del medio conductor asociado a elemento $d\mathbf{l}$.

La ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.15)$$

describe la distribución de la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} en un conductor eléctrico con conductividad σ que se mueve con velocidad \mathbf{u} relativo a un campo magnético \mathbf{B} y con un campo eléctrico \mathbf{E} . Si el segundo término es cero debido a la ausencia de movimiento del conductor y/o que no hay un campo magnético externo, la ley de Ohm se reduce a $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ que es la distribución de la densidad de la corriente eléctrica en un medio conductor estático, proporcional al campo eléctrico que desplaza a las cargas eléctricas.

Además de las leyes anteriores se debe de tener en cuenta la ley de Gauss para el campo magnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.16)$$

esta expresión dice que no existen fuentes o sumideros de campo magnético, las líneas de campo magnético siempre dibuja una curva cerrada en el espacio de manera global, es decir, físicamente ¡no existen monopolos magnéticos ó cargas magnéticas! Además, si se aplica $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ a la ley de Ampère, se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.17)$$

de la misma forma no existen fuentes o sumideros de densidad de corriente eléctrica, aquí esta expresión significa físicamente que la carga eléctrica se conserva⁴.

⁴ Esta expresión es válida sólo cuando el cambio temporal en la densidad de carga eléctrica de desplazamiento ρ_e es despreciable de modo que la corrección de Maxwell a ley de Ampère que introduce la corriente de desplazamiento deja a la ecuación de la conservación de la carga eléctrica como $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$.

2.3 Teoría Magnetohidrodinámica (MHD)

En esta sección se acopla la teoría hidrodinámica con la teoría electromagnética no relativista (cuando la velocidad característica del sistema es mucho menor a la velocidad de la luz, $U \ll c$) de la siguiente forma. Si se aplica el operador rotacional a la ley de Ohm (2.15) y sustituyendo el campo eléctrico y la densidad de corriente con la ley de Faraday (2.13) y Ampère (2.11) respectivamente, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (2.18)$$

después de algo de álgebra, aplicando la ecuación (2.16) e identificando la derivada material para el campo magnético, se obtiene finalmente

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.19)$$

que es la *ecuación de transporte de campo magnético*, se puede definir $\eta_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ como el coeficiente de difusión magnética. La ecuación (2.19) nos dice que el campo magnético se puede transportar dentro del conductor, nótese que el segundo término del lado derecho dice que el campo puede crecer o disminuir debido a la compresibilidad del conductor. Para un medio perfectamente conductor, *i. e.* $\sigma \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\eta_m \rightarrow 0$, el tercer término del lado derecho es cero (difusión nula de campo magnético); en este punto el campo magnético es completamente transportado por la convección del fluido conductor, algunos autores se refieren a este fenómeno como “congelación de campo magnético en el conductor” debido a que el acoplamiento del campo magnético y del campo de velocidades es total [9, 7]. Este comportamiento está cuantificado en el número de Reynolds magnético $R_m = \frac{UL}{\eta_m}$ donde intervienen U que es la velocidad característica del sistema y L que es la longitud característica del sistema. Si el número de Reynolds magnético es muy pequeño entonces la difusión de campo magnético es considerable.

La ecuación de balance de momento (2.7) se acopla con el electromagnetismo a través de la fuerza de cuerpo electromagnética, es decir, la *fuerza de Lorentz*,

$$\mathbf{F}_{MHD} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.20)$$

Para un fluido con baja conductividad eléctrica la fuerza de Lorentz debido a las corrientes inducidas es despreciable, por lo tanto $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, donde J_0 son la densidad de corriente

aplicada (en caso de que exista) y \mathbf{B}_0 es el campo magnético aplicado externamente. El campo magnético debe satisfacer la condición de la inexistencia de monopolos magnéticos (2.16). Con éste análisis, la fuerza de Lorentz (2.20) es completamente conocida cuando existe una corriente inyectada. Por el contrario, para un fluido con alta conductividad eléctrica, las corrientes inducidas no pueden ignorarse, en consecuencia deben agregarse a la densidad de corriente eléctrica impuesta, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{j}$, donde \mathbf{j} es la densidad de corriente eléctrica inducida. A su vez, la corriente eléctrica total genera un campo magnético inducido \mathbf{b} como consecuencia de la ley de Ampère (2.11), el cual debe ser agregado al campo magnético impuesto, esto es $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$.

2.3.1 Ecuación de transporte para \mathbf{b}

A partir de la ecuación de transporte magnético (2.19), asumiendo que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ la ecuación (2.19) permite encontrar la ecuación de transporte para el campo magnético inducido \mathbf{b} , que tiene la forma

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + \frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\mathbf{b}. \quad (2.21)$$

Una vez conocido el campo magnético inducido, las corrientes inducidas \mathbf{j} son conocidas a través de ley de Ampère,

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{b}. \quad (2.22)$$

En el caso donde la frontera es eléctricamente aislante, se establece la condición de frontera

$$\mathbf{j}(\Gamma) \cdot \hat{n} = 0, \quad (2.23)$$

para la densidad de corriente eléctrica, donde Γ y \hat{n} denotan la frontera de la superficie y vector normal correspondiente a la interface, respectivamente. Además se debe satisfacer la ley de conservación de la carga eléctrica para las corrientes inducidas tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.24)$$

Así mismo, el campo magnético inducido debe satisfacer que

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.25)$$

esto es la inexistencia de monopolos magnéticos y además

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{b}(r) = 0, \quad (2.26)$$

lo que establece que el campo magnético inducido se anula en un punto muy alejado del espacio.

2.4 Ecuaciones fundamentales de la MHD con tensión superficial

Para estudiar la dinámica de la gota de fluido viscoso y conductor eléctrico que se perturba en presencia de un campo magnético uniforme de manera numérica, se debe establecer el sistema de ecuaciones básicas que rigen el comportamiento del sistema. En esta sección se resume las ecuaciones previamente vistas como

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \frac{\sigma_s \kappa}{\rho} \hat{n} \delta_\varepsilon + \mathbf{g}, \quad (2.28)$$

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{b} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2.29)$$

$$\kappa = -\nabla \cdot \hat{n}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b}, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.32)$$

donde ρ es la densidad, \mathbf{u} el vector velocidad, g es el vector gravedad, p es la presión, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, σ_m es la conductividad eléctrica del fluido, \mathbf{j} es el vector de densidad de corriente eléctrica inducida, \mathbf{B}_0 es el campo magnético externo, \mathbf{b} es el campo magnético inducido, σ_s es el coeficiente de tensión superficial, κ es la curvatura de la interface del fluido, \hat{n} es el vector normal de la superficie del dominio del fluido y δ_ε es una función que es distinta de cero en la interface del fluido cuya dimensión es $[\text{m}^{-1}]$. Al conjunto del sistema

de ecuaciones acopladas (2.27)-(2.32) se les llama *ecuaciones fundamentales de la MHD* con fuerzas externas, las cuales describen el comportamiento de un fluido viscoso y eléctricamente conductor que fluye en presencia de un campo magnético externo arbitrario bajo la influencia de la gravedad. Se considera la tensión superficial como una fuerza externa y no se considera una densidad de corriente eléctrica externa. Los valores para la gravedad \mathbf{g} y para el campo magnético externo \mathbf{B}_0 son conocidas explícitamente. La presión p puede ser conocida a través de una ecuación de estado. La función δ_ε se conoce dependiendo de su tratado, por ejemplo en [26] se establece como $\delta_\varepsilon = \frac{1}{|\mathbf{n}|}$ donde \mathbf{n} es el vector normal en la superficie del fluido que es conocido. De esta manera, el sistema (2.27)-(2.32) cuenta con 5 variables \mathbf{u} , \mathbf{b} , κ , ρ y \mathbf{j} y 5 ecuaciones sin contar la ecuación (2.32) para el campo magnético inducido que necesariamente se debe satisfacer.

2.5 Análisis teórico de la deformación superficial de una esfera de fluido con efectos MHD

Primeramente se presenta la descripción de la deformación de la gota considerando únicamente efectos hidrodinámicos, suponiendo primero que no existe disipación viscosa y después considerando dicha disipación. Posteriormente se extiende el análisis para considerar los efectos MHD introducidos por la presencia de un campo magnético externo uniforme, lo que lleva incluir la disipación por efecto Joule producida por la circulación de corrientes eléctricas inducidas en el medio conductor. Esta extensión no se encuentran reportada en la literatura y es una de las principales aportaciones de este trabajo.

2.5.1 Ecuación de balance de energía

La ecuación de Navier-Stokes (2.7) sin fuerzas de cuerpo externas se integra en el volumen de control V y se multiplica escalarmente por la velocidad \mathbf{u} de la forma

$$\int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \right) \cdot \mathbf{u} dV = 0, \quad (2.33)$$

después de un poco de álgebra se obtiene,

$$\int_V \frac{\rho}{2} \frac{D(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{Dt} dV - \int_V \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV + \int_V \overleftrightarrow{\sigma} : \nabla \mathbf{u} dV = 0, \quad (2.34)$$

y se puede demostrar que el primer término del lado izquierdo de (2.34) se puede escribir como

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \frac{D(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{Dt} dV = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV, \quad (2.35)$$

donde se ha utilizado el teorema del transporte de Reynolds y la ecuación de conservación de masa suponiendo que $\rho \approx \text{cte}$. Además el segundo término del lado derecho de (2.34) se puede escribir como

$$\int_V \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV = \int_S \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^T dS, \quad (2.36)$$

a través del teorema de Gauss. Adicionalmente, se usa la condición dinámica en la interface del volumen de control de la forma $\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{n}^T = -\sigma_s \kappa \mathbf{n} + p_{ext} \mathbf{n}$ donde σ_s es el coeficiente de tensión superficial, κ es la curvatura y p_{ext} es la presión externa del dominio de fluido la cual se considera nula, por lo tanto

$$\int_S \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^T dS = - \int_S \sigma_s \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (2.37)$$

Se puede demostrar que $\int_S \sigma_s \cdot \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS = \int_S \nabla_s \cdot (\sigma_s \mathbf{u}) dS$ cuando $\kappa = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$. Haciendo uso nuevamente del teorema del transporte de Reynolds para σ_s , finalmente para éste término se obtiene la tasa de energía

$$\int_V \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV = - \frac{D}{Dt} \int_S \sigma_s dS. \quad (2.38)$$

Para la tasa de energía interna se usa la definición del tensor de esfuerzos como $\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{I} + 2\mu \overleftrightarrow{\dot{\epsilon}}$, donde $\overleftrightarrow{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$ es el tensor de esfuerzos cortantes, \overleftrightarrow{I} es el tensor identidad y p es la presión interna en el fluido. El tercer término del lado izquierdo de (2.34) puede escribirse como

$$\int_V \overleftrightarrow{\sigma} : \nabla \mathbf{u} dV = - \int_V p \overleftrightarrow{I} : \nabla \mathbf{u} dV + 2\mu \int_V \overleftrightarrow{\dot{\epsilon}} : \nabla \mathbf{u} dV, \quad (2.39)$$

$$= - \int_V p \nabla \cdot \mathbf{u} dV + 2\mu \int_V \overleftrightarrow{\dot{\epsilon}} : \nabla \mathbf{u} dV, \quad (2.40)$$

$$= 2\mu \int_V \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} : \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} dV, \quad (2.41)$$

donde se ha usado la definición de un fluido incompresible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y del tensor de la tasa de deformación $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T] + \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$, donde intervienen el tensor de rotación y el tensor de esfuerzos cortantes respectivamente. Por lo tanto, la ecuación (2.34) es finalmente reescrita como

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV + \frac{D}{Dt} \int_S \sigma_s dS + 2\mu \int_V \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} : \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} dV = 0, \quad (2.42)$$

donde el primer término del lado izquierdo de (2.42) es la tasa de *energía cinética* $\frac{DE_k}{Dt}$, el segundo término es la *tasa de energía potencial* $\frac{DE_{pot}}{Dt}$ sobre la interface del dominio de fluido y por último el tercer término es la *tasa de energía disipada* por viscosidad \dot{W}_{vis} , es decir

$$\frac{D}{Dt} (E_k + E_{pot}) = -\dot{W}_{vis}, \quad (2.43)$$

en general $\dot{W}_{vis} \neq 0$, esto quiere decir que el sistema pierde energía mecánica en forma de calor debido a la viscosidad. En el caso especial donde $\dot{W}_{vis} = 0$, la ecuación (2.43) se conoce como *el teorema de la conservación de la energía* el cual describe que la energía mecánica de la interface permanece constante.

2.5.2 Modelo de la esfera de fluido

A continuación, se describe el comportamiento de la interface agua-gas de una gota de fluido. Se asume que el estado de equilibrio de la gota es una esfera de radio R_0 , a la cual se impone una perturbación descrita por un campo vectorial inicial sobre la interface $f(\phi, \theta, t)$ donde ϕ es el ángulo azimutal y θ es el ángulo polar, ver figura 2.1. Se supone que existe una simetría alrededor del eje z (axisimetría), por lo tanto la perturbación no depende de la coordenada ϕ , entonces el radio de la esfera de fluido se describe a través del tiempo como

$$R(\theta, t) = R_0 + f(\theta, t). \quad (2.44)$$

Para pequeñas amplitudes, es posible describir a $f(\theta, t)$ como una combinación lineal de modos normales denotado por n de la siguiente forma

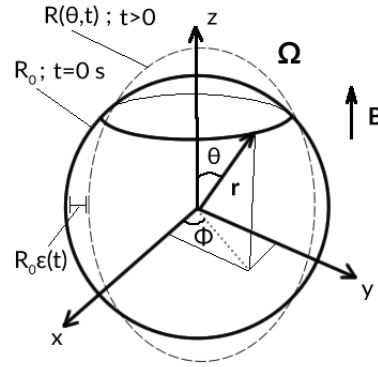


Fig. 2.1 Esquema del modelo teórico de la esfera de fluido donde el vector \mathbf{r} representa el vector posición y \mathbf{B} representa el campo magnético externo que se describe en la sección 2.5.5. Se considera una geometría esférica con dominio $\Omega = [0, R(\theta, t)] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, la función $R(\theta, t)$ describe la forma de la interface de la esfera de fluido. $R_0\epsilon(t)$ es la perturbación de la interface donde $\epsilon(t) \ll 1$.

$$f(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\cos \theta), \quad (2.45)$$

donde $P_n(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre, las siguientes consideraciones deben ser tomadas en cuenta;

- $\alpha_n(t)/R_0 \ll 1$.
- El modo $n = 0$ está relacionado con la oscilación del volumen, de esta forma se define $b_0(t) = R_0 + \alpha_0(t)$.
- El modo $n = 1$ está relacionado con el desplazamiento del centro de masa, el cual se establece a permanecer fijo en el espacio, por lo tanto $\alpha_1(t) = 0$.
- Los modos $n \geq 2$ pueden ser tratados de manera separada.

Por lo tanto,

$$R_n(\theta, t) = b_0(t) + \alpha_n(t) P_n(\cos \theta). \quad (2.46)$$

La conservación del volumen describe que ante una deformación se tiene que cumplir que

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 = 2\pi \int_0^\pi \int_0^{R_n(\theta, t)} r^2 dr \sin \theta d\theta, \quad (2.47)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left[b_0^3 + \frac{3}{2n+1} b_0 \alpha_n^2 \right], \quad (2.48)$$

$$= \frac{4\pi}{3} b_0^3 \left[1 + \frac{3}{2n+1} \frac{\alpha_n^2}{b_0^2} \right]. \quad (2.49)$$

$$b_0 = R_0 \left[1 + \frac{3}{2n+1} \frac{\alpha_n^2}{b_0^2} \right]^{-1/3}, \quad (2.50)$$

dato que $\frac{\alpha_n^2}{b_0^2} \ll 1$ se puede hacer uso de una serie de Taylor para escribir esta expresión como

$$b_0 = R_0 \left[1 - \frac{1}{2n+1} \frac{\alpha_n^2}{b_0^2} \right], \quad (2.51)$$

ahora como $b_0 = R_0 + \alpha_0(t)$ donde $\alpha_0 \ll 1$, entonces $b_0^2 \approx R_0^2$ de esta forma

$$b_0 \approx R_0 \left[1 - \frac{1}{2n+1} \frac{\alpha_n^2}{R_0^2} \right]. \quad (2.52)$$

De esta forma, la ecuación (2.46) se reescribe como

$$R_n(\theta, t) = R_0 \left[1 - \frac{1}{2n+1} \frac{\alpha_n^2}{R_0^2} \right] + \alpha_n P_n(\cos \theta), \quad (2.53)$$

$$= R_0 \left[1 + \varepsilon_n P_n(\cos \theta) - \frac{1}{2n+1} \varepsilon_n^2 \right], \quad (2.54)$$

donde $\varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{R_0} \ll 1$. Así mismo, se debe describir el campo de velocidades \mathbf{u} , el cual se supone irrotacional, es decir, el campo \mathbf{u} puede encontrarse a través de un potencial de velocidades φ como $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. En [6] se describe el potencial de velocidades como

$$\varphi(r, \theta, t) = \beta_n(t) r^n P_n(\cos \theta), \quad (2.55)$$

donde el coeficiente $\beta_n(t)$ se encuentra a través de la condición cinética en la interface fluido-gas, $u_r(r = R) = v_t$ donde v_t es la velocidad tangencial de la interface, es decir

$$u_r(r = R) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r = R) = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (2.56)$$

o bien,

$$\beta_n n R_0^{n-1} \left[1 + \varepsilon_n P_n(\cos \theta) - \frac{1}{2n+1} \varepsilon_n^2 \right]^{n-1} P_n(\cos \theta) = R_0 \dot{\varepsilon}_n P_n(\cos \theta), \quad (2.57)$$

debido a que $\varepsilon_n \ll 1$ el orden de magnitud de β_n es proporcional a $\dot{\varepsilon}_n$, de esta forma

$$\beta_n(t) \approx \frac{1}{nR_0^{n-2}} \dot{\varepsilon}. \quad (2.58)$$

Finalmente, el potencial de velocidades se reescribe como

$$\varphi(r, \theta, t) = \frac{R_0^2}{n} \left(\frac{r}{R_0} \right)^n P_n(\cos \theta) \dot{\varepsilon}(t). \quad (2.59)$$

El campo de velocidades \mathbf{u} se encuentra a través del potencial de velocidades $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ con $\mathbf{u} = v_n \hat{r} + u_n \hat{\phi} + w_n \hat{\theta}$ donde

$$v_n(r, \theta, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = R_0^2 \frac{r^{n-1}}{R_0^n} P_n(\cos \theta) \dot{\varepsilon}(t), \quad (2.60)$$

$$u_n(r, \theta, t) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = 0, \quad (2.61)$$

$$w_n(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = R_0^2 \frac{r^{n-1}}{R_0^n} \left(\frac{\cos \theta P_n(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \dot{\varepsilon}(t). \quad (2.62)$$

2.5.3 Dinámica conservativa

En esta sección, se trata a la dinámica de la gota de fluido de manera conservativa, es decir, se limita a trabajar con la ecuación $\frac{D}{Dt}(E_k + E_{pot}) = 0$.

La energía cinética del sistema se encuentra utilizando el potencial de velocidades (2.59),

$$E_k = \int_V \frac{1}{2} \rho \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dV = \int_S \frac{1}{2} \rho \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \frac{1}{2} \rho \varphi \nabla^2 \varphi dV \quad (2.63)$$

$$= \pi \rho \int_0^\pi \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} R^2 \sin \theta d\theta, \quad (2.64)$$

$$= \pi \rho \int_1^{-1} \frac{R_0^3}{n} P_n^2 \dot{\varepsilon}^2 R_0^2 (1 + \varepsilon_n P_n)^2 d(-\cos \theta) \approx 2\pi \rho R_0^5 \dot{\varepsilon}_n^2 \frac{1}{n(2n+1)}, \quad (2.65)$$

En cuanto a la energía potencial, dado que σ_s es una constante en (2.38), el resultado es una diferencia entre la superficie en reposo y la deformada. Siguiendo el trabajo de [27] se tiene

$$E_{pot} = \sigma_s (S - S_0), \quad (2.66)$$

donde S es el área de la superficie libre y S_0 el área en el estado de equilibrio, en tres dimensiones.

El área S se calcula como una superficie de revolución alrededor del eje z como

$$S = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2} R \sin \theta d\theta, \quad (2.67)$$

$$\approx S_0 + 2\pi R_0^2 \frac{n^2 + n - 2}{2n + 1} \varepsilon_n^2, \quad (2.68)$$

donde se ha usado (2.54) y $S_0 = 4\pi R_0^2$. Por lo tanto

$$E_{pot} \approx 2\pi \sigma_s R_0^2 \frac{(n+2)(n-1)}{2n+1} \varepsilon_n^2. \quad (2.69)$$

Finalmente, si se sustituye (2.65) y (2.69) en (2.43) y cuando la energía se conserva se obtiene

$$4\pi \rho R_0^5 \frac{1}{n(2n+1)} \dot{\varepsilon}_n \left[\ddot{\varepsilon}_n + n(n-1)(n+2) \frac{\sigma_s}{\rho R_0^3} \varepsilon_n \right] = 0, \quad (2.70)$$

de esta forma el argumento debe ser nulo, lo que da lugar a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para ε_n , cuya solución es

$$\varepsilon_n(t) = A \cos(\omega_n t + B), \quad (2.71)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{n(n-1)(n+2) \frac{\sigma_s}{\rho R_0^3}}. \quad (2.72)$$

Se pueden encontrar los valores de A y B a través de las condiciones iniciales. Por ejemplo, para $B = \frac{\pi}{2}$ el sistema parte de un potencial de velocidades $\varphi \neq 0$ y la interface oscila con una amplitud máxima A , que por definición $\varepsilon_n^{max} = A \ll 1$. En contraste, para $B = 0$ el sistema parte de un potencial de velocidades $\varphi = 0$, sin embargo la interface parte de una superficie ya deformada dependiendo del modo de oscilación, para $n = 2$ la interface parte de un elipsoide. Finalmente, se sustituye (2.71) en (2.54) para encontrar la dinámica de la superficie libre de la gota.

2.5.4 Dinámica no conservativa

En la dinámica no conservativa, el teorema de la conservación de la energía no se satisface debido a la disipación de energía por viscosidad (fricción molecular) en el cual se puede argumentar que, físicamente, la energía mecánica se transforma en calor, en este trabajo no se teoriza sobre la energía interna en la gota. La tasa de energía disipada por viscosidad se escribe después de algo de álgebra

$$\dot{W}_{vis} = 2\mu \int_V \overset{\leftrightarrow}{\dot{\epsilon}} : \overset{\leftrightarrow}{\dot{\epsilon}} dV = \mu \int \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.73)$$

donde el vector normal \hat{n} coincide con el vector \hat{r} coordenado debido a la geometría del problema.

Se sustituye $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ donde la función φ es (2.59),

$$\dot{W}_{vis} = \mu 2\pi \int_0^\pi \frac{\partial \|\nabla\varphi\|^2}{\partial r} R^2 \sin\theta d\theta, \quad (2.74)$$

$$\approx 8\pi\mu R_0^3 \frac{n-1}{n} \dot{\epsilon}_n^2. \quad (2.75)$$

Si se sustituye (2.75) en la ecuación (2.43) se obtiene

$$4\pi\rho R_0^5 \frac{1}{n(2n+1)} \dot{\epsilon}_n \left[\ddot{\epsilon}_n + n(n-1)(n+2) \frac{\sigma_s}{\rho R_0^3} \epsilon_n \right] = -8\pi\mu R_0^3 \frac{n-1}{n} \dot{\epsilon}_n^2, \quad (2.76)$$

y por lo tanto,

$$\ddot{\epsilon}_n + 2\lambda_n \dot{\epsilon}_n + \omega_n^2 \epsilon_n = 0, \quad (2.77)$$

donde

$$\lambda_n = (2n+1)(n-1) \frac{\mu}{\rho R_0^2}. \quad (2.78)$$

La ecuación (2.77) es una ecuación diferencial lineal y ordinaria que puede ser resuelta con la función característica $\epsilon_n(t) = C e^{(-\lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n})t}$, el signo del discriminante $\Delta_n = \lambda_n^2 - \omega_n^2$ define la forma de la solución general. Si $\Delta_n > 0$ la viscosidad domina sobre la tensión superficial; la solución corresponde a un decaimiento al equilibrio sin oscilaciones, a esto se le conoce como régimen *sobre-amortiguado*. Cuando $\Delta_n < 0$, la tensión superficial domina sobre la viscosidad; la solución corresponde a un decaimiento al equilibrio con oscilaciones, régimen *amortiguado*.

En el caso especial donde $\Delta_n = 0$, ambos fenómenos tienen la misma importancia, el resultado es un rápido decaimiento al equilibrio sin oscilaciones, a esto se le conoce como el régimen *crítico*. Aquí, λ_n es conocido como la *tasa de amortiguamiento*.

Las soluciones generales de la ecuación (2.77) para cada régimen son,

- Si $\Delta_n = 0$, (crítico)

$$\varepsilon_n(t) = [\varepsilon_n^0 + (\dot{\varepsilon}_n^0 + \lambda_n \varepsilon_n^0)t] e^{-\lambda_n t}. \quad (2.79)$$

- Si $\Delta_n > 0$, (sobre-amortiguado)

$$\varepsilon_n(t) = \left[\varepsilon_n^0 \cosh(\sqrt{\Delta_n}t) + \frac{\dot{\varepsilon}_n^0 + \lambda_n \varepsilon_n^0}{\sqrt{\Delta_n}} \sinh(\sqrt{\Delta_n}t) \right] e^{-\lambda_n t}. \quad (2.80)$$

- Si $\Delta_n < 0$, (amortiguado)

$$\varepsilon_n(t) = \left[\sqrt{\left(\frac{\dot{\varepsilon}_n^0 + \lambda_n \varepsilon_n^0}{\sqrt{-\Delta_n}} \right)^2 + (\varepsilon_n^0)^2} \right] e^{-\lambda_n t} \cos(\sqrt{-\Delta_n}t + \psi), \quad (2.81)$$

$$\psi = -\frac{\dot{\varepsilon}_n^0 + \lambda_n \varepsilon_n^0}{\varepsilon_n^0 \sqrt{-\Delta_n}}.$$

donde ε_n^0 y $\dot{\varepsilon}_n^0$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales de la interface. Para este trabajo, la interface se mueve desde el reposo debido a un campo de velocidad no nulo de la forma $\mathbf{u}_0 = \nabla\varphi$ donde φ es (2.59), por lo tanto $\varepsilon_n = 0$ y $\dot{\varepsilon}_n^0$ es un parámetro.

2.5.5 Dinámica con efectos MHD

En esta subsección se hace la extensión de al trabajo presentado en la referencia [1] para incluir los efectos MHD, que es la principal contribución del presente trabajo. Ahora, la fuerza de Lorentz se agrega a la ecuación de balance de momento. Se considera un fluido conductor eléctrico e isotrópico con conductividad eléctrica σ_m y permeabilidad magnética μ_0 en presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. El movimiento relativo de la gota respecto al campo magnético genera una corriente eléctrica inducida \mathbf{j} descrita por la ley de Ohm (2.15) donde el campo eléctrico \mathbf{E}_f es, por ley de inducción de Faraday (2.13), proporcional al campo magnético inducido $\frac{\mathbf{E}_f}{l} \sim \frac{\mathbf{b}}{t}$, o bien $\mathbf{E}_f \sim U\mathbf{b}$ donde U es una velocidad característica. Para sistemas de

aplicación industrial, el campo magnético inducido es muy pequeño comparado con el campo magnético acoplado \mathbf{B}_0 , *i.e.* $U\mathbf{b} \ll 1$, por lo tanto, la ley de Ohm se reduce a

$$\mathbf{j} = \sigma_m (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0). \quad (2.82)$$

Esto indica que sobre la esfera no existe acumulación de cargas de modo que el campo eléctrico es cero. Esta aproximación es válida a *bajos números de Reynolds magnéticos*, R_m , donde $R_m = \sigma_m \mu_0 U L_0$.

Ahora, se puede encontrar la tasa de energía disipada por efecto Joule, análogamente a como se hizo para la energía disipada por viscosidad en la ecuación (2.33),

$$\dot{W}_{MHD} = \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV, \quad (2.83)$$

$$= \int_V (\sigma_m (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV. \quad (2.84)$$

Nuevamente, se hace uso de la teoría de flujo potencial viscoso para que $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ donde φ es (2.59). Así, después de algo de álgebra

$$\dot{W}_{MHD} = \sigma_m \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi)(\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi) dV - \sigma_m \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})(\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi) dV. \quad (2.85)$$

El segundo término del lado derecho de (2.85) se calcula fácilmente, análogo al término de la energía cinética (2.65),

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})(\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi) dV = \sigma_m B_0^2 2\pi \int_0^\pi \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial r} R^2 \sin\theta d\theta, \quad (2.86)$$

$$\approx \sigma_m B_0^2 4\pi R_0^5 \frac{1}{n(2n+1)} \dot{\epsilon}_n^2. \quad (2.87)$$

El primer término requiere más cálculos pero se puede demostrar que

$$\sigma_m \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi)(\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi) dV = \sigma_m B_0^2 R_0^4 \int_V \left(\frac{r^{n-1}}{R_0^n} \right)^2 \dot{\epsilon}_n^2 P_{n-1}^2(\cos\theta) dV. \quad (2.88)$$

$$\approx \sigma_m B_0^2 4\pi R_0^5 \left(\frac{1}{2n+1} \right) \left(\frac{1}{2n-1} \right) \dot{\epsilon}_n^2. \quad (2.89)$$

Se obtiene,

$$\dot{W}_{MHD} = 4\pi\rho R_0^5 \frac{1}{n(2n+1)} \dot{\varepsilon}_n^2 \left[\left(\frac{n}{2n-1} - 1 \right) \frac{\sigma_m B_0^2}{\rho} \right]. \quad (2.90)$$

Si se sustituye (2.90) en la ecuación de balance de energía (2.43) de tal forma que

$$4\pi\rho R_0^5 \frac{1}{n(2n+1)} \dot{\varepsilon}_n \left[\ddot{\varepsilon}_n + n(n-1)(n+2) \frac{\sigma_s}{\rho R_0^3} \varepsilon_n \right] = 4\pi\rho R_0^5 \frac{1}{n(2n+1)} \dot{\varepsilon}_n^2 \left[\left(\frac{n}{2n-1} - 1 \right) \frac{\sigma_m B_0^2}{\rho} \right], \quad (2.91)$$

por lo tanto,

$$\ddot{\varepsilon}_n + 2\Lambda_n \dot{\varepsilon}_n + \omega_n^2 \varepsilon_n = 0, \quad (2.92)$$

donde esta vez,

$$\Lambda_n = \left(\frac{n-1}{4n-2} \right) \frac{\sigma_m B_0^2}{\rho}. \quad (2.93)$$

La ecuación (2.92) es totalmente análoga a la ecuación (2.77), por lo tanto la solución del sistema es idéntica al caso cuando la disipación de energía ocurre por viscosidad, es decir, se presentan los regímenes sobre-amortiguado, amortiguado y crítico discriminados por $\tilde{\Delta}_n = \Lambda_n^2 - \omega_n^2$. Análogamente, se le denomina a Λ_n como *la tasa de amortiguamiento magnético*. Esta definición de Λ_n concuerda con muchos textos científicos que describen a los efectos magnetohidrodinámicos como un amortiguamiento magnético ó frenado magnético, incluso en [28] [29] se menciona a estos efectos como una especie de “viscosidad magnética”. De hecho, la expresión $\frac{\rho}{\sigma_m B_0^2}$ se le denomina tiempo de Joule y entonces se puede definir $\tilde{\tau}_n = \Lambda_n^{-1}$ como el tiempo de Joule para el modo n [9].

Capítulo 3

El método numérico de resolución, *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH)

En este capítulo se da a conocer el método de resolución numérico *Smoothed Particle Hydrodynamics* desarrollado por Monaghan [30] para fluidos incompresibles y replicado por Dutra Filo [2] en su libro, para las ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica así como su forma SPH Lagrangiana. Después, se presenta el algoritmo de resolución y denominado como SPMHD. Como procedimiento necesario, se deben hacer simulaciones de escenarios hidrodinámicos y magnetohidrodinámicos para validar el código SPMHD de la siguiente forma; en el Apéndice A se simula el flujo de Poiseuille donde un fluido viscoso fluye entre un par de placas planas paralelas infinitas y con fronteras periódicas, se compara el perfil de velocidad con su solución analítica en el transitorio; después en el Apéndice B, se simula el flujo de Hartmann que es una extensión del flujo de Poiseuille, es decir, el flujo de un fluido viscoso eléctricamente conductor entre dos paredes paralelas aislantes eléctricas y bajo un campo magnético uniforme transversal a las paredes, en donde la fuerza de Lorentz actúa en sentido contrario al movimiento de flujo. El perfil de velocidad obtenido numéricamente en estado estacionario se compara con la solución analítica. Posteriormente en el Apéndice C se simula el problema DamBreaking en dos y tres dimensiones, donde una columna de fluido viscoso se desplaza por acción de la gravedad en un contenedor, los resultados sobre el frente de ola y la presión de impacto se comparan con datos experimentales. Finalmente, en el Apéndice D se incorporan los efectos de tensión superficial para simular la superficie libre de una gota inicialmente cuadrada de fluido viscoso hasta su estado de mínima energía, los resultados en la curvatura y presión en la gota final concuerdan con los resultados teóricos. Una vez validado, se aplica el código SPMHD para el problema principal de este trabajo, la dinámica de una gota de fluido eléctricamente conductor con efectos MHD.

3.1 Descripción del método lagrangiano SPH

El método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) es un procedimiento numérico para resolver las ecuaciones de conservación de los fluidos donde el medio continuo es aproximado a través de un sistema de i -partículas, donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$ siendo N el número total de cuerpos con masa m_i y densidad ρ_i . Las funciones escalares son calculadas usando la *integral de Dirac*

$$A(x_i, t) = \int_V A(x_j, t) \delta(x_i - x_j) dV, \quad (3.1)$$

donde A es un campo escalar continuo y diferenciable en una región con volumen V que depende de la(s) dirección(es) espacial(es) y del tiempo, δ es la función delta de Dirac. En el método SPH la función delta de Dirac es interpolada a través de un *kernel de interpolación*, $w(x_i - x_j, h)$, donde h es una *longitud de suavizado* propio de cada kernel el cual puede ser reescalado a través de una constante k con la finalidad de mejorar la precisión, donde el kernel satisface que $\lim_{h \rightarrow 0} w(x_i - x_j, h) = \delta(x_i - x_j)$, véase figura 3.1. La integral es sustituida por una suma sobre los volúmenes de las partículas vecinas j al rededor de i hasta una longitud kh , por lo tanto la integral de Dirac es interpolada y discretizada de la siguiente forma,

$$A(\mathbf{r}_i, t) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A(\mathbf{r}_j, t) w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.2)$$

Existen otras propiedades para considerar a una función w como un kernel de interpolación, véase [2, p. 19]. Se debe observar que la precisión del método depende de la longitud de suavizado h , por lo tanto también depende del número de partículas dentro del kernel. En [2] se señala que es suficiente considerar 5 partículas (incluyendo la partícula i) dentro del kernel para 1-D, 21 partículas para 2-D y 54 partículas para 3-D para obtener un error del orden del cuadrado de la longitud de suavizado, $O(h^2)$. El número de partículas dentro del kernel puede verse afectado si la partícula i se encuentra cerca de la frontera del dominio de partículas, lo que daría lugar a un *truncamiento* del kernel, en consecuencia el método pierde precisión y pueden aparecer errores en la simulación, véase figura 3.1.

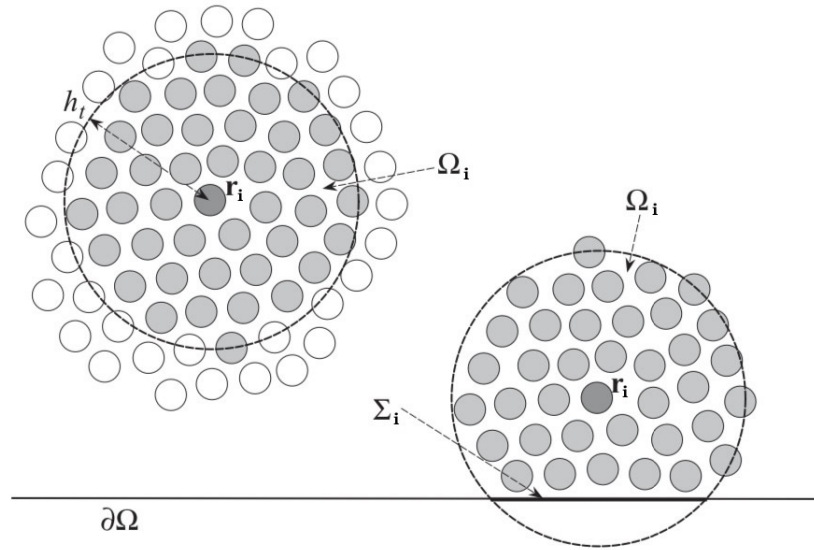


Fig. 3.1 Representación gráfica del kernel $w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$ y su rango de acción $h_i = kh$, (izq) kernel completo, (der) kernel truncado por la frontera $\partial\Omega$. [31]

3.1.1 Kernel de interpolación

En la literatura científica del método SPH, se encuentran muchas funciones $w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$ que satisfacen las condiciones descritas en la sección anterior. Los kernels de interpolación usados en este trabajo se describen a continuación.

- *SPLine kernel.*

$$w(q) = \alpha_n \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2(1 - \frac{1}{2}q) & \text{si } 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{si } 1 \leq q < 2 \\ 0 & \text{si } q \geq 2, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $q = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{h}$ y α_n es una constante de normalización que depende de la dimensión n , $\alpha_2 = \frac{10}{7\pi h^2}$ y $\alpha_3 = \frac{1}{\pi h^3}$ para dos y tres dimensiones respectivamente.

- *Quintic kernel*

$$w(q) = \alpha_n \begin{cases} (2q + 1)(1 - \frac{q}{2})^4 & \text{si } 0 \leq q < 2 \\ 0 & \text{si } q \geq 2, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $q = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{h}$ y $\alpha_2 = \frac{7}{4\pi h^2}$, $\alpha_3 = \frac{21}{16\pi h^3}$.

- *WendlandC4 kernel*

$$w(q) = \alpha_n \begin{cases} \left(\frac{35}{12}q^2 + 3q + 1\right)\left(1 - \frac{1}{2}q\right)^6 & \text{si } 0 \leq q < 2 \\ 0 & \text{si } q \geq 2, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $q = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{h}$ y $\alpha_2 = \frac{9}{4\pi h^2}$, $\alpha_3 = \frac{495}{256\pi h^3}$.

- *Spike3 kernel*

$$w(q) = \alpha_n \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{3}q\right)^3 & \text{si } 0 \leq q < 3 \\ 0 & \text{si } q \geq 3, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $q = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{h}$ y $\alpha_3 = \frac{120}{216\pi h^3}$.

La elección del kernel depende del problema a tratar. Por ejemplo, el kernel WendlandC4 disipa con mejor precisión la energía interna [32] comparado con los kernels basados sobre la función Gaussiana. El kernel Spike3 presenta mejores resultados para problemas donde la tensión superficial es importante [33].

3.1.2 Operadores matemáticos

Sea \mathbf{A} un campo vectorial y w un campo escalar ambos continuos y diferenciables, la divergencia del campo vectorial \mathbf{A} puede ser igualada usando la integral de Dirac interpolada sobre un dominio continuo como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(x_i, t) &= \int_V [\nabla \cdot \mathbf{A}(x_j, t)] w(x_i - x_j, h) dV, \\ &= \int_V \nabla \cdot [\mathbf{A}(x_j, t) w(x_i - x_j, h)] dV - \int_V \mathbf{A}(x_j, t) \cdot [\nabla w(x_i - x_j, h)] dV, \end{aligned} \quad (3.7)$$

el primer término del lado derecho de (3.7) puede reescribirse usando el teorema de Gauss, la identidad (3.7) que como

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x_i, t) = \int_S \mathbf{A}(x_j, t) w(x_i - x_j, h) \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathbf{A}(x_j, t) \cdot [\nabla w(x_i - x_j, h)] dV. \quad (3.8)$$

Debido a la propiedad de función compacta en la superficie S que encierra el volumen V , el primer término del lado derecho de (3.7) es nulo. Por lo tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x_i, t) = - \int_V \mathbf{A}(x_j, t) \cdot [\nabla w(x_i - x_j, h)] dV. \quad (3.9)$$

Discretizando la integral sobre cada uno de los volúmenes de las partículas, la identidad (3.9) queda como

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t) \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.10)$$

Una segunda forma puede ser obtenida si se considera la identidad matemática

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \rho], \quad (3.11)$$

un procedimiento análogo a la ecuación (3.9) da como resultado un nuevo tratado a la divergencia de una función

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = - \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j [\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t)] \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.12)$$

El cual es conocida como forma *antisimétrica* de la divergencia, en esta forma se tiene mejores resultados para aplicaciones de flujos de fluidos [2]. En situaciones donde la interacción de dos partículas debe ser *simétrica* [34], una tercera forma puede ser obtenida si se considera

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho} \right) + \frac{\mathbf{A}}{\rho} \cdot \nabla \rho, \quad (3.13)$$

un procedimiento análogo para obtener la ecuación (3.9) nos da

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = \rho_i \sum_j m_j \left(\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t)}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.14)$$

De forma análoga se obtiene el gradiente,

$$\nabla A(\mathbf{r}_i, t) = - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A(\mathbf{r}_j, t) \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.15)$$

El gradiente *antisimétrico*,

$$\nabla A(\mathbf{r}_i, t) = - \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j [A(\mathbf{r}_i, t) - A(\mathbf{r}_j, t)] \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.16)$$

El gradiente *simétrico*,

$$\nabla A(\mathbf{r}_i, t) = \rho_i \sum_j m_j \left(\frac{A(\mathbf{r}_i, t)}{\rho_i^2} + \frac{A(\mathbf{r}_j, t)}{\rho_j^2} \right) \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.17)$$

La aproximación al laplaciano puede ser obtenida a través de una serie de Taylor [2], sin embargo una forma más precisa es usada de [35]

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = 4 \sum_j m_j \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)}{(\rho_i + \rho_j)(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + 0.01h^2)} (\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j), \quad (3.18)$$

el término $0.01h^2$ es usado para evitar la singularidad de la fracción cuando la distancia entre partículas es muy pequeña.

Para el rotacional tenemos,

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t) \times \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h), \quad (3.19)$$

el rotacional *antisimétrico*,

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j [\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t)] \times \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h), \quad (3.20)$$

y el rotacional *simétrico* [36],

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) = -\rho_i \sum_j m_j \left(\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t)}{\rho_j^2} \right) \times \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h). \quad (3.21)$$

3.1.3 Tratado numérico de la tensión superficial para el método SPH

Existen muchos modelos para incluir la tensión superficial en el método SPH. El modelo de presión cohesiva, fue propuesto por primera vez en el año 2000 por Nugent [37] donde las partículas SPH experimentan una fuerza de atracción entre sí debido a una presión de van der Waals; para partículas dentro del dominio, la fuerza neta experimentada por ésta presión es cero, pero distinta de cero sobre (o cerca) de la interface. El modelo de fuerza inter-partícula fue propuesto por primera vez por Tartakovsky *et al.* (2005) [38] donde la fuerza de atracción entre las partículas SPH son modeladas por una fuerza de cuerpo explícita; una fuerza atractiva por pares es ejercida entre la partícula i y j . En este trabajo se utiliza el modelo de curvatura

explícita propuesto por Brackbill [24] ec. (2.9) y la aproximación sin curvatura estudiado por Akinci [25] ec. (2.10). En el modelo de curvatura explícita para el método SPH contempla los siguientes conceptos; la función de color, el vector normal, la curvatura y, finalmente, la fuerza de tensión superficial.

Una función de color se propone como una función escalon, esto es, cada partícula i tiene un escalar asignado C_F el cual es 1 si la partícula pertenece a la fase A y 0 si pertenece a la fase B, considerando una sola fase y usando la ecuación (3.2) para C_F se tiene

$$[C_F]_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} w_{ij}, \quad (3.22)$$

donde m_j , ρ_j es la masa y la densidad de la partícula vecina respectivamente, y el kernel $w_{ij} = w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$. Después, el vector normal se calcula con el gradiente de la función de color usando (3.16), de la forma

$$\hat{n}_i = \frac{\nabla[C_F]_i}{|\nabla[C_F]_i|}. \quad (3.23)$$

Un vez encontrados los vectores normales, se calcula la curvatura κ con la divergencia de los vectores normales (3.12) de la siguiente manera,

$$\kappa_i = -\nabla \cdot \hat{n}_i. \quad (3.24)$$

Para restaurar la consistencia del kernel cerca de la interface haciendo uso de una serie de Taylor, en este trabajo se utilizó la restauración del kernel a orden cero

$$\kappa_i^c := \frac{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \kappa_j w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)}{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)}, \quad (3.25)$$

Finalmente, la fuerza de tensión superficial se evalúa via (2.9) con un coeficiente de tensión superficial constante, de la forma

$$[\mathbf{f}_s]_i = \frac{\sigma_s \kappa_i^c}{\rho_i} (dp)^{-1} \hat{n}_i, \quad (3.26)$$

donde dp es la distancia entre partículas inicial. La aceleración (3.26) debe ser evaluada únicamente sobre las partículas cercanas a la interface, para ello se utiliza

$$[\nabla \cdot \mathbf{r}]_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \nabla w_{ij}, \quad (3.27)$$

esta expresión es aproximadamente 2.0 para 2D y 3.0 para 3D en los puntos internos del dominio, sin embargo cerca de la interface su valor decae por debajo de 1.5 para 2D y 2.0 para 3D debido al truncamiento del kernel.

En el modelo de la aproximación sin curvatura sólo se requiere conocer el vector normal de la siguiente forma

$$\mathbf{n}_i = -\nabla[1]_i, \quad (3.28)$$

usando (3.15) donde $A \equiv 1$. Por último, se conoce la fuerza de tensión superficial usando (2.10),

$$[\mathbf{f}_s]_i = - \sum_j \gamma m_j (\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j) (dp)^{-1}, \quad (3.29)$$

donde γ es un parámetro que se debe calibrar.

3.1.4 Tratado numérico de las ecuaciones fundamentales de la MHD

El siguiente sistema de ecuaciones fue obtenido por Salami [39] para el estudio numérico SPH de fluidos débilmente compresibles y conductores eléctricos que se mueven relativos a un campo magnético uniforme.

En el método SPH el dominio está compuesto por partículas $i = 1, 2, 3, \dots, N$ cuya posición $\mathbf{r}_i^{(n)}$ es conocida, así como la velocidad $\mathbf{u}_i^{(n)}$, densidad $\rho_i^{(n)}$, presión $p^{(n)}$ y el campo magnético $\mathbf{B}_i^{(n)} = \mathbf{B}_{0i}^{(n)} + \mathbf{b}_i^{(n)}$ (El superíndice n dice que el valor escalar es conocido al tiempo $n\Delta t$ donde Δt es el paso temporal). La evolución temporal del sistema está regido por la ley de conservación de masa (2.4), balance de momento (2.7) y la ecuación de inducción magnética (2.21), en general usando los operadores SPH descritos en la sección anterior se tiene que

$$\left[\frac{D\rho}{Dt} \right]_i^{(n)} = \sum_j m_j \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h), \quad (3.30)$$

$$\left[\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right]_i^{(n)} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h),$$

$$+4\nu \sum_j m_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)}{(\rho_i + \rho_j)(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + 0.01h^2)} \mathbf{u}_{ij} + \frac{1}{\rho_i} \mathbf{j}_i \times (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{b}_i) + \mathbf{f}_i^{(n)}, \quad (3.31)$$

$$\left[\frac{D\mathbf{b}}{Dt} \right]_i^{(n)} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j [\mathbf{u}_{ij} [(\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{b}_i) \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)] - (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{b}_i)(\mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h))] \\ + \frac{4}{\mu_0 \sigma} \sum_j m_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)}{(\rho_i + \rho_j)(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + 0.01h^2)} \mathbf{b}_{ij}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{j}_i^{(n)} = \frac{1}{\rho_i \mu_0} \sum_j m_j \mathbf{b}_{ij} \times \nabla w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h), \quad (3.33)$$

$$p_i^{(n)} = \frac{\rho_0 c_0^2}{7} \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^7 - 1 \right), \quad (3.34)$$

$$\left[\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right]_i^{(n)} = \mathbf{u}_i^{(n)}, \quad (3.35)$$

donde $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$, $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$ con j el subíndice de la partícula vecina dentro del kernel de interpolación, (3.34) es la *ecuación de Tait* con c_0 es la velocidad del sonido en el medio, aunque diversos autores señalan que la velocidad del sonido en el medio puede ser seleccionada de acuerdo a $c_0 \sim 10U_{max}$ donde U_{max} es la velocidad máxima en el medio, con esto se asegura que la variación en la densidad del medio sea menor al 1%, logrando el esquema débilmente compresible, $\rho \sim \text{cte}$ [40]. Se ha sustituido el tensor de esfuerzos con $\nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$ en (3.31) y se ha usado la fuerza de Lorentz explícitamente con corrientes eléctricas inducidas. Adicionalmente, la ley de movimiento (3.35) es agregada para cerrar el sistema.

3.1.5 Integración temporal

Las cantidades escalares para el siguiente paso temporal ($n + 1$) están calculadas usando el método de integración temporal de Euler como primera aproximación, el cual consiste en usar las tasas de cambio del sistema (3.30)-(3.35), este método señala que

$$\rho_i^{(n+1)} = \rho_i^{(n)} + \Delta t \left[\frac{D\rho}{Dt} \right]_i^{(n)}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{u}_i^{(n+1)} = \mathbf{u}_i^{(n)} + \Delta t \left[\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right]_i^{(n)}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{b}_i^{(n+1)} = \mathbf{b}_i^{(n)} + \Delta t \left[\frac{D\mathbf{b}}{Dt} \right]_i^{(n)}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{r}_i^{(n+1)} = \mathbf{r}_i^{(n)} + \Delta t \left[\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right]_i^{(n)}. \quad (3.39)$$

Le estabilidad de del método de integración temporal depende del valor de Δt , el criterio de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) es aplicado para garantizar la convergencia. Para problemas de difusión viscosa [2] con efectos MHD [41],

$$\Delta t = \min \left(0.125 \left(\frac{h^2}{\nu} \right), 0.05 \frac{h}{c_s}, 0.05 \frac{h}{\sqrt{c_s^2 + v_a^2}} \right), \quad (3.40)$$

donde h es la longitud de suavizado, ν es la viscosidad cinemática, c_s es la velocidad del sonido en el medio y $v_a = \frac{|\mathbf{B}_0|}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ es la velocidad de onda de Alfvén.

3.1.6 Tratado de la frontera

El tratado numérico del dominio de la frontera en un método libre de mallas como el SPH, es muy complicado. En un método mallado las celdas numéricas pertenecientes al dominio son fácilmente conocidas debido a que la malla no cambia con el tiempo, en contraste en el método SPH el dominio de la frontera puede cambiar con el tiempo, aún más, se vuelve difícil colocar el valor adecuado en la frontera para obtener la condición deseada en el límite del dominio de la frontera.

En el método SPH, el uso de partículas fantasmas hacen que el dominio de la frontera sea discretizado a partir de partículas, tal y como se hace para el dominio del fluido, de esta forma el kernel de la partícula de fluido i no se trunca, ver figura (3.2)-a). Sin embargo, el valor de la velocidad, densidad y presión para estas partículas fantasmas depende del tratado deseado, éste puede ser *dinámico*, *reflectivo* o *periódico*.

Dinámico. Las partículas frontera son tratadas como partículas de fluido, es decir se evalúa en ellas la densidad y presión a través de las ecuaciones (3.30) y (3.34) respectivamente, sin embargo la velocidad es conocida explícitamente, además éstas partículas son fijas, es decir, no

se calculan las nuevas posiciones $\mathbf{r}^{(n+1)}$ con la ecuación (3.35), como consecuencia la densidad de éstas partículas aumenta al igual que la presión cuando una partícula de fluido se aproxima a una partícula de la frontera, y por lo tanto se genera una fuerza de repulsión que no permite que la partícula de fluido penetre en el dominio de la frontera. Aunque esta técnica es simple carece de precisión y puede que partículas de fluido penetren en la frontera si no hay suficiente repulsión; se requiere que el dominio de la frontera tenga suficientes partículas. Esta técnica es implementada para el estudio y generación de olas a través de pistones móviles [42].

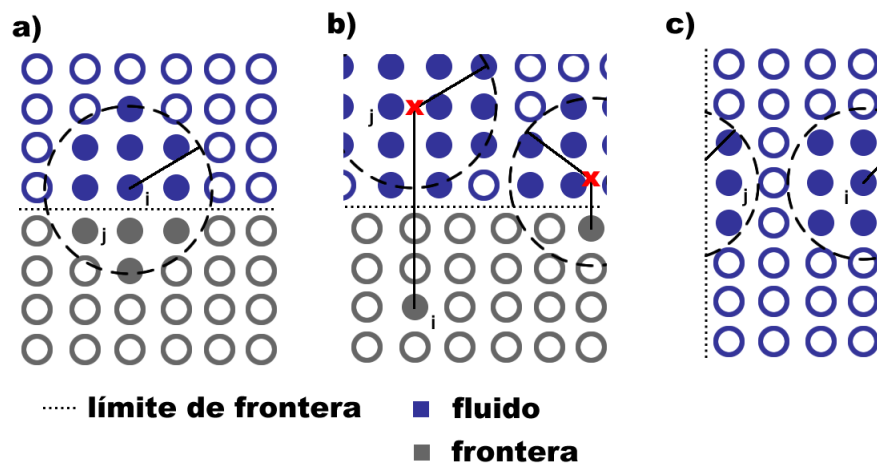


Fig. 3.2 Tratado del dominio de la frontera usando SPH. **a)** Frontera dinámica, las partículas fantasma del dominio de la frontera participan en el cálculo de las cantidades escalares, éstas pueden ser fijas o moverse. **b)** Las partículas frontera obtienen su valor a partir de un nodo de interpolación único (cruz roja) dentro del dominio del fluido, posteriormente esta cantidad escalar es asignada a una única partícula frontera, entonces las cantidades escalares de las partículas del fluido son evaluadas con mejor precisión. **c)** En la condición periódica las partículas de fluido que abandonan el dominio son recolocadas en otro punto del dominio, se asegura que el kernel no se trunque.

Reflectivo. Este método usa partículas fantasma en la frontera al igual que el método dinámico, sin embargo la presión, densidad y velocidad de las partículas son interpoladas usando nodos dentro del dominio del fluido [43][44], ver figura 3.2-b). Cada partícula en el dominio de la frontera tiene un único nodo de interpolación, su posición es el reflejo de la posición de la partícula frontera respecto al límite del dominio de la frontera, la posición del nodo es usado para evaluar la densidad, presión y velocidad en ese punto a través de (3.2), después el valor de la velocidad

para la partícula frontera está definida a través de una interpolación como $\mathbf{u}_{bound} = 2\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{node}$ donde \mathbf{u}_0 es la velocidad conocida de la frontera, para una condición de no deslizamiento, $\mathbf{u}_0 = 0$, si se trata de una condición de deslizamiento libre, $\mathbf{u}_{bound} = \mathbf{u}_{node}$.

Periódico. Este método transporta las partículas del dominio del fluido de un punto a otro, cuando las partículas del fluido superan el límite de la frontera son recolocados en el límite de la frontera contraria. El kernel no se trunca en el límite de la frontera, se debe completar con el uso de las partículas de fluido en el extremo contrario, ver figura 3.2-c), de esta forma se garantiza la precisión del método.

3.1.7 El algoritmo SPMHD

El siguiente algoritmo se escribió en el lenguaje Fortran. Los programas que simulan sistemas de N partículas pueden ser fácilmente paralelizados debido a que cada hilo de ejecución puede ser una partícula, esto es que para cada partícula- i se calculan las fuerzas viscosas, de tensión superficial y de fuerza de Lorentz por separado e independientes. La plataforma más estable para ejecutar hilos en paralelo es CUDA [45, 46], se utilizó CUDA Fortran para acelerar el tiempo de computo en cada una de las corridas realizadas en este trabajo. La paralelización ocurrió de manera nativa, es decir sin paqueterías externas. El compilador utilizado en SPMHD fue *NVIDIA HPC SDK* [47] para Ubuntu MATE 20.11.

Algoritmo 1 Resolución de las ec. fundamentales de la MHD usando SPH (SPMHD) con tensión superficial.

- 1: Dar valores a las constantes $\mathbf{g}, \rho, \nu, c_s, \sigma_{mhd}, \mu_0, \mathbf{B}_0$.
 - 2: Definir el tratado de la tensión superficial; curvatura explícita (CE) o aproximación sin curvatura (ASC) expuestos en la sección 3.1.3.
 - 3: Dar valor a σ_s o bien γ de acuerdo al método elegido en el paso 2.
 - 4: Definir el kernel de interpolación y los parámetros Δp (distancia entre partículas inicial), h y T_{max} .
 - 5: $n \leftarrow 0$.
 - 6: Definir las posiciones iniciales de las partículas fluido y frontera $\mathbf{r}_i^{(n)}$.
 - 7: $NT \leftarrow$ número total de partículas i (fluido + frontera).
 - 8: $\mathbf{u}_i^{(n)} \leftarrow [\mathbf{u}_0]_i, \rho_i^{(n)} \leftarrow \rho_0$ y $\mathbf{b}_i^{(n)} \leftarrow 0$.
 - 9: Seleccionar Δt de acuerdo a (3.40).
 - 10: **para** $t = 0$ hasta T_{max} **hacer**
 - 11: Buscar las interacciones pares de las partículas (neighbour searching).
 - 12: Calcular $\nabla \cdot \mathbf{r}_i^{(n)}$ con la ecuación (3.27) para encontrar las partículas cercanas a la interface.
 - 13: **para** $i = 1$ hasta NT **hacer**
 - 14: **si** i es una partícula del fluido **entonces**
 - 15: Calcular la presión $p_i^{(n)}$ con la ecuación de estado de Tait (3.34).
 - 16: Calcular la corriente inducida $\mathbf{j}_i^{(n)}$ con la ecuación de Ampere (3.33).
 - 17: **si** la partícula i está en la interface **entonces**
 - 18: Calcular la fuerza de tensión superficial de acuerdo al método elegido en el paso 2.
 - 19: **fin si**
 - 20: Calcular la tasa de densidad $\dot{\rho}_i^{(n)}$ con la ecuación (3.30).
 - 21: Calcular la tasa de velocidad $\dot{\mathbf{u}}_i^{(n)}$ con la ecuación (3.31).
 - 22: Calcular la tasa de campo magnético inducido $\dot{\mathbf{b}}_i^{(n)}$ con la ecuación (3.32).
 - 23: Computar la densidad $\rho_i^{(n+1)}$ con la ecuación (3.36).
 - 24: Computar la velocidad $\mathbf{u}_i^{(n+1)}$ con la ecuación (3.37).
 - 25: Computar la posición $\mathbf{r}_i^{(n+1)}$ con le ecuación (3.39).
 - 26: Computar el campo magnético inducido $\mathbf{b}_i^{(n+1)}$ con le ecuación (3.38).
 - 27: **fin si**
 - 28: **si** i es una partícula de la frontera **entonces**
 - 29: Evaluar $p_i^{(n)}, \rho_i^{(n)}$ y $\mathbf{u}_i^{(n)}$ de acuerdo al método reflectivo expuesto en la sección 3.1.6.
 - 30: **fin si**
 - 31: **fin para**
 - 32: Guardar resultados.
 - 33: $n \leftarrow n + 1$.
 - 34: **fin para**
-

Capítulo 4

Resultados principales

En este capítulo se presentan los resultados del código numérico SPMHD para la dinámica de una esfera de fluido viscoso y conductor eléctrico con efectos MHD en gravedad cero. Cabe señalar que el código SPMHD (algoritmo 1) trabaja con parámetros y constantes dimensionales, los siguientes parámetros y constantes no corresponden con algún material físico. Una esfera de fluido de radio $R_0 = 1$ m se simula a través de una distribución uniforme de partículas SPH, se simularon 4,224 partículas con una separación inicial $dp = 0.1$ m. La densidad del fluido es de $\rho = 1$ Kg/m³. Al tiempo $t = 0$ s, se establece la velocidad inicial de las partículas de acuerdo a (2.60)-(2.62) para el modo $n = 2$ y un campo magnético uniforme, $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$. Dependiendo de los valores de la viscosidad cinemática ν , de la intensidad del campo magnético externo B_0 y del coeficiente de tensión superficial σ_s se presentan diversos comportamientos en la dinámica de la esfera de fluido. Estos valores están cuantificados en la tasa de amortiguamiento viscoso λ_2 (2.78), la tasa de amortiguamiento magnético Λ_2 (2.93) y la frecuencia angular ω_2 (2.72) respectivamente. En la figura 4.1, se muestra la evolución numérica y analítica del perfil $R_2(\theta = \frac{\pi}{2}, t)$ (2.54) para distintos valores de λ_2 , Λ_2 y ω_2 , aquí la dinámica es no conservativa. La gráfica de la figura 4.1-a)-I y 4.1-b)-I corresponden al régimen sobre-amortiguado sin efectos magnéticos, mientras que la figura 4.1-c)-I, 4.1-d)-I y 4.1-e)-I corresponden al régimen amortiguado sin efectos magnéticos. El número de Reynolds es un cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas del sistema, aquí es $Re = \frac{\varepsilon_2^0 R_0^2}{\nu}$ donde ε_2^0 es la tasa de cambio en la función de deformación $\varepsilon_2(t)$ al tiempo $t = 0$ s, en los resultados de la figura (4.1) se mantuvo $Re=0.5-10.0$, el número de Ohnesorge, $Oh = \frac{\rho\nu}{\sqrt{\rho R_0 \sigma_s}}$, se mantuvo $Oh=0.079-1.0$, el número de Ohnesorge es un cociente entre las fuerzas viscosas y las fuerzas de tensión superficial en el sistema¹. Si las fuerzas inerciales son más grandes que las fuerzas viscosas, *i. e.* $Re \gg 1$, el

¹ Una gota de agua de radio $R_0 = 3$ mm tiene un número de Ohnesorge alrededor de $Oh = 0.002$, en esta escala la fuerza de tensión superficial tiene un gran impacto en la dinámica de la gota.

flujo ya no difunde momento por viscosidad y tiende a ser turbulento, en este punto el flujo ya no es laminar y por lo tanto se pierde el régimen lineal de las ecuaciones gobernantes del flujo. Se calculó la desviación estándar para cuantificar el error numérico respecto al valor analítico de la forma

$$\sigma_{err} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [R_i - R_2(0, t_i)]^2}{N}} \quad (4.1)$$

donde N es el número total de datos obtenidos a lo largo de $t = 2$ s y R_i es el valor numérico del perfil resultado del código SPMHD. Por ejemplo, para el caso **e)-I** de la figura 4.1 la desviación estándar fue de $\sigma_{err} = 9.67 \times 10^{-3}$ mientras que para el caso **a)-I** de la misma figura fue de $\sigma_{err} = 4.61 \times 10^{-4}$. Esto se debe a que la solución numérica no se encuentra en un régimen lineal para el caso **e)-I** ya que en este caso el número de Reynolds fue de $Re = 10.0$. Contrario al caso **a)-I** el número de Reynolds fue de $Re = 0.5$.

Ahora debido a la linealidad de la ecuación de balance de energía (2.42), se consideran ambos efectos; la disipación de energía por viscosidad y la disipación de energía por efecto Joule, *i. e.* existe un “súper discriminante” $(\tilde{\Delta}_n)_{super} = (\Lambda_n + \lambda_n)^2 - \omega_n^2$ que es análogo a el discriminante Δ_n y $\tilde{\Delta}_n$ donde la adición de ambas tasas dicta el régimen de la solución analítica de la ecuación

$$\ddot{\varepsilon}_n + 2(\Lambda_n + \lambda_n)\dot{\varepsilon}_n + \omega_n^2\varepsilon_n = 0. \quad (4.2)$$

En la simulación numérica se considera un fluido conductor eléctrico con conductividad eléctrica $\sigma_m = 0.1\Omega^{-1}m^{-1}$ y permeabilidad eléctrica $\mu = 0.05 - 0.1 \text{ TmA}^{-1}$; se consideró un campo magnético $B_0 = 0 - 40$ T. De este forma el número de Reynolds magnético se mantuvo en el rango $R_m = 0.005 - 0.05$ y el número de Hartmann $Ha = 0 - 9$. Los resultados de esta simulación se pueden observar en la figura (4.1) donde los casos **a)-I, b)-I, c)-I, d)-I** y **e)-I** corresponden al caso cuando la tasa de amortiguamiento magnético $\Lambda_2 = 0$, después se varió el campo magnético de tal forma que la tasa de amortiguamiento magnético toma distintos valores para los casos **a)-II, b)-II, c)-II, d)-II, e)-II** y **a)-III, b)-III, c)-III, d)-III** y **e)-III**.

En la figura 4.2 se muestran una secuencia de las 4,224 partículas simuladas con el programa SPMHD para el caso **e)-II** de la figura 4.1. De colores se muestra la elevación de cada partícula i respecto al equilibrio $R_0 = 1$ m, de color negro se muestra una elevación positiva mientras

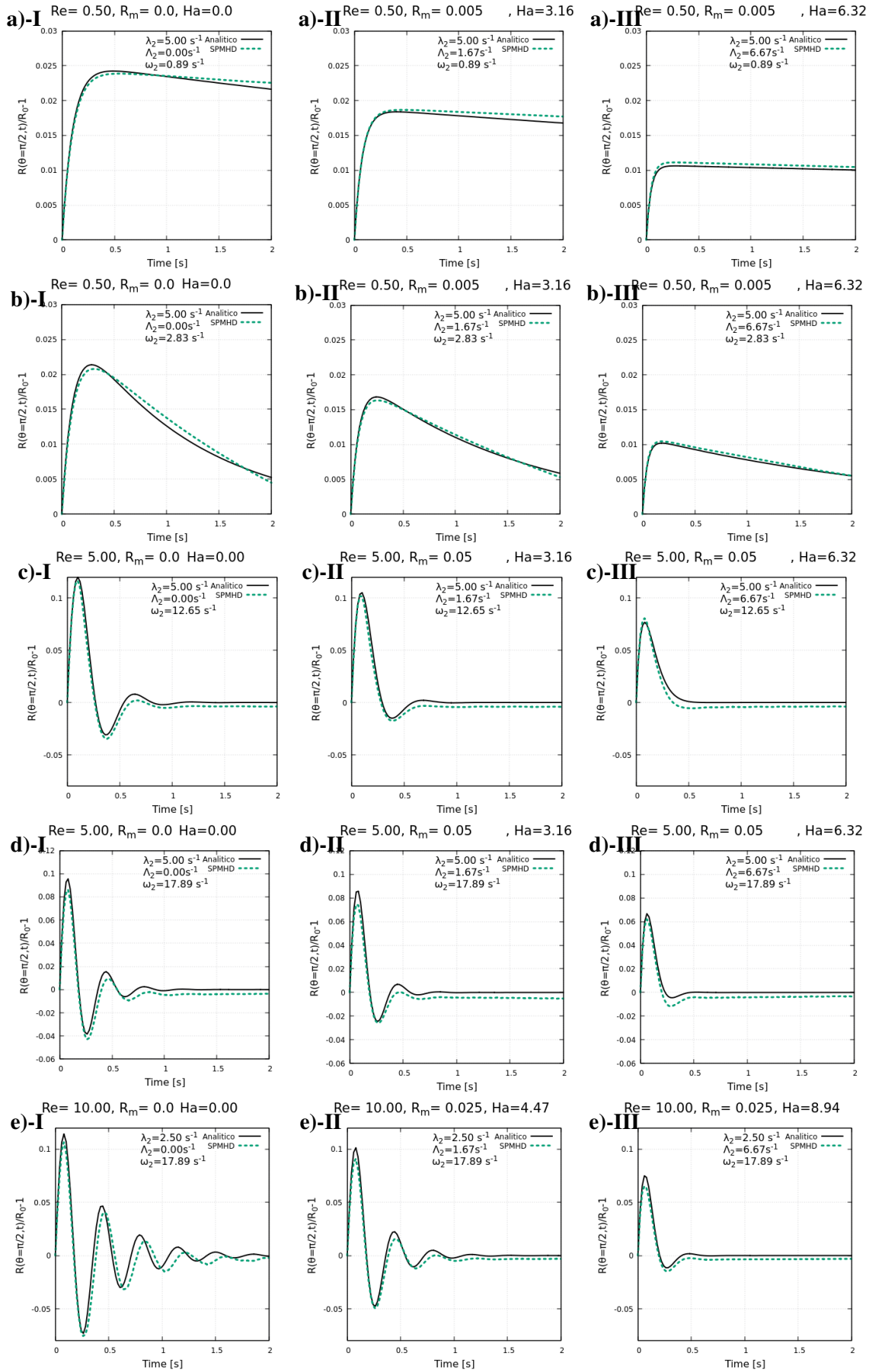


Fig. 4.1 Evolución de la superficie libre sobre el ecuador de la esfera, $R(\theta = \pi/2, t)$, en línea negra continua se grafica la función (2.54), en línea verde discontinua se presenta el resultado de la simulación, $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. El valor de $\varepsilon_2^0 = 0.5$ l/s para el régimen sobre amortiguado y $\varepsilon_2^0 = 5.0$ para el régimen amortiguado.

que de color blanco se muestra una elevación negativa. Al tiempo $t = 0$ s, el programa SPMHD crea un cubo de partículas de lado $l = R_0$, separación entre partículas de $dp = 0.1$ m y cuyo centro de masa coincide con el origen, después selecciona aquellas partículas cuyo modulo de la posición sea menor a R_0 , $|\mathbf{r}_i| \leq R_0$. Al mismo tiempo, se crea un campo de velocidades como $[\mathbf{u}_0]_i = \varepsilon_0(0.5x_i, 0.5y_i, -z_i)$ donde $\varepsilon_0 = 5.0$ 1/s, la velocidad característica del sistema se toma respecto a la componente z , $U = |[\mathbf{u}_0]_i| \cdot \hat{z}$. La elevación alcanza su punto máximo en $t = 0.08$ s, después por acción de la tensión superficial de las partículas cerca de la interface, cada partícula i regresa a su posición inicial pero la energía cinética hace que el movimiento siga hasta repetirse la deformación, esta vez en dirección de los polos, esto continua una y otra vez hasta que el sistema alcanza su estado mínimo de energía ó punto de equilibrio debido a la disipación viscosa y disipación por efecto Joule en el régimen amortiguado. En la figura 4.3 se muestra una reconstrucción de la superficie libre a través de la técnica *metaballs* basado en la superposición de funciones potenciales con centro en la posición de las partícula i en el programa Blender [48].

En la figura 4.4 y 4.5 se visualiza el campo vectorial de la densidad de corriente eléctrica inducida \mathbf{j}_i redimensionada para la gota de fluido viscoso y conductor eléctrico en el caso **e-II** de la figura 4.1. Este campo vectorial es el resultado numérico del código SPMHD a través de la ecuación (3.33), se puede visualizar que se cumple con la conducción de frontera $\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{n} = 0$. También se puede visualizar que la conservación de la carga eléctrica $\nabla \cdot \mathbf{j}_i = 0$ se cumple implícitamente sobre este campo vectorial. Al tiempo $t = 0.04$ s, la dirección de la densidad de corriente eléctrica se mueve en sentido horario (visto desde el polo norte) figura 4.5, después invierte su dirección al tiempo $t = 0.16$ s, esto se debe a la ley de Ohm (2.15) donde la densidad de corriente eléctrica es proporcional al campo de velocidad ya que el campo magnético externo es constante y uniforme, esto concuerda cualitativamente con la teoría analítica de la gota a través de la expresión (2.82). Sin embargo, se puede observar una ligera caída de la magnitud de la densidad de corriente cerca de la interface, esto es debido al error producido por el truncamiento de kernel del método SPH. Es posible observar que la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j}_i no cuenta con una componente en dirección z nuevamente debido a la ley de Ohm (2.15), la corriente de cargas eléctricas se desplazan en un plano perpendicular al campo magnético externo \mathbf{B}_0 tal y como predice la teoría electromagnética. Es fácil inferir que el campo magnético inducido \mathbf{b}_i está dirigido a lo largo del eje z y su sentido depende del signo de $(\nabla \times \mathbf{j}_i) \cdot \hat{z}$.

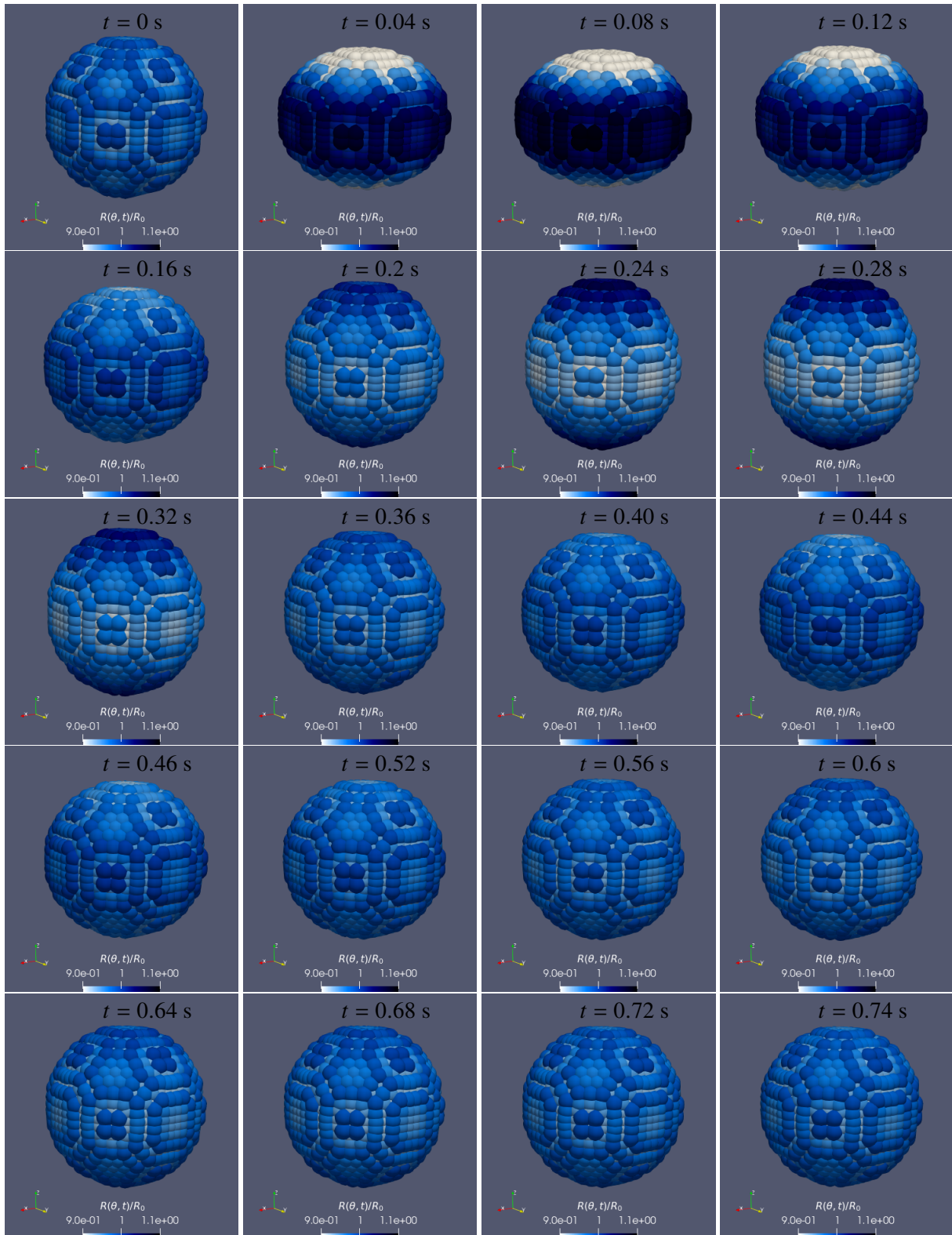


Fig. 4.2 Secuencia de imágenes de la evolución de las partículas SPH resultado del programa SPMHD para el caso de la figura 4.1-e)-II, el campo magnético externo se estableció como $\mathbf{B}_0 = 10\hat{z}$ T. $Re = 10.0$, $Ha = 4.47$ y $Oh = 0.079$.

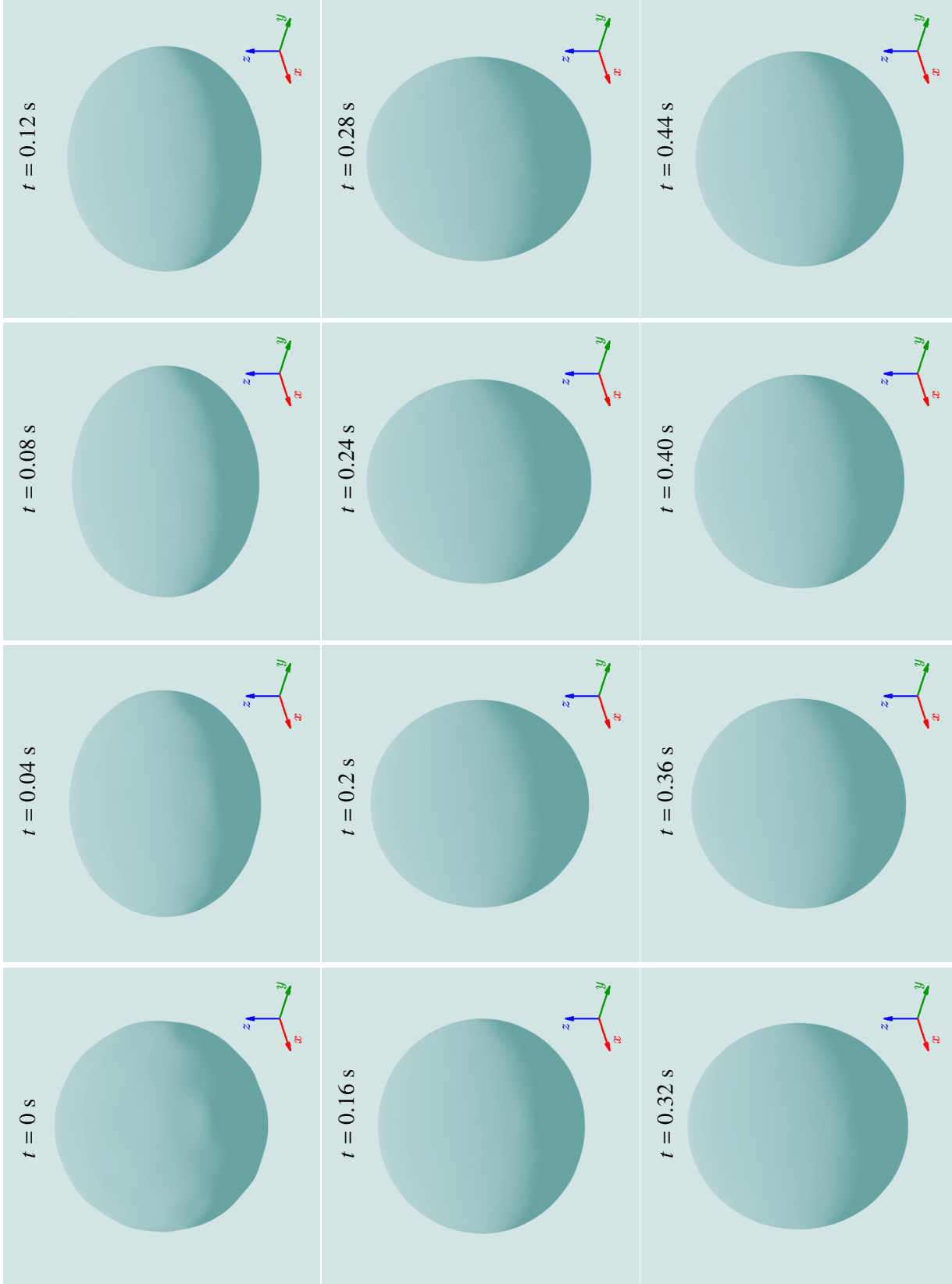


Fig. 4.3 Secuencia de imágenes de la deformación de la interface de la esfera viscosa y eléctricamente conductora resultado del programa SPMHD para el caso de la figura 4.1-e)-II. La superficie libre fue reconstruida con *metaballs* en Blender. $Re = 10.0$, $Ha = 4.47$ y $Oh = 0.079$.

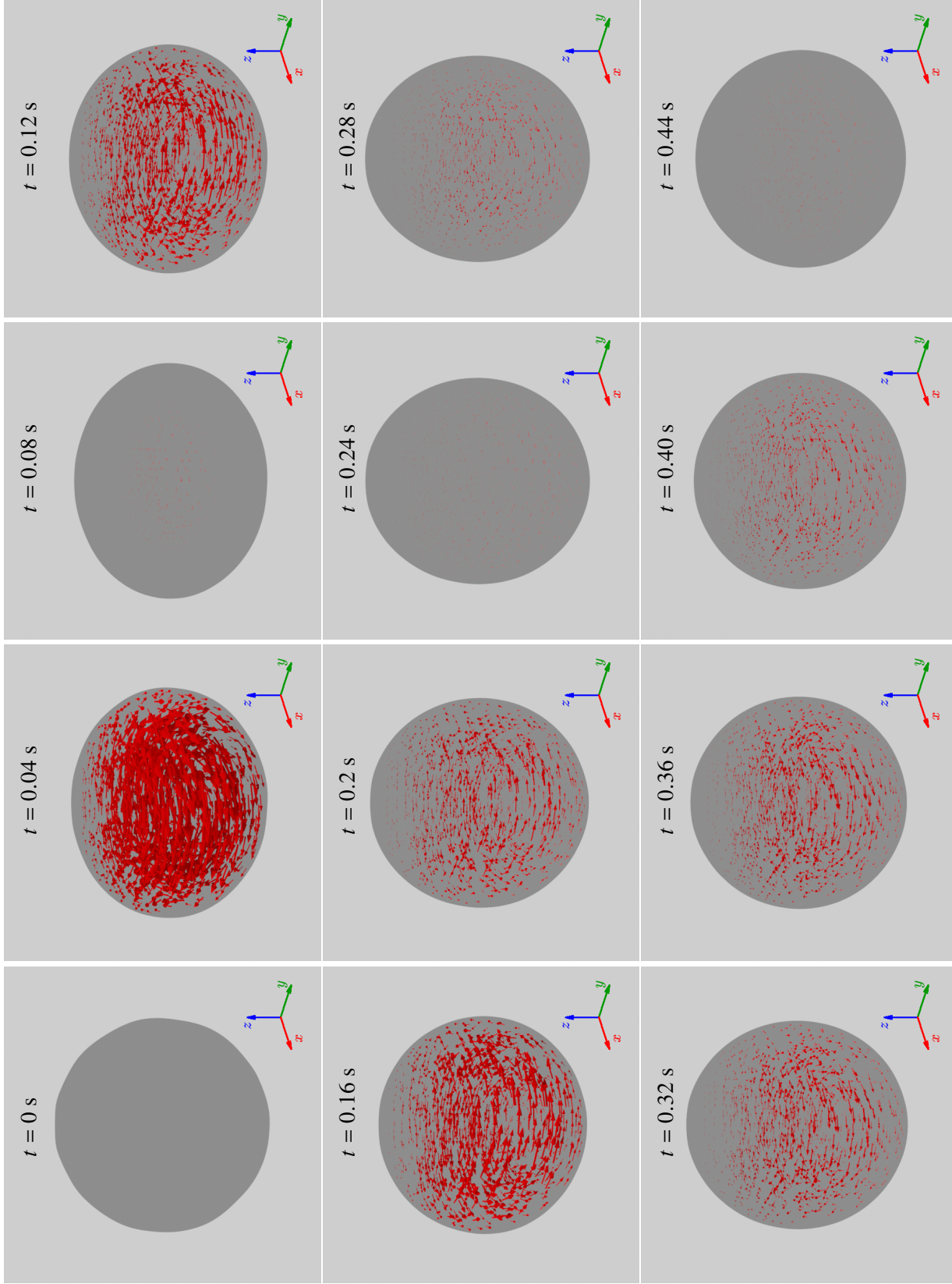


Fig. 4.4 Secuencia de imágenes de la deformación de la interfase de la esfera viscosa y eléctricamente conductora resultado del programa SPMHD para el caso de la figura 4.1-e)-II. Los vectores rojos representan la densidad de corriente eléctrica inducida \mathbf{j}_i en la gota por la presencia del campo magnético $\mathbf{B}_0 = 10\hat{z}$ T para cada partícula i . $Re = 10.0$, $Ha = 4.47$ y $Oh = 0.079$.

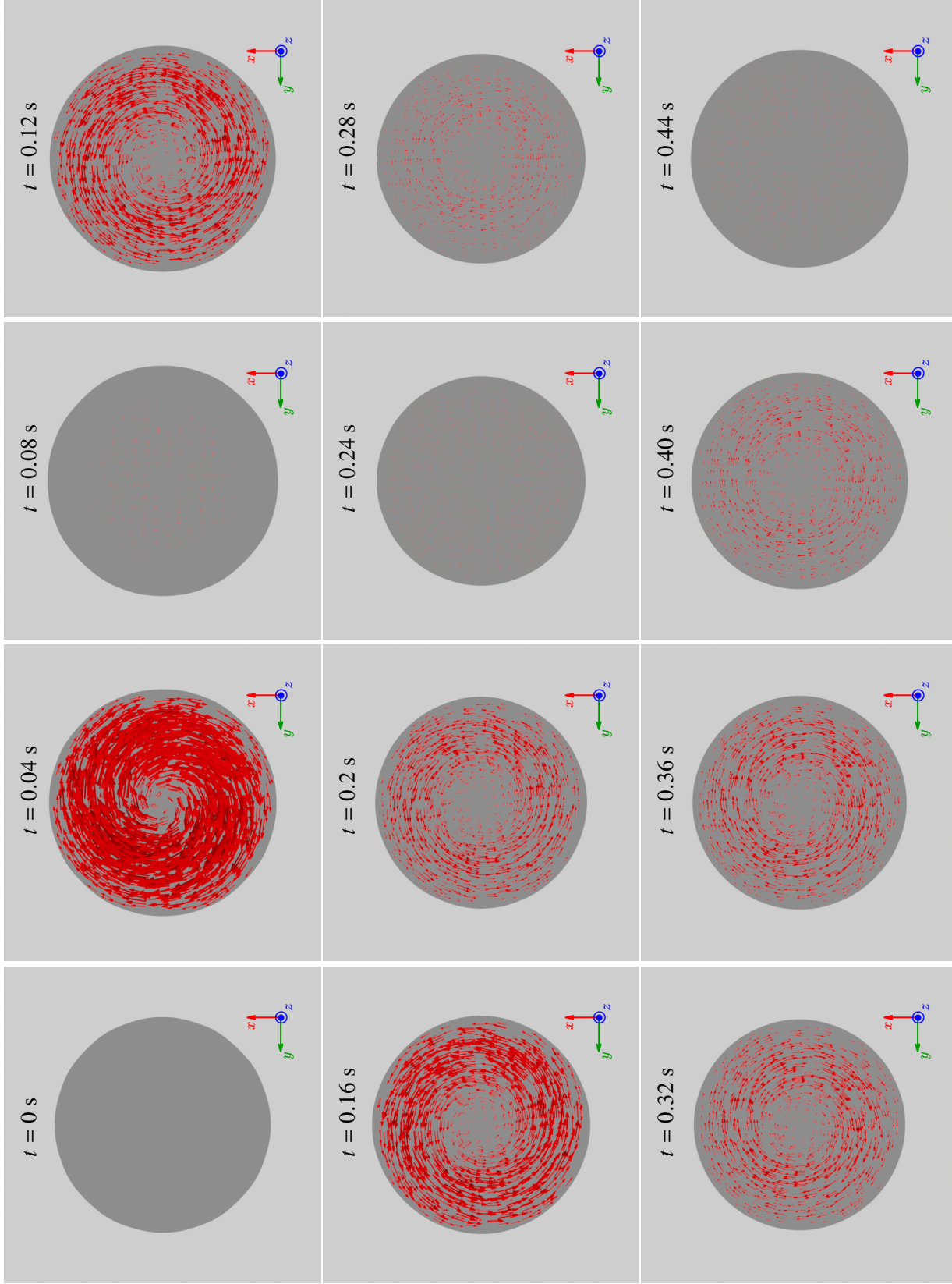


Fig. 4.5 Secuencia de imágenes, vista desde el polo norte, de la deformación de la interfase de la esfera viscosa y eléctricamente conductora resultado del programa SPMHD para el caso de la figura 4.1-e)-II. Los vectores rojos representan la densidad de corriente eléctrica inducida \mathbf{j}_i en la gota por la presencia del campo magnético $\mathbf{B}_0 = 10\hat{z}$ T para cada partícula i . $Re = 10.0$, $Ha = 4.47$ y $Oh = 0.079$.

En este apartado se presentan resultados en el régimen no lineal. Una gota de Galinstan de radio $R_0 = 2$ mm fue simulado bajo las mismas condiciones iniciales del régimen no lineal, es decir la gota parte del reposo y se deforma debido a un campo de velocidad inicial irrotacional en una elipsoide. Las características físicas del Galinstan son densidad $\rho = 6360$ Kg/m³, viscosidad cinemática $\nu = 0.3 \times 10^{-6}$ m²/s, coeficiente de tensión superficial $\sigma_s = 0.55$ N/m y conductividad eléctrica $\sigma_m = 3.0 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, estas constantes físicas fueron introducidos en el código SPMHD. El campo magnético externo se estableció nuevamente como $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ donde se tomaron diferentes magnitudes para el campo magnético como $B_0 = 0.5, 0.8, 1.0$ T. En éste regimen el número de Reynolds es $Re = 333$, en consecuencia las fuerzas inerciales son superiores a las fuerzas viscosas. El número de Reynolds magnético es $R_m = 0.009$, aquí la difusión de campo magnético nuevamente es más grande que la convección de campo magnético. En la figura 4.6 se presentan los resultados del código SPMHD sobre la evolución de la superficie libre en el punto $\theta = \frac{\pi}{2}$ de la esfera de Galistan para diferentes números de Hartmann.

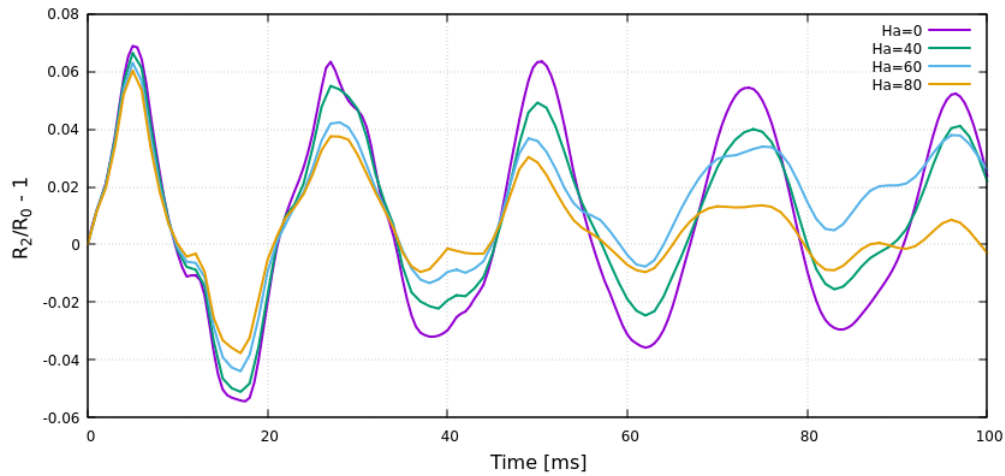


Fig. 4.6 Evolución numérica de la superficie libre de la gota de Galistan en el punto $\theta = \frac{\pi}{2}$. La intensidad de campo magnético se varió de $B_0 = 0.5 - 1.0$ T. El número de Reynolds en el sistema es $Re = 333$ y el número de Reynolds magnético en $R_m = 0.009$.

Se puede observar que la dinámica pierde linealidad, el movimiento inercial de las partículas hace que las curvas en la gráfica no se vean “suaves”. Cuando el campo magnético es nulo ($Ha = 0$) la única disipación en la gota es aquella por viscosidad, sin embargo debido a la baja viscosidad cinemática del Galistan el movimiento de la interface casi no pierde amplitud. Por otra parte, cuando se impone un campo magnético ($Ha \neq 0$) la dinámica se ve amortiguada, la energía se

disipa una vez más por efecto Joule. Se simularon nuevamente 4,224 partículas Lagrangianas, la distancia inicial entre partículas fue de $dp=0.2$ mm, en la figura 4.7 se pueden observar las partículas Lagrangianas resultado del código SPMHD al igual que la elevación de la superficie libre respecto a su estado en reposo R_0 de colores. En la figura 4.8, se reconstruye la superficie libre con la técnica metaballs en el software Blender, además se realiza un renderizado para simular el material metálico. En la figura 4.9, se puede observar el campo vectorial de la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j}_i en la gota de Galinstan, nótese que debido a la no linealidad del sistema el campo vectorial parece tener una pequeña magnitud en dirección z , es decir que las cargas eléctricas ya no se mueven en el plano xy como en el caso lineal. En la figura 4.10 se puede observar ésta misma secuencia vista desde el polo norte, aquí se puede ver la dirección de la densidad de corriente eléctrica en la gota de Galinstan hasta 60 ms de simulación.



Fig. 4.7 Secuencia de imágenes de la evolución de las partículas SPH resultado del programa SPMHD para la gota de Galinstan. $Ha = 80$, $Re = 333$, $R_m = 0.009$.

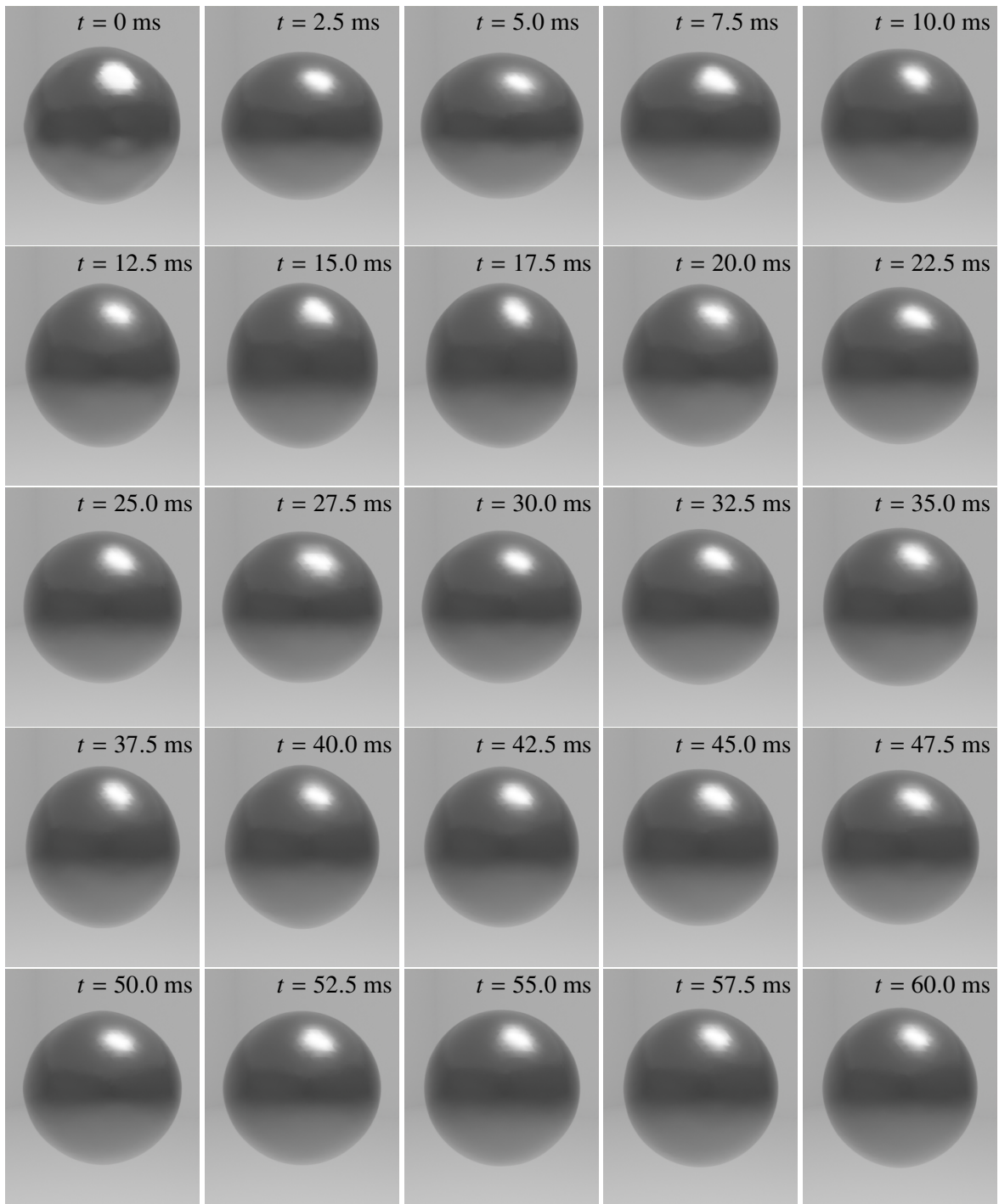


Fig. 4.8 Secuencia de imágenes de la reconstrucción de superficie libre de la gota de Galinstan con metaballs en Blender. $Ha = 80$, $Re = 333$, $R_m = 0.009$.

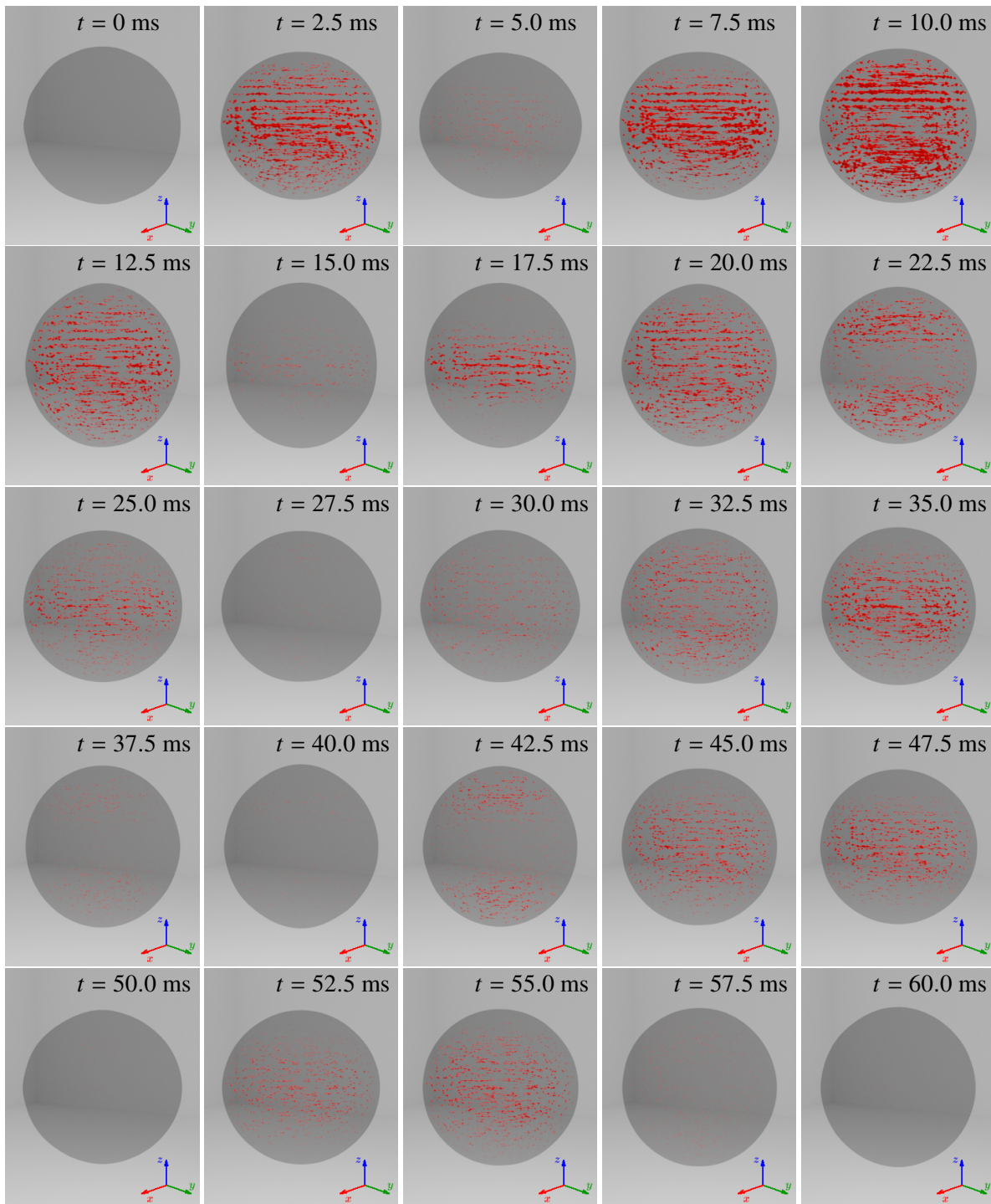


Fig. 4.9 Secuencia de imágenes de la densidad de corriente eléctrica en la gota de Galinstan. $Ha = 80$, $Re = 333$, $R_m = 0.009$.

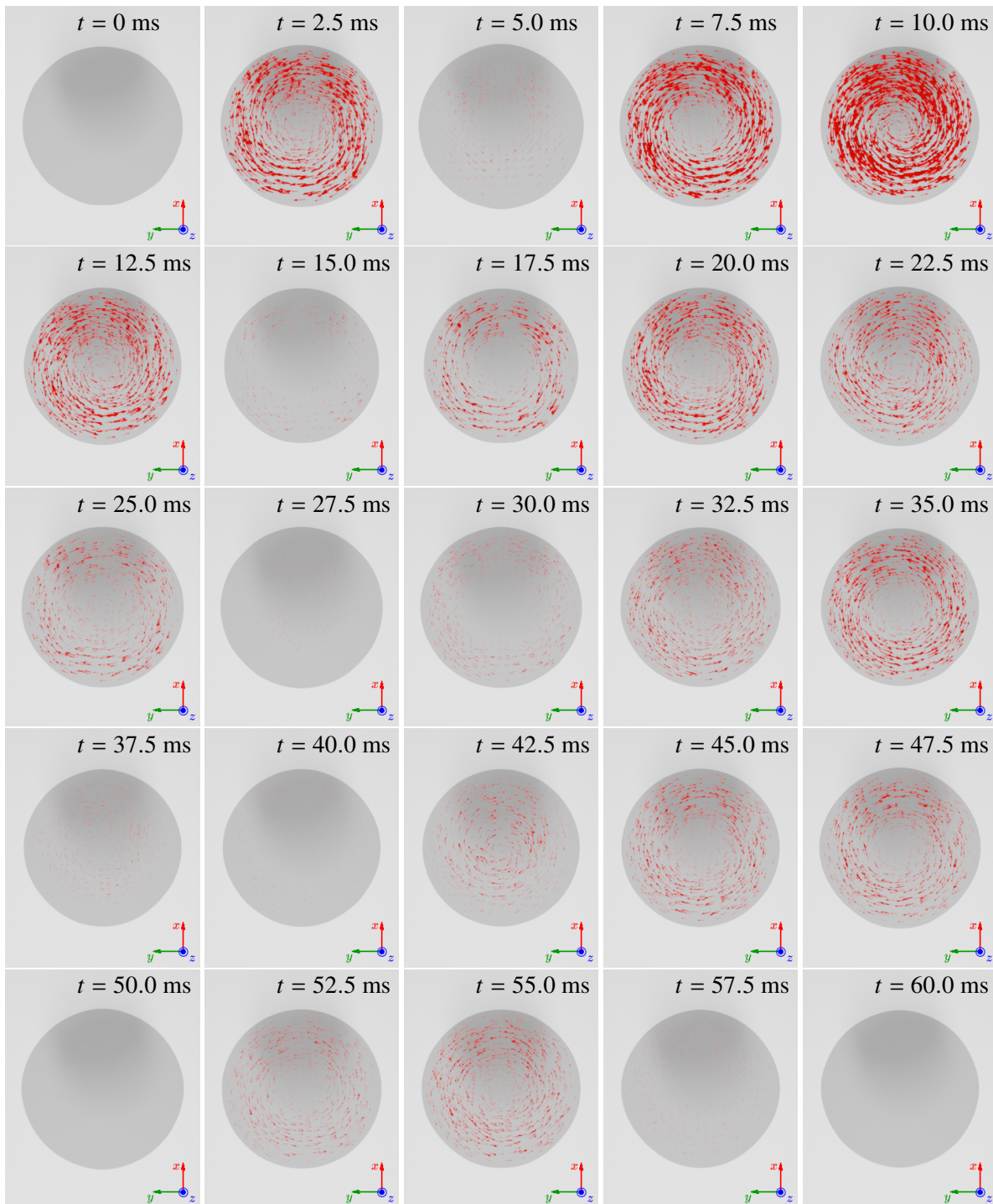


Fig. 4.10 Secuencia de imágenes de la densidad de corriente eléctrica en la gota de Galinstan visto desde el polo norte de la gota. $Ha = 80$, $Re = 333$, $R_m = 0.009$.

Capítulo 5

Conclusiones

Se presentó un estudio teórico sobre una esfera de fluido viscoso y eléctricamente conductor que se deforma en una elipsoide debido a un campo de velocidad irrotacional inicial en un régimen lineal y en presencia de un campo magnético uniforme. Se elaboraron diversas simulaciones con el código numérico SPMHD para diferentes magnitudes de viscosidad cinemática, campo magnético y tensión superficial. Los resultados numéricos magnetohidrodinámicos concuerdan cuantitativamente con la solución analítica obtenida a partir de las ecuaciones fundamentales de la magnetohidrodinámica. El análisis teórico de la esfera de fluido, muestra una tasa de amortiguamiento magnético a partir de la ecuación de balance de energía cuando se incorpora la fuerza de Lorentz, donde se disipa energía por efecto Joule sobre la dinámica de la superficie libre de la esfera. Esto se demostró numérica y analíticamente para los casos **a)**, **b)**, **c)**, **d)** y **e)** de la figura 4.1, donde el caso hidrodinámico corresponde a la variante **I**, mientras que el caso magnetohidrodinámico corresponde a las variantes **II** y **III**. En ellos se puede observar que las oscilaciones de la interface disminuyen su amplitud conforme aumenta la intensidad de campo magnético el cual está cuantificado en el número de Hartmann. Nótese que la evolución de la interface en los casos **d)-I** y **e)-II** de la figura 4.1 son muy similares, sin embargo la tasa de amortiguamiento viscoso λ_2 es muy diferente, exactamente 50% de diferencia. Añadir un campo magnético uniforme y cuya dirección coincide con el eje de simetría de la esfera, proporciona al sistema un amortiguamiento adicional al amortiguamiento por viscosidad. La fuerza de Lorentz es responsable de este comportamiento. Por lo tanto, la tasa de amortiguamiento magnético Λ_n es análoga a la tasa de amortiguamiento viscoso λ_n del caso puramente hidrodinámico. De esta forma, es posible aumentar o disminuir “la viscosidad” del fluido conductor variando la intensidad de campo magnético externo, algunos autores se refieren a este fenómeno como “viscosidad magnética” [9, 7].

Además, los resultados de la figura 4.4 y 4.5 muestran que el vector de densidad de corriente eléctrica \mathbf{j}_i apunta en dirección azimutal de la esfera de fluido, esto es que carece de una componente en dirección \hat{z} , por lo tanto las cargas eléctricas se desplazan en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético externo \mathbf{B}_0 y éstas no se acumulan en algún lugar de la esfera conductora. Por otra parte, el código numérico fue validado (una vez más) con los resultados de la figura 4.1. En esta ocasión se validaron los efectos MHD con tensión superficial en tres dimensiones sobre un fluido viscoso y eléctricamente conductor en el régimen lineal.

En el régimen no lineal, se simuló una gota de Galistan de radio $R_0 = 2$ mm en un régimen no lineal bajo las mismas condiciones iniciales de la esfera de fluido viscoso y eléctricamente conductor del régimen lineal, aquí el número de Reynolds es de $Re = 333$, en consecuencia las fuerzas inerciales son superiores a las fuerzas viscosas, esto se ve reflejado en las gráficas de la figura 4.6 donde en los perfiles de la evolución de la superficie libre para diferentes intensidades de campo magnético, se ven perturbadas por el movimiento inercial. Por otra parte, en la misma figura se observa que entre más grande sea la intensidad de campo magnético externo B_0 , más grande es el amortiguamiento en el sistema, este comportamiento es idéntico al del régimen lineal, en donde la energía se disipa por efecto Joule. Por lo tanto, también existe la disipación por efecto Joule en el régimen no lineal. Las fuerzas inerciales también perturban al campo de densidad de corriente eléctrica, en el régimen no lineal las cargas eléctricas ya no se desplazan en el plano xy como sucede en el régimen lineal, sino que hay una pequeña contribución en dirección z y se mantiene la conservación de la carga eléctrica.

Apéndice A

Caso 1: Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille es un flujo bien estudiado y utilizado como primera prueba para validar todo método numérico de resolución para las ecuaciones gobernantes de los fluidos; sistema compuesto por (2.4) y (2.7). El problema consiste en un flujo de fluido viscoso entre un par de placas planas paralelas, ver figura A.1, este flujo se mueve debido a una aceleración longitudinal $\mathbf{G} = G\hat{x}$. Suponiendo que el flujo es completamente desarrollado, $\mathbf{u} = u(t, y)\hat{x}$ y se quiere analizar la etapa transitoria al estado estacionario, la ecuación (2.7) queda como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G, \quad (\text{A.1})$$

donde $\text{Re} = \frac{uL}{\nu}$ es el número adimensional de Reynolds que físicamente se refiere a la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas del sistema, entre más pequeño el número de Reynolds, más grande las fuerzas viscosas y por lo tanto, el problema se mantiene en el régimen lineal. Las condiciones de frontera de no deslizamiento dejan a $u(t, 0) = u(t, h) = 0$ donde h es el ancho del canal, la condición inicial establece que $u(0, y) = 0$. Bajo estas condiciones, la solución analítica de la ecuación (A.1) es

$$u(t, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\text{Re}Gh^2}{(2n+1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{h}y\right) e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\text{Re}h^2}t} + \frac{1}{2}\text{Re}Gy(h-y). \quad (\text{A.2})$$

En la figura A.1 se observa la solución analítica (A.2) con $h = 1.0$ m y $G = 1.0$ m/s² esto deja al número de Reynolds como $\text{Re}=1$. La solución numérica fue elaborada con el método *smoothed particle hydrodynamics (SPH)*, se usó el algoritmo 1 con campo magnético externo nulo $\mathbf{B}_0 = 0$ (esto evita la contribución MHD), de esta forma se resuelve un escenario puramente hidrodinámico. Las constantes y parámetros usados en la simulación se enuncian en la figura A.2.

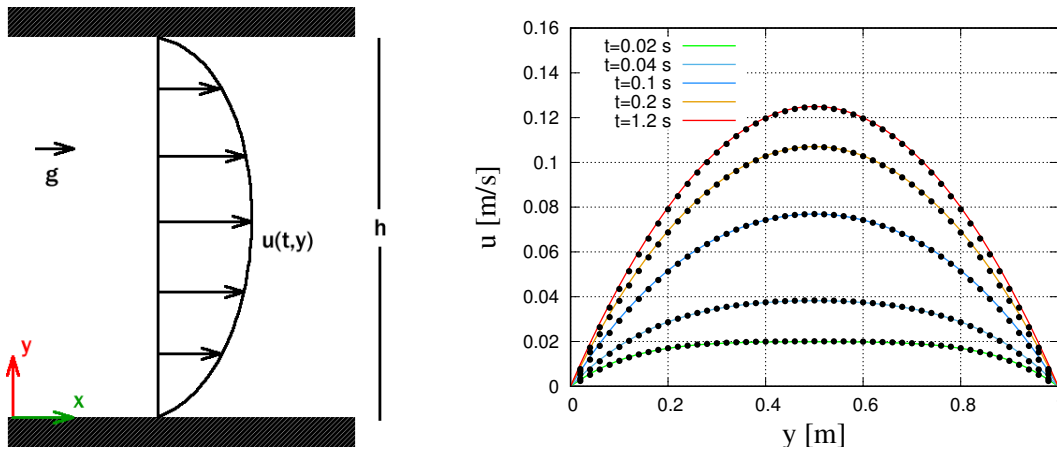


Fig. A.1 Izq) Esquema del flujo de Poiseuille, un flujo fluye longitudinalmente en un canal debido a una aceleración $\mathbf{g} = G\hat{x}$. Debido a la condición de frontera de no deslizamiento, se desarrolla un perfil de velocidad del tipo parabólico $\mathbf{u} = u(t, y)\hat{x}$. Der) Solución analítica del perfil de velocidad $u(t, y)$ para diferentes tiempos, en línea se observa la función A.2 y en puntos la solución numérica usando el método SPH.

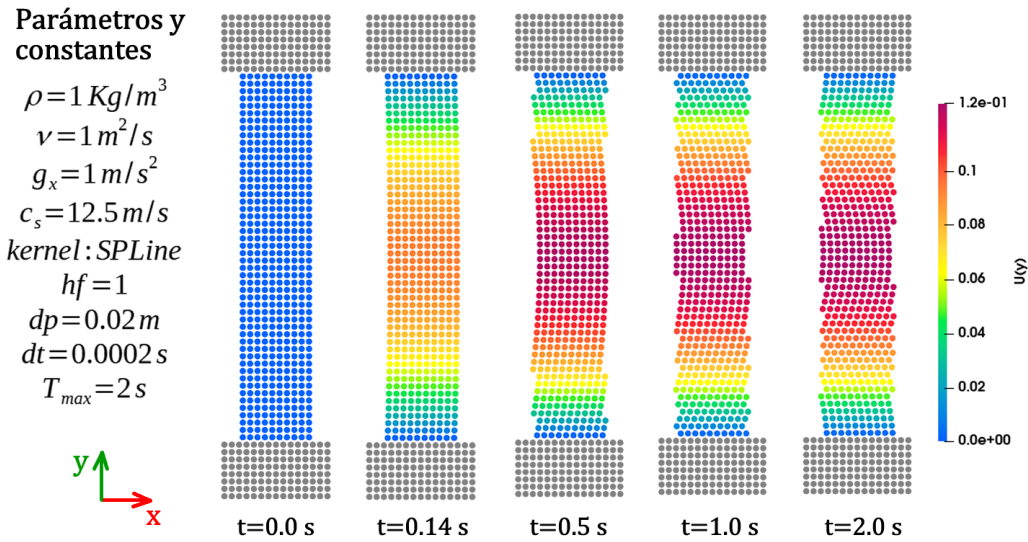


Fig. A.2 Solución numérica del flujo de Poiseuille con el método lagrangiano de partículas, Smoothed Particle Hydrodynamics. Al tiempo $t = 0$ se observa la configuración inicial de las partículas, un tiempo después $t = 0.14 \text{ s}$, se observa un ligero desplazamiento de las partículas en dirección x . Para $t = 2 \text{ s}$, este desplazamiento ha deformado la configuración inicial de las partículas.

En la figura A.2 se muestra una secuencia de imágenes del desarrollo del flujo de Poiseuille de forma numérica con el método lagrangiano SPH descrito en el capítulo anterior. Una pequeña sección del flujo de Poiseuille fue simulada con un ancho de 0.2 m y un alto de 1.32 m (1 m + 0.32 m de las partículas frontera). Se usó la condición de frontera periódica para ambos lados transversales; cuando la partícula sale del dominio de simulación del lado derecho es reecolocada inmediatamente del lado izquierdo, se usaron partículas fantasma que no se muestran en la figura A.2 para evitar el truncamiento del kernel de interpolación en ambos lados de la frontera periódica. Las partículas frontera se pueden identificar de color gris, para éstas se usó las condiciones de frontera de no deslizamiento con el uso de partículas fantasma y nodos de interpolación que no se muestran la figura A.2. En la figura A.2 se observan las partículas lagrangianas en su configuración inicial, $t = 0s$. Se impone una aceleración constante en dirección de x , $\mathbf{g} = g\hat{x}$ para mover a las partículas, el flujo resultante tiene una velocidad $\mathbf{u} = u(t, y)\hat{x}$. En la siguiente imagen $t = 0.14s$, rápidamente se observa que las partículas se mueven con mayor velocidad en el centro del dominio comparadas con aquellas cercanas a la frontera, esto es debido a la fricción por viscosidad modelada en la ecuación (3.31). Para tiempos mayores, $t > 2s$, no se obtuvo mayor cambio en la velocidad $u(t, y)$, en este punto se ha llegado a un estado estacionario. El error relativo porcentual fue de 0.16% en el núcleo ($y=0.66$) del flujo de Poiseuille en la simulación comparado con la solución analítica.

Apéndice B

Caso 2: Flujo de Hartmann

El flujo de Hartmann es un flujo parecido al flujo de Poiseuille donde el campo magnético externo es nulo. Un metal líquido con conductividad eléctrica $\sigma_0 > 0$, fluye en un ducto con paredes eléctricamente aislantes, $\sigma_{wall} = 0$. Si se supone que las paredes laterales están muy alejadas y que su contribución es nula, el modelo se reduce a un flujo entre un par de placas planas paralelas, véase figura A.1. Al tiempo $t = 0$, una aceleración $\mathbf{g} = g\hat{x}$ es impuesta para mover al fluido y un campo magnético externo uniforme es impuesto, $\mathbf{B} = B_0\hat{y}$ en dirección transversal al flujo. Si se supone un flujo completamente desarrollado y en estado estacionario, el campo vectorial de la velocidad es $\mathbf{u} = u(y)\hat{x}$. Debido a la ley de Ohm (2.15), una corriente inducida aparece en el sistema con dirección perpendicular al campo de velocidad y campo magnético externo, *i. e.* $\mathbf{j} = j_z\hat{z}$ en ausencia de un campo eléctrico, y debido a la ley de Ampere (2.11), se induce un campo magnético cuya dirección es la misma que la dirección del flujo, por lo tanto $\mathbf{b} = b(y)\hat{x}$. El perfil de velocidad y campo magnético inducido está dominado por la ecuación de balance de momento (2.7) con fuerza externa de Lorentz (2.20) y por la ecuación de inducción magnética (2.21) respectivamente, el sistema es finalmente acoplado a través de la ley de Ampere (2.11). El modelo teórico se reduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial b_x}{\partial y} + g_x = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$B_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 b_x}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{B.2})$$

las condiciones a la frontera para el sistema anterior deben de satisfacer la condición de no deslizamiento para la velocidad y campo magnético nulo al tratarse de una pared eléctricamente aislante, $u(0) = 0, u(h) = 0$ y $b(0) = 0, b(h) = 0$ respectivamente. La solución a este sistema de ecuaciones está dada por [49], $h=1.0$ m,

$$u^*(y) = \frac{\text{Ha}^{-1}}{2} \left[\frac{e^{\text{Ha}y} - 1}{1 - e^{\text{Ha}}} + \frac{1 - e^{-\text{Ha}y}}{1 - e^{-\text{Ha}}} \right], \quad (\text{B.3})$$

$$b^*(y) = \frac{\text{Ha}^{-1}}{2} \left[\frac{1 - e^{\text{Ha}y}}{1 - e^{\text{Ha}}} + \frac{1 - e^{-\text{Ha}y}}{1 - e^{-\text{Ha}}} \right] - \frac{1}{\text{Ha}}y, \quad (\text{B.4})$$

donde $u^*(y) = u(y)/U$, $b^*(y) = \frac{\text{Ha}}{\text{R}_m}b(y)$ con $\text{Ha} = B_0h\sqrt{\frac{\sigma}{\nu\rho}}$ y $\text{R}_m = \mu_0\sigma hU$ que son los números adimensionales de Hartmann y Reynolds magnético respectivamente, U es una velocidad característica del sistema, se tomó como $U=1.0$ m/s. El número de Hartmann es una razón entre las fuerzas magnéticas y las fuerzas viscosas del sistema, el número de Reynolds magnético es una razón entre la convección y la difusión de campo magnético inducido. Para $\text{R}_m \ll 1$, el sistema es altamente difusivo en el campo magnético, en sistemas de escalas planetarias el sistema es altamente convectivo de campo magnético, es decir $\text{R}_m \gg 1$.

La solución analítica para $\text{Ha}=5, 10$ y 20 puede verse en la figura B.1 en líneas continuas. La solución numérica fue elaborado con el algoritmo 1, SPMHD para dos dimensiones en el plano X-Y, éstas soluciones pueden verse en puntos en la figura B.1 para el perfil de velocidad y campo magnético inducido. Complementariamente puede verse en la figura B.1 que para $\text{Ha}=0$, se recupera el perfil la velocidad $u(y)$ del flujo de Poiseuille; un caso puramente hidrodinámico sin efectos de inducción magnética.

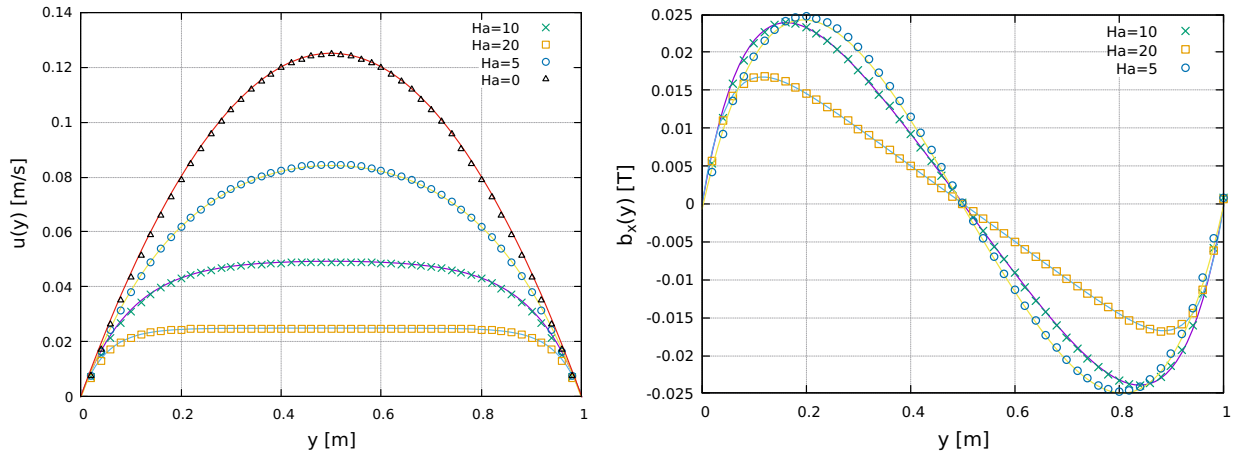


Fig. B.1 En línea continua, soluciones analíticas para izq) el perfil de velocidad $u(y)$ y para der) el perfil del campo magnético inducido $b_x(y)$ para diferentes números de Hartmann y mismo número de Reynolds magnético, $\text{R}_m=1$. En puntos se muestra las soluciones numéricas obtenidas con el método SPH.

Parámetros y constantes

$\rho = 1 \text{ Kg/m}^3$
 $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$
 $g_x = 1 \text{ m/s}^2$
 $c_s = 15 \text{ m/s}$
 $B_y = 0.0 - 20.0 \text{ T}$
 $\sigma = 1 \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$
 $\mu_0 = 1 \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
kernel: SPLine
 $hf = 1$
 $dp = 0.02 \text{ m}$
 $dt = 0.0001 \text{ s}$
 $T_{max} = 2 \text{ s}$

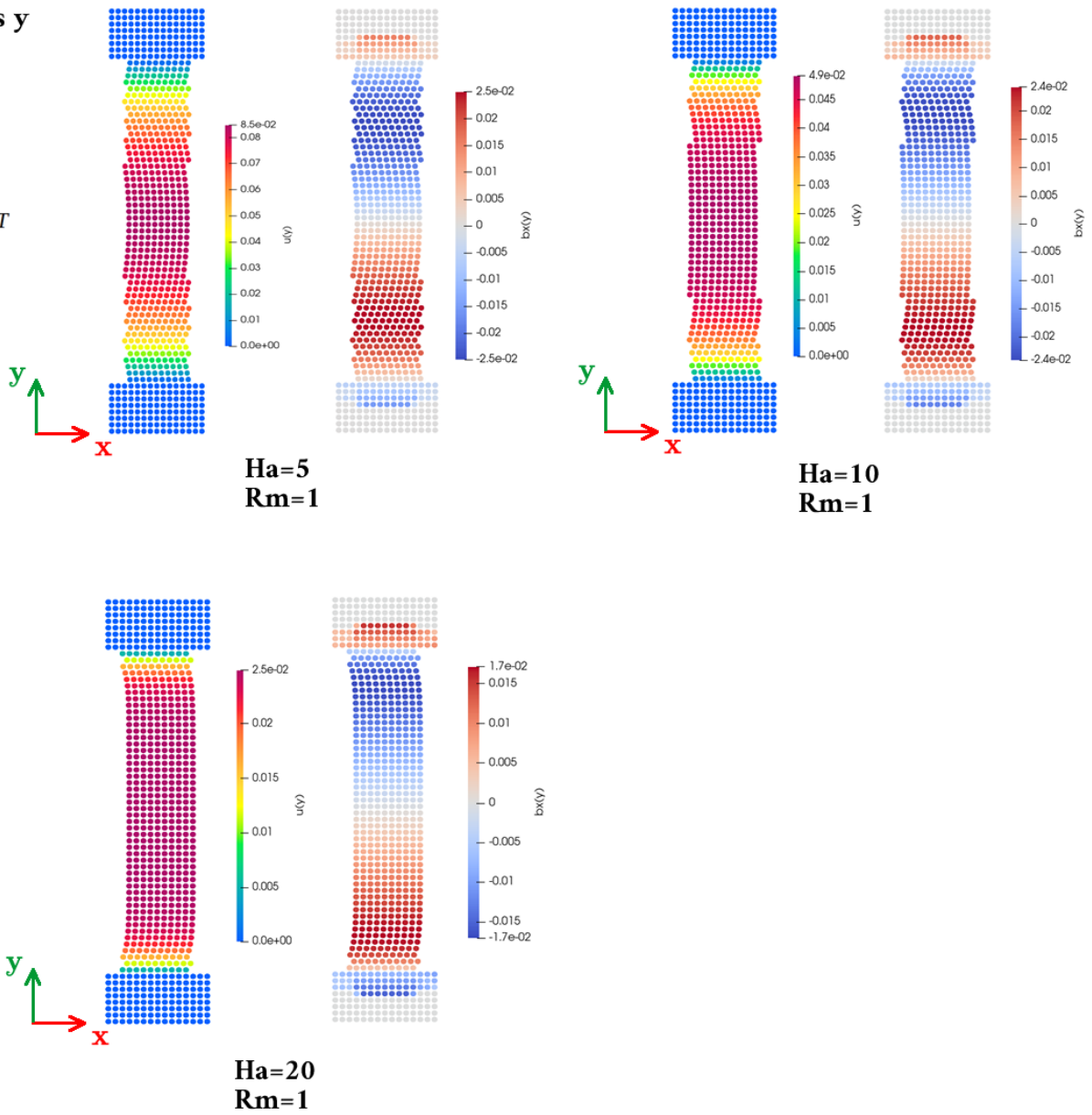


Fig. B.2 Perfil de velocidad del flujo de Hartmann y perfil de campo magético en el estado estacionario obtenidos de la simulación SPMHD, algoritmo 1, $t = 2.0 \text{ s}$.

El flujo de Hartmann en un canal aislantemente eléctrico es uno de los flujos más estudiados por la comunidad científica debido a su sencillez para estudiar los efectos de la inducción electromagnéticos sobre el flujo de un conductor eléctrico, generalmente metal líquido. En la figura B.1, el perfil de velocidades se ve “achatado” en comparación con el caso puramente hidrodinámico para números de Hartmann mayores a cero, este fenómeno se conoce como

frenado magnético debido a que la fuerza de Lorentz actúa en dirección contraria al movimiento del flujo de fluido, anteriormente a este fenómeno se le conocía como “viscosidad magnética”. Debido a la formulación b , es posible conocer el campo magnético inducido sobre el flujo de Hartmann, en la figura B.1, se puede observar el comportamiento de la componente b_x del campo magnético inducido. Para este problema, la frontera es considerada como un aislante eléctrico, es decir, no hay una densidad de corriente eléctrica que penetre la frontera, *i. e.* $\mathbf{j} \cdot \hat{n}$ donde \hat{n} es el vector normal de la frontera, debido a la ley de Ampere (2.11), el campo magnético inducido fuera del dominio del flujo debe ser cero. En la figura B.2, se puede observar erróneamente que el campo magnético b_x es distinto de cero fuera del dominio del flujo para todos los casos, esto es debido a que se está utilizando la condición de frontera de partículas reflectivas, de esta forma cuando se evalúa el campo magnético con el método SPH en la interface muro-fluido éste se vuelve cero.

Apéndice C

Caso 3: DamBreaking

Hasta este punto, se han simulado escenarios donde no existe una superficie libre, el problema más común estudiado por el método SPH es el llamado *DamBreaking problem* sin efectos MHD y donde los efectos de tensión superficial son ignorados, donde una columna de fluido en presencia de la gravedad se deja evaluar en el tiempo, véase Figura C.1, se analiza la evolución del frente de ola y la presión originada por el impacto en el lado contrario de un recipiente de $1.61 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$.

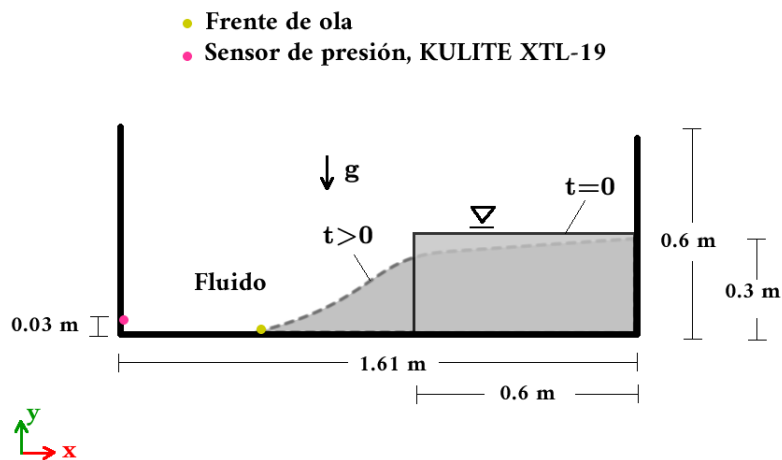


Fig. C.1 Esquema del problema DamBreaking, las partículas de fluido al tiempo $t = 0 \text{ s}$ son colocadas en una caja de $0.6 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}$. La superficie libre se deforma debido a la gravedad y la distribución de la presión interna al tiempo $t > 0 \text{ s}$.

Al tiempo $t = 0 \text{ s}$, las partículas de fluido cuya densidad y viscosidad cinemática son, $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ respectivamente, se colocan uniformemente distribuidos en reposo

en una caja de $0.6 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}$, la gravedad actúa en dirección y , $\mathbf{g} = -g\hat{y}$ donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, esto hace que las partículas se muevan en dirección y (-). La presión y las velocidades en las partículas frontera se evalúa de acuerdo al método de la frontera reflectiva; para la presión una condición tipo Neumann se impone en las partículas frontera y para la velocidad una condición de no deslizamiento, una vez evaluada la presión para las partículas frontera, su densidad se calcula al despejar ρ_{bound} de la ecuación de estado (3.34).

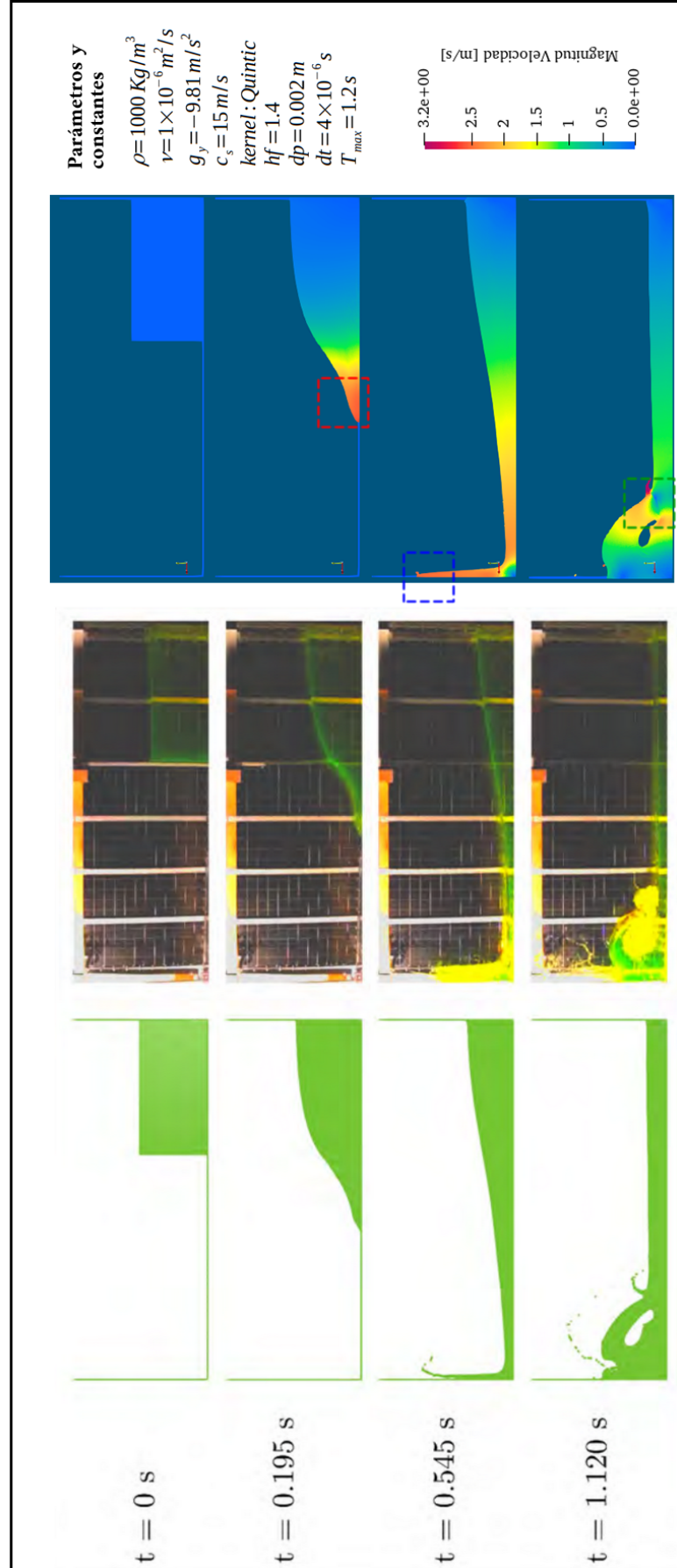
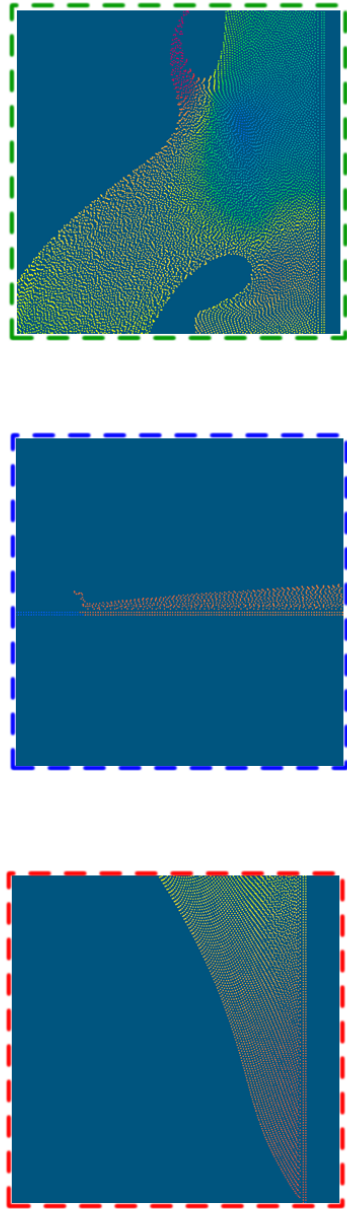


Fig. C.2 Resultados del problema DamBreaking a distintos tiempos, izq: simulación SPH por Salami et al. [41], medio: experimentación por Lobovský et al. [50], der: resultados con el algoritmo 1 SPMHD sin efectos MHD, distintos acercamientos se realizaron en las imágenes.

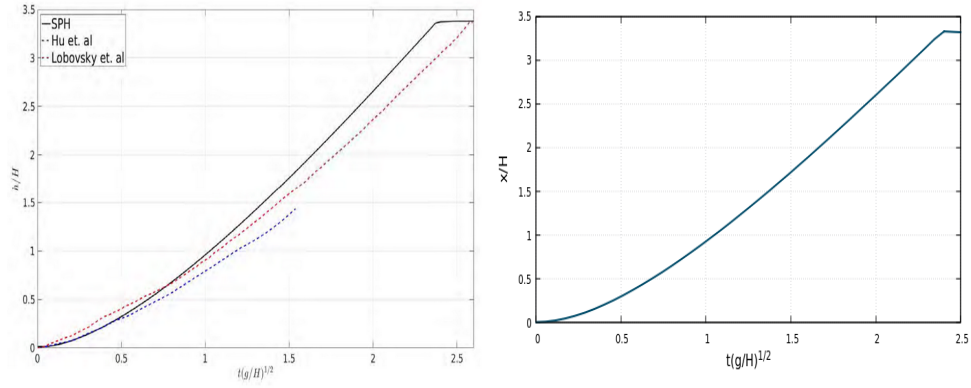


Fig. C.3 Evolución del frente de ola para el problema DamBreaking, izq: experimentación y simulación por [41] [50], der: frente de ola obtenida con el algoritmo 1 sin efectos MHD.

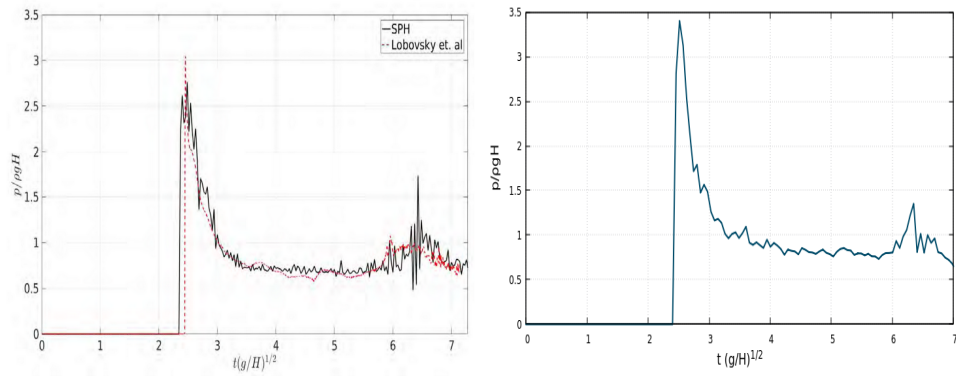


Fig. C.4 Resultados de la presión para el problema DamBreaking, izq: experimentación y simulación por [41] [50], der: presión obtenida con el algoritmo 1 SPMHD sin efectos MHD en $\mathbf{r}_p = (1.61, 0.03)$, $H=0.3$ m.

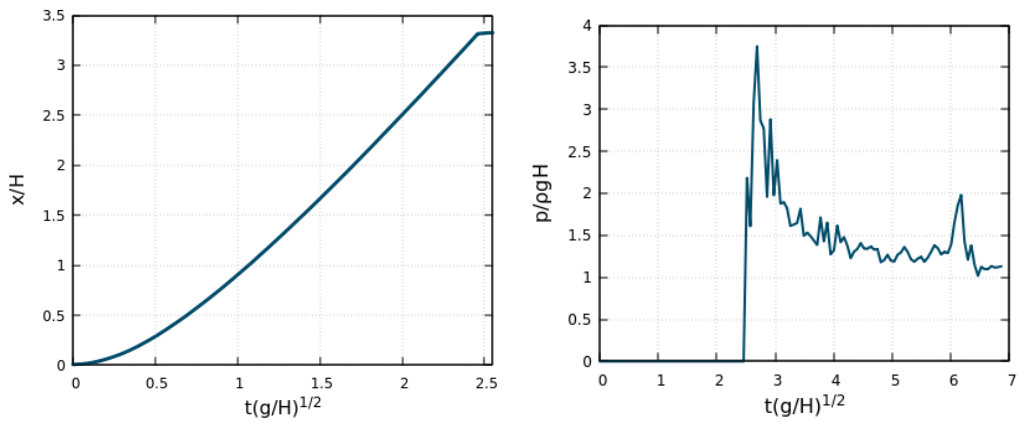


Fig. C.5 Resultados del problema DamBreaking para tres dimensiones, izq: Evolución del frente de ola, der: promedio de la presión evaluada alrededor del punto $\mathbf{r}_p = (1.61, 0.075, 0.03)$, $H=0.3$ m sin efectos MHD.

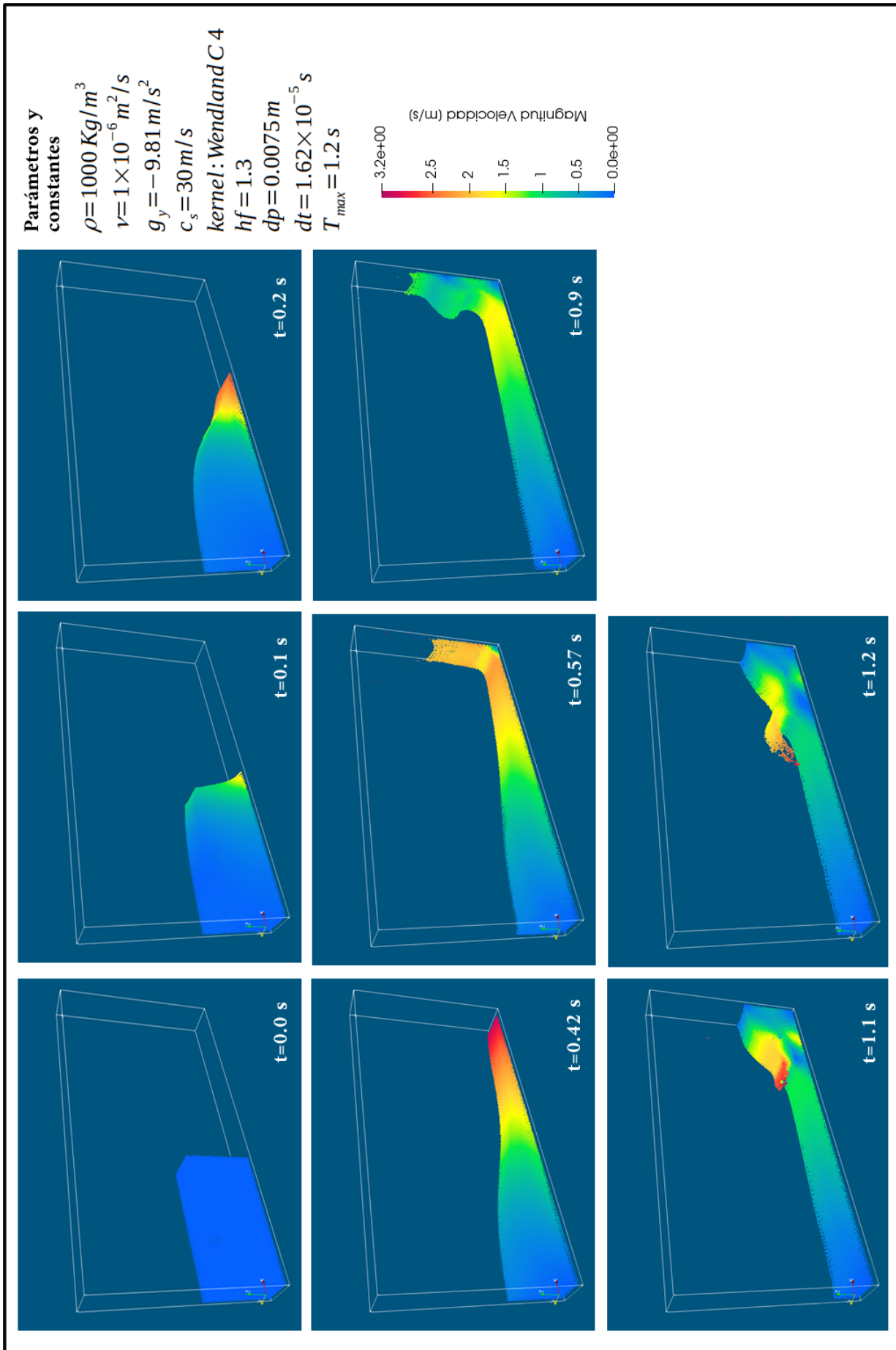


Fig. C.6 Secuencia de cuadros resultado de la simulación del problema DamBreaking en tres dimensiones sin efectos MHD.

La distribución de la presión al fondo de la columna de fluido genera un gradiente de presión negativo en dirección x (+) debido a la presencia del muro (partículas reflectivas), entonces la superficie libre se mueve en dirección x (+) generando un frente de ola. En la figura C.2, se observa la evolución del frente de ola de 45,000 partículas simuladas con el algoritmo 1, la distancia entre partículas se colocó como $dp=2$ mm, además puede verse los parámetros y las constantes utilizadas para resolver las ecuaciones gobernantes. La posición en x del frente de ola puede verse en la figura C.3. Al tiempo $t = 0.42$ s, el frente de ola choca con el muro contrario, nuevamente la distribución de la presión en el muro contrario y por conservación de masa, hace que el fluido sea expulsado rápidamente en dirección y (+), sin embargo la gravedad frena el movimiento de esta expulsión, haciendola caer nuevamente. El perfil de la presión sobre el detector está graficado en la figura C.4, al igual que el resultado del algoritmo 1 en el punto $\mathbf{r}_p = (1.61, 0.03)$.

En 2014, Lobovský et al. [50] realizaron un experimento del problema DamBreaking con agua, se construyó dentro de un recipiente de tamaño $1.61 \text{ m} \times 0.8 \text{ m} \times 0.15 \text{ m}$, una compuerta que se desliza verticalmente debido a un sistema de poleas, la cual libera la columna de agua de tamaño $0.6 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} \times 0.15 \text{ m}$. Un sensor de presión piezo-resistivo, KULITE XTL-19, se colocó a 0.03 m del fondo del recipiente como se muestra en la figura C.1, la señal obtenida fue amplificada. La figura C.4, muestra la presión después del impacto de la ola sobre el muro contrario. En 2019, Salami et al. [41] simuló con el método SPH la superficie libre del problema de DamBreaking con los mismos parámetros que Lobovský, obteniendo resultados muy similares en la presión de impacto y el frente de ola.

De la misma forma, se simuló el problema DamBreaking en tres dimensiones con el algoritmo 1 donde el dominio del fluido tiene un tamaño inicial de $1.61 \text{ m} \times 0.15 \text{ m} \times 0.8 \text{ m}$ al igual que el experimento de Lobovský. En la figura C.6, se muestra una secuencia a distintos tiempos del resultado del algoritmo 1 usando los parámetros propios del agua, se usaron 67,200 partículas de fluido. Estos resultados muestran que la dinámica se mantiene muy parecida al caso de dos dimensiones. No obstante, un ligero incremento en la presión se presentó en los resultados de tres dimensiones, esto puede verse en la figura C.5; la presión fue evaluada en el mismo punto que en dos dimensiones, no así la forma de la curva es parecida a los resultados presentados por Lobovský, Salami y este trabajo en dos dimensiones. El frente de ola también fue analizado en

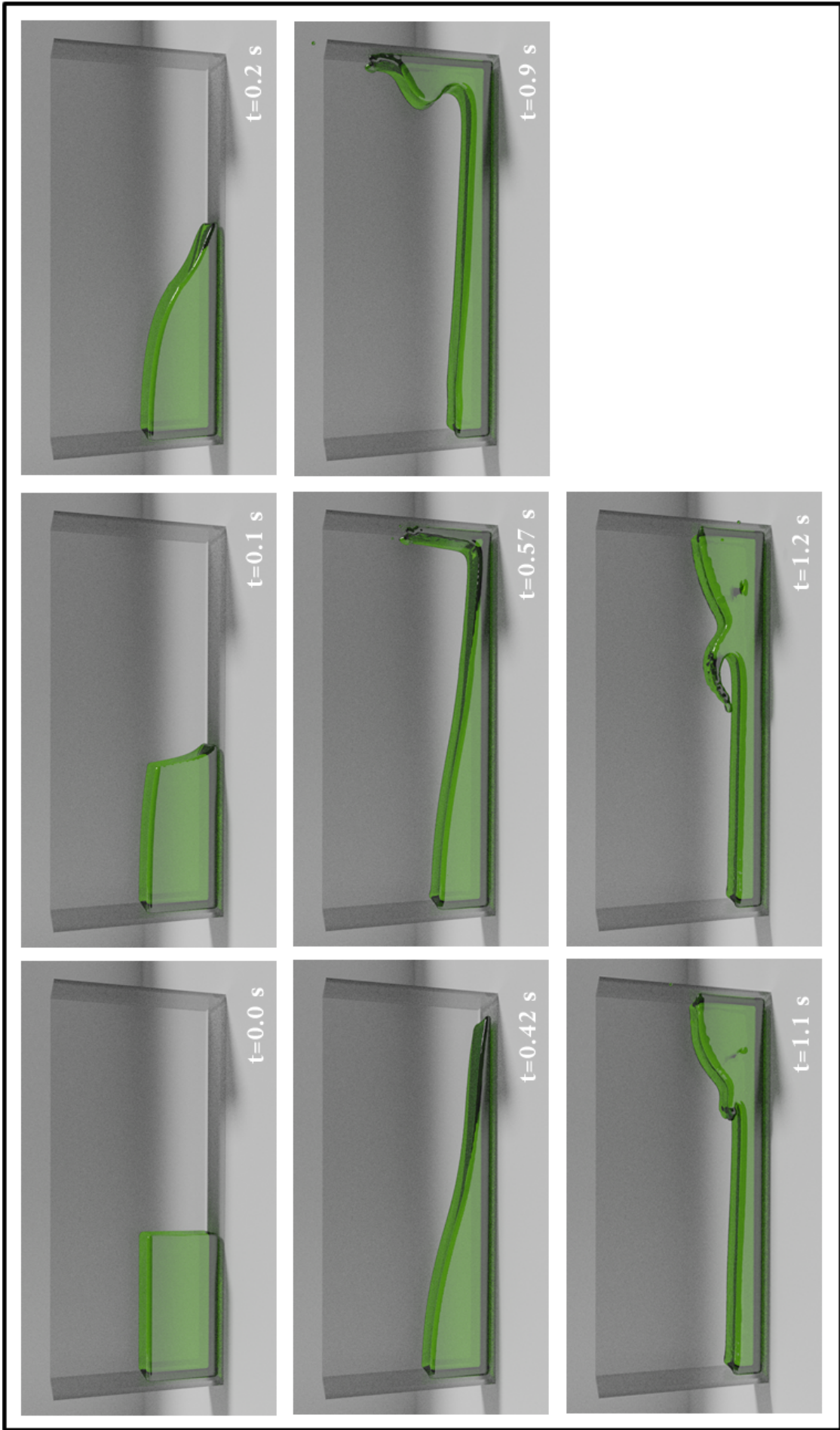


Fig. C.7 Post-procesado del problema DamBreaking en tres dimensiones, renderizado elaborado con Blender v2.8.

tres dimensiones usando el promedio en la posición x de las partículas, figura C.5, se presenta una gráfica muy parecida al escenario en dos dimensiones.

Finalmente, se elaboró un secuencia de imagenes de la reconstrucción de la isosuperficie de los resultados del algoritmo 1 SPMHD sin efectos MHD para el problema de DamBreaking 3D, se usó el software Blender v2.8 para reconstruir la isosuperficie usando *metaballs* y para realizar el renderizado del escenario, ver figura C.7.

Apéndice D

Caso 4: Square Shaped Droplet

En esta sección se estudia el efecto de la fuerza de tensión superficial sobre el dominio del fluido con el método SPH, a través del algoritmo 1 SPMHD sin efectos MHD. La gota inicialmente cuadrada (*Square Shaped Droplet*), es el escenario ideal para estudiar el efecto de la tensión superficial sobre la interface de un fluido, además de ser el problema base para validar modelos de tensión superficial. En este escenario, un fluido de dominio cuadrado de tamaño $l \times l$ es iniciado, no se crean partículas de frontera y no hay gravedad actuando como fuerza externa sobre las partículas. En el modelo de la curvatura explícita expuesto en la sección 3.1.3, la curvatura de la gota inicialmente cuadrada se calcula con el método SPH, ello presenta una alta curvatura en las esquinas, aquí la fuerza de tensión superficial es máxima, esta fuerza es una fuente de momento para la ecuación de balance de momento (2.7). Por lo tanto, el dominio de fluido es deformado al igual que su interface. Nótese que la fuerza de tensión actúa cerca de la interface minimizando el área de la interface hasta llegar a su estado mínimo de energía; una gota redonda. En la figura D.1, se muestra un esquema de la gota inicialmente cuadrada, se estudia la forma, el ancho en x y el alto en y en el transitorio, al igual que la curvatura y la presión en el estado final de la gota.

En este trabajo, se simula con el algoritmo 1 SPMHD sin efectos MHD una gota inicialmente cuadrada de tamaño $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$, con una densidad $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, viscosidad dinámica $\nu = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y un coeficiente de tensión superficial $\sigma_s = 72.0 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ para validar los efectos de la tensión superficial. Tomando la velocidad característica del sistema como $u_\infty = \nu/l$ el análisis adimensional se reduce a el número de Ohnesorge, $Oh = \frac{\rho \nu}{\sqrt{\rho l \sigma_s}}$, el cual se halla como $Oh = 0.016$ para este problema, por lo tanto las fuerzas de tensión superficial dominan sobre las fuerzas viscosas.

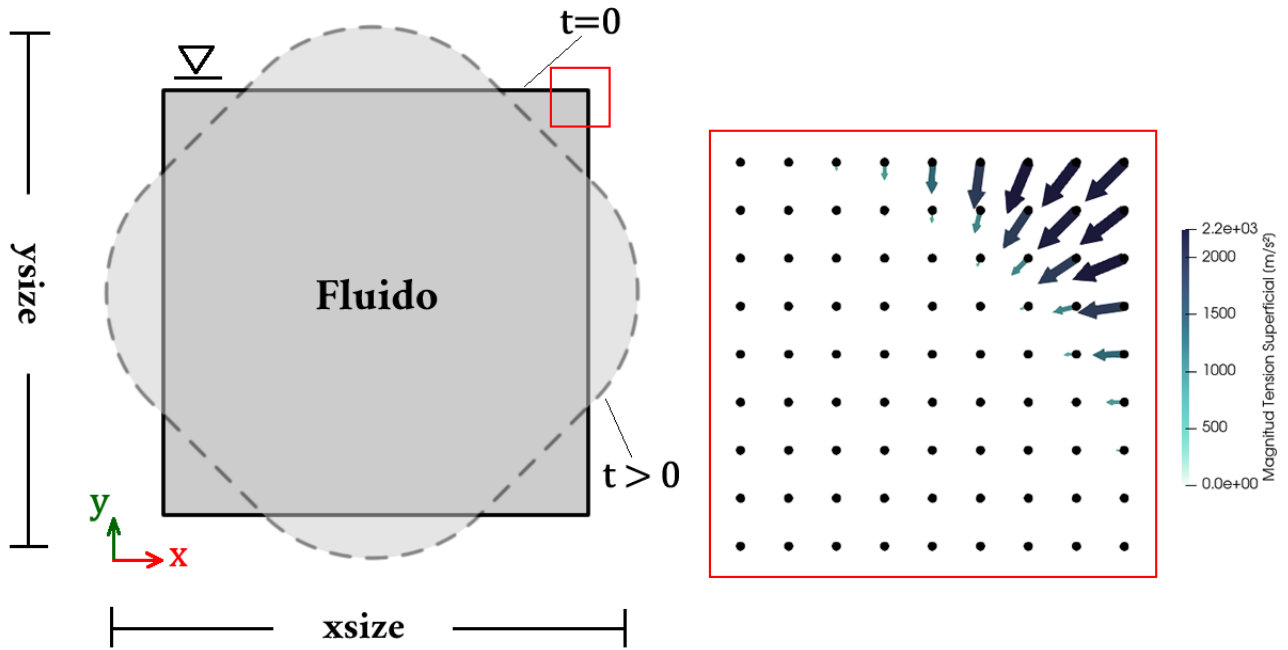


Fig. D.1 Izq) Esquema de la gota inicialmente cuadrada, *Square Shaped Droplet*, la interface se deforma debido a la tensión superficial para un tiempo posterior. Der) Acercamiento en la esquina superior derecha del inicio de la simulación, $t = 0$, usando el algoritmo 1 SPMHD sin efectos MHD.

Se iniciaron 4,356 partículas de fluido. En la figura D.1, se observa en rojo un acercamiento a la esquina superior derecha del sistema de partículas al tiempo $t = 0$ s, los vectores de la fuerza de tensión superficial fueron calculados usando el modelo CSF expuesto en el capítulo 3.1.3 y usando el algoritmo 1 SPMHD. En el modelo CSF la curvatura se calcula explícitamente y es proporcional a la fuerza de tensión superficial, al tiempo $t = 0$ s para el problema de la gota inicialmente cuadrada, la curvatura toma un valor máximo en las cuatro esquinas, posteriormente la fuerza de tensión se dirige en el sentido opuesto que el vector normal en la interface del dominio del fluido, de esta forma el dominio del fluido se deforma comprimiendo a la gota por las esquinas parecido a un cuadrado con las esquinas achatadas. Debido a la conservación de masa, el dominio es posteriormente deformado en un rombo con esquinas achatadas, forma “diamante”, nuevamente la tensión superficial trata de reducir el área de las esquinas achatadas de la forma de rombo, este procedimiento se repite hasta que la gota inicialmente cuadrada alcanza su estado mínimo de energía; una gota completamente redonda. El tiempo de simulación fue de 0.2 s, estos resultados muestran que la fuerza de tensión superficial actúa rápidamente para que el sistema alcance su equilibrio lo más pronto posible. En la figura D.2, se muestran una serie de imágenes resultados de la simulación.

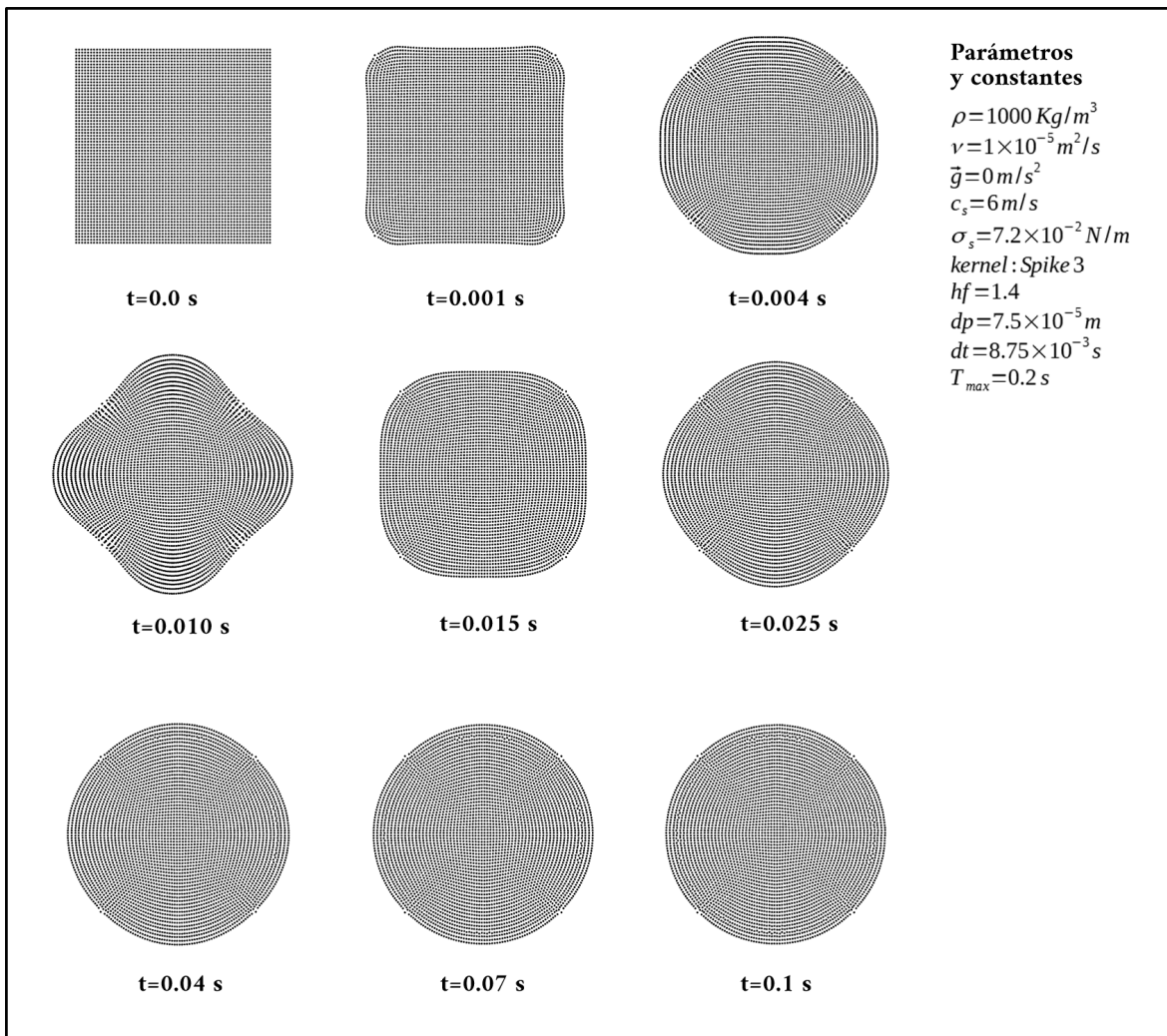


Fig. D.2 Evolución de la gota inicialmente cuadrada en dos dimensiones, $l = 5 \text{ mm}$. Resultados del algoritmo 1 con efectos de tensión superficial y sin efectos MHD.

La teoría hidrodinámica permite conocer la presión en la gota en el estado de mínima energía como $p = \frac{\sigma_s \sqrt{\pi}}{l}$, además de su curvatura como $\kappa = \frac{1}{R}$ donde R es el radio de la gota, esto se puede ver en la figura D.3. Al tiempo $t = 0.2$, se observa que la gota permanece como un círculo perfecto, esto puede verse en el cálculo de la curvatura para la partícula i localizada en el perímetro del semicírculo superior, unos resultados similares se pueden observar en [51]. Además, se observa una ligera variación de la presión sobre la solución analítica, esto se debe naturalmente a la débil compresión del método SPH tal y como se reporta en [26]. Se observó el tamaño del dominio de fluido en todos los tiempos a través de $xsize = x_{max} - x_{min}$ y $ysize = y_{max} - y_{min}$ tomando la diferencia de la posición más grande y la más pequeña de las partículas sobre el dominio del fluido en las direcciones x y y respectivamente, en la figura

D.3-c) se muestra que ambos tamaños evolucionan de igual manera, esto demuestra que la fuerza de tensión superficial actuó de manera simétrica en el dominio del fluido, [52].

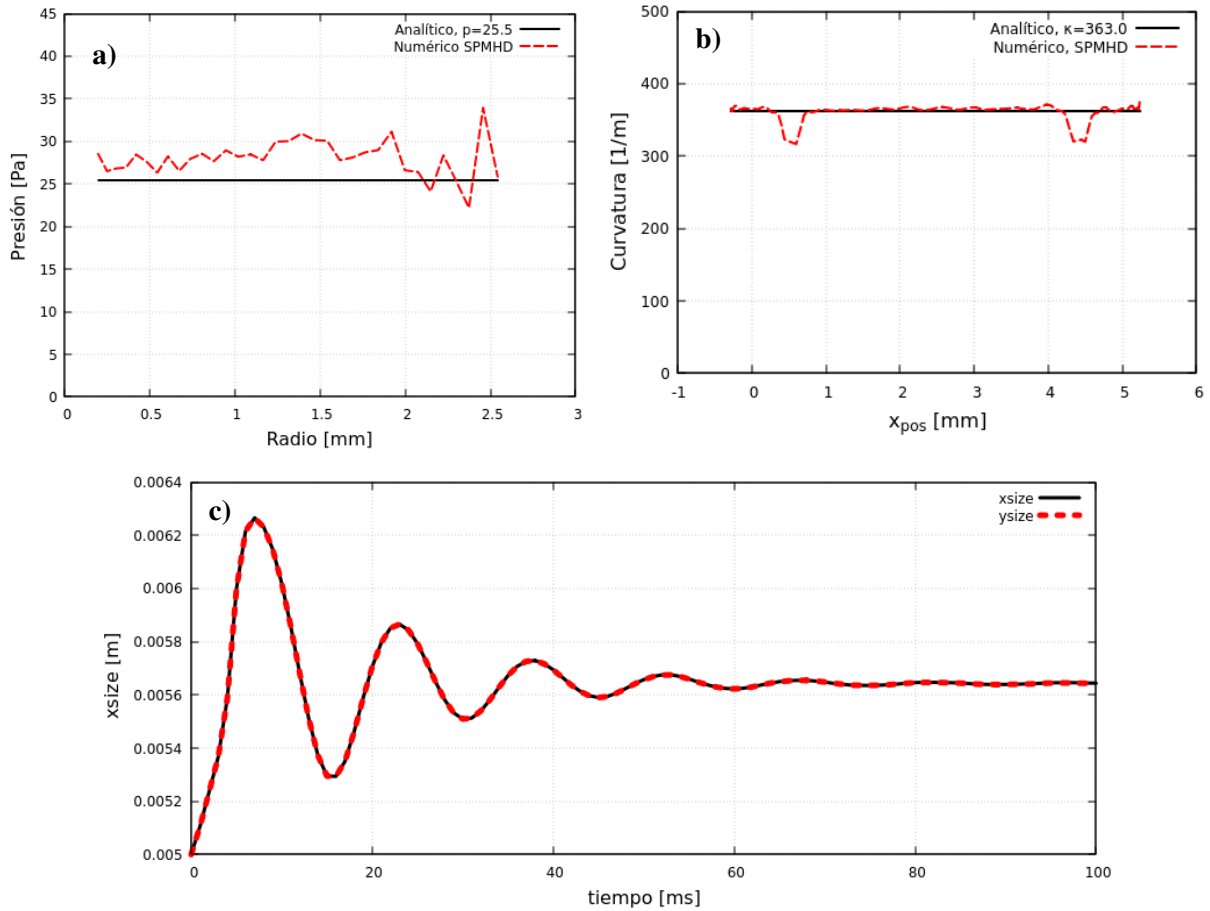


Fig. D.3 Resultados del problema de la gota inicialmente cuadrada con el algoritmo 1 SPMHD con tensión superficial y sin efectos MHD. **a)** Presión hidrostática al tiempo $t=0.2$ s desde el centro hasta la interface de la gota. **b)** Curvatura κ_i de la partícula i localizado sobre el perímetro del semicirculo superior de la gota al tiempo $t = 0.2s$. **c)** Evolución del tamaño de la gota inicialmente cuadrado en la dirección x y y (xsize y ysize), ver figura D.1.

Apéndice E

Caso 5: Una esfera de agua en gravedad cero

Aquí se estudia teóricamente la dinámica de una gota de agua en gravedad cero que se perturba superficialmente en una pequeña región. Los resultados numéricos obtenidos con el código SPMHD en 3D sin efectos MHD se comparan cualitativamente con un experimento realizado en la *International Space Station* (ISS). En la ISS se elaboran diversos experimentos en gravedad cero, el astronauta Donald Pettit experimentó con gotas de agua para estudiar el comportamiento de la superficie libre [53], el modelo experimental se puede ver en la figura E.1 donde una gota de agua de diámetro $D_0 = 13$ cm se perturba debido a un golpe de aire que eyecta una jeringa; a través de una abertura de aproximadamente 1 cm de diámetro¹ pasan 10 cm^3 de aire en 0.1 s [54], con estos datos se puede calcular que la velocidad de eyección de aire en la jeringa fue de aproximadamente $U = 1.27$ m/s. Si se toma el diámetro de la gota como la longitud característica del sistema, el número de Reynolds es $Re = \frac{UD_0}{\nu} \approx 165,000$. En la figura E.1 también se puede ver a las partículas SPH formando aproximadamente una esfera de agua de diámetro $D_0 = 20$ cm al tiempo $t = 0$ s, para simular el golpe de aire en el experimento de Donald P. se estableció un conjunto de partículas en el polo norte de la gota con velocidad constante en dirección z como $u_z = -0.05$ m/s.

En la figura E.2 se muestra una secuencia de imágenes de la evolución de la superficie libre, en ellos se observa la propagación de las olas superficiales y olas de cuerpo en el sistema, la primera ola superficial que se propaga en la superficie ocurre en 33 cuadros en el video de 30 fps, con esta información se puede estimar una velocidad de propagación sobre la superficie de la gota de agua como $v_t = 0.2$ m/s. La baja perturbación y la fuerza de tensión superficial evita que la gota se disocie. Se observó que para tiempos muy largos el movimiento en la superficie libre de

¹ Se estimó la abertura de la jeringa haciendo uso de las dimensiones de la imagen de la figura E.1 medido en píxeles y comparandola con la dimensión de la gota en píxeles.

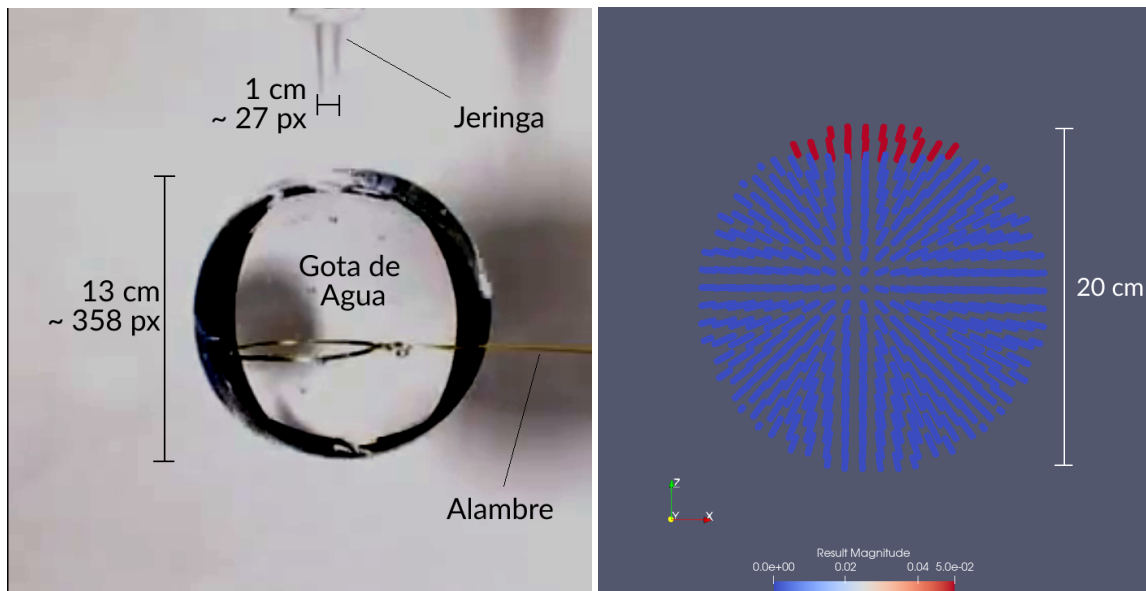


Fig. E.1 Izq) Modelo experimental de una gota de agua que se perturba debido a un golpe de masa de aire que eyecta una jeringa en gravedad cero, la gota se fija de un alambre para evitar que se desplace. La imagen es de 720×720 pixeles. Der) Simulación numérica SPH, configuración inicial de las partículas Lagrangianas, aquí la perturbación ocurre debido a que un conjunto de partículas en el polo norte de la gota tiene una velocidad inicial $u_z = -0.05$ m/s (partículas color rojo).

la gota es completamente amortiguado, esto es debido a que la energía mecánica se disipa por viscosidad, es posible que la energía mecánica también haya sido disipada por el alambre que sostiene a la gota debido a que evita que el centro de masa se desplace. La forma de la gota final fue nuevamente una esfera.

La figura E.3 muestra la simulación de la gota de agua que se perturba. El número de Reynolds es $Re = 10,000$, las fuerzas inerciales son superiores a las fuerzas viscosas, en consecuencia la energía cinética es débilmente disipada. La tensión superficial fue simulada con el modelo de tensión superficial explícita de Brabill [24] para el método SPH donde las partículas cercanas a la interface experimentan esta fuerza en sentido contrario a la normal de la superficie libre, por esta razón las partículas no abandonan el dominio de fluido, es decir el sistema no se disocia. No se simuló un mecanismo para sostener a la gota análogo al alambre del experimento de Donald P. y en consecuencia se observó para tiempos posteriores un desplazamiento del centro de masa y del sistema en dirección $-\hat{z}$. Se elaboró una reconstrucción de la superficie libre usando la

técnica *metaballs* en el software Blender [48], véase figura E.4.

Los resultados numéricos no se compararon cuantitativamente debido a la gran diferencia en el número de Reynolds, pero sí fue posible obtener información del comportamiento cualitativo en ambos casos.

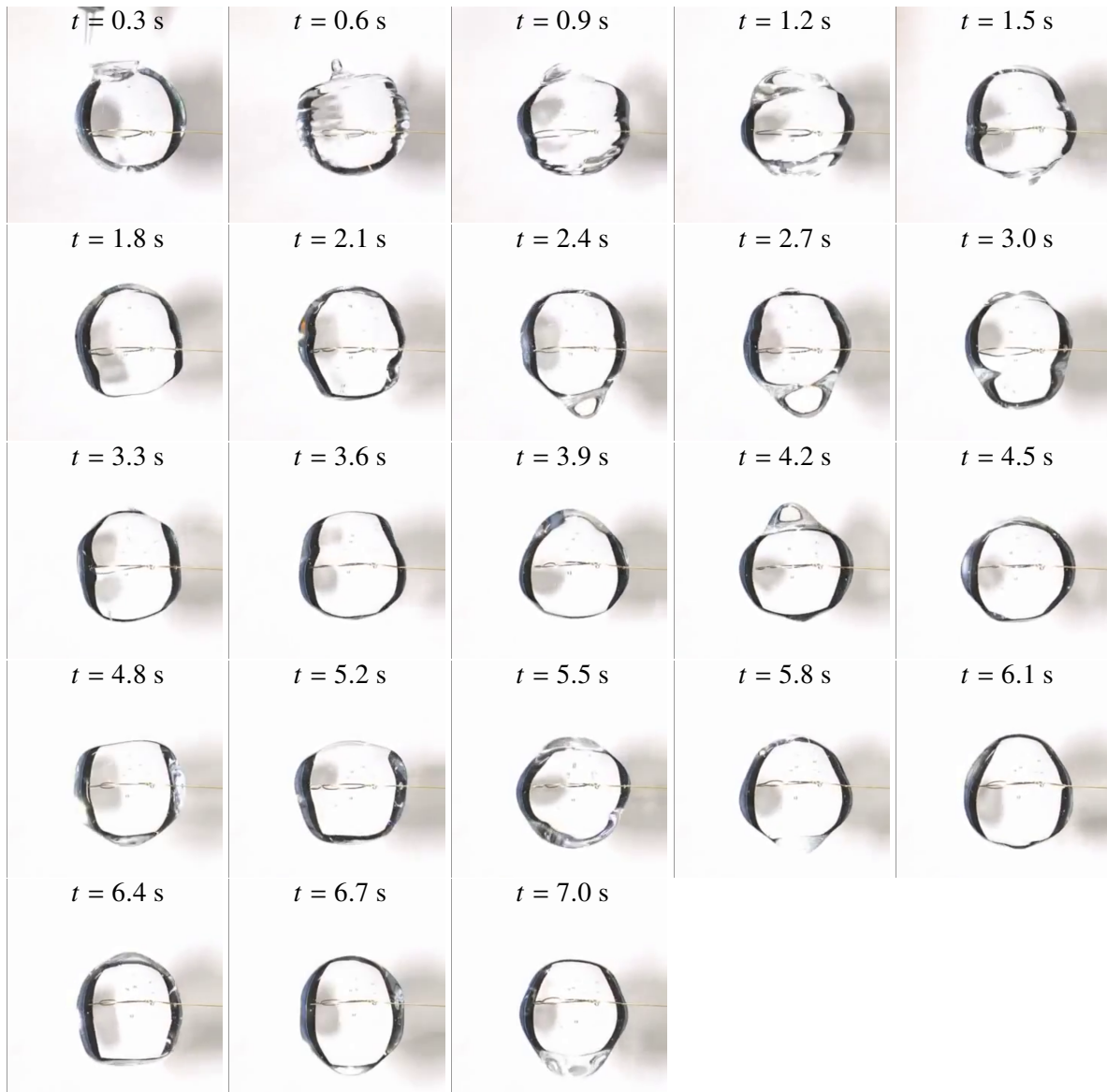


Fig. E.2 Experimento realizado por el astronauta Donald Pettit [53]. Evolución de la superficie libre de la gota de agua que se perturba hasta 7 s de observación. Se observan olas superficiales y olas de cuerpo que se propagan en el sistema.

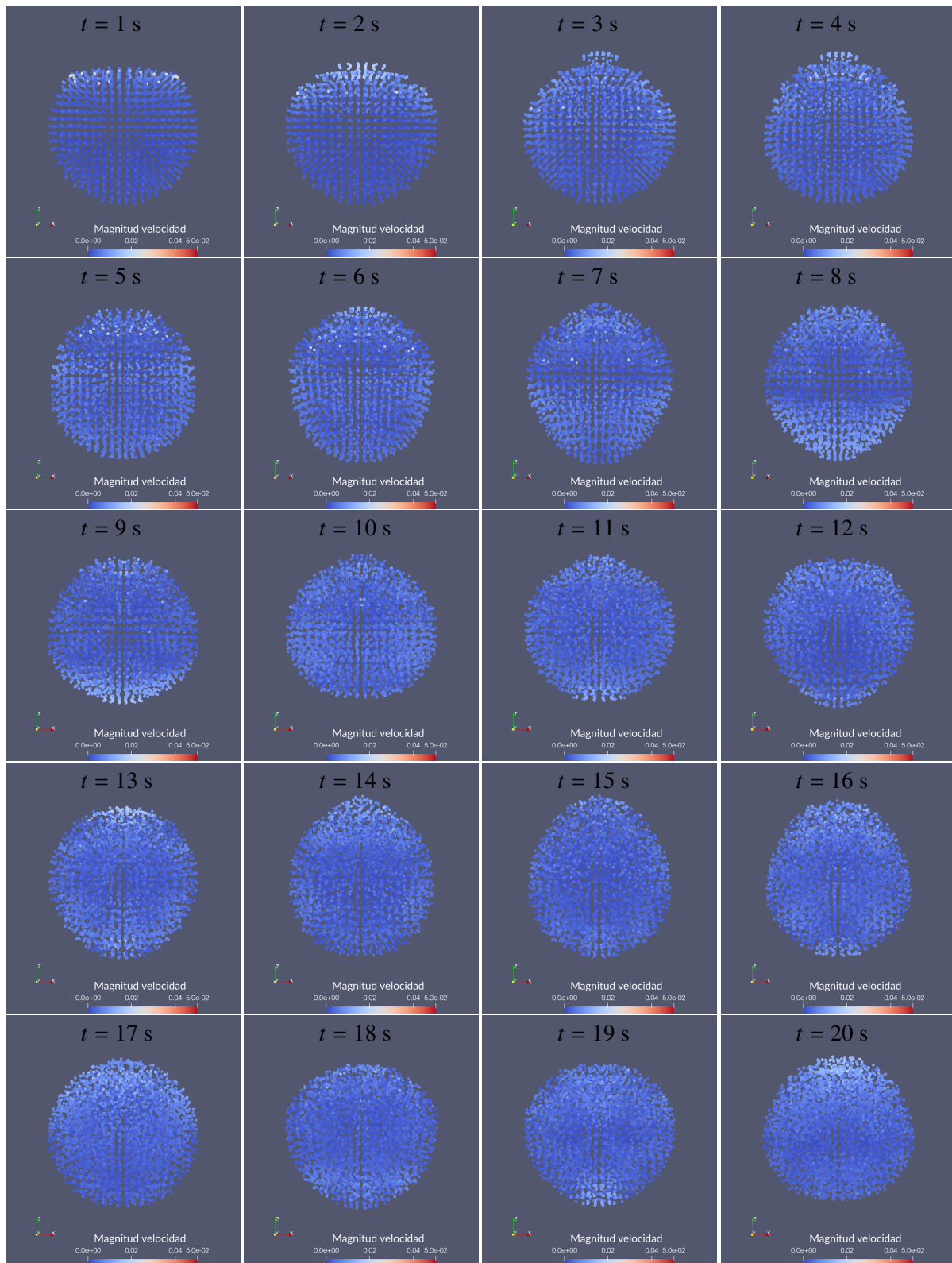


Fig. E.3 Resultado numérico con partículas SPH, la perturbación se propaga en el sistema de partículas a través de olas de cuerpo y olas superficiales, la tensión superficial evita que las partículas se disocien del sistema. $Re = 10,000$.



Fig. E.4 Renderizado de la gota de agua que se perturba en gravedad cero. $Re = 10,000$.

Referencias

1. A. Aalilija, C.-A. Gandin, and E. Hachem, “On the analytical and numerical simulation of an oscillating drop in zero-gravity,” *Computers and Fluids*, vol. 197, p. 104362, Jan. 2020. [Online]. Available: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428686>
2. C. A. Dutra, *Smoothed Particle Hydrodynamics. Fundamentals and Basic Applications in Continuum Mechanics*. Springer Press, 2019.
3. H. Lamb, *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1945.
4. C. A. Miller and L. E. Scriven, “The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 32, no. 3, p. 417–435, 1968.
5. J. WANG and D. D. JOSEPH, “Purely irrotational theories of the effect of the viscosity on the decay of free gravity waves,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 559, p. 461–472, 2006.
6. D. D. Joseph, “Potential flow of viscous fluids: Historical notes,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 32, no. 3, pp. 285–310, 2006. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932205001345>
7. L. Bühler, C. Mistrangelo, and H.-J. Brinkmann, “Experimental investigation of liquid metal mhd flow entering a flow channel insert,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 154, p. 111484, 2020. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920379620300326>
8. Z. Wang and T. Lei, “Liquid metal mhd effect and heat transfer research in a rectangular duct with micro-channels under a magnetic field,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 155, p. 106411, 2020. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072919319830>
9. P. A. Davidson, *Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2017.
10. J. S. Walker and W. M. Wells, “Drag force on a conductive spherical drop in a nonuniform magnetic field,” 1979.
11. T. TAGAWA, “Numerical simulation of a falling droplet of liquid metal into a liquid layer in the presence of a uniform vertical magnetic field,” *ISIJ International*, vol. 45, no. 7, pp. 954–961, 2005.
12. “Dualsphysics official webpage,” <https://dual.sphysics.org/animations/>, accesado: 13/Sep/2022.

13. A. C. Crespo, J. M. Dominguez, A. Barreiro, M. G.-G. M., and B. D. Rogers, “GPUs, a New Tool of Acceleration in CFD: Efficiency and Reliability on Smoothed Particle Hydrodynamics Methods,” *PLoS ONE*, vol. 6 (6), p. e20685, 2011.
14. L. B. Lucy, “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis.” *Astron. J.*, vol. 82, pp. 1013–1024, dec 1977.
15. J. Campbell, R. Vignjevic, and L. Libersky, “A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 184, no. 1, pp. 49–65, 2000. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599004429>
16. S. J. Cummins and M. J. Rudman, “An SPH Projection Method.” *J. Comput. Phys.*, vol. 152, pp. 584–607.
17. L. D. G. Sigalotti, H. López, and L. Trujillo, “An adaptive sph method for strong shocks,” *Journal of Computational Physics*, vol. 228, no. 16, pp. 5888–5907, 2009. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109002423>
18. B. D. ROGERS and R. A. DALRYMPLE, *SPH MODELING OF BREAKING WAVES*, pp. 415–427. [Online]. Available: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812701916_0032
19. G. Fourtakas and B. Rogers, “Modelling multi-phase liquid-sediment scour and resuspension induced by rapid flows using smoothed particle hydrodynamics (sph) accelerated with a graphics processing unit (gpu),” *Advances in Water Resources*, vol. 92, pp. 186–199, 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170816300926>
20. A. Mokos, B. D. Rogers, P. K. Stansby, and J. M. Domínguez, “Multi-phase sph modelling of violent hydrodynamics on gpus,” *Computer Physics Communications*, vol. 196, pp. 304–316, 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465515002659>
21. I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of fluids*. McGraw-Hill. University of Toronto, 1993.
22. Z. Mao, G. Liu, and X. Dong, “A comprehensive study on the parameters setting in smoothed particle hydrodynamics (sph) method applied to hydrodynamics problems,” *Computers and Geotechnics*, vol. 92, pp. 77–95, 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X17302070>
23. M. G. Korzani, S. Galindo Torres, A. Scheuermann, and D. J. Williams, “Smoothed particle hydrodynamics into the fluid dynamics of classical problems,” in *Advances of Computational Mechanics*

- in Australia*, ser. Applied Mechanics and Materials, vol. 846. Trans Tech Publications Ltd, 9 2016, pp. 73–78.
24. J. Brackbill, D. Kothe, and C. Zemach, “A continuum method for modeling surface tension,” *Journal of Computational Physics*, vol. 100, no. 2, pp. 335–354, 1992. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290240Y>
25. N. Akinci, G. Akinci, and M. Teschner, “Versatile surface tension and adhesion for sph fluids,” vol. 32, no. 6, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/2508363.2508395>
26. S. Geara, S. Adami, S. Martin, O. Bonnefoy, J. Allenou, B. Stepnik, and W. Petry, “Comparison of interface models to account for surface tension in SPH method,” in *PARTICLES 2019 - VI International Conference on Particle-Based Methods. Fundamentals and Applications*, ser. VI International Conference on Particle-Based Methods. Fundamentals and Applications - PARTICLES 2019, E. Oñate, M. Bischoff, D. Owen, P. Wriggers, and T. Zohdi, Eds., International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) and Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) and European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS) and International Association for Computational Mechanics (IACM). Barcelona, Spain: CIMNE International Centre for Numerical Methods in Engineering, Oct. 2019, p. 714 à 725, thème: Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH). [Online]. Available: <https://hal-emse.ccsd.cnrs.fr/emse-02442782>
27. J. W. Strutt, “Vi. on the capillary phenomena of jets,” *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 29, no. 196-199, pp. 71–97, 1879. [Online]. Available: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspl.1879.0015>
28. M. Faghihi, J. Scheffel, and G. Spies, “Instability due to magnetic viscosity in perpendicular mhd,” *International Journal of Multiphase Flow*, pp. (TRITA–PFU–86–12), 1978.
29. D. R. Cornejo, V. Villas-Boas, and F. P. Missell, “Reversible processes and magnetic viscosity of nanocrystalline permanent magnets,” *Journal of Applied Physics*, vol. 83, no. 11, pp. 6637–6639, 1998.
30. J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 44, no. 1, pp. 323–346, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120710-101220>
31. D. Violeau, *Fluid Mechanics and the SPH Method. Theory and Applications*. Oxford University Press, 2012.

32. F. Macià, A. Colagrossi, M. Antuono, and A. Souto-Iglesias, “Benefits of using a wendland kernel for free-surface flows,” *6th ERCOFTAC SPHERIC Workshop on SPH Applications*, pp. 30–37, 01 2011.
33. F. V. Sirotkin and J. J. Yoh, “A new particle method for simulating breakup of liquid jets,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, no. 4, pp. 1650–1674, 2012. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999111006206>
34. G. R. Liu and M. B. Liu, *Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method*. W. Sci. Pub., 2003.
35. E. Y.M. Lo and S. Shao, “Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible sph method,” *Applied Ocean Research*, vol. 24, no. 5, pp. 275–286, 2002. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141118703000026>
36. D. J. Price, “Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, no. 3, pp. 759–794, 2012, special Issue: Computational Plasma Physics. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110006753>
37. S. Nugent and H. A. Posch, “Liquid drops and surface tension with smoothed particle applied mechanics,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 4968–4975, Oct 2000. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.4968>
38. A. Tartakovsky and P. Meakin, “Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics,” *Phys. Rev. E*, vol. 72, p. 026301, Aug 2005. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.026301>
39. J. Al-Salami, C. Hu, M. M. Kamra, and K. Hanada, “Magnetic induction and electric potential smoothed particle magnetohydrodynamics for incompressible flows,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 93, no. 3, pp. 720–747, 2021. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.4906>
40. S. Adami, X. Hu, and N. Adams, “A transport-velocity formulation for smoothed particle hydrodynamics,” *Journal of Computational Physics*, vol. 241, pp. 292–307, 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911300096X>
41. J. Al-Salami, H. Changhong, and H. Kazuaki., “A study on smoothed particle hydrodynamics for liquid metal flow simulation.” *Transdisciplinary Research and Education Center for Green Technologies, Kyushu University.*, vol. 6, pp. 190–199, 2019. [Online].

- Available: https://www.researchgate.net/publication/337147658_A_Study_on_Smoothed_Particle_Hydrodynamics_for_Liquid_Metal_Flow_Simulation
42. M. Ozbulut, S. Ramezanzadeh, and M. Yildiz, “Modelling of wave generation in a numerical tank by sph method.” *J. Ocean Eng. Mar. Energy.*, vol. 241, pp. 121–136, 2020.
 43. S. Adami, X. Hu, and N. Adams, “A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, no. 21, pp. 7057–7075, 2012. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911200229X>
 44. S. Marrone, A. Colagrossi, M. Antuono, G. Colicchio, and G. Graziani, “An accurate sph modeling of viscous flows around bodies at low and moderate reynolds numbers,” *Journal of Computational Physics*, vol. 245, pp. 456–475, 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999113001885>
 45. S. Jason and E. Kandrot, *Cuda by example: an introduction to general-purpose GPU programming*. Pearson Education Inc, 2011.
 46. M. Fatica and G. Ruetsch, *CUDA Fortran for Scientists and Engineers*. Morgan Kaufmann, 2014.
 47. “nvidia official webpage,” <https://developer.nvidia.com/hpc-sdk>, accesado: 17/Sep/2022.
 48. “Blender documentation,” <https://docs.blender.org/manual/en/latest/modeling/metas/introduction.html>, accesado: 21/Sep/2022.
 49. A. P. Rothmayer, “Magnetohydrodynamic channel flows with weak transverse magnetic fields,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 372, no. 2020, p. 20130344, 2014. [Online]. Available: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2013.0344>
 50. L. Lobovský, E. Botia-Vera, F. Castellana, J. Mas-Soler, and A. Souto-Iglesias, “Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break,” *Journal of Fluids and Structures*, vol. 48, pp. 407–434, 2014. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974614000656>
 51. M. Ordoubadi, M. Yaghoubi, and F. Yeganehdoust, “Surface tension simulation of free surface flows using smoothed particle hydrodynamics,” *Scientia Iranica*, vol. 24, no. 4, pp. 2019–2033, 2017.
 52. Z.-B. Wang, R. Chen, H. Wang, Q. Liao, X. Zhu, and S.-Z. Li, “An overview of smoothed particle hydrodynamics for simulating multiphase flow,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 40,

- no. 23, pp. 9625–9655, 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X16303419>
53. “Space physics: The science of liquid spheres in zero gravity | nasa iss microgravity video,” <https://www.youtube.com/watch?v=jn5KuSHguUE>, disponible el: 29/Sep/2022.
54. “Water drops in space,” <https://www.youtube.com/watch?v=EzahpSqGbVg>, disponible el: 29/Sep/2022.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas



**DR. JEAN MICHEL GRÉVY MACQUART
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada: **Modelación numérica de la deformación superficial de una esfera de fluido con efectos magnetohidrodinámicos**, que presenta el alumno **Fernando Alexis Morales Garzón (10036974)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

| NOMBRE | DICTAMEN | FIRMA |
|---|----------|-------|
| Dr. Markus Franziskus Muller CInC-UAEM | APROBADO | |
| Dr. Federico Vázquez Hurtado CInC-UAEM | APROBADO | |
| Dr. Frédéric Sylvain Masset ICF-UNAM | APROBADO | |
| Dr. Raúl Salgado García CInC-UAEM | APROBADO | |
| Dr. Sergio Cuevas García IER-UNAM | APROBADO | |



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2022-11-04 12:28:41 | Firmante

hyhBwwxz0XnejWSZEKKMfqK83AviMYhF5ykvqUJKyU+MHIZ3MjDMcesmDuiT75K2bltFsdSlcc4aWUSytO1Jvd+p1QKXPhWbQ3u7+FUEnEqBCBipV1cv5ZnUUM27iNaHNi4FglwKuwnsSP7Z3s64Jvod7lhviW3+Ps2OBgKjTOe4fAk0qjb2tK4yfmK5i0+k8sU4TM97uu4J4zSSZCUqgPuK1vbi3PRokTxodwyYjhOkKihvCvrmZmvZQaARn4yHelUoARnslmaombP4+A2NypRbz+vtthNY0BpC+z2EiBjn9LZpm6F/3EZCcO36tbkBeGgONx1C59Ci5ac4QxWw==

FRÉDÉRIC SYLVAIN MASSET | Fecha:2022-11-04 12:39:04 | Firmante

U0U5D8ol+G5OZ5mSej71FcVdvyOsQCGGTyqcAXeLUazz+80g/kXOZ7+2XuCVHYFgouyMcQWwsRxpdcseXGAsQ1ssn9FBXgXv8s2pW1QPvZ/Da+8cFMATogfXnleHeAu5uBgOThnqJ2MCQKNUH9Z8iU9pGxiJ5hPij+Ma/OPUly6BoS1xC2L8wcaonvtmYbWsgtitAJ293NOte6qqe1R6tLf94LJWFllcDoprZZWyx8NIJnkVVG2EcahZFIHYqDiHjN5MnNh3xg5yJFCWemAK2hAAOU4ysHADpceHTy7nL6lgFINCuw50UX2gUA1FUugeY77yWr5/pp4zAqcODtQ==

FEDERICO VAZQUEZ HURTADO | Fecha:2022-11-04 13:20:31 | Firmante

CvQNNRAzLvWhOhPgVrU7nvlInJc1Q+Qej6BxSHHIS7BHqkkgAKCEKPhzhI+vmzvYL6MRdDhLujLTDT1EU4cuk4vjWhqUQBxBRi2kEOvdRhDdedOdqE3X1ROAZYKA1Tcc66w1UrdQVXe29E9rvKcyGGN8sFillQYCY9HZf0XwTlb284FjqjnjL74RIY848y9IYBjXj1MUJQFPT5LTZfB/88AGGqPEVFXfyzgll/M4RXGLvion7M8714reBXhfkcpj9T7iqG27hf1onoHSxsls4CXkbQonJv9lzYatDCGKWwsUC/TrbqA6xmuJmaY/fk0F5IFG3cYOeoiTQFLisqgNj6w==

RAUL SALGADO GARCIA | Fecha:2022-11-04 13:23:20 | Firmante

jeYYLmzrVWUo0dMpwaxmiC7sTmUdfL/2YzeMqILm6cScmsc3V34B3NZ6xAxp2ahBvlcp7H8dSyJ5bl8n18+ubcHfMmflNpYcqFjua6gEkH5K6ZlikWxf4pra6WTLPRepumwxc8kCIMiqqEIIISWPJugSFZp3tarnh5guKwRMkrH+WsA3NIAxv8GTCNjhpBiwJ56XbVt66t4PKLLafeBABMABwmHdbsMBJ8PddnQBZRBOWmk1EiSgFq1168Y2sWDXlf3j18NS7Hu32DNOdHGto2tto9DyJs7yhCRHqhmfk9Tws7lQr8MMTZU4kyAouZZa6hAx7PKxiVPaSm17Dg==

SERGIO CUEVAS GARCÍA | Fecha:2022-11-04 16:35:02 | Firmante

cxyhaCv0PCxOCYha1Cx5YlqeyXE8TLfFPieHhWC54J35cNca2bJcX7y9hDtJB5GwmQ7Y7i7ME0a5GehWuOuNot/vA50yl/xJqEZN00c8i894r5egaNGXoxWlUskE9t5JLTXCU7E3MyCFtyXbcz5pCTrCypw4U19UowGAC0oB0FOlEeUxgUXWLQ/vqt5iqvlCcwNzwEUyY7QM2Lke/wQjyj4tZGMQOVXTXm/Zf+SBQQu0O6KnlNp5oT+U9MUfMwkHrHcs/6pslR6cmeC8azMeSoNnb2A8t+IM7/+7CIHnwhwk1m92ARFPojxUn5bV7kzSkQEB7x0cMTKpkkhnc7Q==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



Y93lIKQnm

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/l33QtPaJK2K1o6Ob56H1ibExsRyPO80f>

