



ACTA DE DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

Los integrantes de la Comisión Revisora del Trabajo de Tesis de Maestría titulado: **LA TOMA DE NOTAS EN CLASE Y SU AYUDA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

que presenta el candidato a Maestro en Investigación Educativa: **ERENDIRA HERNANDEZ LEMUS**, quien realizó su investigación bajo la Dirección de **DR. MANUEL FRANCISCO AGUILAR TAMAYO** después de haber revisado la tesis, otorgan el dictamen siguiente: **VOTO APROBATORIO**

Observaciones: Prepara documento para su impresión para programación de examen de grado.

Cuernavaca, Morelos, a **22** del mes de **junio** de **2020**.

DIRECTOR(A) DE TESIS Manuel Francisco Aguilar Tamayo	
LECTOR(A) Antonio Daniel Rivera López	
LECTOR(A) Rubén Priego Jiménez	
LECTOR(A) Ariadna Isabel López Damián	
LECTOR(A) Juan Espinosa Montero	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

MANUEL FRANCISCO AGUILAR TAMAYO | Fecha:2020-07-09 18:33:49 | Firmante

AnzLDOYqZdVvk/vAkiVybOMIKkzhUU9aXj61uGpfd6JpSQriwlaY1QSS+IEo1FiOTWTi0h1iaVOEISpynl9W2kI0uv5nNEKRBowd714LqxT+0TVdc4qli8b8KlcUdl6ZgbRph2BwOJI3ecPG3jUiwW4i54y7Ky7hhR/vlyPxcSMMjh69701UkWwftz+J/ukU46TxTr8YJtjLZujCh2xr3A0BZu31IH0v4LUOE5ij+hSmkCzczyGZrp1zp/DZ1U00ujSy97wuFbaFnpsDM4EN0uNjW4utGJoloWraObJTjNVvSyZRuihqo/1qSqIBuF3vFzwrDsPjZUNHi3aDRiCSJcBA==

ARIADNA ISABEL LÓPEZ DAMIÁN | Fecha:2020-07-09 18:40:52 | Firmante

Ajd60vO7SvhEdtrytB+D7tx4rhCKjby4kpbJprJLepYJD174Th5nBjaA8lF1MlmnS5vMjvKdTKiV6PlkWOH32wABtYVXhD8Qlby10KtoYiL59uARvLJ1tcrDNThIA25G141XQUtkhxO9zNeUocqLuINV9aHWv3VpDx1vz5o/OVHyednn3fdBEENPr3VPZbndOU0QwYeTq8OPwZUht2mfQM0F6cEJUVNRHrudoJScUajy+GwBjofOArYP3eWB5E/4879POe/TPu0sqPKt5IV51glPTqAs9wQuyw8/nplN0P0IEZVuF4rmF6bSpV3Kbkm2Jr3pd1JFzDv97JjhGJg==

JUAN ESPINOSA MONTERO | Fecha:2020-07-09 19:06:00 | Firmante

ZTNDDoj1Yz+kRTU/x4SIXhdeSGIb1bkPX9qgCP6yQLy3lsZIP9j/X/eCqUfOs+QyvgLYRpPY/UHoNmyLFakDb7A7e+9Mb5rN44DMbUib9ZgfyggpT5yxej2xcFVN0itq5U3pSG91C5Bkc7MBZ1PYt6sUf4v2FpEIKgTP5pZBhJiwL4XjGthhplaVy9nurrOOuVNjkjzhSoUGHCUK5LTYEIVynYD5puF9JRZv4xNJD71+sVP5+JwOC15swJcA7AzwmBNrspLYpXhurlp3SIJOU56V28lmlFKYDOviFhcTD2PIQ9T6qjvDQ5AHWjKkrX4sGB7S+Uf0MpdtaVz5735w==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2020-07-10 13:58:11 | Firmante

pAnW7MN3AvidHTK5eNvr4IAbPp6RV/wMVthKMfdNrzMWI9Fs7YGw+JzmVyeXDCUHMsc2Gw98EgMc+9ZwWwZaDtHPCGbiGOe7iLDKneqBkDnWlveGypUO4wiAuax+R8jIB+AZqpGSmNuAFiOiAUsxvyOriAvARGU4jaJz8T/2bvucDwBguuAleEwwG17hZjtvK4GgGeWZg8mwTQdFB9M/TykZyGQSzc+SgaQz/4HluJLg0f51kK4MRuZEiPvNuu8nk96N7Px AfzrUQg+Mrq8fc/m4EsAmbedGuTK3SNvQBEiFY+ljdF2zXoJ4GLYShP+VLvssxx9Z+ifi4efTLq5g==

RUBEN PRIEGO JIMENEZ | Fecha:2020-07-10 17:18:41 | Firmante

kcip17L4HF4EXz7CdgcmZ6XzCOEAK3JjnPF+5FLTVYWIH1MDPd6YldD/2o2UJjRAnvK40Suyhf/RP8xCHsv5EA9F5sp6M9A9qn0Ljw7wP5+nmm06HrwZAMdJwULQcsTnOJgTQhcaXullmifL4xVmcDrGG3WxmBchp2e0PzU+ydJF5B5P4vXYnUN55btOn77x4E5aLR893MvB8++JD6twfdAdie+T8l3Ka25cWSsQqGBb+/nsPe+05rBUgxe/pJonD65fIWUwHSCkyH2H9OyVzQcktuPaLkq25GzASBXi+NdOM+OIAk+gEss8o0Z211eZUosZNFs0Jdn+a93FK6Xw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



aVcvdL

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/Df2C25MbHaM8CcSViS9Ra5AMRyzmNSE8>





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**LA TOMA DE NOTAS DEL ESTUDIANTE EN CLASE
Y SU AYUDA EN EL APRENDIZAJE DE LAS
MATEMÁTICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

P r e s e n t a

ERENDIRA HERNÁNDEZ LEMUS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MANUEL FRANCISCO AGUILAR TAMAYO

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por haberme cuidado durante todo este proyecto. Por haberme dado la oportunidad de conocer a gente extraordinaria como Isis, Belén, Rosalinda, Levi, Magda, Marco, el Dr. Padilla y la Dra. Zorrilla.

A mis hijos por ceder parte del tiempo y espacio familiar para poder dedicarme a estudiar de nuevo y en las mayorías de las veces demostrar ser las personas más empáticas del mundo. A Gin por ser mi apoyo y la guía de sus hermanos, a Héctor por mantener siempre que podía el buen humor y Sofia por sus diabluras.

A mi esposo Abel por todo su amor incondicional y su apoyo para que cumpliera con mi sueño. Porque juntos no solo compartimos los momentos felices, sino que también superamos los momentos difíciles.

A la comadre Chuy, María de Jesús Mendoza Cortés, por todo el apoyo con mi familia y la casa, sus consejos y las provisiones que siempre me daba cuando me ponía a escribir la tesis.

Pero en especial al Dr. Manuel F. Aguilar Tamayo por cada momento de ilustración que viví con él, la dedicación y la guía durante todo el proyecto de maestría. Pero sobre todo por compartir mi visión de que se puede enseñar y aprender matemáticas de otra manera con una intensidad más amplia y profunda.

DEDICATORIAS

Dedico este trabajo de investigación a mi papá Francisco, ya que inicio como una meta compartida y terminó solo con sus bendiciones desde el cielo. Te amo mucho, siempre serás mi modelo a seguir.

A mi mamá porque a pesar de todo siempre ha buscado estar conmigo tratando de que, aunque vivamos en contextos diferentes y tengamos distintas prácticas culturales, sigamos juntas.

A mi familia y amigos porque este proyecto lleva un poquito de cada uno de ustedes.

A todos los estudiantes que están interesados en aprender matemáticas para que sepan que existe otras formas de aprender y otros tipos de aprendizaje en matemáticas. Ojalá este trabajo pueda ayudarles a marcar el camino para encontrarlos.

La investigación y el documento de tesis **La toma de notas del estudiante en clase y su ayuda en el aprendizaje de las matemáticas** fueron desarrolladas en el marco del programa de la Maestría en Investigación Educativa de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, registrada en el Programa Nacional de Posgrado de Calidad SEP-CONACYT No. 00518.

Actividades académicas y de seminarios se desarrollaron en espacios de la Unidad de Investigación Educativa del Instituto de Ciencias de la Educación de la UAEM. Se recibió el apoyo de becaria nacional CONACYT para estudios de posgrado PNPC número 929175. La dirección de la investigación y tesis estuvo a cargo del Dr. Manuel Francisco Aguilar Tamayo.

El comité tutorial estuvo conformado por del director de tesis Dr. Manuel Francisco Aguilar Tamayo, y los tutores: Dr. Antonio Daniel Rivera López y Mtro. Rubén Priego Jiménez. Para el dictamen de tesis y jurado examen se incluyeron adicionalmente al comité de tutores los lectores: Dra. Ariadna Isabel López Damián y el Dr. Juan Espinosa Montero.

ÍNDICE

RESUMEN.....	1
SUMMARY	3
Capítulo 1. Antecedentes	5
Capítulo 2. Planteamiento del problema.....	12
2.1 Los desafíos que enfrentan las universidades en el aprendizaje de las matemáticas	12
2.2 Cómo están los estudiantes de EMS en el aprendizaje de matemáticas de acuerdo con PLANEA	26
2.3 La pregunta de la investigación.....	32
Capítulo 3. El aprendizaje de las matemáticas.....	34
3.1 Anotar durante la clase de matemáticas.	35
3.2 Las notas de clase como un tipo de escrito matemático.....	40
3.2.1 Estilos de escritos matemáticos.....	42
3.2.2 Las notas de clase utilizadas con un propósito de aprendizaje.....	45
3.2.3 La anotación estratégica en el aprendizaje de los estudiantes.....	47
3.3 ¿Existe alguna relación entre la escritura a mano y el aprendizaje?	51
3.4 Teoría sociocultural de Aprendizaje de Vygotsky.	56
3.5 La didáctica de las matemáticas.	61
3.6 Las características de los estilos de aprendizaje de Kolb.....	63
3.7 PLANEA un ejemplo de evaluación estandarizada empleada en México para medir aprendizaje de las matemáticas	67
3.7.1 La organización de la prueba PLANEA.....	68
3.7.2 Los cuatro niveles de logro en matemáticas dentro de la prueba PLANEA	68
3.7.3 Los resultados de la prueba PLANEA	72
Capítulo 4. Aproximación metodológica.....	77
4.1 Marco metodológico del estudio exploratorio.....	77
4.2 Instrumentos para la recolección de datos.....	80
4.2.1 Test de estilos de aprendizaje.....	80
4.2.2 Cuestionario	81
4.2.3 Notas de la clase, fotografías y video para la observación.....	82
4.2.4 Guía de preguntas para el grupo focal.....	84

4.3	Criterios de selección de la muestra para la investigación	86
Capítulo 5. Resultados y Hallazgos.....		87
5.1	Antecedentes y resultados del estudio Piloto	87
5.2	Datos obtenidos de los distintos instrumentos aplicados	89
5.2.1	Resultados de las observaciones	95
5.2.2	Resultados obtenidos del grupo focal	100
5.2.3	Resultados del test de estilos de aprendizaje de Kolb	102
5.3	El proceso de la toma de notas de clase en matemáticas.....	105
5.4	Condiciones y situaciones que definen las características de las notas de clase	109
5.4.1	Tipo de enseñanza	109
5.4.2	Registro matemático.....	111
5.4.3	Intereses de los estudiantes.....	118
5.5	Características de las notas de clase de los tres participantes	124
5.5.1	Características de las notas de clase de acuerdo con los criterios de forma y fondo....	138
5.5.2	Sintaxis de las formas matemáticas en las notas de clase	140
5.5.3	Otros apoyos digitales de recuperación de la información utilizados	147
5.6	Atribuciones que los estudiantes les dan a las notas de clase.....	148
Capítulo 6. Conclusiones.....		151
Consideraciones finales.....		159
Anexo 1. Formulario de consentimiento		171
Anexo 2. Cuestionario en Google Forms.....		172
Anexo 3. Metamatriz de respuestas del cuestionario		175
Anexo 4. Test de EA de Kolb contestados		176
Anexo 5 Guía de preguntas para el grupo focal		179
Anexo 6. Cuadro de comparación entre los escritos de los estudiantes para el mapa cognitivo.		180
Anexo 7. Transcripciones de las clases		181
Anexo 8. Análisis de la prueba PLANEA.....		186

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Curso de Aprender ofrecido por la UNAM. Recuperado de https://es.coursera.org/learn/aprendo#syllabus	20
Figura 2. Mapa conceptual de las relaciones que surgen entre notas de clase y sus propósitos.	24
Figura 3. Aprendizajes claves de la prueba PLANEA en el nivel medio superior. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF	28
Figura 4. Símbolos que se emplean en los escritos matemáticos.	41
Figura 5. Dimensiones consideradas para la clasificación de los anotadores consideradas por Monereo et al. (2000).	48
Figura 6. Momentos de la recolección de datos.	83
Figura 7. Triangulación de datos. Fuente propia.....	84
Figura 8. Comparativo entre las categorías de Monereo et al. (2000) respecto al encontrado en el pilotaje.....	89
Figura 9. Horario de clases FCQeI.....	95
Figura 10. Cuestionario exploratorio elaborado en Google Forms. Fuente propia.	97
Figura 11. Ubicación de los estudiantes participantes en el salón de clase.....	100
Figura 12. Grupo focal 1.	101
Figura 13. Mapa de ubicación de los estudiantes.....	103
Figura 14. Esquema Organizador de proceso de Toma de notas de clase elaborado con datos de la encuesta.....	106
Figura 15. Estudiante X-MCA levantándose de su lugar para consultar al docente.	107
Figura 16. Los estudiantes participando en la clase resolviendo un ejercicio.....	110
Figura 17. Docente enseñando la noción de derivada por definición.....	114
Figura 18. Corrección que hace el docente del ejercicio que resuelve el estudiante.....	115
Figura 19. Aproximación a la recta tangente. Recuperado de Larson & Edwards (2010).....	117
Figura 20. Estudiantes estudiando para el examen de Probabilidad	118
Figura 21. Mapa cognitivo del estudiante VGA.....	119
Figura 22. Mapa cognitivo de AMIP	120
Figura 23. Notas de clase de VGA del 8 de octubre de 2020.....	121
Figura 24. Estudiantes jugando con el cubo de Rubik.	122
Figura 25. Estudiantes distraídos de la clase.....	123
Figura 26. Página número 1 de la nota del 17 de septiembre del estudiante VGA.	125
Figura 27. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante VGA.	126
Figura 28. Página número 3 de la nota del 17 de septiembre del estudiante VGA.	127
Figura 29. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS en la cual se observa el mismo error cometido por el docente ese día.....	129
Figura 30. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS en donde se muestra un ejemplo de parafraseado.....	130
Figura 31. Página número 3 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS que muestra que no concluye ese ejercicio.....	131
Figura 32. Página número 4 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS.....	131
Figura 33. Página número 1 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.....	133

Figura 34. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.....	134
Figura 35. Página número 3 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.....	135
Figura 36. Página número 4 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.....	136
Figura 37. Ejemplo de inequivalencias entre la función y su transformación llamada derivada.	141
Figura 38. Lista de ejercicios firmados por el profesor.....	142
Figura 39. Ejemplo de un ejercicio resuelto por el estudiante AMIP donde le falta simplificar la expresión.	144
Figura 40. Estudiantes tomando fotografías del pizarrón.....	147
Figura 41. Categorías del para qué.....	149
Figura 42. Estudiante X-MCA anotando.....	151
Figura 43. Nota de clase con la pluma digital	153
Figura 44. Ejemplo de ítem en matemáticas de la prueba PLANEA del nivel de educación básica en sexto de primaria de 2018. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba_ei/docs/2019/PRUEBA_EVALUACION_INTERNA_SEXTO_PRIMARIA.pdf	189
Figura 45. Ejemplo de ítem en matemáticas de la prueba PLANEA del nivel de educación básica en tercero de secundaria de 2018. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba/docs/2019/reactivos_tipicos/Matematicas_09_2015_.pdf	190

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Prueba PLANEA para nivel medio superior durante 3 años. Fuente: Elaboración propia con datos de PLANEA de la página http://planea.sep.gob.mx/ms/	29
Gráfica 2. Porcentaje de estudiantes por nivel de logro. PLANEA (2017). Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF	73
Gráfica 3. Muestra la cantidad de estudiantes del grupo CD por edad y género.....	98

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Conocimientos previos y aprendizajes esperados en el curso de cálculo diferencial. Elaborado por Eréndira Hernández Lemus con base al Plan de estudios de FCQeI_UAEM (2015).	14
Tabla 2. Investigaciones encontradas donde las notas/toma de apuntes. Elaborado por Eréndira Hernández Lemus.....	38
Tabla 3. Cuadro de los resultados obtenidos en el estudio de Monereo y otros entre el sentido y significado de la anotación recuperado de Tomar apuntes: Un enfoque estratégico (Monereo et al., 2000, p. 115).....	49
Tabla 4. Estilos de Aprendizaje de acuerdo con Kolb. Elaborado por Eréndira Hernández Lemus. Basado en Romero, Salinas & Mortera (2010).	65
Tabla 5. PLANEA (2017). Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF	68
Tabla 6. Metamatriz de resultados del cuestionario exploratorio (véase anexo 3).....	90
Tabla 7. Cálculo para la determinación del EA de los estudiantes. Elaboración propia.	91
Tabla 8. Significado de características por color.	92
Tabla 9. Símbolo utilizados en las transcripciones.	93
Tabla 10. Códigos utilizados para identificar a los estudiantes.....	94
Tabla 11. Categorías relevantes para contrastar con las del cuestionario.	94
Tabla 12. Elementos lingüísticos que aparecen en el registro matemático en el aula de clase.	115
Tabla 13. Cuadro comparativo entre estudiante y características de la categoría forma.....	139
Tabla 14. Cuadro comparativo entre estudiante y características de la categoría fondo.....	140
Tabla 15. Errores encontrados en las notas de clases de los estudiantes participantes.	143
Tabla 16. Comparación en las notas de clase del último ejemplo de la sesión.	145

RESUMEN

Este trabajo tuvo como motivación el problema que enfrenta México en el aprendizaje de matemáticas y como la educación formal en la mayoría de los niveles educativos no ha podido proponer y consolidar soluciones asertivas que deriven en acciones para resolver el problema. El aprendizaje no solo debe buscarse con el dominio de los contenidos conceptuales, también implica la adquisición de herramientas y estrategias metacognitivas que le permita al estudiante autogestionar sus procesos de aprendizaje, reflexión y entendimiento matemático. Uno de los aspectos que llamó la atención de esta investigación fue la anotación o toma de notas de clase asertiva, pues existen varias investigaciones que sustentan que la nota de clase elaborada estratégicamente se vuelve una herramienta de mediación para el desarrollo de pensamiento metacognitivo durante el proceso de enseñanza- aprendizaje. La escritura en el formato de la nota aproxima al estudiante al dominio de contenidos conceptuales y el desarrollo de habilidades, como la resolución de problemas que es considerada fundamental en la educación superior.

Las pruebas estandarizadas que se aplican en México son un ejemplo de la preocupación de una educación tradicional centrada en los aprendizajes memorísticos y mecánicos que se promueven dentro de la mayor parte de la enseñanza matemática y las lógicas que orientan las prácticas docentes que van dirigiendo tanto el aprendizaje de los estudiantes y como las estrategias empleadas para conseguirlo.

En el campo de las matemáticas el registro matemático tiene condiciones y situaciones particulares que permiten ayudar al aprendizaje y comprender sus procesos, las preguntas que guían este trabajo de investigación es ¿qué características tienen las notas de los estudiantes

universitarios realizadas en clase de matemáticas? Y ¿qué funciones le atribuye el estudiante a la nota como parte del aprendizaje de la matemáticas?

Para darles respuestas se realizó un estudio exploratorio donde se analizaron las notas de clase y se observó la clase para conocer las condiciones que influyeron para que los estudiantes de esa manera. El estudio fue realizado en el grupo de 1° A en la asignatura de Cálculo Diferencial de la Facultad de Ciencias Químicas, Eléctricas e Ingeniería (FCQeI) de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM).

Las técnicas de recolección de datos fueron: la entrevista en Internet, la observación de clase, análisis de contenido y el grupo focal. Para los cuales se utilizaron los instrumentos del cuestionario, las notas de clase y el material audiovisual y la guía de preguntas para el grupo focal.

SUMMARY

This work was motivated by the problem that Mexico faces in learning mathematics and how formal education in most educational levels has not been able to propose and consolidate assertive solutions that lead to actions to solve the problem. Learning should not only be sought with the mastery of conceptual content, it also implies the acquisition of metacognitive tools and strategies that allow the student to self-manage their learning processes, reflection and mathematical understanding. One of the aspects that caught the attention of this research was the annotation or taking of assertive class notes, since there are several investigations that support that the strategically elaborated class note becomes a mediation tool for the development of metacognitive thinking during the process teaching-learning. Writing in the note format brings the student closer to mastering conceptual content and developing skills, such as problem solving, which is considered fundamental in higher education.

The standardized tests that are applied in Mexico are an example of the concern of a traditional education focused on rote and mechanical learning that is promoted within most of mathematics teaching and the logics that guide the teaching practices that are directing both the student learning and the strategies used to achieve it.

In the field of mathematics, the mathematical record has particular conditions and situations that allow it to help learning and understand its processes, the questions that guide this research work is: what characteristics do the marks of university students made in mathematics class have? And what functions does the student attribute to the grade as part of learning mathematics?

To give them answers, an exploratory study was carried out where class notes were analyzed and the class was observed to know the conditions that

influenced the students in this way. The study was carried out in the 1st A group in the Differential Calculus subject of the Faculty of Chemical, Electrical and Engineering Sciences (FCQeI) of the Autonomous University of the State of Morelos (UAEM).

The data collection techniques were: the Internet interview, class observation, content analysis and the focus group. For which the instruments of the questionnaire, the class notes and the audiovisual material and the question guide for the focus group were used.

Capítulo 1. Antecedentes

Las investigaciones acerca de las notas de clase han encontrado que éstas toman un lugar central para mejorar el rendimiento académico y la comprensión de temas por lo que se les asocia con la posibilidad que tiene un estudiante para culminar sus estudios en los diferentes niveles educativos. Las notas que toman los estudiantes en clase son una *herramienta cultural* (Vygotsky, 2001) que elaborada estratégicamente facilita la dirección de la atención del estudiante durante la clase, permite establecer relaciones entre conceptos científicos previos y nuevos, y favorece al acto de pensar pues le ayuda organizar de manera intrapsicológica la información proporcionada por el docente al mismo tiempo que está transcurriendo la clase (J.R. Delgado, 2014).

Las notas de clase pueden tomarse mediante dos tácticas diferentes, aquellas que son producto de la *transcripción literal* y cumplen el propósito de registrar todo lo que el docente escribe en el pizarrón, y las otras, *las notas estratégicas* que el estudiante realiza cuando se implica en el proceso de comprensión durante el cual las notas son un proceso de representación de los significados internos frente a la nueva información y como una estrategia para el aprendizaje (Monereo y otros, 2002). Esta distinción entre las tácticas en la toma de las notas puede mostrar diferentes características en sus resultados y en su eficacia como estrategia de aprendizaje.

El interés de la presente investigación se centra en explorar cuáles son las características que tienen las notas realizadas en clase de matemáticas y por qué se hacen con esas características. Se ha elegido la rama de Cálculo Diferencial porque forma parte central del currículum en las carreras de ingeniería Química Industrial y Eléctrica- Electrónica en la UAEM. La mayoría de las investigaciones en este campo han dejado de lado el estudio

de las matemáticas y de las estrategias desarrolladas por los estudiantes de nivel superior para anotar estratégicamente, y han empleado metodologías mixtas o cuantitativas para un problema que requiere la comprensión de variables multidimensionales y complejas. En esta investigación, se analiza este tema, con la metodología cualitativa con el fin de comprender las atribuciones que el estudiante le da a la nota de clase considerando su historia escolar y las prácticas del profesor de matemáticas de una forma holística (Cedeño, 200; Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

Uno de los problemas que enfrenta la educación universitaria en México es el aprendizaje de las matemáticas, la mayoría de los estudiantes no adquieren los conocimientos y habilidades necesarias durante el nivel educativo medio superior que les permitirá afrontar las demandas de los programas universitarios (Boch & Piolat, 2005; Arancibia, Herrera & Strasser, 2008; Martínez, 2018). Éste mismo fenómeno se ha observado en los otros niveles educativos (Caballero & Espínola, 2016; Larrazolo, Backhoff & Tirado, 2013). Es el caso de la Universidad Autónoma Metropolitana Campus Iztapalapa (UAM-I), en donde la investigación que realiza Rodríguez (2019) identifica las causas y los motivos que ocasionan la deserción escolar en todas las carreras de la UAM-I. Según Rodríguez la carencia de habilidades y herramientas de estudio y autogestión del aprendizaje en los jóvenes universitarios. Estas carencias provocan un bajo rendimiento académico lo que aumenta las posibilidades de deserción (2019).

Para Boch & Piolat (2005) las instituciones educativas no proporcionan una guía y apoyo para que los estudiantes aprendan técnicas de estudio. Mucho menos técnicas estratégicas de toma de notas les permitan organizar y construir el conocimiento, pues la mayoría se centra comúnmente en enseñar técnicas para comprender y escribir textos académicos. Dejando a la

intuición y a la imitación del estudiante como las formas más comunes para aprender a tomar notas de clase.

El uso de las notas tiene una influencia positiva durante el proceso de aprendizaje, en especial cuando los estudiantes las personalizan utilizando técnicas de organización de la información (Monereo y otros, 2000; Piolat, Olive & Kellogg, 2005; Cobos, 2013; Arce, Conejo, Ortega, 2016; Espino-Datsira, 2017; Pilar, 2018) estas son llamadas *notas estratégicas* ya que cumplen con una finalidad determinada en el proceso de enseñanza-aprendizaje entonces el conocimiento que adquiere el estudiante de esa forma adquiere otras características dentro del aprendizaje determinadas por la forma de reflexión del estudiante cuando se pregunta qué, cómo y cuándo debo anotar, a diferencia de las *notas literales* que aunque pueden cumplir una finalidad para el estudiante son notas que carecen de estrategias de elaboración y de apropiación.

El estudiante al anotar estratégicamente pone en acción funciones metacognitivas para “evaluar” la información que le proporciona el docente y para la reelaboración de sus propios significados (Monereo, 1999). Fuera del aula, es utilizada como un recurso de aprendizaje y material de estudio ya que se puede recurrir varias veces para consultar la información, revisar el contenido nuevamente y en ocasiones complementarla sin la necesidad de la guía del docente, la sociabilización con sus pares o de su asistencia a la clase.

En la educación superior se esperaría que los estudiantes al terminar su proceso de formación hayan alcanzado el perfil de egreso deseable de su programa de estudio. En el caso de las ingenierías, el perfil determinado por la Universidad Autónoma del Estado de Morelos en el Plan de estudios de la FCQeI (Plan de estudios FCQeI-UAEM, 2015) incluye rasgos como la creación, el diseño y la evaluación de sistemas/mecanismos/manuales

específicos de la carrera que necesita del desarrollo del pensamiento lógico, formal, heurístico y algorítmico a partir del aprendizaje de las matemáticas.

El razonamiento matemático (Larrazolo, Backhoff & Tirado, 2013) y la resolución de problemas para Arancibia, Herrera & Strasser (2008) son habilidades necesarias para la vida diaria que deberían enseñarse desde la educación básica ya que los niños perciben poca relación entre conceptos matemáticos y los problemas cuantitativos del entorno. Por otro lado, se debe considerar el papel que adquiere el lenguaje en la vida de un niño, a través de sus experiencias de vida y el contacto con las personas, que va desarrollando su lenguaje natural expandiendo el significado de su vocabulario, cada vez construyendo nociones más elaboradas de las estructuras del lenguaje y echando mano de los artefactos culturales como la escritura. Sin embargo, las nociones de los conceptos matemáticos están más directamente relacionados a los símbolos empleados en la notación causando incompreensión por la creencia de que es lo mismo el concepto y el símbolo o representación asociada a él (Pimm, 2002). Esta situación puede tornarse compleja de explicar si se considera además la historia de formación académica en matemáticas del estudiante y, en algunos casos, la falta de capacidad para consolidar habilidades cognitivas y de gestión del aprendizaje (Pozo & Pérez, 2009).

Si consideramos que entre los factores que repercuten en el rendimiento académico del estudiante se encuentran los hábitos de estudio y las estrategias de aprendizaje, y estos incluyen la toma de notas de clase, entonces la construcción y el uso de las notas tienen la posibilidad de colaborar con el proceso de aprendizaje en las matemáticas. Las razones de que los estudiantes no aprendan matemáticas pueden tener diferentes dimensiones -por ejemplo, la dimensión contextual, la familiar, la escolar y la individual- dentro de la dimensión de individualidad del estudiante se encuentra aquellas variables concernientes a la categoría psicoeducativa la

cual considera el uso de estrategias de aprendizaje (Closas, 2009). Closas (2009) considera que una de las estrategias de aprendizaje es elaboración de notas.

De acuerdo con Pimm (2002) un factor importante para que los estudiantes no aprendan matemáticas son las formas de apropiación e interiorización de los conceptos matemáticos por el tipo registro matemático, otro es la confusión en los estudiantes que creen que “manipular los símbolos matemáticos” en los escritos matemáticos es operar directamente los conceptos matemáticos, esto provoca incomprendiones de los conceptos matemáticos o bien arbitrariedad en el uso de las normas, reglas, conceptos o algoritmos matemáticos causando un fenómeno llamado sobregeneralización:

“Con frecuencia, hay claves simbólicas, superficiales, mediante las que pueden efectuarse cálculos, que se codifiquen como normas o reglas” (Pimm, 2002, p. 225).

Por ejemplo, cuando se quiere simplificar expresiones algebraicas y “se cancela” alguna variable:

$$\frac{4x^2}{3x} = \frac{4x\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{4}{3}x$$

En este ejemplo las equivalencias entre las expresiones algebraicas “esconden” el significado de las propiedades de campo de los números reales: la asociatividad de la multiplicación y la existencia del elemento neutro multiplicativo que sustentan algunas de las leyes de los exponentes y que podrían también emplearse para entender la convención de la simplificación de la expresión algebraica (Pimm, 2002).

La enseñanza tradicional de las matemáticas por lo general se encuentra repleta de metáforas y analogías, como por ejemplo la anterior analogía: “se cancela” y que muchas de ellas generan patologías semánticas

en los estudiantes, pues los significados de los conceptos matemáticos no siempre son recuperados de manera correcta por los estudiantes (Pimm, 2002).

Para efectos de este estudio es importante aclarar que el término de nota y el de apunte serán sinónimos para relacionarlo con la práctica de la toma de notas en el idioma inglés y que podemos encontrarlo como *note-taking* (Arjan, 2018; Makany, Kemp and Dror, 2008; Piolat & Boch, 2005; Piolat, Olive and Kellogg, 2005; Pilar, 2018; Salgado & Maz, 2013) además ubicar el término de notas a los apuntes realizados en clase. Consideremos que la etiqueta de *notas* es utilizada cotidianamente para hacer referencia a los registros escritos realizados por una persona para recordar cosas y/o puntualizar dentro de un libro algunas ideas y se asocia también al valor numérico que obtiene el estudiante en su desempeño académico, significados que no serán usados dentro de esta investigación. En algunas ocasiones la palabra apuntes hace alusión al registro documental de la clase que toma el estudiante sin embargo también es común utilizar ese término para nombrar a los manuscritos elaborados por un docente para compartirlo con un estudiante, para evitar confusiones semánticas en este estudio se empleará el término de nota. Por otro lado, para delimitar nuestro objeto de estudio y ubicarlo dentro del espacio del aula de clase para poder observarlo cuando se construya a partir de la exposición del docente y el contexto educativo que le rodea al estudiante, la nota en este contexto será llamada nota de clase.

En esta investigación se entenderá a la nota de clase como:

Al artefacto cultural que media la representación, la construcción y comprensión de conceptos científicos en el proceso de aprendizaje (Aguilar, 2011). La motivación de elaboración y de lectura de la nota de clase, se encuentra orientada por las estructuras mentales que cada estudiante posee, sus objetivos de aprendizaje y las funciones que el estudiante atribuye a la nota para el logro de estos objetivos (Pilar, 2018).

Lo que hace diferente mi investigación de otras son: la visión con que se miran las notas de clase, ya que en esos estudios han considerado a las notas como producto terminado del proceso de enseñanza -aprendizaje por el tipo de paradigma empleado. La mayoría de las investigaciones en este campo son de corte cuantitativos o mixto (Espino-Datsira, 2011; Pilar, 2018), excepto la de Monereo y otros (2000); otras diferencias importantes son que se desarrollan con estudiantes de la educación básica y media superior (Arce, Conejo & Ortega, 2016; Pilar, 2018), y el campo disciplinar de estudio no son las matemáticas (Cobos, 2013; Pilar, 2018).

La metodología empleada en esta investigación cualitativa son las técnicas de observación (Hernández, Fernández & Baptista, 2015), análisis de contenido (Andréu, s.f.) y el grupo focal, para analizar las notas de clase (fotocopias y escaneos), el material audiovisual, y las opiniones de los estudiantes recolectados del cuestionario y del grupo focal. Para el análisis de los datos recolectados se construyeron matrices comparativas en Excel y representaciones gráficas como la *descision modelling* (Miles, Huberman & Saldaña, 2014).

Capítulo 2. Planteamiento del problema

En este capítulo se desarrollará el planteamiento del problema dividido en dos secciones, la primera está orientada a las diferentes acciones que han implementado las universidades para solucionar el problema de rezago escolar en matemáticas que presentan la mayoría de los estudiantes al momento de su ingreso o de su permanencia, particularmente en el álgebra. La segunda corresponde a la justificación, que pretende visibilizar cómo la lógica de las convenciones en la enseñanza matemática (Pimm, 2002) influye en las prácticas docentes y los tipos de saberes enseñados y aprendidos en la educación Media Superior (EMS); para lo cual se utilizará como argumento el análisis realizado de la prueba PLANEA (véase anexo 8) que deja entrever las dificultades en el aprendizaje de ciertos tipos de conocimiento matemático -incluyendo el álgebra- en los estudiantes EMS.

La integración de ambas secciones dará cuenta de la realidad en la que se encuentra de la mayoría de los estudiantes que egresan de EMS, que no poseen el dominio de los conocimientos en matemáticas básicos, repercutiendo en parte de la población de estudiantes que ingresan a las universidades en México.

2.1 Los desafíos que enfrentan las universidades en el aprendizaje de las matemáticas

El aprendizaje de las matemáticas comúnmente en la enseñanza matemática queda reducido al dominio del álgebra ya que la confusión que existe por el uso del registro simbólico del lenguaje algebraico durante las transformaciones, de los conceptos matemáticos al lenguaje natural, quedan invisibles o inexistentes (Pimm, 2002). Para algunas de las carreras de nivel superior el álgebra aparece dentro de sus programas educativos, algunos

ejemplos son: la Ingeniería en Biotecnología, la Ingeniería Industrial, y la Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones en la Universidad Politécnica del Estado de Morelos (UPEMOR), o la Ingeniería Industrial y la Ingeniería Mecánica de la UAEM entre otras. El dominio del álgebra permite dar continuidad al aprendizaje de conceptos matemáticos más complejos y abstractos.

La Real Academia Española define al álgebra como parte de las matemáticas que estudia estructuras abstractas en las que, mediante números letras y signos, se generalizan las operaciones aritméticas habituales, como la suma y el producto (RAE, 2014).

Para Vygotsky (2001) el aprendizaje del álgebra se tiene que entender como los conceptos que atribuyen el desarrollo del pensamiento psíquico superior pues:

[...]la asimilación del álgebra eleva a un nivel superior el pensamiento aritmético, permitiendo comprender cualquier operación aritmética como un caso particular de una algebraica, proporcionando una visión más libre, más abstracta y más generalizada y con ello más profunda y rica a las operaciones con cantidades concretas; igual que el álgebra libera el pensamiento del niño del cautiverio de las dependencias numéricas concretas y lo eleva al nivel de un pensamiento más generalizado (2001, p. 198).

El aprendizaje del álgebra como lenguaje de las matemático (Pimm,2002) es la base para desarrollar en los estudiantes un nivel de pensamiento matemático más complejo que es requerido dentro de los perfiles de los ingenieros, ya que incluye la capacidad de abstracción, el dominio del lenguaje matemático y las habilidades de pensar en números, patrones y variables, lo que a su vez son tópicos fundamentales en una variedad de asignaturas de la educación superior (ES), tales como cálculo

diferencial, álgebra vectorial y/o ecuaciones diferenciales por mencionar algunos ejemplos (Plan de estudios FCQeI_UAEM, 2015).

Cálculo Diferencial						
Comparación entre conocimientos previos y los ejes temáticos						
Primer semestre						
Conocimientos y habilidades previos:	Contextualización de la asignatura	Unidad	Competencias específicas por unidad	Objetivos por unidad	Contribución de la asignatura a perfil de egreso	Competencias transversales
Realizar operaciones con los números reales. Relacionar los números con expresiones algebraicas. Realizar operaciones con expresiones algebraicas, de trigonometría y geometría analítica. Simplificar expresiones algebraicas mediante los productos notables determinando sus factores. Despejar y graficar variables de ecuaciones lineales y otras.	Recordarán algunos conceptos básicos del Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica para ser aplicados en los conceptos formales de: relación y formulación, función ..., límite, continuidad,	1 Funciones 2 Límites y continuidad	Aplica los conocimientos de funciones para resolver problemas de las ingenierías. Comprender el concepto de límite de funciones y aplicarlo para determinar analíticamente la continuidad de una función en un punto o en un intervalo y mostrar gráficamente los diferentes tipos de discontinuidad.	Conocer, formular y operar funciones para la resolución de problemas. <input type="checkbox"/> Determinar la existencia de límites para una función de variable real. <input type="checkbox"/> Calcular los límites de indeterminaciones frecuentes. <input type="checkbox"/> Determinar los intervalos de continuidad de una función de variable real.	Los conceptos básicos y esenciales para cualquier área de ingeniería, además de contribuir al desarrollo en el ingeniero, de un pensamiento lógico, formal, heurístico y algorítmico.	Capacidad de pensamiento crítico y reflexivo Capacidad de abstracción, análisis, síntesis y evaluación Capacidad para el aprendizaje en forma autónoma.
	..., diferencial y derivada	3 Derivadas	Comprender el concepto de derivada para aplicarlo como la herramienta que estudia y analiza la variación de una variable respecto a otra.	<input type="checkbox"/> Encontrar el valor de la derivada y aplicarla para bosquejar el gráfico de funciones. <input type="checkbox"/> Aplicar la derivada en problemas de optimización.		
	... para así definir las fórmulas y procedimientos como las herramientas matemáticas de la asignatura.	4 Aplicación de la derivada	Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y de variación de funciones.	<input type="checkbox"/> Investigar y elegir temas de aplicación de lo que está aprendiendo en el contexto de la problemática de ingeniería y tecnología. <input type="checkbox"/> Usar un instrumento computacional como apoyo tanto en el aprendizaje como en la solución de problemas de la temática de estudio.		

Tabla 1. Conocimientos previos y aprendizajes esperados en el curso de cálculo diferencial. Elaborado por Eréndira Hernández Lemus con base al Plan de estudios de FCQeI_UAEM (2015).

En la tabla 1 podemos observar los conocimientos y habilidades previas marcadas en el plan de estudios de FCQeI, se destaca la habilidad de *relacionar los números con expresiones algebraicas* pues aparece en el primer nivel de logro (NL- I) dentro de la evaluación PLANEA.

El pensamiento matemático es una forma de razonar que permite la resolución de problemas y tiene características de ser lógico, analítico y cuantitativo, más allá del uso de la notación matemática empleada. Estas cualidades del pensamiento matemático ayudan a encontrar soluciones a los problemas de modelización actuales que de acuerdo con el Plan y programa de estudios (2017) les proporciona un pensamiento organizado, crítico y divergente.

Para Thom (1973, citado por Pimm, 2002) la construcción del significado de cada concepto matemático resulta ser el problema más importante que enfrenta la enseñanza de las matemáticas incluso más que el dominio de las reglas y la utilización de fórmulas. Lo que implica un análisis desde el punto de vista lingüístico que nos permita analizar los registros matemáticos utilizados por los estudiantes a partir del registro matemático del docente, en particular aquellos que se construyen en las notas de clase (Pimm, 2002). El uso social de determinadas palabras, el cambio contextual y temporal que tanto estas como otras adquieren con el paso del tiempo hace que se mantengan ciertas prácticas culturales en la enseñanza, como el uso de las metáforas estructurales o extra-matemáticas, que producen en la mayoría de los estudiantes problemas de confusión. Esto puede manifestarse en dificultades lingüísticas de las matemáticas (Pimm, 2002).

La enseñanza matemática está inmersa de convenciones y prácticas docentes que no favorecen el aprendizaje de las matemáticas, en vez de eso, la dificultan (Pimm, 2002). Una muestra de esto son las evaluaciones estandarizadas que se aplican en México, si se consideran las características

que tienen la mayoría de los ítems y los resultados de las evaluaciones estandarizadas (como PLANEA, PISA o ENLACE) puede suponerse que la mayor parte de estudiantes tienen una deficiente apropiación del conocimiento (lenguaje) matemático y un pobre desempeño en la resolución de problemas matemáticos, considerando que la evaluación realizada corresponde a la finalización del ciclo de bachillerado el cual es el antecedente inmediato para ingreso a la carrera universitaria. Podemos también suponer, que el estudiante puede enfrentar dificultades para acceder a los nuevos conocimientos que se presentan en el nivel superior, la falta conocimientos básicos del álgebra y de estrategias para resolver problemas matemáticos pueden impedir el aprendizaje propuesto en el currículo universitario (PLANEA, 2015, 2017; PISA, 2015; OCDE, 2018, s.f.). La nota de clase puede contribuir al aprendizaje pesa a las carencias previas en el conocimiento de matemáticas por dos razones: en principio es un artefacto cultural que exterioriza las creencias, los conocimientos y las ideas del proceso de pensamiento. En segundo el docente puede aprovechar que la mayoría de los estudiantes toman notas para promover la elaboración de la nota asertiva y como instrumento de evaluación. Bajo esta lógica, la anotación estratégica sería una estrategia metacognitiva (Guerra, 2003).

Esto nos deja suponer que el estudiante ingresa a la ES con dificultades para acceder a nuevos conocimientos matemáticos que se presentan, tanto por la falta de conocimientos básicos en el álgebra como de estrategias metacognitivas para aprender a resolver problemas matemáticos. Ocasionalmente un impedimento para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos en el currículo universitario. Por ejemplo, en la UAEM los programas universitarios como los de la Facultad de Ciencias Químicas e Ingeniería (FCQeI), que ofrecen las asignaturas de cálculo diferencial, de álgebra lineal y de ecuaciones diferenciales y se encuentran saturadas de

conceptos matemáticos, enfrentan un enorme desafío para los estudiantes y docentes. El plan de estudios también incluye la *resolución de problemas*, como competencia que se pretenden desarrollar durante las cuatro unidades temáticas; la cual es considerada por Tebar (2009, citado por Ledesma, 2014) como un proceso cognitivo superior. Pasa lo mismo con la competencia transversal de la asignatura que busca la potencialización de *la capacidad de abstracción* que está asociada al proceso cognitivo superior llamado Razonamiento abstracto.

Los resultados de la prueba PLANEA, por ejemplo, en matemáticas nos muestran que un gran sector de la población en edad escolar a nivel medio superior no está aprendiendo matemáticas pues sus logros son básicos o iniciales (niveles I y II) y pocos estudiantes acceden a los NL superiores (niveles III y IV que son parte de los contenidos y habilidades fundamentales en las asignaturas en la ES). Si la mayoría de los estudiantes al término de la preparatoria no posee estos aprendizajes y habilidades elementales en matemáticas difícilmente podrán enfrentarse a conceptos más abstractos en la ES donde buscan otras formas de conocimiento –como el de resolver problemas. Ya que de acuerdo con los modelos de resolución de problemas de Krulic y Rutnic (1993, citado por Arancibia, Herrera & Strasser, 1997) y al modelo de Bransford y Stein (1984, citado por Arancibia, Herrera & Strasser, 1997) los ítems deberían al menos obligar al estudiante a utilizar una estrategia con ciertos requerimientos básicos tales como identificación y definición del problema, análisis y resolución del problema, y la valoración de la resolución. Con el objetivo de que el estudiante adquiriera nuevas herramientas conceptuales y la movilidad de la habilidad de resolver problemas en distintos campos de conocimiento.

Es discutible el papel que la educación formal a lo largo del tiempo ha tenido con cada estudiante para atender el problema de aprendizaje en matemáticas. Algunas propuestas provienen de las universidades,

clasificadas por niveles: macro, meso y micro de acuerdo con Rueda et al. (2012, citado por Luna & Rosales, 2014). Los niveles macro de estudio para el contexto institucional incluye las acciones realizadas por gobierno con sus reformas y políticas públicas educativas orientadas al aprendizaje de las matemáticas (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2018) y la promoción de investigaciones en los cuáles el objeto de estudio sea el aprendizaje de las matemáticas en sector científico (Díaz, García, García-Martín & Pacheco, 2014). Mientras que los niveles meso incluyen programas provenientes de las instituciones como los programas institucionales de atención al estudiante, de fortalecimiento de la formación integral o de servicios y equipamiento. Finalmente se tienen las acciones derivadas del nivel micro que considera los elementos y sinergias que repercuten en el proceso de enseñanza-aprendizaje, orientadas a la intervención educativa ya sea con miras a las estrategias de enseñanza, la didáctica del docente, a las cualidades de los estudiantes o bien a la organización de los contenidos curriculares de la asignatura (Closas, 2009).

En el nivel meso, diversas universidades han tomado medidas remediales para apoyar a sus estudiantes. Por ejemplo, universidades como la UAEM y la UPEMOR han desarrollado cursos propedéuticos, cursos adicionales o introductorios. Algunas han ido más allá, como la UPEMOR que en el ciclo 2014-2015 no solo ofreció un curso de regularización de tres semanas a los aspirantes, sino que además propusieron la creación de los grupos llamados Cuatrimestre Cero (Preciado, 2015). En estos se agrupo a los estudiantes que habían obtenido el puntaje mínimo en el curso propedéutico pero que querían seguir estudiando, para ello se diseñó un Plan emergente de cuatro asignaturas básicas con los conocimientos mínimos para dar frente a los conocimientos impartidos en las carreras, el cual contemplaba la asignatura de álgebra. El semestre cero inició con el año académico- al mismo tiempo que los estudiantes con mejor desempeño académico cursaban

el primer cuatrimestre. Otra estrategia de la UPEMOR en 2015 fue el servicio proporcionado por la Dirección de Desarrollo académico llamado “asesorías académicas” en las cuales un docente experto en una disciplina en particular resuelve las dudas de los estudiantes fuera del horario de clases (Comunicación personal UPEMOR). Inclusive se mandaron a imprimir unos manuales llamados ¿Cómo aprender en competencias? De la autora América N. Castañeda para que los estudiantes de nuevo ingreso conocieran el modelo educativo basado en competencias utiliza la universidad.

Otro ejemplo es la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) propuso en la Facultad de Química un programa de apoyo al primer ingreso que contemplaba: las tutorías para alumnos de primer ingreso, asesorías académicas para los primeros semestres, curso-taller de matemáticas para alumnos de primer ingreso, cursos intersemestrales preparatorios para examen extraordinario y las becas para los estudiantes (González, 2016).

Sin embargo, las medidas tienen un propósito remedial pues pretenden dotar al estudiante de los conocimientos conceptuales en matemáticas que no se desarrollaron en los niveles educativos anteriores y no contemplan los elementos de desarrollo formativo necesarios para el estudiante, que lo preparen con habilidades y herramientas culturales que pueda utilizar en su aprendizaje de las matemáticas durante toda su trayectoria en la universidad y su vida profesional.

Otras universidades buscan mitigar el problema del rezago escolar y bajo desempeño académico con un enfoque diferente, la adquisición de estrategias de aprendizaje metacognitivas, como la Universidad de Quintana Roo (Universidad de Quintana Roo, 2016) con cursos donde adquieran estas habilidades de autogestión y autoregulación del aprendizaje (Salazar, Alfaro & Jurado, 2005). La misma UNAM tiene abierto un curso e-learning llamado Aprender en la plataforma de Coursera:



Figura 1. Curso de Aprender ofrecido por la UNAM. Recuperado de <https://es.coursera.org/learn/aprendo#syllabus>

Este estilo de acciones, las IE, tratan de ayudar a que los estudiantes adquieran habilidades metacognitivas, supervisándose y haciéndose conscientes de sus propios procesos mentales para resolver problemas (Correa, Castro & Lira, 2002). Flavell 1976 citado por Correa, Castro & Lira (2002, p. 59) propone el término llamado metacognición para describir el acto de supervisión activa y regulación que se realiza cuando se quiere alcanzar una meta u objetivo concreto, por ejemplo, cuando se pretende aprender matemáticas. Una manera de estudiar e incidir directamente en los procesos de aprendizaje de las matemáticas mediante el estudio y mejora de las actividades que realizan los estudiantes durante las clases mediante ayudas significativas como la toma de notas. Como en la Facultad de Psicología y Ciencias de la Salud de la Universidad de Ramon Llull de Barcelona donde se llevó a cabo un estudio realizado por Castelló y Monereo (1999) en el cual se supuso que los estudiantes que demostraran tener un nivel alto de conocimiento estratégico serían mejores resolviendo tareas complejas por ejemplo realizando la tarea de tomar apuntes con

procedimientos más adecuados. La toma de notas de clase es una de las actividades potencialmente relevante que puede cambiar las formas de implicación del estudiante frente al conocimiento. Sin embargo, si estas notas siguen los patrones tradicionales seguirán contribuyendo a las formas de aprendizaje memorístico y mecánico (Pozo & Monereo, 2009).

Los niveles educativos por los que han transitado los estudiantes no han podido dotar a la mayoría de los estudiantes de apoyos estratégicos para el proceso de aprendizaje que favorezcan la construcción de estructuras de pensamiento que desarrollen el pensamiento matemático y de conocimiento en matemáticas que sumen a las habilidades de autogestión propias de cada persona dentro de las mismas prácticas que ya realizan los estudiantes como la toma de notas, entonces ¿cómo utiliza el estudiante a las notas realizadas en clase para aprender matemáticas dentro de la cultura de aprendizaje donde se encuentra inmerso? Si se toma en cuenta las singularidades de cada persona, sus capacidades y las habilidades desarrolladas en los niveles educativos anteriores, la forma de aprendizaje y su contexto escolar entonces las decisiones que tome y las acciones que realice para “aprender matemáticas” deberían estar orientadas no solo al desempeño académico sino a procesos de comprensión de lo que aprende (Pozo & Pérez, 2009).

Algunas veces las estrategias de enseñanza se predisponen a la tesis de que la construcción de un concepto matemático es meramente un conjunto de conexiones asociativas que se establecen en la memoria y que paulatinamente se utilizan de manera automática en un problema para su resolución (Vygotsky, 2001), teniendo como resultado que el concepto matemático no pueda surgir de procesos más profundos y conscientes en el pensamiento del estudiante. Y es cuando el estudiante se queda solo en la mecanización sin comprender conceptos y teorías que den sentido a la red de los conceptos matemáticos.

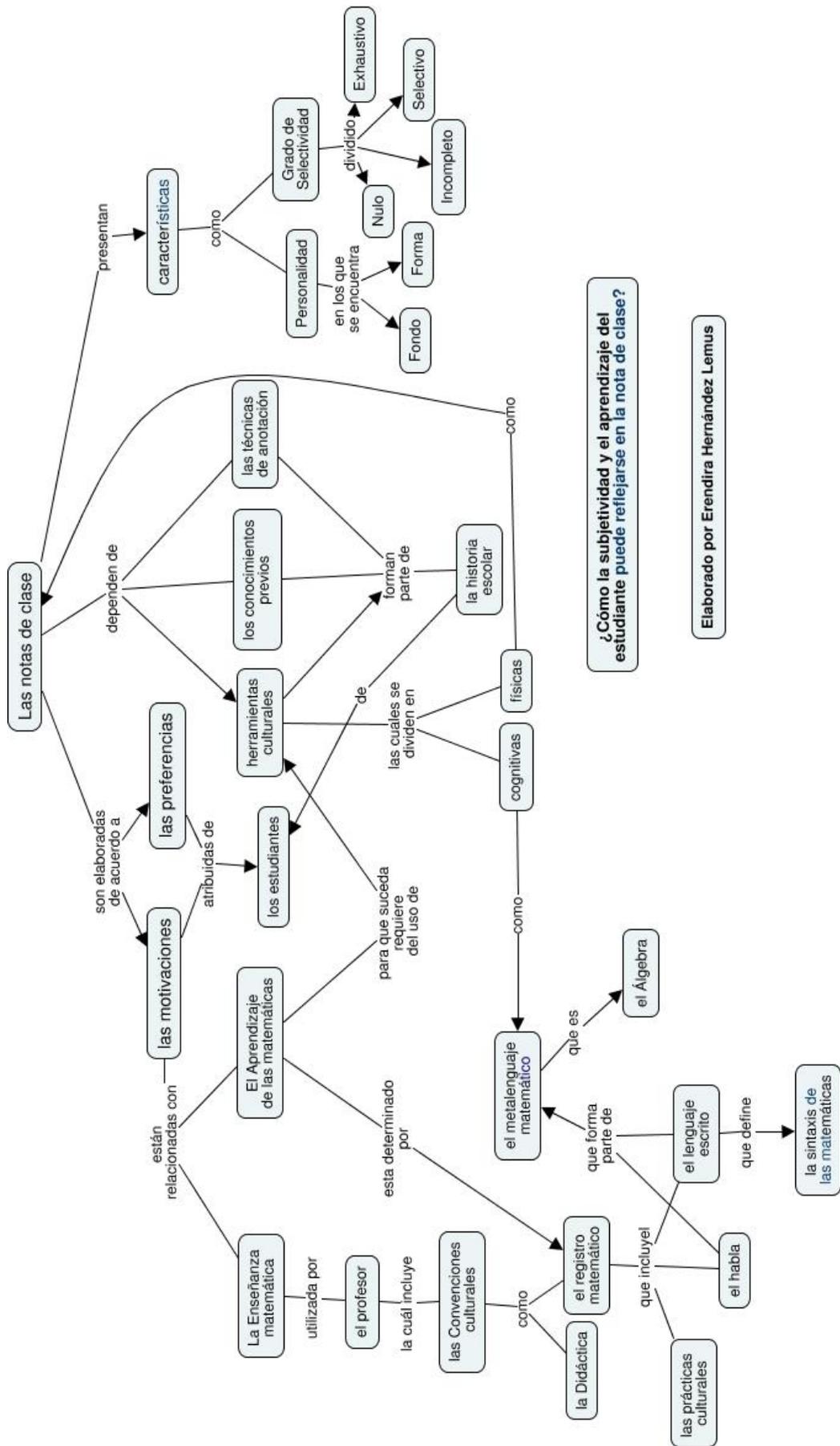
Escolano (2017) menciona que dentro de la cultura escolar se manifiestan ciertos patrones o acciones cotidianas aprendidas en la mayoría de las veces dentro de la escuela, como por ejemplo, la forma en que leemos, las formas retóricas de expresión, el gesto con que la mano toma y usa los elementos de escritura de alguna manera del tipo escribano o bien procedimientos de expresión matemática que a pesar de los cambios sufridos a través del tiempo siguen rediseñándose, adaptándose y resistiendo a desaparecer. Desde la época griega los niños cargaban sus tablillas de madera para practicar la escritura de las letras, para irse formando entre líneas al paso de tiempo como futuro filósofo o aprendiz de escribano hasta que se le otorga, por su buen hacer, las tabas de carnero. Ésta como otras prácticas que iniciaron como poieticas –adjetivo derivado de la filosofía griega a las acciones sujetas a reglas que producen un objeto como resultado como el arte- con el paso del tiempo fueron heredadas y transmitidas por el ethos de la tradición. La experiencia humana, la memoria colectiva se estructuran en formas de estereotipos registrados en un sistema de signos de un lenguaje compartido entre generaciones y de una comunidad a otra (Escolano, 2017).

Es posible verse en la actualidad dentro del salón de clases que la mayoría de los estudiantes en la universidad siguen tomando notas para registrar la información que el docente da de manera expositiva. Una investigación realizada por Castelló & Monereo (1998) encuentra que hay algunos estudiantes universitarios que toman notas de manera mecánica sin tomar en cuenta las condiciones de cada contexto. Conuerdo con David Pimm cuando afirma que:

[...] hace falta dedicar más atención a cuestiones relativas a la forma que emplean de manera espontánea los alumnos para escribir matemáticas, y lo que les parece adecuado escribir en un contexto determinado, cuando tanto el objetivo como la necesidad de escribir vienen impuestos, sin

duda, por las limitaciones de la situación... ¿Qué convenciones rigen la forma de construir los escritos? (2002, p. 195).

Pues el propósito con que el estudiante elabore la nota de clase será un factor importante para determinar las características que estas presenten, influidos por aquel contexto que en ese momento en vuelva al estudiante como estilo de enseñanza del profesor, el objetivo pedagógico de la sesión o bien el significado construido asociado al concepto matemático durante la clase (véase figura 2).



¿Cómo la subjetividad y el aprendizaje del estudiante puede reflejarse en la nota de clase?

Elaborado por Erendira Hernández Lemus

Figura 2. Mapa conceptual de las relaciones que surgen entre notas de clase y sus propósitos.

La manera en que aprendemos matemáticas, la forma en la que manifestamos ese aprendizaje y la forma en que comunicamos ese aprendizaje ya sea durante algunos de los procesos de pensamiento o bien al final de ellos, puede verse reflejados en la elaboración de la nota de clase. La nota de clase de acuerdo con las motivaciones y preferencias de quien las elabora puede tener o no, algún tipo de rasgo, especificidad, estructura, temporalidad o generalidad propias de cada persona. Es por esto por lo que me llama la atención cómo la subjetividad y el aprendizaje del estudiante puede reflejarse en la nota de clase (Monereo & otros, 2002).

En otras investigaciones se ha mostrado que la función de las notas realizadas por los estudiantes puede variar pues les pueden servir como una herramienta para focalizar la atención (Makany, Kemp & Dror, 2008), para establecer relaciones entre conocimientos previos y nuevos (Arjan, 2018), pero también puede servir para identificar las características del registro matemático usado por el profesor (Pimm, 2002) y servir como fuente del aprendizaje repetitivo y memorístico (Monereo & otros, 2000). Es por todo lo anterior que esta investigación centra su atención en las características que toma la nota de clase a partir de las atribuciones funcionales que le da el estudiante.

2.2 Cómo están los estudiantes de EMS en el aprendizaje de matemáticas de acuerdo con PLANEA

Las pruebas estandarizadas utilizadas en México para medir los aprendizajes en matemáticas de los estudiantes son la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) y el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en los cuales participa la población en edad escolarizada. Este tipo de pruebas son aplicadas para identificar el nivel de dominio que tienen los estudiantes sobre un conjunto de aprendizajes dentro de la agenda pública del país con el fin dar a conocer el estado de avance dentro del Sistema Educativo Nacional y orientar las políticas públicas en el ámbito educativo (Caracas & Ornelas, 2019; Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes [PLANEA], 2015).

Sin embargo, este tipo de pruebas utilizan un estilo de pregunta llamado ítem -del tipo de opción múltiple- elaborados con cierto grado de caracterización contextual. Se podría argumentar que dichas pruebas promueven formas tradicionales de recuerdo de conceptos matemáticos para la resolución del problema, en el cual no solo supone el predominio mecánico y memorístico (Pozo, 2014) de los conceptos matemáticos, sino que además reflejan un cierto grado de comprensión por parte de los estudiantes (Arancibia, Herrera & Strasser, 1997). Lo cual condiciona la motivación del estudiante, que en vez de incentivarlo limitan el desarrollo de su pensamiento matemático y la apropiación de saberes matemáticos mucho más complejos.

Por ejemplo, la prueba PLANEA tiene el propósito es conocer el nivel que los estudiantes alcanzan en sus aprendizajes clave en los niveles

educativos terminales de sexto de primaria, tercero de secundaria y último grado de educación media superior en dos campos de formación (PLANEA, 2017). Derivado del análisis sobre esta prueba en el anexo 8, se puede determinar que la prueba se centra en evaluar formas de conocimiento mecánico y memorístico poniendo en evidencia las carencias de algunos estudiantes que terminan EMS en el campo de las matemáticas (PLANEA, 2017) determinados por las características que presentan la mayoría de los ítems. Este tipo de convenciones y creencias se pueden notar en *Enseñanza con PLANEA* escrito por Tamayo (2019) donde propone un estilo de enseñanza en matemáticas orientado a los resultados de PLANEA y centrado en los temas que trae la prueba.

De acuerdo con PLANEA los reactivos correspondientes al campo de la matemática se construyeron con la intención de medir el nivel de logro (NL) alcanzado por los estudiantes en determinados conceptos y procedimientos matemáticos que deben emplearse para dar solución a diferentes problemas que la prueba plantea.

Porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro, a nivel nacional

Matemáticas (extracto)

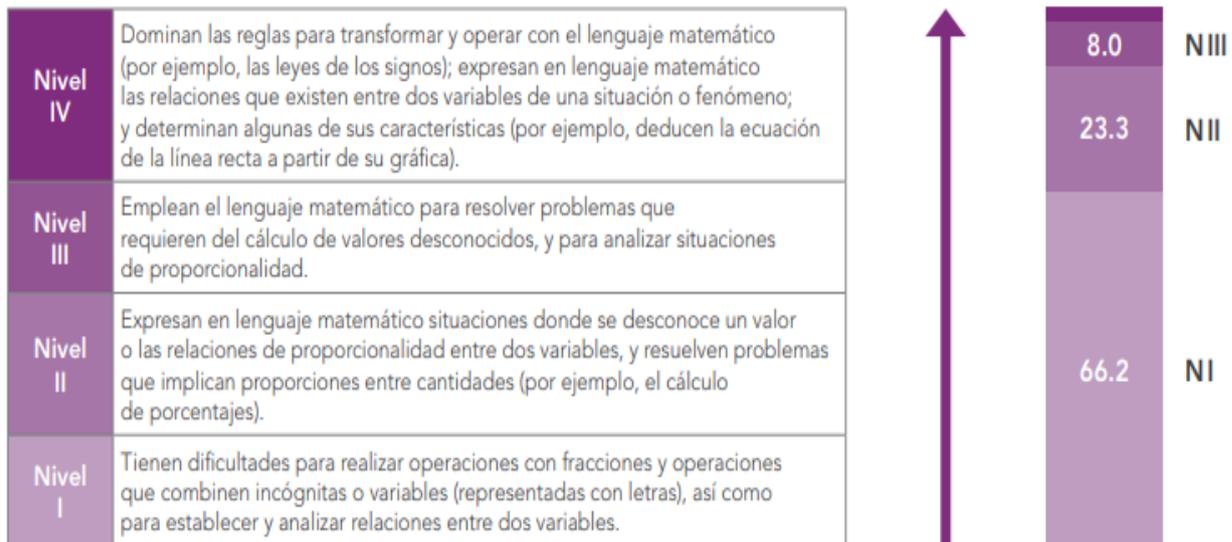


Figura 3. Aprendizajes claves de la prueba PLANEA en el nivel medio superior.

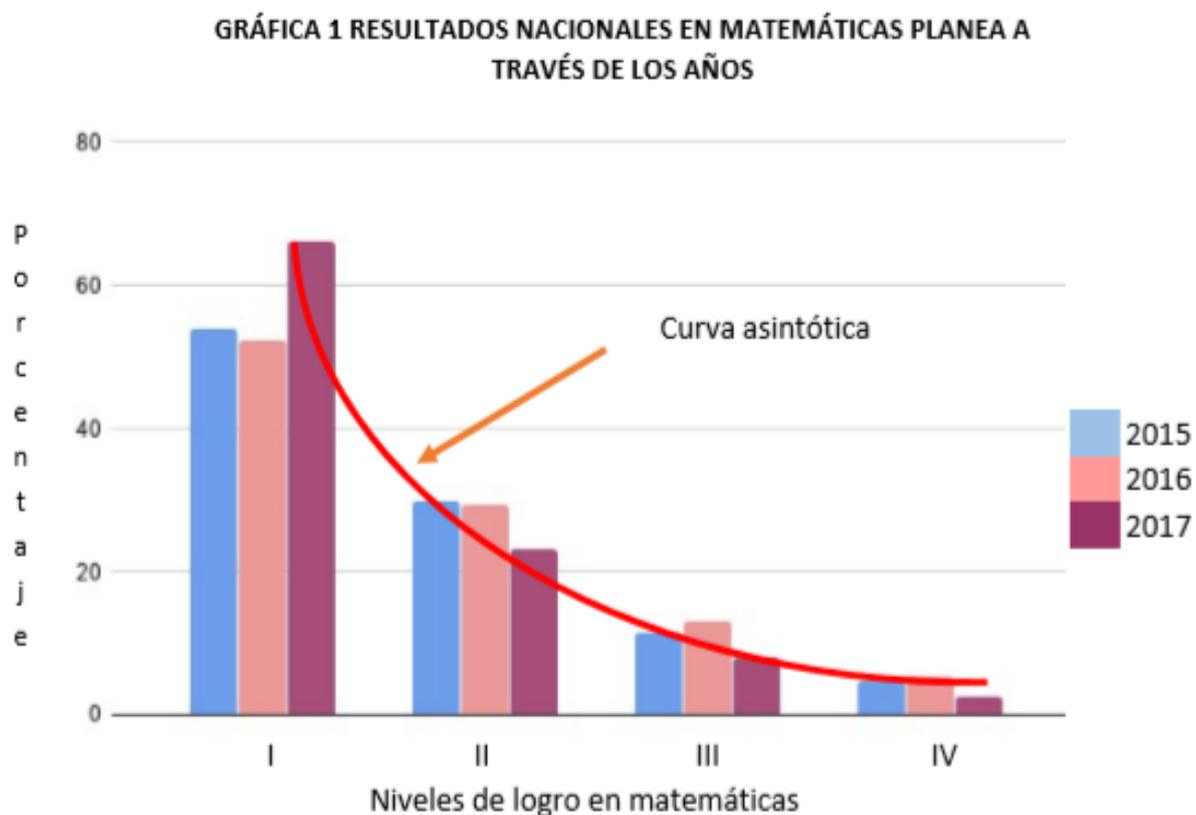
Recuperado de

<http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF>

Los NL evaluados por PLANEA se describen en la figura 3 así como el porcentaje de estudiantes del nivel EMS, los datos corresponden a la última aplicación de 2017. Si analizamos cada uno de los niveles de logro encontramos que en los NL- I y II representan el alcance o complejidad del conocimiento matemático del estudiante, aluden a aprendizajes que en parte pueden ser alcanzados o demostrado mediante estrategias memorísticas y la repetición de algoritmos mecanizados promovidos en la enseñanza tradicional por algunas escuelas. Mientras que los NL- III y IV describen conocimientos sobre las relaciones de comparación, clasificación y discernimiento a partir de conocimientos básicos de matemáticas para la solución de problemas, no llegan a promover funciones cognitivas de secuenciación como la mente extendida, y de planificación como la fluidez del pensamiento. Sin embargo, en los cuatro NL se proponen ítems desarrollados en situaciones problema tipo preguntas y ejercicios (Arancibia,

Herrera & Strasser, 1997, p. 134) no ha situaciones que requieren de un acto de pensamiento y de síntesis del conocimiento previo para su solución.

Los resultados de PLANEA, que fueron publicados a principios de 2019, muestran una parte del panorama en que se encuentran los estudiantes del nivel EMS que cursaban el ciclo escolar 2017-2018 en sus logros educativos. El número de alumnos de sexto semestre de preparatoria que participaron fue de 585,552 (véase gráfica 1).



Gráfica 1. Prueba PLANEA para nivel medio superior durante 3 años. Fuente: Elaboración propia con datos de PLANEA de la página <http://planea.sep.gob.mx/ms/>

Comparando los resultados de PLANEA desde 2015 hasta el año 2017, el porcentaje del NV- I aumentó en 2017 un poco más del 10% mientras que en los demás niveles se presentó una tendencia a la baja, lo que significa es que en estos tres años el porcentaje de estudiantes que cuentan

con menos conocimientos y destrezas para resolver problemas de matemáticas que superan el NL- I es mayor.

Llama la atención que en estas generaciones los porcentajes de cada año comparados con los NL alcanzados siguen un comportamiento asintótico (véase la curva dibujada en la gráfica 1), esto podría predecir que en ciclos escolares futuros la tendencia del porcentaje de estudiantes que alcanzan el NL-IV seguiría disminuyendo. Por lo que podemos considerar un reto educativo el elevar el nivel de logro de aprendizaje de los estudiantes para revertir el comportamiento de la curva en los próximos años. Como se muestra en la gráfica 1, el NL- IV (dominio del lenguaje matemático) es alcanzado por una proporción menor de estudiantes, pues contiene reactivos que para ser resueltos requieren procesos de inferencia, ello supone un pensamiento abstracto en el cual el uso de esos conceptos matemáticos tiene menor relación con sus expresiones directas, gráficas o físicas. Una ausencia conceptual importante que podría explicar que un estudiante no logre estos niveles de logro dado el pobre dominio del álgebra- en el siguiente capítulo se presenta un resumen del análisis que se realizó a de la prueba PLANEA-.

Los NL- III y IV no representan desempeños extraordinarios fuera del currículum que deban dominar los estudiantes (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) pues son parte de los planes y programas que en la EMS deberían enseñados para que la mayoría de los estudiantes alcanzarán estos NL. Pero no solo la EMS da por hecho que los estudiantes egresan con los dominios de NL más alto, adicionalmente también el currículum universitario (incluyendo profesores y evaluaciones) considera dentro de sus planes y programas el supuesto de que el estudiante ingresa con estos conocimientos y competencias (Aldana, 2013).

En consecuencia, la problemática que enfrenta México sobre los aprendizajes memorísticos y mecánicos de las matemáticas que propicia la mayoría de las prácticas de enseñanza en la EMS, se recrudece en la ES. Aún

con el esfuerzo de varias universidades por mitigar los efectos en el aprendizaje de sus estudiantes la lógica de constructo de esas acciones va encaminado a un objetivo remedial y por ende no atienden el problema desde su origen. Podrían proponerse en los espacios áulicos, que ya existen, enseñar y aprender el uso de herramientas de autogestión para el aprendizaje y de estrategias metacognitivas de aprendizaje, como la anotación estratégica.

2.3 La pregunta de la investigación

- ¿Qué características tienen las notas realizadas en clase de matemáticas y por qué se elaboran con esas características?

Preguntas subsidiarias:

- ¿Qué características tienen las notas de clase?
- ¿Bajo qué tipo de condiciones y situaciones los estudiantes elaboran las notas de clase?
- ¿Cuáles son las atribuciones que el estudiante le da a la nota que elabora en clase de matemáticas?

Objetivos de investigación

- Identificar las características que tienen las notas que se realizan en clase de matemáticas.
- Describir las funciones que los estudiantes les atribuyen a esas notas a partir de las condiciones y situaciones de la clase de matemáticas.
- Establecer los alcances y las limitaciones de la nota de clase desde la percepción del estudiante.

Considerando que el propósito de la investigación es analizar las características que tienen la nota realizada durante el desarrollo de la clase de matemáticas y que los estudios presentados en las secciones anteriores solo han podido dar una limitada interpretación de cómo se realiza la toma de la nota de clase y su clasificación, en las cuales suponen un contexto en particular no hacen una exploración de la relación entre el registro matemático (contexto) y las motivaciones o intenciones de los estudiantes por anotar. Mi investigación es de alcance exploratorio preguntándome hasta

donde la teoría de marco conceptual permite explicar lo que sucede con la nota cuando esta se elabora en un campo específico como el de las matemáticas, que utiliza un sistema de notación muy particular (Pimm,2002). En este estudio se busca comparar las notas de clase realizadas por los participantes durante dos meses aproximadamente (Vásquez, s.f.), mientras que al mismo tiempo se observa el registro en el cual se desarrollan las sinergias de la clase.

Aunque esta investigación considera algunas de las técnicas y elementos de la etnografía escolar no cumple con la mayoría de los rasgos ya que las observaciones que se tienen planeadas no se harán de manera recurrente; y además no comparto su objeto de estudio, pues mientras que para mí el foco de mi estudio fueron las notas de clase -que pertenecen a una forma de registro escrito y manifestación de estos fenómenos- el escenario escolar solo fungirá como situación condicionante para la toma de notas.

Mi propuesta metodológica incluye algunos otros métodos como el análisis de contenidos cuando se quiera comparar las notas de clase de los estudiantes, de cierta manera el doble rol de observador- anotador; finalmente cabe remarcar que la intención en esta investigación no es proponer alguna intervención docente.

Se pretende con este estudio aportar a la matemática educativa elementos teóricos pedagógicos que puedan ser empleados en otros estudios posteriores por ejemplo el de intervención en el aprendizaje matemático o en la creación de talleres de facilitación del aprendizaje de matemáticas.

Capítulo 3. El aprendizaje de las matemáticas

En este capítulo se presentan las exigencias que impone la educación formal y las convenciones de la enseñanza matemática los diversos niveles educativos, la mayoría de las veces, en los estudiantes la necesidad de expresar ideas matemáticas dirigiendo el desarrollo de registros matemáticos con el propósito de fomentar el discurso sobre las ideas, objetos y procedimientos matemáticos (Pimm, 2002) y entender qué características tienen este tipo de registros y las consecuencias que tiene para la escritura matemática será fundamental cuando tenga que analizar las notas de clase realizadas en matemáticas.

Además, se presenta *la Teoría sociocultural* del Aprendizaje de Vygotsky en la cual establece que el lenguaje es una herramienta cultural que permite hacer cambios en las formas de pensar (Vygotsky, 1987).

Para Pozo (2014) a medida que la vida escolar avanza en el desarrollo del estudiante los aprendizajes de matemáticas en esos niveles educativos requieren que la actividad mental matemática se extienda para poder responder a la complejidad de sus propios conceptos. Por lo que se requiere de un sistema de notación que medie estos procesos cognitivos ofreciendo un mayor margen de oportunidad a la nota de clase. Por otro lado, se incorpora la teoría de la *Trasposición didáctica* para identificar las prácticas de enseñanza a las cuales el docente recurre al dar clases.

Se cierra el capítulo con los detalles de las investigaciones que se han realizado sobre las notas de clase, sus alcances y limitaciones en el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, se incorpora un resumen del análisis que se realizó a los reactivos de la prueba PLANEA para que ayude a entender qué tipos de aprendizajes son promovidos durante el trayecto escolar de los estudiantes

de nivel EMS, que pueden explicar las atribuciones que los estudiantes le dan al aprendizaje y al uso de las notas de clase.

3.1 Anotar durante la clase de matemáticas

La nota de clase es un registro material elaborado por el estudiante mediante el cual procesa y representa la información proporcionada por el docente durante la secuencia didáctica (Pilar, 2018; Arce, 2016), en su forma tradicional el registro se realiza sobre un soporte de papel utilizando pluma o lápiz, los soportes más comunes son la libreta y la carpeta.

En el análisis de una nota de clase pueden considerarse características de formato, tipografía, los tipos de escritura, los signos especiales y los signos de validación (Pimm, 2002). Otras propuestas ponen atención en características como: la estructura de los documentos, el estilo de escritura, léxico, la lengua en que está escrito y al léxico (Arce, 2016; Pilar, 2018). Sin embargo, dichas categorías están más orientadas a documentos escritos oficiales, históricos o institucionales más que a los registros obtenidos como producto del proceso formativo escolar como la nota de clase, por lo que se considerará las investigaciones realizadas por Monereo et al. (2000) como la base de las categorías para iniciar el análisis de las notas de clase de matemáticas.

Las características del estudiante, el contexto dónde se elabora la nota y el propósito que cumple para el estudiante le dan ciertas características a la nota de clase tanto en la forma en que se representa la información como en el contenido que se registra (fondo). Las características de fondo que van desde el tipo y la cantidad de información, la fuente de la información hasta lenguaje algebraico empleado (Pimm, 2002), los errores ortográficos (Zárate, 2015) o de comprensión (García, Robaina & Aparicio, 2019); por otro lado, la forma que considera los colores utilizados, el tamaño de letra,

la forma de organización –la fecha, el título, los objetivos de la secuencia didáctica, etc.-, los conectores de información y la representación gráfica-simbólica de la información –dibujos, gráficas, tablas, mapa, entre otras (Aguilar, 2011)-. Por ejemplo, los elementos presentes en una nota realizada en la clase de taller de lectura y redacción no serán los mismos elementos de otra realizada en la clase de matemáticas. Pueden tener diferencias en el tipo de léxico y semántica utilizada, el lenguaje empleado, en la cantidad de palabras escritas, la lógica y métodos de resolución de los problemas, entre otras; y además presentar aspectos en común como la fecha, el título, las notaciones de las indicaciones de un trabajo y de las tareas.

Monereo et al. (2000), proponen una taxonomía para los estudiantes que anotan, en ella distingue dos tipos de escritores, a los copistas y los estratégicos cuya diferencia se centra en la concepción que tienen de anotar. Los primeros entienden el acto de anotar como la reproducción de la información proporcionada en la clase mientras que, para los estratégicos, el acto de anotar es la oportunidad que tienen para construir y apropiarse de la información de manera personalizada.

La nota de clase se puede considerar como un instrumento mediador entre la tríada de la estructura conceptual, la fenomenología (compuesta por situaciones, contextos o problemas que están en el origen del concepto y le dotan de sentido) y los sistemas de representación escrita de los estudiantes de acuerdo con las adecuaciones realizadas por Arce, Conejo y Ortega (2016).

Dentro de un aula de clases de matemáticas se puede comúnmente observar a los estudiantes que:

- I. Se pasan la mayoría de la clase transcribiendo la información proporcionada por el docente al hacer su apunte (Pozo & Monereo, 2009).

- II. Tienen momentos específicos para anotar. Por lo que la nota pudiera tener información sintetizada o bien porque atiende a ciertas necesidades durante la clase.
- III. Acompañan su nota con audios, fotos o videos. Por lo que la nota que se produce guarda un momento contextual de la información.
- IV. La mayoría del tiempo de la clase observan la exposición del docente y no anotan frecuentemente. Por lo que la nota que se produce pudiera ser más desorganizada y descontextualizada del tema de clase.
- V. Algunos estudiantes no tienen una tendencia marcada de las cuatro anteriores por lo que se desconoce si existe o no constancia de algún tipo registro escrito.

Pero ¿hasta dónde la práctica de tomar notas es útil para aprender matemáticas? Podemos revisar la siguiente tabla 2 de estudios que se han realizados para conocer el papel que juegan las notas/ la toma de notas:

Características de investigaciones que toman a la nota/ apunte como objeto de estudio				
CARACTERÍSTICAS	INSTRUMENTO	INVESTIGACION	CONSIDERACIONES	AUTOR(ES)
	Marcos de análisis de contenidos (Rico y colaboradores); mapas de elementos y relaciones para hacer una comparación.	Descriptivo-interpretativo	Entrevistas por parejas realizadas a varios estudiantes participantes, sobre su elaboración y uso del cuaderno.	Matías Arce Sánchez, Laura Conejo Garrote, Tomás Ortega del Rincón (Arce, Conejo, Ortega, 2016)
Buscaba el impacto de la estrategia de la toma de notas en el desarrollo comprensión auditiva Prueba piloto	*Permiso. *transcripciones de la entrevista. Test de comprensión auditiva. Análisis de contenidos.	Estudio descriptivo correlacional	Entrevista pre y post	Adriana Cobos Cifuentes (Cobos, 2013).
1. Caracterizar la toma de apuntes atendiendo al punto de vista de los estudiantes. 2. Reconocer diferencias en la forma de considerar la toma de apuntes atendiendo a tres variables: género, semestre cursado y área de conocimiento.	Tareas de lectura y escritura para aprender en la universidad, elaborado por LEAC (2014).	Estudio exploratorio de carácter descriptivo.	Ajustes en terminología y adecuaciones para el idioma.	Sandra Espino-Datsira (Espino-Datsira, 2017)
Describe Estilos, modelos, usos, y esencialmente, la importancia que podrían tener en la construcción del conocimiento, promoviendo conceptualizaciones o beneficiando su adquisición.	Bitácora de observación, cuestionario, entrevista de su procedimiento de su investigación. Estructuración de Monereo.	Estudio descriptivo		Ana M. del Pilar Pérez (Pilar, 2018).

Tabla 2. Investigaciones encontradas donde las notas/toma de apuntes. Elaborado por Eréndira Hernández Lemus.

La tabla 2 muestra las características de los estudios de Arce, Conejo & Ortega (2016), Espino-Datsira (2017), Cobos, A. (2013) y Pilar (2018). A pesar de sus diferencias en el tipo de investigación, los instrumentos que utilizaron y las consideraciones que se hicieron para llevarse a cabo, estos estudios guardan una. Relación, ya sea de manera explícita o implícita. En los cuatro estudios se busca conocer con qué frecuencia es usada tradicionalmente las notas y el impacto de su uso en el desempeño académico. Sin embargo, las notas de clase pueden atender a las situaciones del contexto que se le presenta al estudiante, es decir pueden ser pedidas por el docente para formar parte de la evaluación, pueden ser construidas en un acto costumbre dentro de una formación tradicional y adoctrinada, o bien para registrar la información que deberán tener escrita y presente en su evaluación pero no necesariamente puede ser vista por estudiantes y docentes como una herramienta estratégica para el apoyo del aprendizaje (Pozo & Pérez, 2009). Y es que no todas las notas pueden apoyar el aprendizaje lo cual implicaría que las notas deben cumplir con ciertas características. En la enseñanza tradicional es poco común tocar el tema de manera directa sobre la elaboración de una nota de clase; ni siquiera las técnicas de anotación son aceptadas por el sistema educativo como estrategia de estudio ya que solo contempla el uso de los libros de texto como herramientas para el estudio y el resto de los materiales son útiles escolares, entre ellos las libretas y su contenido.

3.2 Las notas de clase como un tipo de escrito matemático

Las matemáticas disponen de un registro matemático muy definido de convenciones con el cual dentro del aula la mediación del docente genera no solo sinergias sino sistemas particulares de habla y de escritura. En particular el escrito matemático responde a una determinada funcionalidad y se encuentran relacionado con el contexto social en donde se realiza, condición que influye en la construcción de los significados alrededor de un concepto matemático (Pimm, 2002).

Además, cada docente tiene un estilo de enseñanza matemática que se manifiesta tanto en el discurso hablado como en el escrito en el pizarrón durante la clase de matemáticas, a pesar de la diversidad de los estilos de enseñanza en matemáticas la mayoría de los docentes utilizan ciertas herramientas lingüísticas de manera recurrente con el objetivo ayudar a los estudiantes a comprender una idea o algún concepto (Pimm, 2002) ayudando a conformar un sistema semántico. Estas herramientas son tradicionalmente las metáforas y las analogías que de no ser empleadas correctamente o bien explícitamente aclaradas y delimitadas a los “ojos del estudiante” pueden causar problemas de confusión por las ambigüedades correspondientes a las diferentes variedades semánticas a las que atiende las palabras, causando comúnmente una obstrucción a la expansión del significado conceptual (Pimm, 2002).

Un registro matemático es un cúmulo de tecnicismos y expresiones propias de la disciplina matemática, los usos que se les dan, el mismo proceso de adición de palabras nuevas, los modos característicos de argumentar y de adquirir el dominio del registro matemático (véase figura 4).

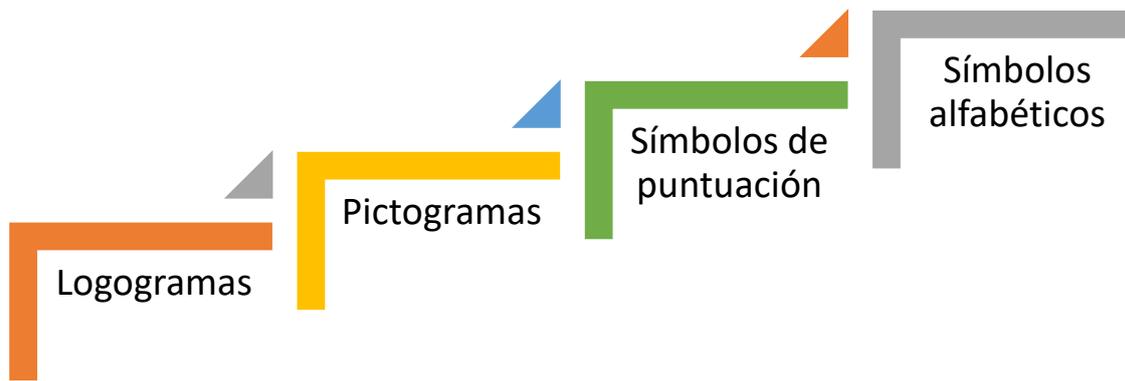


Figura 4. Símbolos que se emplean en los escritos matemáticos.

Según Pimm el “aprender matemáticas” implica para varios docentes enseñar a los alumnos a que adopten sus formas de sistematizar procesos, resolver problemas, sus formas de hablar –dialecto matemático- y el uso adecuado de la notación matemática.

El lenguaje hablado a comparación del lenguaje escrito es invisible y efímero. Un escrito permite al lector tener el control en el flujo de la lectura, pero un escrito matemático en construcción ¿qué favorece? Flavell (1971, citado por Guerra, 2003) ejemplifica un proceso metacognitivo como el análisis del enunciado de un problema algebraico -una ecuación- que se hace de forma consciente para saber qué operación debe utilizarse. Para Cobos (2013) y Pilar (2018) la toma de apuntes resulta ser una estrategia de carácter metacognitivo porque podrían reflejar en la elaboración supervisada conceptos genuinos y personalizados donde se revalorice la comprensión y se construyan significados.

Pimm (2002) propone cuatro relaciones pertinentes que deben considerarse en la enseñanza matemática: 1) los tipos y usos del material escrito por el docente, 2) las estrategias de lectura del alumno, 3) los estilos de lenguaje en clase, 4) las funciones que cumple la escritura para alumno.

El acto de escribir puede responder a razones generales o específicas del ámbito escolar, por ejemplo, por presiones sociales como evidencia del

“aprendizaje logrado”, también funciona como modo de control del docente para organizar a los estudiantes otorgándole un periodo de calma que le permite supervisar la dinámica particular y general del grupo. Además, le sirve al docente como medio para calificar y evaluar para el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera valorativa. Y si el docente posee una actitud crítica y reflexiva que le permita percibir, dentro de la nota de clase, las formas de conceptualización y apropiación de la información del estudiante (Pilar, 2018). Entonces si la escritura matemática puede ayudar a exteriorizar las ideas y las construcciones conceptuales del pensamiento de los estudiantes la nota de clase puede contener información relevante para los docentes sobre los avances que llevan en los procesos de pensamiento, las interpretaciones de los estudiantes de los conceptos matemáticos, las relaciones conceptuales o simbólicas que el estudiante realiza y también los errores que se manifiestan en ellas.

3.2.1 Estilos de escritos matemáticos

Pimm (2002) describe tres estilos de escritos matemáticos de acuerdo con la cantidad de notación matemática y lenguaje natural registrado en el escrito: verbal, mixto y simbólico.

El tipo verbal hace referencia a aquel escrito que no requiere notación matemática especial, pero la mayoría de su registro escrito se lleva a cabo mediante palabras reconocibles acompañado de los símbolos numéricos. El segundo estilo llamado mixto se refiere al estado de transición en el que aparecen tanto como palabras como ciertos símbolos matemáticos especiales, un ejemplo de esto son escritos que incluyen el uso de las fórmulas. El tercer estilo es el simbólico, es el escrito en el cual disminuyen las palabras reconocibles- en el lenguaje natural- y tiene en su mayoría símbolos y signos en su contenido. Este último estilo es el parámetro “ideal”

que docentes y/o matemáticos estructuran sus objetivos pedagógicos para que guíen sus formas, usos y costumbres docentes.

En los idiomas alfanuméricos, como el castellano, se requiere de relaciones estructurales para la creación de palabras, en la escritura matemática no es diferente por ejemplo se utiliza la yuxtaposición de símbolos para la construcción de representaciones semánticas que representen al concepto. Es por ello por lo que el sistema de notación de la escritura matemática tiene aspectos en el lenguaje escrito como son: el uso del color, el orden, la posición, el tamaño relativo, la orientación y la repetición (Pimm, 2002).

Sin embargo, como los conceptos matemáticos son abstractos, ya que son creaciones del ser humano, por su naturaleza no se pueden trabajar, manipular o utilizar directamente por lo deben ser “nombrados” en el lenguaje natural y esta “palabra” a su vez es relacionada a un símbolo. Y es en este estado de transformación cuando es posible realizar la manipulación y operación, según las reglas y convenciones, como si fueran los objetos matemáticos mismos, con los cuales pueden efectuarse cálculos y obtenerse resultados. De no tener conciencia de esta transformación, la relación entre el símbolo y el objeto matemático, y sus atributos por separado de forma independiente, se pueden generar patologías semánticas originadas por un tipo de metáforas llamada metáfora de conducto (Pimm, 2002).

Se debe considerar la sintaxis de las formas matemáticas escritas también desde la teoría lingüística sintáctica de Chomski (1957, citado por Pimm, 2002) pues varias de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se derivan del empleo de transformaciones pasivas. Por ejemplo, en la construcción de cierta oración gramática cuando se unen dos estructuras no relacionadas por transformaciones, la oración será *ambigua*. Por ejemplo, la expresión aritmética $4-8+1$ es ambigua comparada con $4+8+1$, ya que no se percibe la transformación interna de $(4-8)+1$.

De acuerdo con Pimm (2002) los dos tipos de transformaciones que comúnmente se encuentran en aritmética y en álgebra son las llamadas estructurales y oracionales. Dentro de los escritos matemáticos las transformaciones de modificación estructural se pueden manifestar en actividades de simplificación, de notación ampliada del valor posicional, de eliminación de paréntesis o en la factorización. Para las cuales la mayoría son reversibles. Sin embargo, es común que el docente se centre en la forma que adquieren las transformaciones más que en las transformaciones mismas (Pimm, 2002).

Las reglas sintácticas matemáticas por otro lado son enseñadas y aplicadas en un nivel superficial. Lo que causa otro tipo de dificultades que provienen de la confusión y la formulación de las transformaciones, por ejemplo, la que proviene de la yuxtaposición de símbolos, la cual tiene significado diferente en aritmética en álgebra, tal como $20.0 \rightarrow 20$ y $a*b \rightarrow ab$, tienen significados distintos. Sin embargo, el fenómeno de la sobregeneralización de las reglas puede explicar que algunos estudiantes eliminen signos a conveniencia (Pimm, 2002).

Por otro lado, se encuentran las transformaciones oracionales, que operan en expresiones completas, en donde dos expresiones son ligadas mediante una relación de la igualdad o desigualdad. Es común que el fenómeno de sinonimia por equivalencia entre oraciones matemáticas produzca la pérdida de los resultados obtenidos en el proceso del cálculo. Esto es claro al resolver la ecuación $x^3-x=0$. En particular el uso desmedido del signo “=” como enlace entre las oraciones matemáticas genera incomprensión de las transformaciones y herramientas matemáticas ya que se da la impresión solo de una manipulación de símbolos (Pimm, 2002).

Finalmente, Pimm (2002) concluye que la falta de significados “los humanos, en su mayoría, son menos dados que las máquinas para aprender y aplicación reglas”, por lo que atienden a la necesidad de aprender una

sintaxis aparentemente arbitraria de las formas simbólicas y no de las transformaciones.

Por lo que también sugiere Pimm (2002) que se fomente el aprendizaje de la gramática transformacional, que incluya el metalenguaje, y se investigue la forma en que emplean los estudiantes la escritura matemática de acuerdo con su percepción del contexto. Si consideramos que las notas de clase son uno de los diferentes tipos de escritos matemáticos que se construyen en el aula (Pimm, 2002), el análisis de su contenido puede ser revelador para conocer los usos que les dan los estudiantes en clase en el registro específico del Cálculo Diferencial.

3.2.2 Las notas de clase utilizadas con un propósito de aprendizaje

Krulik (1993) da ocho sugerencias descriptivas para trabajar la mente extendida en los procesos de razonamiento de los estudiantes. Estas sugerencias tienen que ver con un ambiente escolar no atemorizante que fomente la creatividad en el pensamiento y la imaginación, la planeación y ejecución de actividades que se trabajen en equipo para la promoción de aprendizajes colaborativos, del planteamiento de preguntas detonadoras de pensamiento, el uso de la calculadora como apoyo del aprendizaje, y nuevas formas de evaluar habilidades de pensar.

Llama la atención el punto número siete que dice:

7. Hacer que los alumnos reflexionen sobre sus propios procesos de pensamiento. Cuando se ha resuelto un problema y se ha llegado a la solución, la atención del alumno debe centrarse en qué tipo de razonamiento se usó: qué hicieron, por qué lo hicieron, y cómo lo hicieron. Deben pensar acerca de esto individualmente y luego compartirlo (...) (1993, citado por Arancibia, Herrera & Strasser, 2007, p. 166)

Algunas técnicas de toma de nota pueden facilitar el proceso del estudiante de reflexión sobre los procedimientos presentados por el profesor, pueden plantear o contestar a las preguntas de qué, por qué y el cómo se hizo orientando al proceso de aprendizaje por comprensión. Un ejemplo es la técnica de anotación Cornell o de apuntes TH -que hacen referencia a la *toma de apuntes* a partir de la información proporcionado por el docente y la escritura de aquello que viene a la mente del estudiante (Kasuga, Gutiérrez & Muñoz, 2000; Hernández, 2015)-.

La promoción de creatividad, imaginación y del uso de recursos en matemáticas deben ir más allá de las convenciones que se tienen en la enseñanza matemática. Para Arancibia, Herrera & Strasser (1997) es necesario cambiar de prácticas en la enseñanza que modifiquen los métodos didácticos, por ejemplo, la promoción en el uso de bitácoras metacognitivas y párrafos resumen por parte del docente, que ayuden a los alumnos a pensar acerca de su propio pensamiento o bien las pruebas tengan estructuras de preguntas abiertas que le permita al estudiante pensar creativamente y de una respuesta escrita para que el docente examine el proceso de pensamiento empleado.

Pozo (2014) menciona que el aprendizaje de las matemáticas empieza por la utilización de representaciones encarnadas hasta pasar a las representaciones abstractas, donde el sistema de notación cultural propio al interiorizarse modifica, ajusta y reconstruyen la mente numérica del estudiante. En donde el uso de los distintos tipos de representaciones va cambiando en respuesta de las tareas que se le requiera el contexto. Por otro lado, la mayoría de los estudiantes tiene un limitado número de operaciones matemáticas que pueden hacerse, en ocasiones, sin recurrir a sistemas de notación externa; luego a medida que la complejidad de la vida social y

escolar de los estudiantes aumenta, estos requieren de representaciones desligadas del contexto y de las restricciones encarnadas (Pozo, 2014). En el ámbito escolar, este tipo de situaciones requieren del diseño de actividades mediadas por herramientas culturales que ayuden a la exteriorización de las representaciones que se forman alrededor de las matemáticas y que consideren las dimensiones tecnológicas, culturales, instruccionales, cognitivas y de aprendizaje. Estas herramientas pueden ser los textos escritos (Pozo, 2014), más específicamente las notas de clase.

3.2.3 La anotación estratégica en el aprendizaje de los estudiantes

Es común dar por sentado por parte de los docentes en la ES que los estudiantes dominan las habilidades de lecto-escritura (Morales, Rincón & Romero, 2005; Aldana, 2013) y que eso garantiza que saben tomar notas de clase. Sin embargo, la realidad es muy diferente en muchas universidades, ya que algunos estudiantes anotan ideas incompletas, incorrectas o dejan pasar la información relevante de la clase (Monereo, 2009).

Monereo & Castelló (1999) considera que la toma de notas cuando se plantea como estrategia metacognitiva, es una técnica que involucra procesos sociocognitivos cuya forma dominante es el registro selectivo de información en la universidad. Y considera que la nota es una herramienta de construcción del conocimiento que tiene varias características psicolingüísticas de carácter educativo: supone un discurso intermedio entre el discurso externo del docente y el discurso interno del estudiante generado por la capacidad de autogestión de información que poseemos; favorece la intertextualidad, es un producto físico que visibiliza algunos de los aspectos de la cultura del aula, es también un mediador que confronta la información recibida con los propios conocimientos, el ejercicio de la toma de notas

facilita el desarrollo de habilidades que comprenden acciones como seleccionar, enfatizar, sintetizar y razonar; finalmente percibida de manera más general la toma de notas es un procedimiento más versátil y común en los estudiantes que se puede extenderse a otros espacios y momentos del aprendizaje.

En el estudio realizado por Monereo y otros (2000) con dos grupos de estudiantes universitarios en España analizándoles sus apuntes en tres asignaturas distintas, se consideran dos dimensiones para la construcción de la taxonomía de anotación, el primero por el grado de anotación literal o cantidad de contenido y la segunda dimensión determinada por el grado de personalización con los que matiza a la nota, véase figura 4. La dimensión definida como grado de selección contempla que si un estudiante anota más de $\frac{3}{4}$ partes de la información dada por el profesor se considera como una anotación del tipo exhaustiva; la anotación selectiva resulta ser aquella con menos de las $\frac{3}{4}$ partes de lo que presenta el docente y donde aparecen las ideas importantes del tema expuesto por el docente desde el punto de vista del profesor, y la anotación incompleta que presentaba algunas de las ideas básicas. La dimensión de personalidad está orientada al uso de representaciones gráficas que aparecen en el apunte del estudiante, el nivel de parafraseado y el grado de inclusión de conocimientos previos personales del docente (figura 5).

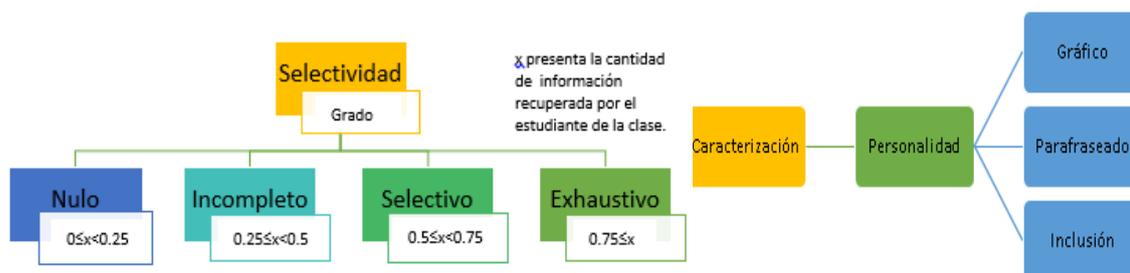


Figura 5. Dimensiones consideradas para la clasificación de los anotadores consideradas por Monereo et al. (2000).

Con ayuda de estas categorías y el análisis de la información se obtiene una descripción de las características de dos tipos de tomadores de notas los “copistas” y “estratégicos.” Se diferencian entre sí en cuanto al sentido y significado dado a sus notas, las características de lo que anotan y las condiciones en que lo hacen. Estas diferencias se describen en la siguiente matriz (véase tabla 3):

Concepciones sobre la toma de apuntes		
	ANOTADORES “COPISTAS”	ANOTADORES “ESTRATÉGICOS”
Significado y sentido de la anotación	<ul style="list-style-type: none"> • Anotar= Reproducir la clase. • Clase= Transmisión de contenidos. • Apunte= Función de registro. • Actúa como memoria externa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Anotar= Identificar la estructura de la clase. • Clase= Situación de aprendizaje. • Apunte= Función epistémica. • Actúan como guía del aprendizaje.
Características de la anotación	Anotación literal y exhaustiva. No evitan repeticiones. Anotan lo evaluable: conocimiento conceptual-declarativo.	Anotación personalizada y selectiva. Anotan lo evaluable: conocimiento conceptual-declarativo. Evitan las repeticiones.
Condiciones de la anotación	Se ajustan a la velocidad expositora del docente. Prefieren un guión inicial y una exposición lenta (facilitar la copia). Recuerdan únicamente detalles y anécdotas de las clases. Estudian los días antes del examen.	Ajuste a la metodología del profesor, a la naturaleza del contenido, a los recursos disponibles, al tipo de evaluación y a la importancia, interés o novedad del tema. Prefieren un guión inicial y una exposición lenta (favorece a la reflexión). Recuerdan información relevante de la clase.

Tabla 3. Cuadro de los resultados obtenidos en el estudio de Monereo y otros entre el sentido y significado de la anotación recuperado de Tomar apuntes: Un enfoque estratégico (Monereo et al., 2000, p. 115).

En ese estudio se obtuvieron doce resultados posibles de la combinación de ambas dimensiones, pero de los cuales solo se encontraron seis en esos grupos muestra al clasificar los apuntes de cada una de esas tres asignaturas distintas. Posteriormente se entrevistó a los anotadores para contrastar lo encontrado dentro del apunte (tabla 4). Esta tipología de las estrategias de anotación utilizada por los estudiantes derivada de la primera dimensión de Monereo et al. (2000) fue importante para mi estudio por porque proporcionó las categorías que podrán guiar la observación de la clase, mientras que la

dimensión de personalidad ayudará a dar las categorías iniciales para el análisis de las notas de los estudiantes participantes.

Con esta comparativa de apreciaciones entre ambos perfiles de anotadores sobre lo que se entiende por anotar y por qué anotan, Monereo concluye que anotar estratégicamente es una forma efectiva para favorecer el aprendizaje en el nivel superior, para ello propone un estudio de intervención de un taller sobre la toma de notas que consideraba 4 aspectos: organización de la información, ampliación de las notas, reflexión sobre lo anotado y la calidad de lo anotado (Monereo y otros, 2000).

3.3 ¿Existe alguna relación entre la escritura a mano y el aprendizaje?

Cuando el proceso de escritura se encuentra guiada por el docente, es decir, que en las actividades de aprendizaje se implique al estudiante en la construcción de productos escritos, la escritura puede ser una herramienta para el desarrollo conceptual (Willis, 2011). Escribir, por ejemplo, como parte de una actividad de dictado, ejercita y produce otros aprendizajes, pero no conceptuales, ya que estos requieren de un nivel de implicación distinto del estudiante en el proceso de aprendizaje y construcción de conocimiento.

Boch & Piolat (2005), en su artículo *Writing Across the curriculum* [Escribiendo a través del plan de estudios] mencionan que la toma de notas es una actividad que atraviesa a todas las disciplinas con dos intenciones dentro del currículum escolar el primero es que ayuda a los estudiantes a aprender y el segundo es que la toma de nota ayuda al estudiante a aprender a escribir. Para estos autores la nota de clase cumple con dos funciones: como registro de información y como medio para cumplir una meta de aprendizaje, a las cuales los estudiantes responden con estrategias de anotación orientadas a dos estilos opuestos: la copia-regurgitación o a la reformulación-interpretación. Estrategias similares a las descritas por Monereo et al. (2000) y presentadas en la tabla 4. Si el propósito de la nota solo es el registro de la información expuesta por el docente entonces la función de la nota no es la reflexión y se orienta al estudiante a aprender memorísticamente.

Las notas, por tanto, su función y elaboración responde a las concepciones sobre el aprendizaje que tenga el estudiante, y también, en un sentido práctico a las demandas que supongan las formas de evaluación.

Para Cary & Calson las notas de clase pueden ayudar a gestionar el tiempo de estudio, pues son similares a un borrador de la mente donde se

plasma la información codificada y sigue el progreso de la solución de un problema (1999, citado por Boch & Piolat, 2005, p.102).

El proceso de aprender no solo implica interiorizar la información sino además debe estar acompañado de la movilidad del conocimiento adquirido, es el caso de los conocimientos que ayudan a resolver problemas del tipo ejercicio o pregunta que deberán trasladarse después a la resolución de problemas reales (Piolat, Olive & Kellogg, 2004).

De acuerdo con Makany, Kemp & Dror (2008) la actividad de tomar notas debe hacerse de la forma menos mecánicamente posible, aunque la escritura pudiera suponer la automatización de la capacidad motriz y visual para realizarse; la toma de notas requiere de escribir y registrar la información con un sentido propio para el estudiante. La anotación puede tomar un papel importante dentro del proceso de atención y registro de la información donde no solo se procesa sino además se organiza y reestructura, el resultado de realizar de esta manera la toma de notas puede derivar en un cambio de las estructuras cognitivas existentes -al momento de aprender, comprender, reflexionar y entender- y que son modificadas al incluir nueva información cambiando la estructura cognitiva del sujeto (Makany, Kemp & Dror, 2008). Y por qué no más consciente de la actividad que se está realizando para poder aprovechar no solo el acto de escribir para aprender sino la oportunidad de crear una nota personalizada y útil para el mismo estudiante.

La tesis doctoral de Arjan (2018) llamada *Elucidating the Cognitive Processes involved in the note-taking Effect* [Elucidando los procesos cognitivos a través de la toma de notas] tiene un enfoque psicológico y utiliza dos muestras de 127 y 129 participantes universitarios de Colorado con el propósito de realizar dos experimentos distintos. La hipótesis central del

estudio es investigar cómo el procesamiento generativo- el aprendizaje por asociación entre el conocimiento previo y el nuevo-, la síntesis y la atención sostenida tienen características superpuestas. Arjan encontró que el procesamiento generativo parece ayudar a los estudiantes que no toman notas más que a los que sí, mientras que el acto de anotar estratégicamente favorece a los estudiantes que sintetizan la información de la clase, sus resultados de desempeño son mejores que de los estudiantes que tienen un formato libre de anotar. Por otro lado, Arjan atribuye un mejor desempeño de los estudiantes y mayor retención de conocimiento (más tiempo) al acto de tomar de notas más que al contenido que tenga la nota. Concluye que la atención sostenida y la tarea cognitiva –la toma de notas- resultan ser las condiciones mínimas para que ocurra el aprendizaje y no siempre es suficiente que el estudiante escuche la clase pues inevitablemente el estudiante puede orientar su atención a cualquier evento que suceda en el salón de clase –distractor-. Y este es el resultado más relevante para Arjan pues para él la toma de notas en clase puede funcionar como un antídoto cognitivo para evitar el aburrimiento y la distracción.

El proceso de escritura a mano en comparación con la escritura con el teclado, se diferencian en la retención de la información, la concentración en la tarea, la estabilidad de lo aprendido y la reflexión (Longcamp, Boucard, Gilhodes, Anton, Roth, Nazarian & Velay, 2008; Pérez, 2015; Willis, 2011 Hulme, 1979).

Pérez (2015) en su estudio acerca de los componentes sensorio-motrices de la metacognición que subyacen en el proceso de escritura a mano y la escritura con teclado y que guarda un impacto en el aprendizaje discute los mecanismos psico-neurológicos en la práctica de la escritura a mano. Hulme (1979, citado por Pérez, 2015, p.249) argumenta que existe una mayor

memorización de los elementos abstractos con la actividad del trazo que con la actividad de solo mirarlos.

Pérez (2015) encuentra en la revisión documental varios estudios que mencionan la existencia de una conexión directa entre el sistema sensoriomotor con secciones específicas del cerebro producida por la actividad de tomar notas. Por ejemplo, en uno de estos estudios a un grupo de niños se les pide a trazar con la mano unos caracteres y a otros niños solo se les indica mirar esos mismos caracteres. La tarea de categorización se manifiesta en los niños del primer subgrupo pues aprenden las distintas variaciones de la letra, esta tarea implica que el niño debe comprender las propiedades perceptivas y las variaciones del trazo activando áreas cerebrales perceptivas motoras esta actividad neuronal es “parecida a la madurez” en el adulto, el acto de escribir activa la corteza premotora izquierda que no se activa cuando el niño solo hace el acto de mirar las letras. Dentro del documento Pérez deja de manifiesto que las ventajas de escribir a mano son:

- Estabilización interna de los conocimientos ya que tienen mayor posibilidad de mantenerse en la memoria por los lazos con el sistema sensoriomotor.
- Promueve el enfoque atento del estudiante a la clase.
- Favorece la memoria a largo plazo.
- Le proporciona al cerebro tiempo para la reflexión.

Estas posibilidades de la escritura a mano, y que son destacadas por Pérez, dependen de tipo de actividad y la función que cumple la escritura de acuerdo con esa actividad.

En un estudio realizado por Longcamp, Boucard, Gilhodes, Anton, Roth, Nazarian & Velay (2008) donde participaron 12 adultos que tuvieron que aprender letras desconocidas en la modalidad de escritura a mano y teclado, se encontró que el acto de escribir a mano hace que las zonas

sensoriales del cerebro encargadas del reconocimiento de letras, de la memoria y de la capacidad lectora se activan de diferente manera que cuando se realiza la escritura con el teclado.

Sin embargo, esto varía con base en los contextos y las condiciones en que se llevan a cabo las notas. Por ejemplo, personas que han crecido con las TIC'S-nativos digitales o no- para los que el uso de otro instrumento como el teclado no limita la conexión sensorial con el cognitivo, la diferencia proviene en que se activan otros sectores cerebrales que ayuden a “suplir funcionalmente” esa actividad (Longcamp, Boucard, Gilhodes, Anton, Roth, Nazarian & Velay, 2008), es posible discutir entonces que el aprendizaje de una persona no está determinado por las herramientas cognitivas o los instrumentos utilizados, sino que esto pudiera estar más orientado a condiciones de carácter histórico-culturales y ambientales que molden la forma individual y personal de cada individuo para aprender. De lo contrario, aceptaríamos que todas las personas aprendemos de la misma manera y utilizamos los instrumentos y las herramientas con los mismos propósitos, lo cual no es cierto (Alonso, Gallegos & Honey, 1994; Gutiérrez, 2018). Sin embargo, es posible argumentar que la estimulación sensorial influye en el sistema cognitivo de procesamiento necesario para el proceso de aprendizaje, independientemente del instrumento utilizado, y que debemos optar en identificar aquellos elementos que necesita cada estudiante para que consiga su meta de formación académica.

3.4 Teoría sociocultural del Aprendizaje de Vygotsky

La teoría Sociocultural del Aprendizaje creada por Lev Vygotsky me servirá para argumentar de qué manera la nota de clase puede verse como un artefacto mediador para el aprendizaje, ya que su elaboración supone un proceso mediante el cual la información proporcionada por el profesor es un elemento importante que debe ser procesado e interpretado por el estudiante. Otro aspecto relevante de la teoría para este estudio es que permite entender que los conceptos matemáticos académicos se desarrollan y cambian sus funciones dando lugar a nuevas formas pensamiento abstracto a lo largo del tiempo en contacto con los demás.

Esta teoría sostiene que el desarrollo cognitivo de los niños se origina en el contexto sociocultural y altamente influenciado por la interacción social (Guerra, 2003). Para que el niño aprenda, los sujetos que se encuentran en interacción con él deben apoyar, direccionar y organizar actividades que le permitan interiorizar estructuras conductuales y cognitivas que requerirá para poder enfrentar alguna actividad más compleja, el desarrollo es visto por Vygotsky como un proceso en el cual la actividad de aprendizaje más importante ocurre en la llamada Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), que implica un espacio de conquista en que con ayuda de artefactos culturales y de otros el niño tienen logros más allá de lo que implicaría la actividad sin estas ayudas y más allá de sus aprendizajes individuales (Vygotsky, 2001). A este tipo de artefacto, Vygotsky les nombró herramientas culturales, se caracteriza por ampliar nuestras posibilidades de acción y su forma de uso es aprendido culturalmente (Vygotsky, 1987). Puede ser utilizado para mediar la interacción entre los sistemas de representación o bien mediar el aprendizaje y la interpretación de los conceptos matemáticos (Aguilar, 2011)

Vygotsky retoma los experimentos de Ach que fue el primero en superar el asociacionismo para sentar su base en los procesos de formación de conceptos. Para Ach la formación de los conceptos inicia cuando surge de la necesidad de realizar una determinada tarea especializada y terminan de formarse cuando el significado de la palabra se construye, sin embargo, no considera que el significado de la palabra puede cambiar durante el desarrollo del niño -hecho que si encuentra Vygotsky-(1921, citado por Vygotsky, 2001). La creación de una cadena de asociaciones, la perseverancia, la tarea específica y el objetivo no son suficientes para formar nuevos conceptos (2001, pp.120-123). El aprendizaje de los conceptos matemáticos, así como todos los conceptos científicos, siguen el recorrido de una lógica general a una lógica de lo particular, camino contrario del aprendizaje de los conceptos cotidianos.

Las actividades que realiza el estudiante, que se encuentran organizadas por el profesor y la institución, cuando estas ocurren en la ZDP ayudan al desarrollo las funciones psíquicas superiores, en donde es necesario la introducción de situaciones artificiales que estimulen más allá de ya conocido y desarrollado por el estudiante para que busque “otras formas de pensamiento de diferente naturaleza” -pensamiento abstracto- que posibiliten la construcción de los conceptos matemáticos que le permitan acceder a un dominio del lenguaje algebraico (Vygotsky, 2001; J.R. Delgado, 2014).

El aprendizaje de los conceptos matemáticos es un proceso de aprendizaje distinto al de los conceptos cotidianos, pues los primeros requieren de una forma específicamente organizada que utiliza la escritura y el habla para el desarrollo de significados (Vygotsky, 1987), mientras que el aprendizaje de los conceptos cotidianos ocurre en la vida diaria, y algunos de ellos de manera implícita y no necesariamente intencionada.

La acción del profesor es fundamental para proponer actividades en contextos ricos para fomentar el aprendizaje. De acuerdo con la teoría de la transposición didáctica propuesta por Yves Chevallard, cualquier objeto matemático debería ser transpuesto a una situación didáctica, es decir, dentro del aula el objeto no debe enseñarse de manera directa con su definición matemática o forma abstracta si no debería ser transpuesto a un objeto matemático escolar para poder ser enseñado (Chevallard, 2000).

Se debe entender que tanto los niños como los adolescentes y los adultos resuelven problemas, pero los resuelve de manera diferente. Ambos operan mediante conceptos donde la palabra es el instrumento para la comprensión mutua, aunque para el infante la palabra no funciona como un concepto sino como un preconcepto. Riman menciona que:

El pensamiento en conceptos, emancipado de los rasgos perceptibles, para un niño supone exigencias que exceden sus posibilidades mentales previas a los doce años de vida (1925, citado por Vygotsky, 2001, p.120).

Es hasta la adolescencia cuando el sujeto reflexiona sobre sus conceptos y necesita interactuar con el objeto de otras maneras menos directas. Al final de esta etapa de desarrollo el adolescente debe haber superado la dificultad de transferencia del significado del concepto a diferentes contextos incluso a su plano abstracto, esto supone el desarrollo de una conciencia acerca del propio pensamiento y sus propósitos (Vygotsky, 1982, p.170-172).

Otra aportación de Vygotsky a la teoría del desarrollo de los procesos psicológicos es la metáfora de los instrumentos psicológicos. Los *instrumentos psicológicos* son funciones psíquicas cuyo desarrollo permiten la regulación de la actividad psíquica elemental, como es la memoria, la atención y el habla. Su desarrollo depende de un contexto histórico y social, por lo que una de sus formas es la mediación de los procesos de manera intramental de los sujetos. La regulación de la actividad de aprendizaje, en

este plano, depende de las ayudas dadas por los profesores, sus padres o sus pares más experimentados. Estas mediaciones, pueden darse como una parte del discurso de la clase, mientras realiza el análisis guiado de un tema o durante la formulación de preguntas detonadoras al grupo en donde se utiliza al lenguaje, igual que los signos, para orientar el rumbo de los procesos mentales, al mismo tiempo que los estudiantes interiorizan saberes, los cuales pasan del plano intermental al plano intramental.

Estos mediadores posibilitan la interiorización del mundo externo y de la misma manera que organizan nuestros procesos psicológicos internamente. Necesarios para el aprendizaje, ya que una determinada conducta puede ser modificada por una serie de procesos cognitivos de comprensión y reflexión del estudiante, que ayuden a la concientización del entorno a partir de la convivencia con el otro (Vygotsky, 1987).

Por otro lado, consideremos que el pensamiento puede observarse y parcialmente entenderse a través de la comprensión de las funciones que adquieren los instrumentos y signos como mediadores en la resolución de una tarea. De acuerdo con Vygotsky (2001), la diferencia de los conceptos cotidianos respecto a los conceptos matemáticos escolares es que el aprendizaje de estos últimos requiere y dan origen a otras estructuras de generalización, lo que reorganiza las formas de pensamiento y por ello las funciones psíquicas superiores. Los procesos de aprendizaje corren en dos dimensiones, la primera en el plano interpsicológico que posibilita la acción del sujeto en el segundo plano llamado intrapsicológico (Vygotsky, 2001). Para Delgado J.R. (2014) desde una perspectiva vygotskiana, la actividad del docente debe promover el uso del lenguaje no solo como mecanismo de comunicación con otros sujetos (plano interpsicológico), sino como herramienta psicológica del estudiante para la internalización de conceptos, en este contexto el apunte funciona como mediador entre los conceptos matemáticos y el estudiante (intrapsicológico).

El lenguaje ya que es un sistema estructurado de símbolos organiza la composición mental del estudiante, que continuamente van cambiando la interpretación de la realidad y construyendo nuevas proyecciones de ésta, por lo tanto, la nota de clase vista como herramienta cultural puede registrar esa organización y reorganización de la información proveniente del desplazamiento del pensamiento de cada persona.

Cabe mencionar que para la teoría Sociocultural el lenguaje se desarrolla mediante la interacción con otros, en particular también el registro matemático requiere de esta interacción de la guía del experto en este caso del docente y del apoyo entre los pares es, decir, sus compañeros.

3.5 La didáctica de las matemáticas

En la enseñanza de las matemáticas, es común que varios planos se encuentren interrelacionados por conceptos en común, pero deben ser analizadas desde enfoques diferentes; por ejemplo, desde la didáctica, desde las teorías de aprendizaje o desde la disciplina científica misma. Para Yves Chevallard (2000) el sistema didáctico es el conjunto formado por tres elementos: el docente, el estudiante y el saber matemático en el cual alrededor de él se crean relaciones didácticas. La *Transposición didáctica* es una herramienta utilizada por el docente para analizar los objetos de los saberes científicos y de las disciplinas y prácticas científicas para transponerlo dentro de los saberes escolares que le permita al docente enseñarlo; desprendiéndose de la familiaridad engañosa de su objeto de estudio, es decir lo que le permite ejercer al docente la vigilancia epistemológica pero al mismo tiempo en otro plano le permite al docente organizar la información que le proporcionará al estudiante alrededor del concepto matemático (Chevallard, 2000).

Esta propuesta pone de manifiesto que un saber sabio-concepto científico- debe ser transpuesto-ajustado, modificado, reconstruido en el plano escolar- para poder ser enseñado reconceptualizándolo en un saber escolar. Es decir si se hace referencia al concepto multiplicación como saber científico debe ser transpuesto y reconstruido por el profesor para presentarlo como un saber escolar, para poder enseñárselo a los estudiantes- por ejemplo basado en la recursividad de la suma con el mismo valor cuántas veces fueran necesarias- o bien para resolver problemas con esta herramienta matemática que permite movilizar el concepto hacia otros razonamientos de mayor complejidad como el cálculo de $1^{100000}=1$ -que requiere hacer una deducción- incluso trasladarlo a otros escenarios fuera de las situaciones planteadas en

la escuela como en el mercado o la casa que impliquen el uso de la herramienta conceptual en su vida diaria.

Yves Chevallard menciona que es importante enseñar el objeto matemático desfragmentándolo sin que pierda sus características ni sus propiedades, de tal manera que el proceso de abstracción se dé de manera natural y pueda irse construyendo de manera biyectiva entre su forma real y la abstracta (Grisales & González, 2009). Y aunque esta actividad es propia del docente, si el estudiante pudiera hacer una revisión crítica y reflexiva en las notas de clase podría ayudarse a realizar procesos metacognitivos asociados al significado del concepto matemático y sus elementos. Permittedle al estudiante hacer comparaciones, ajustes y aproximaciones del concepto para comprenderlo, ajustes que requieren de procesos cognitivos muy particulares que debe hacer el estudiante.

3.6 Las características de los estilos de aprendizaje de Kolb

David A. Kolb durante la década de los años 70's, identificó dos dimensiones principales para el aprendizaje la percepción y el procesamiento de la información ya que el aprendizaje es el resultado de la forma en que una persona percibe algo y luego procesa lo que ha percibido. Kolb define a los estilos de aprendizaje como:

[...] algunas capacidades de aprender que se destacan por encima de otras como resultado del aparato hereditario de las experiencias vitales propias, y de las exigencias del medio ambiente actual. Llegamos a resolver de manera característica, los conflictos entre el ser activo y reflexivo y entre el ser inmediato y analítico. Algunas personas desarrollan mentes que sobresalen en la conversión de hechos dispares en teorías coherentes, y, sin embargo, estas mismas personas son incapaces de deducir hipótesis a partir de su teoría, o no se interesan por hacerla; otras personas son genios lógicos, pero encuentran imposible sumergirse en una experiencia y entregarse a ella (citado por Alonso, Gallegos & Honey, 2007).

Los estilos de aprendizaje incluyen aspectos cognitivos como: dependencia-independencia de campo, conceptualización y categorización, relatividad frente a la impulsividad, modalidades sensoriales y rasgos afectivos; y aspectos fisiológicos (Alonso, Gallegos & Honey, 2007).

Describió dos tipos de percepción opuestos:

1. Experiencia concreta (EC). En el cual la actividad cognitiva del estudiante relaciona la información recogida durante la experiencia a través de los sentidos, es decir se aprende con ayuda de los sentidos.
2. Experiencia activa de los conceptos nuevos (EAc). Ocurre cuando el estudiante busca a través de los conceptos su aplicación y la comprensión que ha tenido de ellos le permite buscar nuevas circunstancias donde cobrar significado (Lara, s.f.).

Además, propone que el procesamiento de la información puede ser analizada a partir de:

1. Observación y reflexión de la experiencia (OR). El estudiante aprende revisando lo que va haciendo o lo que va experimentando, creando un espacio de reflexión que permite además razonar.
2. Formación de conceptos abstractos basados en la reflexión (AC). El estudiante interpreta las cosas percibidas del exterior, encontrando relaciones entre ellos. El pensamiento y la dinámica entre las ideas y conceptos que lleguen a generalizaciones y conceptualizaciones (Lara, s.f.).

La yuxtaposición de las dos formas de percibir y de procesar se acomoda en un arreglo gráfico, similar a un plano cartesiano (véase anexo 2), que permite la formación de cuatro combinaciones llamados estilos de aprendizaje (EA) que pueden analizarse en la tabla 4:

Relación entre estilo de aprendizaje, sus características y las actividades que favorecen ese EA

Estilo de aprendizaje	Características de cada EA	Algunas actividades y recursos que favorece al EA
Divergente o reflexivo	EC+OR El aprendiz posee gran capacidad imaginativa, de reflexión, de visualización para tener diferentes enfoques de una situación concreta y puede formular ideas se interesa por las personas y es emotivo/a y creativo.	Lluvia de ideas, mesas redondas, actividades de trabajo en equipo, ensayos, crucigramas, predicciones de resultados, realización de experimentos, adivinanzas, acertijos o puzzles.
Asimilador o teórico	CA+ OR Tiene la capacidad para crear modelos teóricos, tiene un razonamiento inductivo; su interés se centra más en los conceptos abstractos que en las personas, le gusta reflexionar y disfruta la teoría.	Lectura de textos, informes escritos, dictados, investigaciones, diccionarios, notas o conferencias, trabaja mejor con actividades individuales, de análisis y de planeación.
Convergente o activo	CA+ EAc El aprendiz trabaja más con las aplicaciones, le gusta resolver problemas, el razonamiento es hipotético deductivo, es poco emotivo y prefiere los objetos que las personas.	Manuales, gráficas y mapas, orientación, ejercicios, experimentos o demostraciones prácticas, trabaja mejor con actividades técnicas y de aplicación.
Acomodador o pragmático	EC+ EAc Es intuitivo/a y arriesgado/a, se le gusta llevar a cabo planes, es dependiente de otras personas y se siente cómodo/a con ellas. Es asistemático, sociable y su pensamiento es holístico.	Trabajos grupales, proyectos, gráficos ilustrativos, se le facilita las manifestaciones de expresión artística, estudio de campo o experimentos científicos.

Tabla 4. Estilos de Aprendizaje de acuerdo con Kolb. Elaborado por Eréndira

Hernández Lemus. Basado en Romero, Salinas & Mortera (2010).

Algunas actividades pueden coincidir por la forma en que se combinaron la forma de percepción y procesamiento de la información, por ejemplo, fórmula EC+ EAc del aprendiz acomodador coincide con EA del estudiante Convergente, es decir, a este tipo de aprendiz les favorecen tomar un rol activo, pero se diferencia del estudiante acomodador que no puede trabajar conceptualmente pues debe estar en contacto directo con el objeto de estudio. Pasa lo mismo con las demás combinaciones. Estos EA le permitieron a

David Kolb proponer un modelo de aprendizaje para la estructuración de una secuencia didáctica, llamada Ciclo de Aprendizaje, en la cual se selecciona y organiza una serie de actividades alrededor de un tema o contenido curricular de tal manera que cualquier estudiante, sin importar el EA de los estudiantes del grupo, tenga al menos una actividad que le favorezca su forma de aprender dentro esta secuencia didáctica (véase tabla 4).

Como resultado de su investigación, González (2011) concluye que si el docente conoce el EA de cada estudiante y lo considera durante la planeación y el desarrollo de las actividades -ciclo de aprendizaje-, permitirá que los estudiantes alcancen su autoreconocimiento y la autonomía de su aprendizaje. Menciona que existe una interrelación entre los aprendizajes, los estilos de aprendizaje, las estrategias de aprendizaje y las técnicas de aprendizaje utilizadas.

Por otro lado como los EA son las capacidades que le permiten aprender a un estudiante requieren de herramientas culturales para que estas puedan seguir desarrollándose; en la escuela la nota de clase puede ser utilizada por el estudiante de acuerdo a los requerimientos que se le pida el docente pero con la oportunidad de personalizar el contenido, algunas veces para atender las indicaciones de la clase y otras para el uso propio donde sobre salgan rasgos cualitativos del EA y con estas manifestaciones del lenguaje escrito orientar a otros estudiantes a construir sus notas de clase para aprender con el mismo EA que él (Pilar, 2018). Para ello se utiliza un test de EA para identificar la tendencia del estilo preferido para aprender que convive con otras formas y estrategias de manera no excluyente.

3.7 PLANEA un ejemplo de evaluación estandarizada empleada en México para medir aprendizaje de las matemáticas

La prueba PLANEA está diseñada a partir del Plan de estudios de la educación básica y del Marco Curricular Común de EMS y pretende evaluar los aprendizajes claves del currículo alcanzados por los estudiantes del nivel medio superior (INEE, s.f.). Se evalúan dos campos de formación: lenguaje y comunicación, y matemáticas conformada por 271 reactivos de opción múltiple (PLANEA, 2017). La prueba PLANEA se aplica a los estudiantes que cursan el sexto semestre del nivel medio superior y cada reactivo representa de alguna manera a los contenidos curriculares en matemáticas de cada nivel, unidos estos argumentos con los anteriores la lógica –del discurso de la educación formal- la mayoría tienen más problemas para dominar y comprender los conceptos matemáticos mientras que el resto de los estudiantes, en particular los que alcanzan el NL-IV, son minoría, situación que no solo pasa en el estado de Morelos sino se repite en todos los demás estados. La prueba PLANEA nos da ayuda a visualizar que la mayoría de los estudiantes no dominan ciertos conocimientos matemáticos memorísticos y mecánicos. De igual manera, los resultados en la prueba PISA, aplicada a jóvenes de 15 años de edad que se encuentran próximos al egreso de la secundaria y el ingreso a la preparatoria, parece encontrar problemas similares (OCDE, 2018); y también el Programa para la Evaluación Internacional de las Competencias de los Adultos (PIAAC) que buscaba determinar el rendimiento de los sistemas de educación muestran que esta parte de la población tienen un bajo dominio en la Competencia numérica y de Resolución de problemas (OCDE, 2018, s. f).

3.7.1 La organización de la prueba PLANEA

El contenido de la prueba PLANEA, en el campo de las matemáticas, está conformado de 148 ítems que se encuentra dosificados en cuatro contenidos temáticos específicos: el Sentido numérico y pensamiento algebraico, los Cambios y relaciones, la Forma, espacio y medida, y finalmente el Manejo de la información (véase Tabla 5).

Estructura de la prueba PLANEA en el campo de las matemáticas

	Contenido temático	Número de reactivos
1	Sentido numérico y pensamiento algebraico	52
2	Cambios y relaciones	51
3	Forma, espacio y medida	13
4	Manejo de la información	32

Tabla 5. PLANEA (2017). Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF>

3.7.2 Los cuatro niveles de logro en matemáticas dentro de la prueba PLANEA

En el campo formativo de las matemáticas dentro de la prueba PLANEA los aprendizajes clave se categorizan en cuatro niveles de logro que se diferencian entre uno y otro por los tipos de herramientas culturales (Vygotsky, 1987) que se necesitan utilizar para resolver el problema. Un nivel de logro es una descripción de conocimientos y habilidades que demuestra un estudiante al resolver algún problema (PLANEA, 2019). El nivel de logro se asocia a los reactivos como el nivel de logro se asocia a las herramientas psicológicas que el estudiante usa para la resolución del problema y en esa lógica de pensamiento la naturaleza de los reactivos cambia. Los cambios en las estructuras de los problemas van desde la

cantidad de datos proporcionados en el enunciado, en la forma en que estos datos aparecen dentro de las representaciones gráficas con cierto grado de explicitud, hasta reactivos que cambian sus características entre preguntas, ejercicios y problemas caracterizados en una situación contextualizada (Arancibia, Herrera & Strasser, 1997).

La prueba PLANEA clasifica sus ítems por nivel de logro:

- Nivel de logro I (NL-I): En éste primer nivel los estudiantes demuestran el dominio de algoritmos, procedimientos y fórmulas convencionales. La forma de pensamiento les permite realizar razonamientos directos e interpretaciones de los resultados.

Un ejemplo del reactivo con este NL-I es:

Ejemplo 1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones: $\left[\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\right] \div \frac{2}{3}$

a) $\frac{12}{21}$

b) $\frac{18}{35}$

c) $\frac{12}{35}$

d) $\frac{24}{105}$

- Nivel de logro II (NL-II): Los estudiantes demuestran dominio en la interpretación y reconocimiento de situaciones caracterizadas que sólo requieren una inferencia directa, saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único sistema de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o conversiones de unidades elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

Este es un ejemplo del NL-II:

Ejemplo 2. En la construcción de una casa se tienen tres tubos de drenaje que se ocuparán para realizar las conexiones en los baños y cocina. El ingeniero de la orden al plomero, que se deben cortar en la menor cantidad

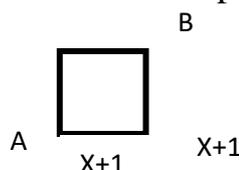
de pedazos iguales sin obtener algún desperdicio de los tubos. Si las longitudes de los tubos son 120, 160 y 200 centímetros. ¿Cuánto deberá medir cada pedazo?

- a) 20 cm b) 40 cm c) 80 cm d) 60 cm

- Nivel de logro III (NL-III): En este nivel los alumnos demuestran el dominio de interpretación en situaciones dentro de una del contexto que requiere el uso de varias inferencias. Identifica información que le permita construir expresiones algebraicas para modelar el fenómeno.

Un ejemplo de este tipo de reactivos es el siguiente:

Ejemplo3. Mariana quiere saber cuál es la expresión algebraica con la que puede obtener la distancia más corta entre los puntos A y B del siguiente terreno:



- a) $2\sqrt{(x+1)^2}$ b) $(x+1)^2$ c) $\sqrt{2(x+1)^2}$ d) x^2+1

- Nivel de logro IV (NL-IV): el estudiante demuestra en este nivel el uso de modelos matemáticos específicos para resolver el problema, analizando las restricciones, obstáculos o limitaciones en la solución de un problema.

Un ejemplo de este grado de complejidad es:

Ejemplo 4. Una torre de 34.5 m de altura se ubica a la orilla de un río; desde lo más alto de la torre, el ángulo de depresión a la orilla opuesta es de 30° . ¿Qué magnitud tiene el ancho del río?

- a) 19.91 m b) 59.76 c) 19.91 d) 59.76m

Ninguno de los cuatro ejemplos mostrados anteriormente ni en resto de los ítems de la prueba PLANEA cumplen con las características y los

elementos necesarios de construcción para poderse considerar problemas contextualizados dentro de la enseñanza situada o contextual. Un problema planteado desde la enseñanza situada o contextual (llámese proyecto situados, aprendizaje basado en problemas y de servicio comunitario y método de casos). Un ejemplo de un problema contextualizado es:

Los datos de la tabla corresponden al peso de pavos hembra y a las raciones de alimento que se les suministra dependiendo de su edad en semanas en una granja de pavos en Santa Catarina, Brasil (adaptada de Biembengut & Heins, 2000).

Edad (semanas)	Peso (gramos)	Ración (gramos)	Edad (semanas)	Peso (gramos)	Ración (gramos)
1	107	104	10	4194	1568
2	222	230	11	4870	1710
3	423	340	12	5519	1957
4	665	470	13	6141	1969
5	971	700	14	6732	2093
6	1466	922	15	7290	2115
7	2079	1146	16	7813	2165
8	2745	1270	17	8299	2160
9	3495	1396	18	8744	2180

A partir de estos datos encuentra el tiempo más adecuado para vender los pavos. Explica tu respuesta. Grafica los datos con respecto al peso y la edad en un sistema de coordenadas y encuentra la ecuación de la curva que mejor se adapte a los datos. ¿Con este modelo puedes predecir razonablemente el peso de un pavo de 12? ¿5 semanas, de 20 semanas? Explica tu respuesta. Recuperado de Flores & Gómez (2009)

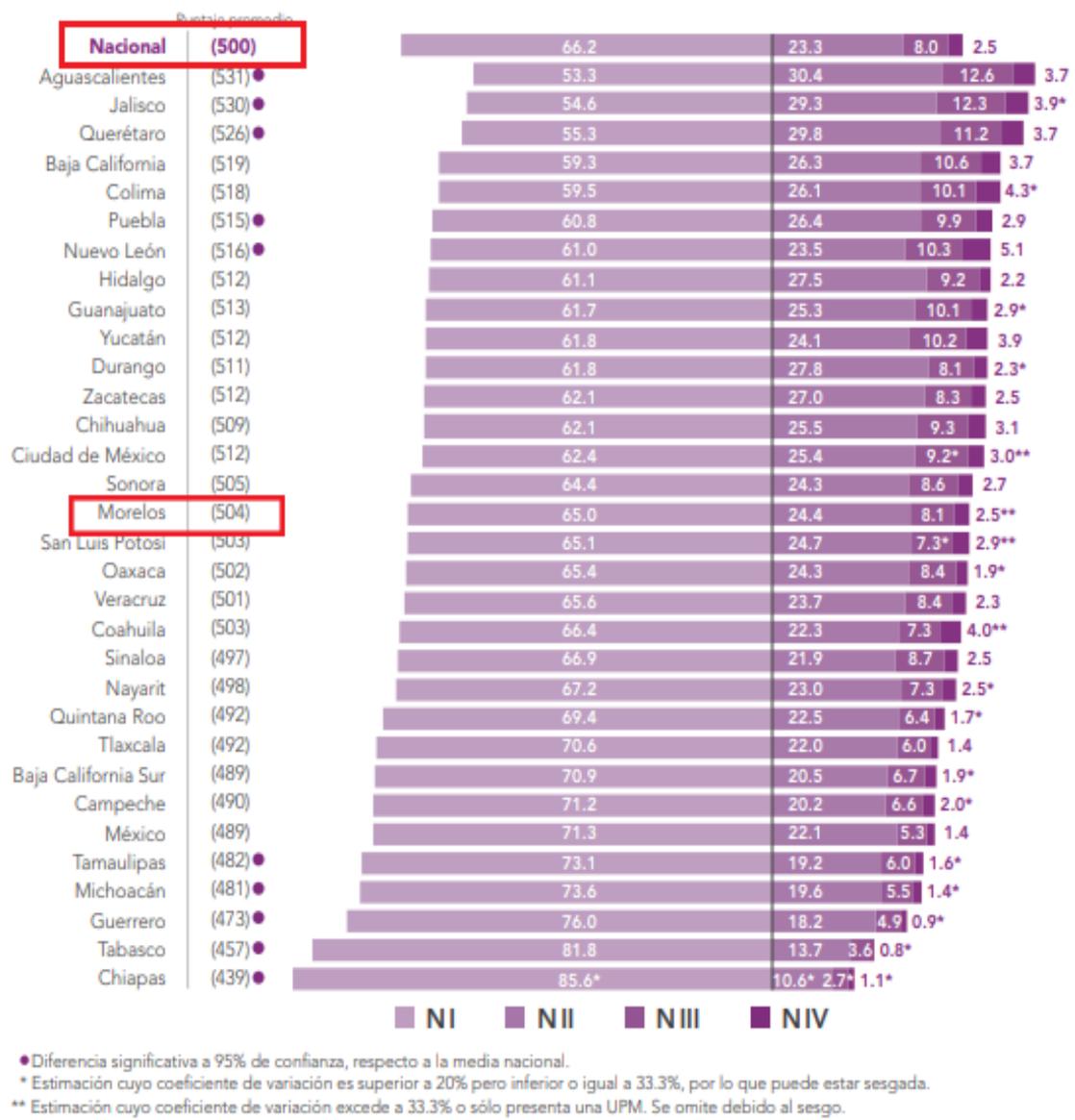
La naturaleza de este ejemplo es que viene de la una problemática extraída de la realidad, cuyas características son que la información dentro de ellas es auténtica y cercana a las experiencias y significados del estudiante en contraste con los problemas de la prueba PLANEA-y de la mayoría de los problemas de le enseñanza tradicional- que son artificiales o carentes de significado que da la apariencia para el estudiante de que el conocimiento es ajeno, neutral e independiente de la situación (Díaz, 2006) y que por lo tanto promueve la perdida de interés del estudiante por efecto de la

catacresis en el lenguaje e incomprensión de los conceptos matemáticos en su realidad (Pimm, 2002).

3.7.3 Los resultados de la prueba PLANEA

Dentro del documento llamado Resultados Nacionales Planea 2017 para la EMS se muestran los valores promedio que obtuvo cada estado de la república en esta prueba, en el campo de matemáticas el rango de 200 hasta 800 puntos; por ejemplo, el estado de Morelos se encuentra a la mitad de la gráfica 2 con 504 puntos, cuatro puntos por arriba del puntaje promedio nacional (PLANEA, 2017).

Los ejemplos aquí mostraron fueron contruidos a partir de la consulta al banco de reactivos de la Dirección General del Bachillerato (DGB) en <https://sites.google.com/a/dgb.email/trabajo-colegiado-para-colegios-de-bachilleres/banco-de-reactivos-tipo-planea-matematicas>, la *Guía práctica para estudiante* Planea 2017 a cargo de Consejo Nacional de Educación Profesional Técnica del estado de Sonora (CONALEP) y de la prueba en línea en la página oficial de PLANEA http://planea.sep.gob.mx/ms/#estructura_ms.



Gráfica 2. Porcentaje de estudiantes por nivel de logro. PLANEA (2017). Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF>

La gráfica 2 que muestra los resultados de PLANEA permite visibilizar que en el estado de Morelos el 66.2% de los estudiantes que se ubican en el NL- I son capaces de hacer para resolver los ítems de este NL y las dificultades que tienen para utilizar algoritmos aritméticos más elaborados. Los NL en realidad son expectativas que se esperan como los ideales alcanzables por los estudiantes eso implica que existan factores que dificulten el dominio del álgebra y su aplicación para establecer relaciones entre variables, y limitaciones para identificar los datos necesarios para calcular ciertos valores en problemas con contenidos explícitos y que

requieren de un modelo matemático. Además, también puede observarse que 23% de los estudiantes se encuentra en el nivel II, solo 8% de estudiantes en nivel III; mientras que solo el 2.5% se encuentran el NL- IV (figura 1). En resumen, la mayoría de los estudiantes en la EMS son capaces de dar respuesta a los problemas de NL-I, mientras que no pueden resolver problemas de los tres niveles restantes, en donde los conceptos matemáticos y los métodos de resolución utilizados se encuentran considerados en los tipos de aprendizajes esperados de acuerdo con el currículum del EMS. La conclusión que podemos derivar esta parte del análisis es que pocos de los estudiantes que alcanzaron los NL-IV tienen el dominio de los conocimientos matemáticos que atienden al tipo de preguntas que requieren más de cuatro pasos de resolución que no solo reproducen y conectan sino además reflexionan los diferentes tipos de modelos y estructuras matemáticas típicas de la enseñanza matemática antes de poder aplicarlas.

La división de los resultados alcanzados entre NL-I y NL-II, NL-III y NL-IV no es indicativo de la habilidad de los docentes. Es decir, si el 66.2% de los estudiantes se encuentra en el NL-I no significa que los docentes encargados de esos aprendizajes realizaron un buen trabajo y que los docentes encargados de los aprendizajes II, III y IV un mal trabajo. El tiempo y el estilo de enseñanza tradicional son dos factores más que intervienen en los resultados obtenidos en esos porcentajes (Compañ, 2018). Los tipos de problemas que se encuentra en los NL-I y II se promueven desde la educación básica, la enseñanza tradicional promueve este tipo de problemas desde primero de primaria por lo que el estudiante aprende por mecanización y asociación, se refuerzan durante el paso de los estudiantes en la secundaria y se refinan la mayoría de las veces en el nivel de preparatoria. A diferencia de los problemas del NL- I los problemas del NL-II que implican que el estudiante lea e identifique los valores- y el algoritmo para determinar el

camino de solución- y el NL de la comprensión lectora complica la solución de los problemas (Caracas & Ornelas, 2019). Finalmente, los contenidos concernientes al álgebra, que aparecen en los problemas de los NL- III y IV empiezan en la secundaria, como las matemáticas utilizan al lenguaje algebraico para modelar las situaciones problemáticas, y estas están directamente relacionados con las formas de representación, lejos de acercarse al significado de la representación esto lo aleja causando incompresibilidad de los conceptos matemáticos por los estudiantes, convirtiéndose en otro factor para explicar por qué los estudiantes al final ESM tienen posibilidades limitadas para resolver los problemas del NL-IV.

De hecho, la interpretación que se puede hacer de la gráfica 2, es que el 66.2% es consecuencia de los cambios graduales en los otros niveles de logro que involucran el lenguaje, las herramientas cognitivas más complejas, como son los conceptos y las formas de razonamiento. El estudiante presenta no sólo un problema de comunicación sino además un problema de comprensión, aun cuando algunos conceptos claves –por aquellos que se manifiestan en el NV-I de desempeño- se estudian desde tercero de primaria y en la secundaria son parte necesaria para otros más complejos (los fundamentos básicos del álgebra, de la trigonometría, de la estadística y de la geometría). En la educación preparatoria o de bachillerato, los conceptos se desarrollan de manera más abstracta introduciendo a su vez otros elementos del registro matemático. El nivel de abstracción aumenta por lo tanto la notación matemática se complejiza pues los conceptos y las expresiones matemáticas más abstractas y complejas sustituyen a otros conceptos cuyas expresiones matemáticas eran más prácticas y con mayor relación a los objetos concretos. El pensamiento con conceptos de mayor abstracción (Pilar, 2018) supone también formas de pensar distintas.

El desempeño del estudiante en el dominio del NL- IV implica que realice procesos de inferencia para determinar los valores necesarios que resuelvan el problema, o sea que esos datos sean reconocidos como el producto conocimientos y razonamientos utilizando conceptos más complejos.

Por otro lado, no puede asegurarse que los resultados de PLANEA de en la educación básica tengan relación directa con los resultados de la prueba en el nivel EMS (Delgado P., 2018; Popham, 1999), pues no es propósito de este Plan dar seguimiento al desarrollo de los aprendizajes claves entre las generaciones aplicadas en los niveles educativos inferiores. Ya que existen distintas variables contextuales, generales o individuales, que pueden explicar con una mejor aproximación los resultados de la prueba PLANEA en el EMS, como la variable concerniente a las políticas públicas educativas (por ejemplo, modelos educativos por los que han transitado las instituciones educativas, los estudiantes y los docentes en cada sexenio) que influyen en las formas pedagógicas de intervención con los estudiantes.

Capítulo 4. Aproximación metodológica

En este capítulo se explica el diseño metodológico utilizado en este estudio exploratorio. En el primer apartado se presenta el marco metodológico del estudio exploratorio para justificar el uso de los métodos que se emplearán en la recolección de datos. En el segundo apartado se detallan los instrumentos que necesitan los métodos utilizados para la recolección de datos. En el tercer apartado se presentan los criterios para la selección de la muestra.

4.1 Marco metodológico del estudio exploratorio

Algunas de las investigaciones encontradas sobre los apuntes/las notas de clase tienen al paradigma cuantitativo, excepto la de Monereo y otros (2000) como lógica de su corpus y como paradigma metodológico. Como Hamui y Varela mencionan que “la intencionalidad de los estudios cualitativos se centra en la comprensión de una realidad construida históricamente y analizada en sus particularidades a la luz del sentir y la lógica de sus protagonistas “(2013, p.57).

Steve Taylor y Robert Bogdan (1996, citado por Álvarez-Gayou, 2009, p.23) mencionan que hay diez características principales de la investigación cualitativa: es inductiva; se considera el escenario y a las personas de manera holística; se considera el efecto que tienen el investigador sobre las personas que son objeto de estudio; se pretende la comprensión a las personas dentro de su marco de referencia; el investigar a parta sus propias creencias, perspectivas o predisposiciones; todas las perspectivas resultantes, todos los escenarios y personas son valiosas; los métodos son humanistas; la validez de la investigación se pone en relieve; y hacer este tipo de investigación es un arte (Álvarez-Gayou, 2009).

La investigación pretende responder la pregunta central ¿cuáles son las características que tienen las notas realizadas en clase de matemáticas y por qué se hacen con esas características? y el paradigma cualitativo permite conocer y explicar los significados y contenidos que pudieran emerger del fenómeno de la investigación (Cedeño, 2001; Harumi & Varela, 2013).

El paradigma cualitativo aporta a mi investigación los métodos de recolección y las herramientas para el análisis de datos que le permitirán visualizar el escenario donde los estudiantes universitarios toman sus notas de clase y las características e intenciones con las que hacen las notas de clase (Cea D' Ancona, 1998).

Las características que tiene los estudios exploratorios son que tienen pocos antecedentes en cuanto a su modelo teórico o a su aplicación práctica, su finalidad es el de servir como base teórica para la realización de nuevas investigaciones (Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

La etnografía es considerada un método de investigación empleado para describir e interpretar las prácticas culturales y los comportamientos de un grupo de personas (Bisquerra, 2009; Cedeño, 2001). Utiliza varias técnicas de recolección de información que le permiten identificar los factores que influyen dentro del entorno de los sujetos de estudio como la observación constante y es holística. Para Cedeño (2001) la etnografía educativa explora los acontecimientos diarios en la escuela con la intención de observar el contexto y el escenario donde suceden los fenómenos sociales.

Las siguientes técnicas y procedimientos de recolección de los datos que se utilizarán en mi investigación son:

1. Encuesta por internet (Bisquerra, 2009)
2. Observación de clase (Bisquerra, 2009).

3. Análisis del contenido de las notas de clase, las fotografías y los videos (Andréu, s.f.).
4. Grupo focal (Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

Considere que el paradigma cuantitativo también contribuye a mi estudio como visión complementaria al contexto de los participantes con cantidades, intensidades, patrones y frecuencias de los hechos, los fenómenos escolares y los sujetos del grupo (Álvarez- Gayou, 2009), ya que la estadística descriptiva es una herramienta fundamental para realizar la organización y el análisis datos del cuestionario. Mientras la visión cuantitativa ayudará a establecer características generales del grupo con algunos resultados del cuestionario, la visión cualitativa permitirá la examinación particular de los estudiantes voluntarios (Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

4.2 Instrumentos para la recolección de datos

Los instrumentos considerados para la recolección de datos en esta investigación cualitativa:

- Test de estilos de aprendizaje (Lara, s.f.).
- Cuestionario (Bisquerra, 2009; Hernández, Fernández & Baptista, 2015).
- Notas de la clase, fotografías y video de las observaciones (Andréu, s.f.; Cedeño, 2001).
- Guía de preguntas para el grupo focal (Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

4.2.1 Test de estilos de aprendizaje

El test de estilos de aprendizaje busca determinar la manera en que un estudiante aprende a partir de frases incompletas que el estudiante debe terminar con cuatro opciones. Aunque existen varias versiones del test de EA de Kolb, se elegirá la versión que cumpla los criterios de:

- congruencia con los objetivos y con el marco teórico de la investigación,
- la viabilidad y factibilidad de aplicación y evaluación de forma manual,
- que solo tenga como referente teórico a David Kolb (Lara, s.f.).

Por ejemplo, el test de la versión de la organización *u-cursos* cumple con estos criterios y consta de 12 frases incluyendo una representación gráfica de un plano cartesiano donde cada eje apunta a uno de los cuatro rasgos EC, OR, AC y EAc.

4.2.2 Cuestionario

Para García (2003) el cuestionario es un instrumento para la obtención y registro de datos, que consiste en un conjunto de preguntas, preparado sistemáticamente y que puede ser aplicado en varias maneras entre ellas vía correo electrónico. Además, es una técnica social menos profunda e impersonal que el “cara a cara de la entrevista”. Hernández, Fernández & Baptista (2015) mencionan que hay dos tipos de preguntas que pueden aparecer en un cuestionario: las preguntas cerradas y las abiertas. El primer tipo de preguntas contienen un número finito de categorías o alternativas de respuesta, mientras que el segundo tipo de preguntas no delimitan el tamaño ni las alternativas de respuestas.

La encuesta ayudará a la recolección de los datos iniciales sobre la toma de notas y sus características de acuerdo con los estudiantes (Hernández, Fernández & Baptista, 2015). La encuesta empleará un cuestionario exploratorio que se elaborará a partir de las consideraciones de elaboración que recomienda Bisquerra (2009). Se decidió que la aplicación sería en Internet con una herramienta llamada Google Forms, se construye el cuestionario que será enviado vía correo electrónico. Esta forma de aplicación a tiende a las siguientes ventajas que se tienen al aplicar en Internet: el bajo costo y mayor rapidez de aplicación; se evitan los posibles sesgos del entrevistador, el participante goza de una mayor sensación de anonimato y facilita el análisis de la información recolectada (Bisquerra, 2009).

Se planea que sean 16 reactivos, organizados en dos secciones: la primera se llamará datos generales y la segunda, apuntes de clase. En la sección de datos generales incluye las variables etiquetadas como nombre del estudiante, edad, género y carrera. El resto de las preguntas serán sobre la

actividad de anotar y las características con las que los estudiantes personalizan sus notas de clase. Se considerará para la redacción de las preguntas las categorías que utilizaron Monereo et al. (2000) y los elementos de ayuda a los que hace referencia Aguilar (2011).

Se busca que la mayoría de las preguntas del cuestionario exploratorio sean abiertas para que los estudiantes tengan libertad en sus respuestas. Dentro del cuestionario exploratorio se tienen planeadas tres preguntas cerradas cuyo objetivo es buscar concretamente la frecuencia en las respuestas de los estudiantes sobre la cantidad de estudiantes que utilizan organizadores de la información o el número de estudiantes que consideran que la toma de notas les ayuda a poner atención (Álvarez-Gayou, 2009, p.150).

Se considera realizar un estudio piloto (Bisquerra, 2009) para darle validez al cuestionario de la entrevista para verificar que recoja información útil a la investigación sobre las notas de clase (Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

4.2.3 Notas de la clase, fotografías y video para la observación

Estrada menciona que la técnica de la observación consiste en: [...] el registro sistemático de comportamientos manifiestos. Para poder utilizar esta técnica es necesario: definir con precisión los aspectos que serán observados, establecer y definir las unidades de observación, para finalmente, definir categorías y subcategorías (2005, p. 54).

Serán tres observaciones no participantes (Hernández, Fernández & Baptista, 2015, p.434), alternadas por dos semanas de descanso, para dar oportunidad para reflexionar a los estudiantes sobre su propia acción en la elaboración de notas de clase (véase figura 6).

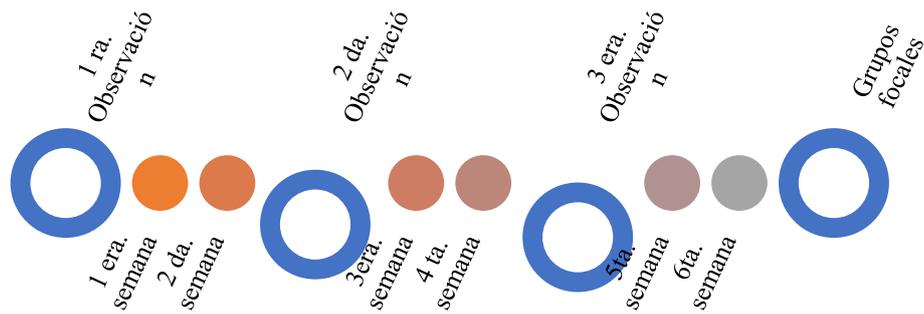


Figura 6. Momentos de la recolección de datos.

Para tener otros registros de apoyo que complementen el contexto en el cual se elaboran las notas de clase se pretende recopilar materiales audiovisuales como fotografías y videos (Cedeño, 2001; Hernández, Fernández & Baptista, 2015).

Las notas de clase y los materiales audiovisuales serán analizados con ayuda de la técnica de análisis de contenido, la cual define Andréu (s. f.) como “un marco de aproximación empírica, como un método de análisis controlado del proceso de comunicación entre el texto y el contexto, estableciendo un conjunto de reglas de análisis, paso a paso, que les separe de ciertas precipitaciones cuantificadoras”. Los pasos que debe seguir el análisis de contenido:

1. Esquema teórico.
2. Tipo de muestra.
3. Sistema de códigos.
4. Control de calidad (Andréu, s.f.).

4.2.4 Guía de preguntas para el grupo focal

Ya en la etapa final se pretende aplicar una técnica colectiva de discusión que ayude a recolectar las opiniones de los participantes y explorar a detalle los datos que arroje el análisis previo de datos, llamada grupos focales. La guía de preguntas se construirá después de haber terminado de hacer las observaciones con aquellos datos que hayan resultado relevantes para la investigación y que deberán ser aclarados. Hamui & Varela (2013) sugieren tener no más de 7 o 10 participantes. Álvarez-Gayou recomienda considerar dos aspectos que podrían dificultar la aplicabilidad de la técnica: el primero es la falta de claridad del investigador en la transmisión de la intencionalidad del estudio y el segundo es la falta de habilidades del moderador para llevar la sesión (2009, p.23).

Se utilizará una técnica que asegure la científicidad de la investigación, en particular en la credibilidad llamada triangulación (Bartolomé, 1986, citado por Bisquerra, 2009). La primera vez que se empleó este término fue en 1996 en la obra de Webb y otros, en su obra sobre la investigación no reactiva en las ciencias sociales, presenta el método de la triangulación con el objetivo de otorgar mayor validez a los hallazgos de la investigación (1996, citado por Cea D' Ancona, 1998, p. 48).



Figura 7. Triangulación de datos. Fuente propia

Es por lo que en esta investigación se recolectarán los datos de los estudiantes del grupo para realizar un análisis de contenidos de notas de las notas de los participantes. Para después hacer la triangulación donde se utilizarán las fuentes de información sobre las notas de clase, como son las notas de clase de los participantes, el registro de observación, los resultados del cuestionario exploratorio y las notas de clase que realizara el observador-anotador y las opiniones recolectadas del grupo focal (véase figura 7), que hace referencia a el tipo de triangulación de datos (Cea D' Ancona, 1998).

4.3 Criterios de selección de la muestra para la investigación

Los criterios que se usaron para seleccionar a los estudiantes participantes fueron:

1. Pertenecer a un grupo dentro de la UAEM que tuviera que cursar la asignatura de álgebra.
2. El docente titular del grupo debería estar de acuerdo con el propósito de la investigación y su metodología.
3. El grupo estuviera integrado por más de 15 alumnos inscritos.
4. Los estudiantes deben tener la voluntad de participar durante todo el tiempo que dure el estudio y el compromiso de compartir sus notas de clase, de acuerdo con Hernández, Fernández & Baptista (2015) será una muestra de participantes voluntarios.

Capítulo 5. Resultados y Hallazgos

En este capítulo, primero se presentarán los resultados de los resultados del pilotaje, para pasar a los resultados obtenidos de cada uno de los instrumentos. En una tercera parte se describe cómo fue el proceso de la toma de nota de clase en matemáticas. En la cuarta sección se describen las condiciones y situaciones que definen las características de las notas de clase. Para continuar con la quinta sección donde se muestra las características de las notas de clase y finalizar las atribuciones que los estudiantes le dan a la nota de clase.

5.1 Antecedentes y resultados del estudio Piloto

El estudio piloto se realizó dentro del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA) en el programa Licenciatura en Ciencias con especialización en Matemáticas, se llevó a cabo durante los meses de marzo a junio del 2019 y el contexto del estudio fue en la asignatura de Álgebra, con tres participantes estudiantes de un total de seis que integraban el grupo.

En este estudio piloto se aplicaron varios instrumentos para recolectar datos sobre la toma de notas y para observar el desarrollo de algunas sesiones, esto con la finalidad de analizar los errores de escritura, de comprensión y la estructura de los contenidos. Otro propósito fue verificar si la pertinencia de los instrumentos para recolectar los datos y si estos eran suficientes para conocer acerca las características y funciones de las notas de clases tomadas por los estudiantes.

Como resultado de este primer estudio piloto, se refinó el instrumento de entrevista cambiando un poco el guion y la estructura de las preguntas, por ejemplo lo que al principio se redactó como: ¿Tienes el hábito de tomar

apuntes en clases?, se justo para redactarla de la siguiente manera: ¿Cuándo cursas asignaturas de matemáticas, tienes el hábito de tomar apuntes en clases? Otro ejemplo es la eliminación de la pregunta que antes era decía ¿Empleas algún sistema o procedimiento para recordar datos, nombres, conceptos, definiciones, etc.? Explícalo., porque no arrojaba información relevante.

Además, permitió construir y refinar la metodología de la investigación, ya que surgieron cambios entre la metodología del pilotaje y la que se realizará en el estudio, por ejemplo, durante el pilotaje se hicieron entrevistas, las cuales se cambiaron por grupos focales.

Otros resultados obtenidos del pilotaje fue el desarrollo de algunas categorías de análisis del apunte de clases y se encontraron algunos elementos no encontrados en la revisión de literatura como la sintaxis matemática, el tipo de libreta usada y el uso de organizadores gráficos de la información. Se pudo enriquecer la dimensión de Personalidad, que proviene del estudio de Monereo et al. (2000), reconstruyéndola a partir de desde la gramática matemática, ya que la personalidad para estos autores se entiende como un rasgo que depende del anotador. Pero para el desarrollo de esta investigación y el análisis de las notas, se propusieron dos categorías: fondo y la forma. Cada una incluye dos subcategorías más como se muestran en la figura 8:

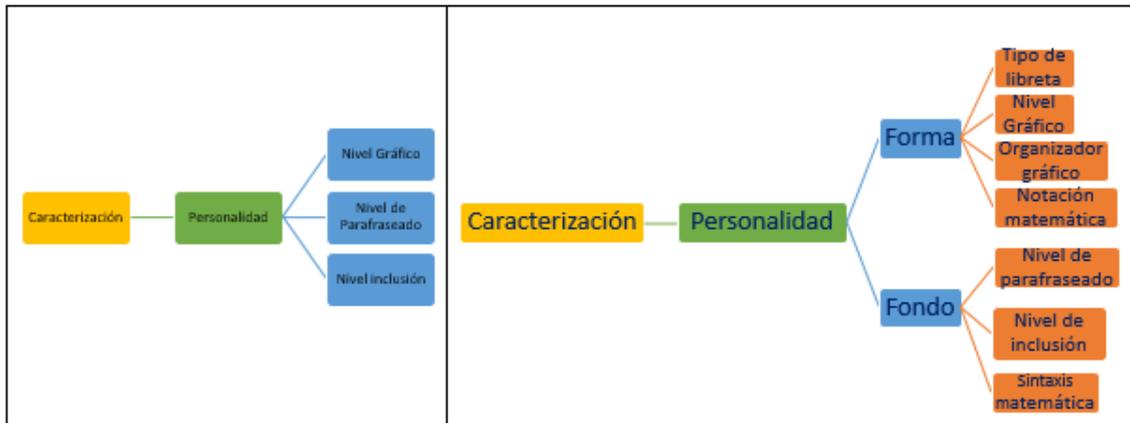


Figura 8. Comparativo entre las categorías de Monereo et al. (2000) respecto al encontrado en el pilotaje.

Se puede hacer notar que la naturaleza de los conceptos matemáticos, como todos los conceptos académicos, obligó a distinguir dentro de las notas recolectados en el pilotaje otras categorías dentro de estos esquemas (véase figura 8) para el análisis de las notas.

5.2 Datos obtenidos de los distintos instrumentos aplicados

Los datos recolectados del cuestionario exploratorio fueron organizados en una hoja de cálculo (Excel) que fungió como una herramienta digital para la organización y clasificación de las unidades de análisis (Hernández, Fernández & Baptista, 2015), los pasos que se siguieron fueron:

- I. Primeramente, se construyó una matriz de la Megamatriz (tabla 6) de edad/ género y posteriormente identificar los estudiantes de Ing. Química Industrial de los estudiantes de Ing. Eléctrica Electrónica con el fin de describir algunas características del grupo muestra.

NC	Edad	Género	Semest	Carrera	1. ¿Tiene	2. ¿Cuánto	3. ¿Por qué toma	4. En la asignatura	5. ¿Para qué sirve	6. ¿Tienes al	7. ¿Qué cosas	8. ¿Completa	9. ¿Utilizas a	10. ¿Utilizas a	11. ¿Cuándo	12. ¿Utilizas a	13. ¿Tomar
1	20	Femenino	Primer	Químico indus	Si	Si	Para record	Al principio d	Recordar y d	A veces por	Conceptos	Si, con algún	Si, con marc	Celular, para	Si, porque m	Si	Si
2	17	Femenino	Primer	Químico indus	Si	Si	Para despué	Son datos d	Para repasa	No	Ejemplos de	No	No	No	Si, porque no	No	A veces
3	18	Masculino	1	ING. Eléctric	Si	Si	Para recurrir	Cuando algo	Para reforza	No	Conceptos c	No	Si, globos de	No	Si, porque es	No	Si
4	18	Masculino	Primer	Ingeniería Ele	Si	Si	Para record	Cuando el pr	Para poster	En realidad n	Formulas, re	No, solo lo q	Lo escribo c	Solo apunto	Si, porque n	A veces	Si
5	18	Masculino	Primer	Ingeniero elé	Si	Si	Para repasa	Cuando el m	Para compr	No	El procedimie	Rara la ves	No	Mi celular	Si, para iden	Si	Si
6	18	Masculino	1	Ing. Eléctric	No	No (en	para tener p	Cuando son	Para tener u	ningún estilo	formulas y e	No compleme	Si, subrayar	No	No	No	A veces
7	18	Masculino	1	Ingeniería elé	Si	Si	Para record	Cuando no s	Para record	No	Cosas que e	No	Si, lo encier	No	Si, porque s	No	Si
8	18	Masculino	1	Ing. Eléctric	Si	Si	Para poder e	Cuando pone	Para estudia	No	Resolución d	No	Lo pongo co	Fotos	Si, anoto lo q	A veces	Si
9	18	Masculino	1	IEE	Si	Si	PARA APREN	Cuando dice	aprender, en	no	todo lo que e	si	si, marcador	celular	no	A veces	A veces
10	17	Masculino	1	Ingeniero Ele	Si	Si	Para record	Algo que no	Referencia e	Escribo form	Formulas	Algunas vec	Encierro en	NA	Solo la que n	No	A veces
11	18	Masculino	Primer	Químico Indus	Si	Si	Para estudia	Cuando es u	Para poder r	No	El proceso p	No	No	No	No	No	A veces
12	17	Masculino	1	Químico Industrial													
13	18	Femenino	Primer	Químico Indus	Si	Si	Me ayuda a	Cuando cred	Para repasa	No	Procedimient	No	Si, lo subray	Todo fotos y	No siempre,	No	A veces
14	18	Masculino	1	Ingeniería elé	Si	Si	Para record	Principalment	Para saber c	No	Fórmulas, ej	No	Solo lo escri	El celular par	Si porque no	No	A veces
15	19	Femenino	1	Químico Industrial													
16	18	Masculino	Primer	Químico indus	Si	Si	Tener evider	Anoto todo	Para estudia	No	Procedimient	No	Si, flechas	No	No	No	Si
17	17	Masculino	1ero	Químico indus	Si	Si	Para entend	Prácticament	Para estudia	Diagramas	Formulas, pr	Si, con inform	Flechas	No	Si para que s	Si	A veces
18	18	Masculino	1	Ingeniero elé	Si	Si	Para poder r	Cuando hay	Para estudia	No	Formulas	No	No	Si para solo	No	A veces	
19	18	Masculino	1	Org. Eléctric	Si	Si	Para repasa	Cuando me d	Para estudia	No	Fórmulas, pr	Si, chequeand	Si los encier	No	Si, por que n	Si	Si
20	17	Femenino	1	Químico Indus	Si, para	Si	Para guiar	Cuando es n	Para estudia	No	Los pasos d	No	Si, con otro	No	Si, para ente	Si	Si
21	18	Masculino	primer	Ingeniería elé	no	Si	Para repasa	Solo anoto e	Para estudia	No	Procedimient	No	No	No	Si, para solo	No	A veces
22	18	Femenino	1	Químico Indus	Si	Si	Para estudia	Anoto lo ese	Para mejor	Si, ordeno n	Fórmulas, c	Si, en su ma	Si asterisco	No	Si, para que	A veces	Si
23	18	Femenino	1	Químico indus	Si	Si	Para que me	Cuando dan	A, guíarme c	Anotar palab	Passos para l	Anotó las du	Subrayar o r	No	Si, la que pie	A veces	Si
24	17	Femenino	1	Químico indus	Si	Si	Es necesari	Casi en todo	Repasar el te	No	Ejemplos de	No	Si, notas de	Ninguno	Porque es al	No	A veces
25	18	MASculino	PRIMER	ING. ELÉCTR	Si	Si	PARA PODER	CUANDO NO	PARA PODER	NO	FÓRMULAS	SI CON LIBR	NO SOLO LC	SOLO LIBRE	SI, PARA PO	No	Si
26	18	Femenino	primer	químico indus	si	si	Porque me a	Cuando anot	para repasa	Trato de que	ejercicios qu	Si, a veces d	Si, algunos li	No	Si, trato de a	No	A veces
27	18	Masculino	Primer	Ing. Eléctric	Si	Si	Para entend	Cuando el pr	Para practic	No	Todo	No	No	No	Si seleccion	A veces	Si

Tabla 6. Metamatriz de resultados del cuestionario exploratorio (véase anexo 3).

II. Posteriormente se trabajó con los estudiantes aplicándoles el tests de EA de Kolb para poder calcular los puntajes y localizar en el gráfico su estilo de aprendizaje de cada estudiante (véase anexo 4).

En esta etapa temprana de la investigación se tomó la decisión de solo considerar los veintiséis datos completos de los treinta recabados de los estudiantes para darles contexto a los cuatro estudiantes haciendo que la muestra fuera de naturaleza de autoselección pues deberían cumplir con haber contestado el cuestionario exploratorio y el test de estilos de aprendizaje de Kolb; ya que no todos contestaron el cuestionario exploratorio, pero si el test de estilos de aprendizaje.

III. Para el concentrado de los puntajes en una hoja de cálculo se construyeron matrices para cada estudiante (véase tabla 7), la cuales fueron programadas con las fórmulas para que al momento de llenar cada celda con la información se obtuvieran las coordenadas correspondientes para su ubicación en el plano.

RESULTADOS DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS			
Alumno	EA		
Puntaje CA		Puntaje EA	
Puntaje EC		Puntaje OR	
RESTA CA-EC	0	Resta EA-OR	0
vertical	y	horizontal	x

Tabla 7. Cálculo para la determinación del EA de los estudiantes. Elaboración propia.

IV. Con la información de los estilos de aprendizaje de los 26 estudiantes se construyó una segunda matriz que contuviera los datos de edad/género/estilo de aprendizaje.

Estos datos ayudaron a realizar la búsqueda de las características relacionadas con el tipo EA de los estudiantes.

V. Se diseñaron además representaciones gráficas como la *decisión modeling* y *process organizer* para análisis de los datos (Miles, Huberman y Saldaña, 2014) que incluyeron los veintiséis resultados de los EA de los estudiantes.

Con ayuda de submatrices se hizo el análisis del resto de los datos del cuestionario, ayudando a construir a partir de las preguntas 2, 5, 7, 8, 9, 10 y 11.

VI. El análisis de las respuestas del cuestionario se realizó de maneras diferentes que ayudarán al proceso y a la interpretación de los resultados.

- ✓ De las preguntas 2, 3 y 4 se realizó distinguiendo la intención de cuando se usa el por qué, cuándo y el para qué. En el caso de la pregunta 2. *¿Por qué tomas notas en clase?* El uso del pronombre interrogativo *para qué* indica una finalidad de la acción mientras que si se emplea el pronombre *por qué* se usa si se quiere preguntar el motivo de alguna acción.

- ✓ Para la pregunta 3. *En la asignatura de Cálculo Diferencial ¿cómo sabes cuándo y qué anotar?*

Se usa el pronombre *cuándo* si se hace referencia al tiempo o al momento en que algo sucede.

- Las respuestas de la pregunta 4. *¿Para qué te sirven las notas de clase? Descríbelo.*

Se usó un diagrama de Venn para identificar los usos que les dan a los estudiantes.

- Finalmente, la pregunta 6. *¿Qué cosas son las que anotas durante la clase de Cálculo?*, se generó una lista de conceptos matemáticos que para el estudiante son importantes registrar.

VII. Con las notas de clase se realizó un análisis individual de las notas con colores primeramente con las fotocopias sacadas y posteriormente con los archivos digitales de las notas de clase. Se organizaron los elementos en una tabla para ser identificados en alguna categoría.

Tabla de colores para analizar datos	
	Ejemplo
	Incompleto
	Mensajes del docente
	Título/fecha
	Línea de corte
	Conector
	Señalización para la finalización del ejercicio
	Línea cerrada: cuadros, nubes, burbujas u óvalos
	Uso de colores igual al profesor
	Error del profesor
	Error

Tabla 8. Significado de características por color.

VIII. Se compararon las hojas de la segunda observación en una matriz comparativa para determinar si es posible construir un mapa cognitivo (véase anexo 6).

IX. Posteriormente se realizó una comparación entre las notas de los estudiantes y la nota tomada por la observadora de los elementos que se encontraron de los tres días de observaciones para el análisis. Para ello se construyó dos tablas para la simbología en la transcripción y otra para la identificación de los estudiantes participantes.

Simbología utilizada en las transcripciones

Símbolo	Significado
D	Diálogo del docente
E	Diálogo de los estudiantes
O	Diálogo de la observadora
E1, E2...	Diálogo de algún estudiante del grupo focal 1
EI, EII...	Diálogo de algún estudiante del grupo focal 2
---	No se distingue bien la voz del audio
...	Pausa mayor de lo normal
(...)	Supresión de una parte de un texto que se extrae
[escribe]	Interpretaciones o inferencias sobre tono, actitudes, gestos y acciones.
“equis”	Hace alusión al sonido fonético de una letra o palabra
aaah	Interjección que indica que la persona toma un tiempo para actuar

Tabla 9. Símbolo utilizados en las transcripciones.

Para la identificación de cada participante se tomaron las primeras letras de sus nombre para generar los pseudónimos de todos los estudiantes en la Megamatriz del cuestionario, sin embargo en esta tabla 10 solo pusimos los correspondientes a los participantes y a un estudiante con el que se hizo algunas comparaciones y ejemplos importantes.

Códigos de los estudiantes en el análisis de datos

X- MCA	Medina Colín Alfredo
AHS	Arizmendi Huertas Sandra
VGA	Vázquez García Andrés
AMIP	Ávila Morales Irma Pamela
RMAS	Román Martínez Alitzel Stefanny

Tabla 10. Códigos utilizados para identificar a los estudiantes.

- X. Se prosiguió con la búsqueda en los registros fotografiados y grabados de eventos o conductas que suceden durante la toma de notas de clase para incluirlos dentro de las narrativas del contexto de cada observación. Además, aquellas fotografías de interés para el estudio se censuraron los rostros de los estudiantes y del docente.
- XI. Se transcribió el audio de los videos de los grupos focales para el análisis de la participación de los estudiantes, con las cuales se generó la siguiente tabla para encontrar algunas categorías de análisis:

Codificación de los colores en las transcripciones

Colores del subrayado	Significado
Si	Siempre has hecho tus notas de clase de esta manera
No	Recibiste alguna ayuda externa para tomar apuntes
Importante	Por qué tomas apuntes
Anotar en el celular	Que haces si no traes con qué y donde anotar
Recordar	Uso de colores

Tabla 11. Categorías relevantes para contrastar con las del cuestionario.

Por otro lado, se realizó una tabla comparativa entre las observaciones de los grupos focales para encontrar similitudes y diferencias entre las respuestas, y finalmente se compararon con algunas de las respuestas del cuestionario inicial.

XII. Se terminó realizando una integración de los datos procesados.

5.2.1 Resultados de las observaciones

FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS E INGENIERIAS DISTRIBUCION DE SALONES SEMESTRE AGOSTO - DICIEMBRE 2019 SALON 1A						
	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES	SABADO
7:00 - 7:50	USO DE LAS TIC GRUPO A ING. JONATHAN EMILIANO IBARRA	DINAMICA Y CINEMATICA GRUPO A DRA. CARMEN HENEFF GARCIA ESCOBAR	CIENCIA, TECNOLOGIA Y SOCIEDAD GRUPO A ING. SIMPLICIO RAMIREZ RENDON	DINAMICA Y CINEMATICA GRUPO A DRA. CARMEN HENEFF GARCIA ESCOBAR	MÉTODOS NUMÉRICOS GRUPO K DRA. JUANA ENRIQUEZ URBANO	
8:00 - 8:50						
9:00 - 9:50	TERMODINAMICA GRUPO A DR. VICTOR MANUEL VELAZQUEZ FLORES	CÁLCULO DIFERENCIAL GRUPO A MTRD. MARCO ANTONIO VILLANUEVA MALDONADO		PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 1 GRUPO A MTRA. LUZ ELVA MARIN VACA	CIENCIA, TECNOLOGIA Y SOCIEDAD GRUPO A ING. SIMPLICIO RAMIREZ RENDON	
10:00 - 10:50			QUÍMICA BÁSICA GRUPO A DRA. VALERI DOMÍNGUEZ VILLEGAS			
11:00 - 11:50	QUÍMICA BÁSICA GRUPO A DRA. VALERI DOMÍNGUEZ VILLEGAS	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 1 GRUPO A MTRA. LUZ ELVA MARIN VACA		CÁLCULO DIFERENCIAL GRUPO A MTRD. MARCO ANTONIO VILLANUEVA MALDONADO	QUÍMICA BÁSICA GRUPO A DRA. VALERI DOMÍNGUEZ VILLEGAS	
12:00 - 12:50			DINAMICA Y CINEMATICA GRUPO G DRA. MARIA ABIGAIL VELAZQUEZ GONZALEZ			
13:00 - 13:50						
14:00 - 14:50	DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRITICO GRUPO A LIC. DIOCELINA BRITO MARCHAN	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 1 GRUPO G MTRA. EGNHA ARANDA MANJAREZ		CÁLCULO DIFERENCIAL GRUPO G MTRD. MARCO ANTONIO VILLANUEVA MALDONADO	CÁLCULO DIFERENCIAL GRUPO G MTRD. MARCO ANTONIO VILLANUEVA MALDONADO	
15:00 - 15:50						
16:00 - 16:50	CIENCIA, TECNOLOGIA Y SOCIEDAD GRUPO G DRA. MARIA ABIGAIL VELAZQUEZ GONZALEZ		DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRITICO GRUPO G MTRA. SILVIA MENDOZA VERGARA	MÉTODOS NUMÉRICOS GRUPO E DRA. ALINA MARTÍNEZ OROPEZA	USO DE LAS TIC GRUPO G DRA. BEATRIZ MARTÍNEZ BAHENA	
17:00 - 17:50						
18:00 - 18:50		CIENCIA, TECNOLOGIA Y SOCIEDAD GRUPO G DRA. MARIA ABIGAIL VELAZQUEZ GONZALEZ		USO DE LAS TIC GRUPO I DRA. ALINA MARTÍNEZ OROPEZA	PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 1 GRUPO G MTRA. EGNHA ARANDA MANJAREZ	
19:00 - 19:50						

Figura 9. Horario de clases FCQeI.

El grupo que cumplió los criterios de selección fue la clase de CD en FCQeI de la UAEM de primer semestre en el ciclo escolar 2019-2020 con 30 estudiantes (véase figura 9). Dos semanas antes de empezar con la recolección de datos, se acordó con el docente el espacio para llevar a cabo las observaciones y explicándole el propósito del estudio, los métodos de recolección de datos donde participarían los estudiantes y la dinámica que se emplearía en las observaciones. El docente una semana antes de la primera

observación tuvo la iniciativa para platicar con su grupo y pidió el apoyo para el estudio.

El docente inició la clase presentándome con el grupo y dándome unos minutos para que rápidamente les platicará del proyecto de investigación a los estudiantes, para posterior iniciar con la exposición del tema llamado derivada de una función por definición.

Durante la observación se tomaron notas de la clase, fotografías y el video de la exposición del docente. Media hora antes de terminar el tiempo de clase el docente dio por concluida su exposición del tema y cedió ese tiempo para que les pudiera leer el consentimiento de participación en mi estudio (véase anexo 1) para después preguntar a los estudiantes quienes quería participar para que lo firmaran. Además, contestaron y recolectaron los tests de estilos de aprendizaje. Posteriormente, se les preguntó a los estudiantes quiénes querían participar con sus notas, aunque los treinta estudiantes dieron su consentimiento para contestar el cuestionario y el test de aprendizaje y permitir ser observados, grabados y fotografiados, solo cuatro decidieron participar como voluntarios para proporcionar sus notas de clase. Los estudiantes que levantaron la mano fueron AHS, VGA, AMIP y RMAS, de los cuales 3 fueron mujeres y un hombre. Se les registró su nombre y se les pidió sus notas para sacarles fotocopiarlas mismas que se les regresaron después de un par de horas. Finalmente, dio tiempo para que los estudiantes colocarán sus datos en un formato de Excel con sus correos electrónicos en mi computadora portátil para enviarles el cuestionario exploratorio por medio del formulario de Google Forms (véase figura 10).

Sección 1 de 3

CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES

DATOS GENERALES

Nombre completo (incluyendo por ejemplo, apellidos):

Respuesta breve

Edad *

Texto de respuesta breve

Género *

Texto de respuesta breve

Semestre *

Texto de respuesta breve

Carrera *

Texto de respuesta breve

Sección 2 de 3

APUNTES DE CLASE

Contesta cada una de las preguntas cuidando explicar su respuesta (según sea el caso).

1. ¿Tienes cuadernos de apuntes divididos por materia? *

Texto de respuesta breve

2. ¿Cuándo o en las asignaturas de matemáticas, tienes el hábito de tomar apuntes en clase? *

SI
 No (en el caso de que contestes "No" en las demás respuestas escribe "NA-No aplicar").

¿Por qué tomas apuntes en clase? *

Texto de respuesta largo

3. En la asignatura de Cálculo Diferencial ¿cómo sabes cuándo y qué anotar? *

Texto de respuesta largo

4. ¿Para qué te sirven los apuntes de clase? Describe. *

Texto de respuesta largo

5. ¿Tienes algún estilo particular para tomar tus apuntes de Cálculo Diferencial? En caso de que tu respuesta sea afirmativa describe.

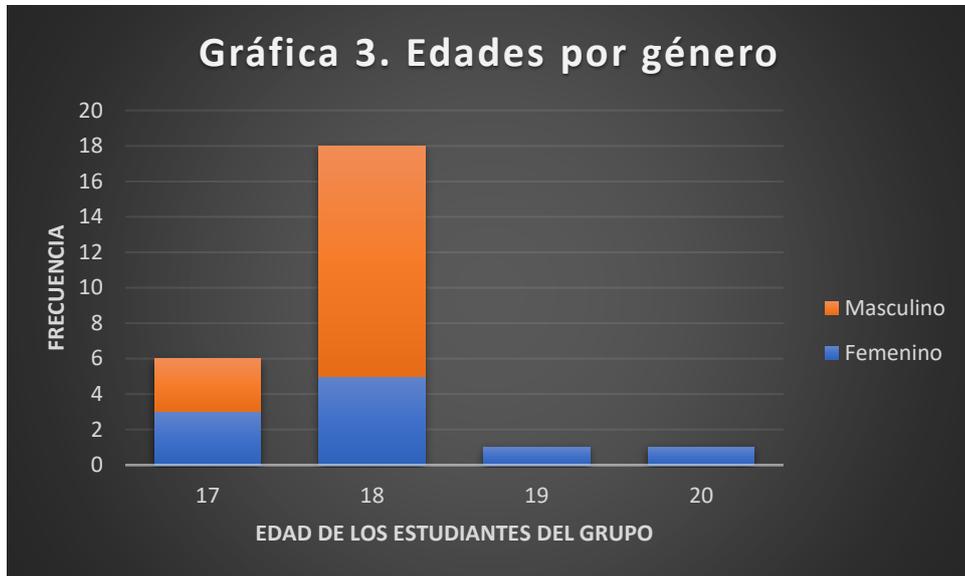
Texto de respuesta largo

6. ¿Qué notas son las que anotas durante la clase de Cálculo Diferencial? *

Figura 10. Cuestionario exploratorio elaborado en Google Forms. Fuente propia.

La mayoría de los estudiantes del grupo contestaron el cuestionario exploratorio durante la primera semana después de la observación. Aunque las observaciones fueron de carácter no participante, el docente siempre hacía comentarios durante la clase como: “¡por qué me tenía que poner nervioso y equivocarme hoy que tenemos compañía!”, “¿quieres que también te mande los ejercicios?”, entre otros dirigiéndose a mí directamente, ante esos comentarios opté por solo mover la cabeza y

sonreírle como muestras de atención, pero sin darle más señales de comunicación para no ser grosera tratando de limitar la interacción entre ambos.



Gráfica 3. Muestra la cantidad de estudiantes del grupo CD por edad y género.

El grupo constaba de diez estudiantes femeninas con el doble de estudiantes masculinos. Se distingue el grupo tenía casi el mismo número de estudiantes de Ingeniería Química Industrial que los pertenecientes a la Ingeniería de Eléctrica Electrónica.

De esta primera observación a la clase, surgió la necesidad de tomar video y fotos con mira al grupo para poder registrar algunas situaciones interesantes durante la elaboración de la nota de clase la clase que no pudieron registrarse por solo tener una cámara con mira al docente y al pizarrón la mayor parte del tiempo. Sucesos como la comparación de notas entre estudiantes y las diferentes formas de interacción entre pares y entre los estudiantes que se tenían y el docente propios del proceso de enseñanza-aprendizaje por lo que en la segunda y tercera observación se contempló utilizar la cámara del celular y una cámara fotográfica para recolectar más datos contextuales al momento de elaborar la toma de notas.

En la segunda observación se les pidió a los cuatro participantes que en una hoja blanca fueran anotando los pensamientos que les surgiera durante la clase para construir un mapa cognitivo (*cognitive maps*) con la intención de rescatar información intrapersonal. Durante estas dos sesiones de observación los estudiantes fueron menos tímidos y los observé más cómodos con mi presencia. Al finalizar la segunda observación se platicó con los cuatro voluntarios para proponerles el uso de la pluma digital para tomar sus notas de clase, ellos decidieron con un juego de azar quién la usaría las próximas dos semanas. Como resultado se tuvo que la estudiante RMAS utilizaría la pluma digital, se le explicó cómo el funcionamiento de la pluma, y la relación que tiene con la libreta y su celular. Además de explicarle lo que debía hacer con ella, que era elaborar sus notas de clases en CD durante las siguientes dos semanas; para cuando fuera a la tercera observación me entregará la pluma y sus notas físicas y digitales.

Tres de los cuatro voluntarios enviaron sus notas digitalmente durante estas semanas intermedias. Al término de la tercera observación la estudiante voluntaria entregó la pluma y la libreta que viene con la pluma digital y se le hicieron unas preguntas sobre el uso de la pluma. RMAS quedó de enviar las notas realizadas con la pluma de manera digital y los otros tres participantes quedaron de enviar sus notas digitalmente por correo electrónico.

Es relevante mostrar la ubicación en donde se sentaron los estudiantes participantes dentro del salón de clases porque marca su predilección de interacción con la clase y/o sus necesidades como podrían ser necesidades auditivas y/o las visuales (véase figura 11):

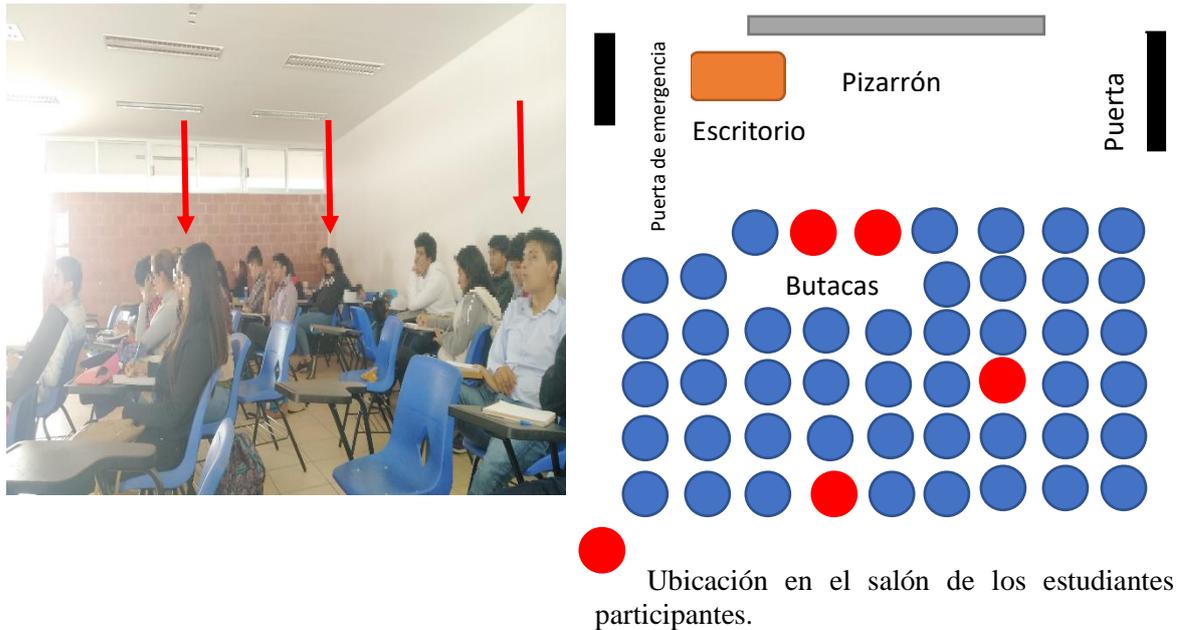


Figura 11. Ubicación de los estudiantes participantes en el salón de clase.

Durante las tres clases que se observó los estudiantes se sentaron cerca de las mismas regiones marcadas en la figura 11, las estudiantes AMIP y AHS se sientan siempre al frente, mientras que VGA se sienta en la parte de atrás en el centro y RMAS se sienta al fondo a la derecha del pizarrón. La recurrencia de sentarse en la misma región del salón puede sugerir que es relevante para ellos esos lugares para tomar la clase CD.

5.2.2 Resultados obtenidos del grupo focal

La aplicación del grupo focal se adelantó por una semana con el propósito terminar el proceso de recolección de datos y acelerar la fase de análisis de los datos. Como el grupo fue bastante grande se consideró hacer dos grupos en caso de que todos quisieran participar. La intención de realizar la entrevista con el grupo focal fue contrastar algunas respuestas que se dieron en el cuestionario y prácticas que se percibieron durante las observaciones. Al término de la reflexión sobre las observaciones y los resultados preliminares del análisis la construcción de la guía de preguntas quedó con once preguntas generales y tres particulares. El propósito de haber

considerado las preguntas generales fue para que se pusieran a discusión de los participantes del grupo focal y las tres preguntas restantes estuvieron dirigidas a los participantes que se sintieron identificados con ellas.

El día que se aplicó el grupo focal, todos los estudiantes presentes quisieron participar, por lo que se dividieron en dos equipos, para poderlos llevar a cabo dentro del aula se le pidió apoyo al docente para conducir la dinámica de uno de los equipos considerando que él cuenta con el conocimiento y la experiencia en métodos de investigación e intervención. La duración del grupo focal no llevó más de treinta minutos lo cual permitió poder interactuar con algunos estudiantes del grupo, al término de esta sesión se platicó con la estudiante RMAS para recordarle la entrega de sus notas digitales (no podíamos retener su libreta por ser una herramienta de estudio en temporada de exámenes).



Figura 12. Grupo focal 1.

Una limitación que se presentó al llevar a cabo el grupo focal fue la mi inexperiencia con este método de recolección de datos para la investigación ya que se pudo aprovechar mejor el tiempo para explorar ampliamente otros aspectos sobre las notas de clase con los estudiantes, y además fue un reto hacer un Rapport efectivo (Bisquerra, 2009; Hernández, Fernández & Baptista, 2015) con el grupo pues se notaron tímidos y les costó

trabajo al principio opinar. Las dificultades que se presentaron fueron dos, la primera cuando la persona que grabó en el primer grupo focal no cuidó las formas para hacer los audios ni el foco de la videocámara. La segunda fue el espacio, se compartió aula de clases para hacer la discusión con los dos grupos focales provocando que el audio del video de cada grupo no fuera en algunas partes claro causando que se traslaparán partes de audio del otro grupo (véase la figura 12). Lo que causo complicaciones al momento de la transcripción de los audios.

5.2.3 Resultados del test de estilos de aprendizaje de Kolb

Como resultado del test de estilos de aprendizaje de Kolb, se encontró que la mayoría de los estudiantes resultaron con una mayor tendencia al EA divergente y el segundo lugar EA del acomodador. El mapa de ubicación de EA mostró la relación que existía entre las variables edad y género con el estilo de aprendizaje, por ejemplo la edad de los participantes va de los 17 a los 20 años, mayoría de los estudiantes masculinos resultaron tener tendencia al EA divergente mientras que el grupo de las estudiantes femeninas sus resultados de EA estuvieron más repartidos entre los otros estilos y algunas combinaciones (véase la figura 13):

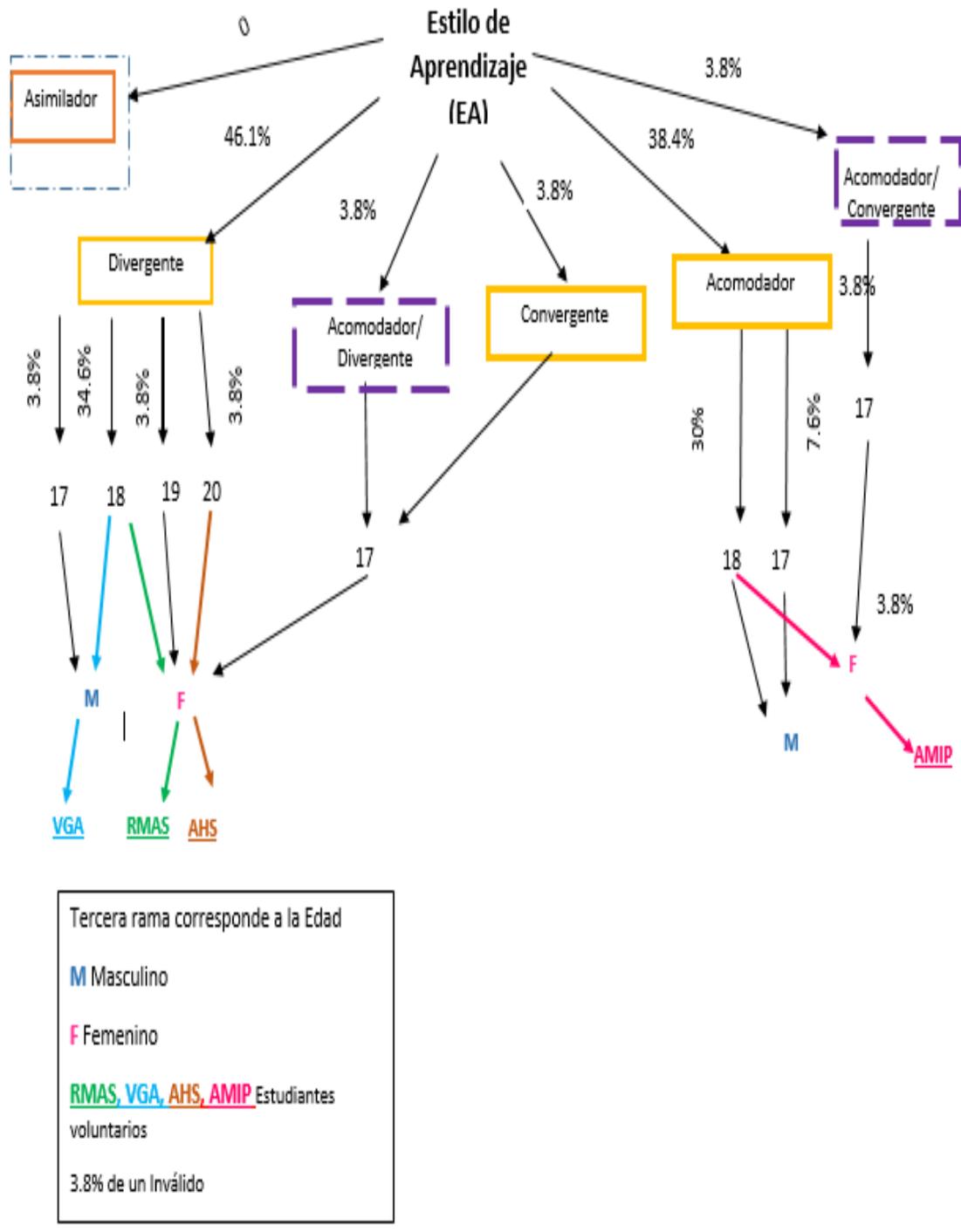


Figura 13. Mapa de ubicación de los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes resultaron tener el EA divergente, los cuales requieren situaciones concretas para percibir la información y en las que se puedan sociabilizar la información para poder procesarla (46.1%). Además, aparecieron dos casos de estudiantes con dos EA predominantes, lo que significa que los pueden tener un mayor abanico de oportunidades para

aprender como el estudiante con EA acomodador/divergente (7.6%) con actividades orientadas a crea la experiencia concreta y de sociabilización.

Recordemos que el EA no es una característica estática, sino dinámica porque puede cambiar por el paso del tiempo y por la influencia que tiene el contexto. En la última visita se les comentaron a los estudiantes y al docente los resultados que obtuvieron en el test de estilos de aprendizaje pues mostraron interés por conocer su resultado y algunas características de cada EA. Por otro lado, los conceptos matemáticos que se ven en las asignaturas de matemáticas que son conceptos escolares, requieren construirse de conceptos cotidianos en el plano del quehacer cotidiano para desarrollarse y concretarse en el plano abstracto. Y conforme se avance en la formación educativa formal esto conceptos escolares requieren de un nivel mayor de abstracción, es el caso de los conceptos matemáticos que encontramos en Cálculo diferencial. Esto es relevante cuando consideramos los EA que resultaron del test, las características de los conceptos matemáticos no favorecen al 46.1% de los estudiantes que han desarrollado un EA divergente, caso contrario si el resultado del EA con mayor predominancia hubiera resultado ser los EA asimilador o el convergente. Es decir la mayoría de los estudiantes requieren de actividades orientadas a la sociabilización y trabajo en equipo para poder gestionar los aprendizajes de los objetos matemáticos que se encuentra en CD.

5.3 El proceso de la toma de notas de clase en matemáticas

Los estudiantes que contestaron el cuestionario fueron 26. Con las respuestas de las preguntas 2, 5,7, 8, 9, 10, 11 del cuestionario se pudo construir un organizador de procesos sobre la toma de notas (véase figura 14). Con el propósito de representar de forma gráfica la secuencia de acciones que los estudiantes realizan cuando toman una nota de clase además también nos muestra la variedad de recursos gráficos y acciones complementarias que se realizan a la toma de notas y que influyen en su construcción. En el cual se utilizan las respuestas de los estudiantes VGA, X-MCA y FOSG para ejemplificar lo que dicen que hacen cuando toman notas de clase.

Por ejemplo VGA toma apuntes, menciona que selecciona la información que anota y no reconoce un estilo particular para anotar. En algunas ocasiones utiliza un organizador de la información en sus notas de clase y utiliza tina de colores para anotar. VGA es uno de los estudiantes que dice que no complementa sus notas de clase fuera de ella y utiliza siempre los instrumentos tradicionales de anotación como el lápiz, la libreta o el lapicero (véase las fechas de color azul en la figura 14). Es interesante la negación del estudiante VGA en la cual no reconoce tener un estilo propio para anotar cuando al revisar toda su libreta y el contenido esta tiene ciertos patrones de recurrencia al colocar el título y preferencia de señalizaciones como las marcas al final del ejercicio que indican que se terminó la respuesta todo esto podría considerarse como un estilo rudimentario de anotar.

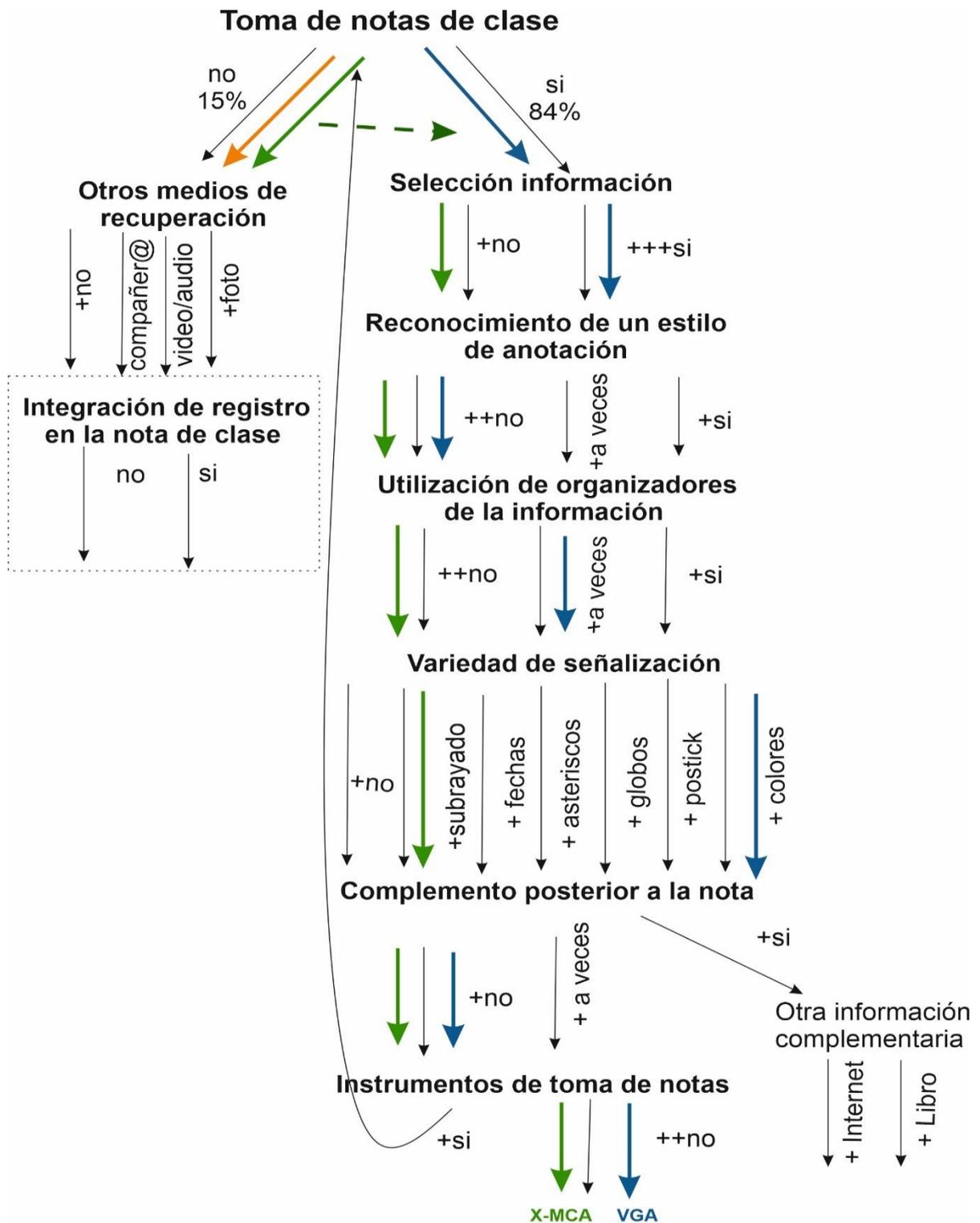


Figura 14. Esquema Organizador de proceso de Toma de notas de clase elaborado con datos de la encuesta.

En cambio el estudiante X-MCA niega tomar notas de clase pero responde las preguntas del cuestionario (véase las fechas de color verde en la figura 14) y durante las observaciones también se le captó escribiendo en

su libreta (véase la figura 42) inclusive se le observó consultando con el docente dudas de algún ejercicio escrito en la libreta, véase la figura 15:

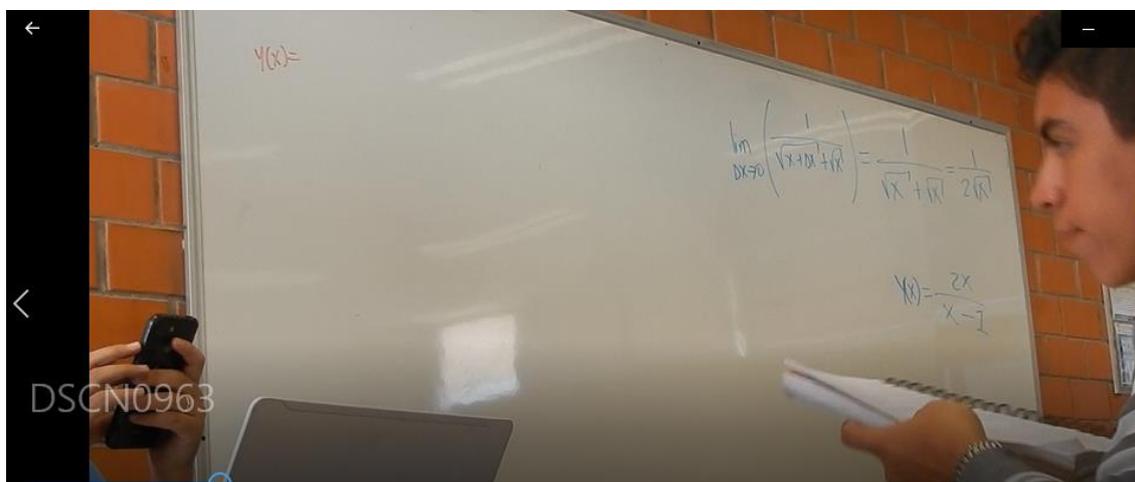


Figura 15. Estudiante X-MCA levantándose de su lugar para consultar al docente.

Es así como cuando se le pregunto a X-MCA en el grupo focal qué era aprender para él contestó que era saberse fórmulas y saber resolver ejercicios, además de contestó que el espacio de la libreta donde “práctica” los ejercicios no forman parte de las notas de clase.

En este caso del estudiante X-MCA que dice no elaborar notas la información que proporcionó en sus respuestas del cuestionario y del grupo focal junto con los videos describe una toma de notas parcial por ello se le considera selectiva, curiosamente sigue algunos de los caminos de VGA pero a diferencia de este, X-MCA si tomó fotos del pizarrón y en el grupo focal fue de los que mencionó que a veces pide las notas de clase a el estudiante VGA por tenerlos en orden.

La trayectoria de la fecha naranja representa a uno de los estudiantes que niegan tomar notas en clase (como FOSG o SBMG), lo que me hizo preguntarme cuál es la estrategia que utiliza este estudiante para registrar la información en clase ya que cuando se realizaron las observaciones se captó a varios estudiantes tomando fotografías con su celular (véase figura 40).

Razón por la cual tuvo que crecer el organizador de procesos en la parte superior izquierda enmarcada con las líneas punteadas. En el grupo focal se les volvió a preguntar a los estudiantes que no anotan en clase cómo recuperan la información de la sesión a lo cual contestaron que utilizan los pocos ejercicios anotados y lo que consideren con una dificultad mayor lo consultaban Internet.

Este análisis ayudó identificar a tres grupos de estudiantes los que toman notas de clase que representan el 84% del grupo (22 de los 26 estudiantes que se consideraron), los que no toman notas de manera tradicional pero se preocupan por recuperar o reconstruir las notas por otros medios que representan el 7.5% (2 estudiantes) como X-MCA, y los estudiantes que manifiestan que no toman notas y no requieren ningún registro pues les es suficiente poner atención en clase.

Debe considerarse que este organizador construido con el análisis de las respuestas del cuestionario puede no representar por completo las acciones realizadas por los estudiantes sin embargo muestran algunas de ellas que se pudieron verificar con la observación. Por ejemplo AMIP responde que anota porque le ayuda a encontrar las palabras clave sin embargo la cantidad de palabras del lenguaje natural en general es mínimo o bien a diferencia de la respuesta de ¿tienes un estilo de anotar...? Ella dice que escribe palabras clave y subraya esto último si se logra encontrar en sus notas de clase además de que su escritura no es selectiva tiene la mayoría de lo que el docente presento en las clases.

5.4 Condiciones y situaciones que definen las características de las notas de clase

Los hallazgos en esta sección se encuentran enfocados principalmente al docente, en particular al tipo de enseñanza que orienta las convenciones que fueron usadas en la clase.

5.4.1 Tipo de enseñanza

Se puede considerar dentro de las condiciones el tipo de enseñanza que emplea el docente, la enseñanza que utilizó el docente fue del tipo magistrocéntrico, en el cual el docente tuvo el rol activo mientras que el rol pasivo lo hizo el alumnado.

Además, el método de enseñanza que se encontró estuvo orientado a la exposición de tema, en el cual el docente sugiere ser la fuente del conocimiento para los estudiantes. Esto fue claro en la secuencia didáctica que desarrolló durante las tres sesiones, de las que se identificó cuatro partes: la exposición inicial de la clase, la solicitud de resolución de ejercicios, la resolución en el pizarrón y la ejercitación independiente.

Durante la exposición inicial el docente desarrolla el tema de la clase en la cual aparecen los conceptos matemáticos, los métodos de resolución y /o técnicas de aplicación en ejemplos. Esta parte de la secuencia es en la cual debería realizarse principalmente las adecuaciones didácticas propias de las matemáticas entre los conceptos científicos, los conceptos escolares y los conceptos cotidianos. Por ejemplo cuando el docente incorporó el concepto de función implícita, lo presenta al grupo de manera incorrecta, realizando una construcción del concepto incorrecto más orientado a la manipulación de símbolos (esto se analizará más analíticamente más adelante) pues si se

considera los preceptos de la transposición didáctica no se alcanzó a reconocer elementos que sugieran la utilización de este enfoque didáctico o de algún otro como cuando el maestro en la tercera observación enseña el tema de máximos y mínimos directamente desde los conceptos científicos. Posteriormente a eso, el docente pasó a los ejercicios guiados cuando propuso algunos ejercicios y dio un tiempo para que los estudiantes trataran de realizar el procedimiento. Una vez finalizado el tiempo dado el docente pasó a los estudiantes a resolver cada ejercicio en el pizarrón (véase figura 16). Es cuando, en caso de ser necesario, el docente corrigió los errores que los estudiantes cometieron. Una vez que terminaron estos ejercicios guiados y haber realizado la revisión de ellos, el docente dejó como actividad una lista de ejercicios para realizarlos de manera independiente el resto del tiempo de la clase.



Figura 16. Los estudiantes participando en la clase resolviendo un ejercicio.

Es decir, su estilo tiene una marcada tendencia a la enseñanza de aprendizajes centrados en la imitación y procedimientos de resolución de ejercicios. Puesto que las actividades que propuso requirieron de trabajo individual sin la incorporación de procesos colaborativos, o bien escenarios

de aprendizaje como la resolución de problemas que promuevan el uso de estrategias técnicas propias de las matemáticas.

No manifestó actitudes negativas o problemas de control del grupo porque los alumnos guardaron un orden aparente y participaron en cada clase haciendo preguntas, pasando al pizarrón o bien contestando las preguntas que hacía el docente. En cambio, trató de ser empático y procura motivar a sus estudiantes con expresiones de aliento. Esto se puede notar cuando usó frases como “¿podemos aplicarla?, ¿se sienten preparados para aplicarla?, ¡Vamos a aplicarla! y ¡Eso es!”.

Sin embargo este estilo de enseñanza no consideró la diversidad de EA que pudieran existir en el grupo para recuperar con otro tipo de actividades que no solo favorezca a un sector del grupo sino a todos o al menos a la mayoría. Ya que el 46.1% de los estudiantes son divergentes y requieren de realizar actividades de reflexión y sociabilización por su facilidad de experimentación y ejecución se verían beneficiados con propuestas de resolución de problemas y desarrollo de procesos. Lo cual este estilo de enseñanza no recupero porque estuvo más enfocado a formas de trabajo individual con la resolución de ejercicios.

5.4.2 Registro matemático

Dentro del registro matemático que empleo el docente se encontró:

1. Atiende a interpretaciones de las expresiones complejas como meras concatenaciones de símbolos orientada a una visión formalista de las matemáticas orientada a la manipulación de los símbolos matemáticos dentro de los procedimientos; sin incluir el significado del concepto matemático durante la exposición y los ejercicios guiados que está

enseñando. Es el caso cuando analizamos esta parte de la transcripción correspondiente a la tercera observación realizada:

(...)

D: eran menores, y en el mínimo todos los puntos a su alrededor son mayores a él. Entonces bueno, vamos a ver entonces. Todos estos puntos críticos, tanto los máximos como los mínimos, los vamos a encontrar igualando “efe de equis” igual a cero, perdón la derivada de “equis” igual a cero y además despejando “equis”, y nos va a decir en que “equis” ésta derivada vale cero, es decir, en que “equis” la pendiente vale cero y así vamos a encontrar estos puntos críticos. Una manera de saber si es un punto crítico, y si el punto crítico es un máximo o es un mínimo es evaluando puntos alrededor de él, es decir, si “efe de equis”, “efe de equis” prima es igual a cero cuando “equis” vale-no se entiende-pues entonces lo que vamos hacer es, aaah, evaluar la función original, aaah, eh, un poquito después evaluar la misma función original un poquito antes y podemos encontrar, si ambos puntos son mayores que el punto crítico pues significa ¿qué es un...?

E: mínimo,

D: que es un mínimo. Si ambos son menores pues significa que es un máximo. Hagámoslo de esta manera y hoy vamos a encontrar una manera un poco más bonita y sencilla de cómo evaluarlo, va... Bien, veamos esta función tres “equis” cuadrado menos doce “equis” más quince, por favor derívenla, iguálenla a cero y despejen “equis” y ahorita vamos a interpretar esa, ese resultado. Derívenla, iguálenla a cero y despejen “equis”.

2. Confusiones en las transformaciones oracionales.

Por ejemplo, cuando enseña el concepto función implícita provoca problemas de conceptualización, pues reduce la definición a un concepto simple orientado a la manipulación de los símbolos, esto se puede notar en este fragmento de transcripción de la clase:

(...)

D: Entonces tenemos que encontrar la manera de derivarlo tal cual esta así esta función, estas funciones se llaman funciones implícitas. Una función implícita es

en donde la variable dependiente no se puede despejar, no está despejada, aaah, entonces ¿Qué hacemos con estas funciones implícitas?

Para Larson & Edwards (2010) una función implícita está dada por la forma en que se encuentra escrita la función y que determina la cantidad de variables dependientes e independientes dentro de los enunciados. Es decir, la forma que define la relación condicionada de “implícitamente y está en función de x ”.

El docente además eligió una función implícita compleja como primer ejemplo $\ln(x + y) = \text{sen}(x + y)$ -en vez de considerar una función algebraica que por naturaleza son más sencillas para explicar por el tipo de operaciones básicas involucradas en la función compuesta-. Por lo que no solo debía enseñar el concepto de función implícita sino además añadió un nivel más alto de complejidad por trabajar con dos funciones trascendentales dentro del mismo ejemplo. Esta parte de la transcripción de la clase es interesante porque demuestra la sorpresa que siente profesor del resultado que:

(...)

D: Coseno de “equis” más “ye”, igual con cero. ¡Ay caray! No puede ser...

E: ¿qué?...

D: Algo hice mal porque si lo pasamos dividiendo se hace cero y queda que “ye” igual a menos uno. Hice algo mal, a ver qué hice mal...

Le sorprendió porque no consideró lo que significa realizar una transformación de sinonimia entre expresiones matemáticas. La sinonimia no significa que están trabajando las funciones como iguales, sino que entre ellas existen ciertas equivalencias, como compartir los mismos valores en las soluciones. Sin embargo aunque terminó el ejemplo con la respuesta de una función constante el docente quedó confundido sin comprender la

consecuencia que implicó de haber construido de esa forma el ejemplo. Esto solo sucedió en una ocasión durante las tres observaciones.

El estudiante VGA no escribió este ejemplo en su libreta, pero en cambio AHS y AMIP si, mientras AHS trató de anotar el procedimiento completo y AMIP decidió no anotar todo.

3. Tiene problemas semánticos en matemáticas pues cuando quiere introducir el concepto de derivada por definición a través de límite, escribe incorrectamente en el pizarrón las medidas del triángulo que utilizó como base de su argumento de construcción de la definición de límite, aunque las dice correctamente (véase figura 17):

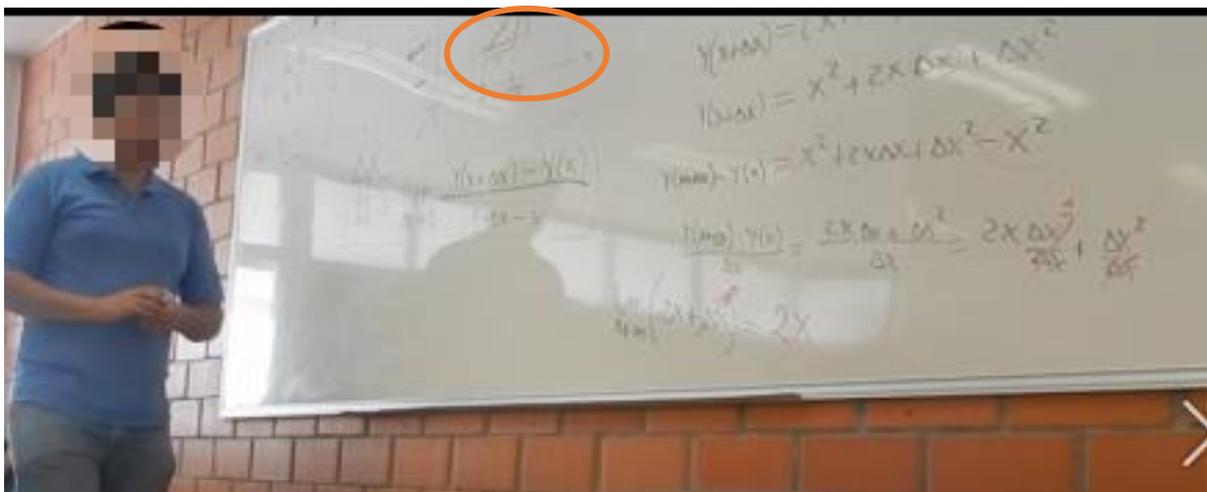
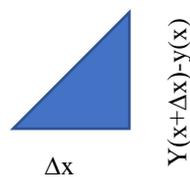


Figura 17. Docente enseñando la noción de derivada por definición.

Cuando las medidas del triángulo deben quedar de esta manera:



En donde la expresión $Y(x+\Delta x)-y(x)$ es equivalente semánticamente al símbolo Δy .

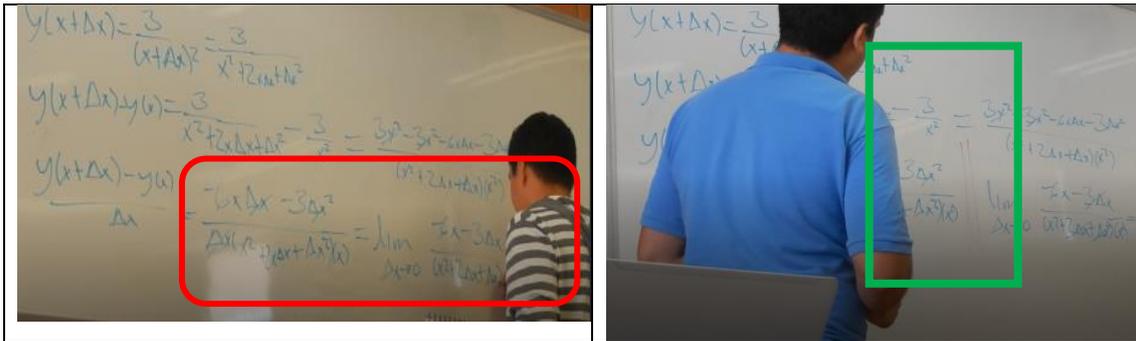


Figura 18. Corrección que hace el docente del ejercicio que resuelve el estudiante.

En la figura 18, la escritura del estudiante insinúa que las expresiones son equivalentes en sinonimia, por el uso del símbolo de igual, dejando de lado la relación entre una oración y su sucesora en un argumento matemático produciendo un error semántico. Por lo que el docente intervino, colocando dos líneas verticales que significan la separación de la escritura.

4. El uso de herramientas lingüísticas y de expresiones tradicionales del docente dentro de su discurso, véase la tabla 12:

Usos de elementos lingüísticos	Marca dentro de la transcripción
Uso del modo imperativo e inclusivo de la acción	<u>Queremos</u>
Utilización muletillas	<u>Este</u>
Uso de diminutivos	<u>Pedacito</u>
Metáfora	<u>Ojo de buen cubero</u>
Locución	<u>ok</u>
Analogía	<u>la pendiente era como una patineta</u>

Tabla 12. Elementos lingüísticos que aparecen en el registro matemático en el aula de clase.

Podemos observar en las transcripciones de las sesiones el uso de diminutivos y el uso del verbo imperativo-inclusivo, por ejemplo, en esta parte:

D: (...) ahora aquí si se fijan acabamos de hacer un pequeño triangulito... si nosotros queremos conocer la pendiente al igual que en estas dos formulitas, pues tenemos que dividir este pedacito en “ye” entre este pedacito en “equis”, ahora ¿cuál será el pedacito en “ye”? ¿Cuánto mide ese pedacito en “ye”? haber ustedes díganme...

Es discutible el uso de los verbos dentro del registro matemático en su forma imperativo-inclusivo pues no siempre es un indicador de evasión de la responsabilidad de lo que se hace o resulta ser una muestra de condescendencia por parte del maestro o de indicación implícita de que esta es la forma correcta de hacerlo (Pimm, 2002). Sino podría suceder que este tipo de mensajes implícitos, fueran utilizados como una forma de motivar la participación del estudiante para su integración en el desarrollo de la clase. Fue difícil identificar señas en las notas de clase que hubieran mostrado la recuperación de este estilo de habla puesto que la mayoría de los estudiantes no contextualizaron sus notas con el discurso hablado del docente y solo algunos anotaron lo que escucharon y consideraron la parte más importante como fue el caso de la AMIP. En cambio la carga semántica y este tipo de registros se detectaron cuando los estudiantes hablaron en los grupos focales (véase anexo 7).

5. El uso de analogías como apoyos conceptuales para los estudiantes, tales como:

D: (...) dijimos que íbamos a hablar de máximos y mínimos, ¿no?, recuerdan que vimos, aaah, que, si la pendiente era como una patineta que estaba aaah, pues si patinando sobre una función pues la inclinación iba a ser la derivada ¿cierto?

6. También se detectaron metáforas como:
(...)

D: ¿Por qué? No solo a “ojo de buen cubero”, ¿cómo lo hicieron aritméticamente?
¿Qué operación hicieron para saber que eso vale tres?

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

Debemos también considerar que el uso de las herramientas semánticas como las metáforas y analogías ayuda tanto a la transposición didáctica que debe hacer el docente como a la comprensión de un concepto matemático del estudiante. En cambio, si el docente no las utiliza correctamente podría generar confusión en la construcción del concepto matemático e interpretación incorrecta del procedimiento que se está aprendiendo.

7. La falta una utilización asertiva de las TICS.

Se detectó durante las observaciones que la mayoría de los estudiantes contaba con un teléfono celular en el cual recibieron la lista de ejercicios que el docente les mandó, pero no se consideró como instrumento de una actividad de búsqueda o de práctica. Rescato el ejemplo del docente cuando intenta ejemplificar la aproximación a la recta tangente:

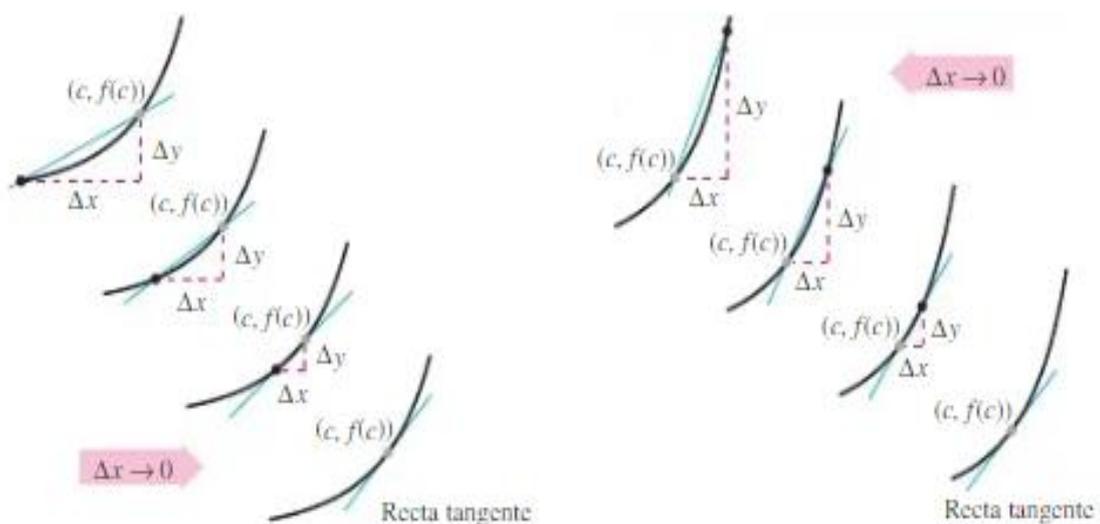


Figura 19. Aproximación a la recta tangente. Recuperado de Larson & Edwards (2010).

El docente, en vez de dejar todo el trabajo de representación e interpretación a la mente del estudiante o a la imagen que pueda construir en el pizarrón que pudieran resultar a veces ambiguas, puede auxiliarse de simuladores para que el estudiante haga la aproximación de manera dinámica y experimente no solo con una función sino con distintos tipos de funciones, tales como GeoGebra o Desmos.

5.4.3 Intereses de los estudiantes

Si se considera que los intereses son las tendencias de una persona a un sujeto, cosa o situación (RAE, 2014) estos orientan las prácticas de los estudiantes dentro de la clase de matemáticas. En las clases lo que se encontró fue:

El día de la segunda sesión de observación los estudiantes tendrían que presentar un examen de Probabilidad y Estadística cuando acabara la clase de CD, mientras el docente esperaba a que llegaran más estudiantes se puso a retroalimentar algunos estudiantes, pero también algunos estudiantes se pusieron a estudiar para su examen (véase figura 20).

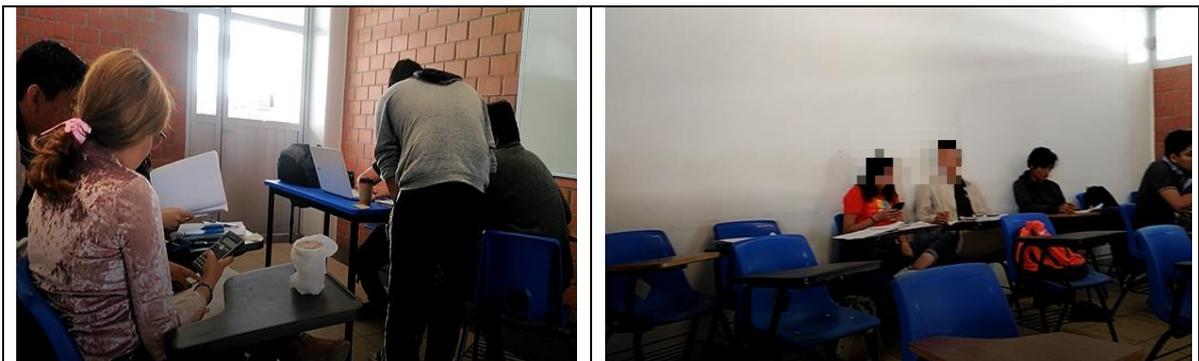


Figura 20. Estudiantes estudiando para el examen de Probabilidad

No solo previo al inicio de la clase se pusieron a estudiar sino también se les vio durante el desarrollo de ella. Esto se pudo notar en las hojas destinadas para hacer el mapa cognitivo es que se pueden notar que los estudiantes con EA divergentes (RMAS, VGA y AHS) presentaban un

periodo de atención a la clase discontinuo, es decir que algunos de estos estudiantes registraron algunos de sus pensamientos y sentimientos que no tenían relación con la clase de cálculo que tomaron. Dos de los tres estudiantes divergentes mostraron en su mapa cognitivo una interacción con la hoja más profunda porque pareciera que les sirvió como medio de desahogo por el estrés que les causaba pensar en el examen que presentaron ese día como fue el caso de VGA (véase figura 21).

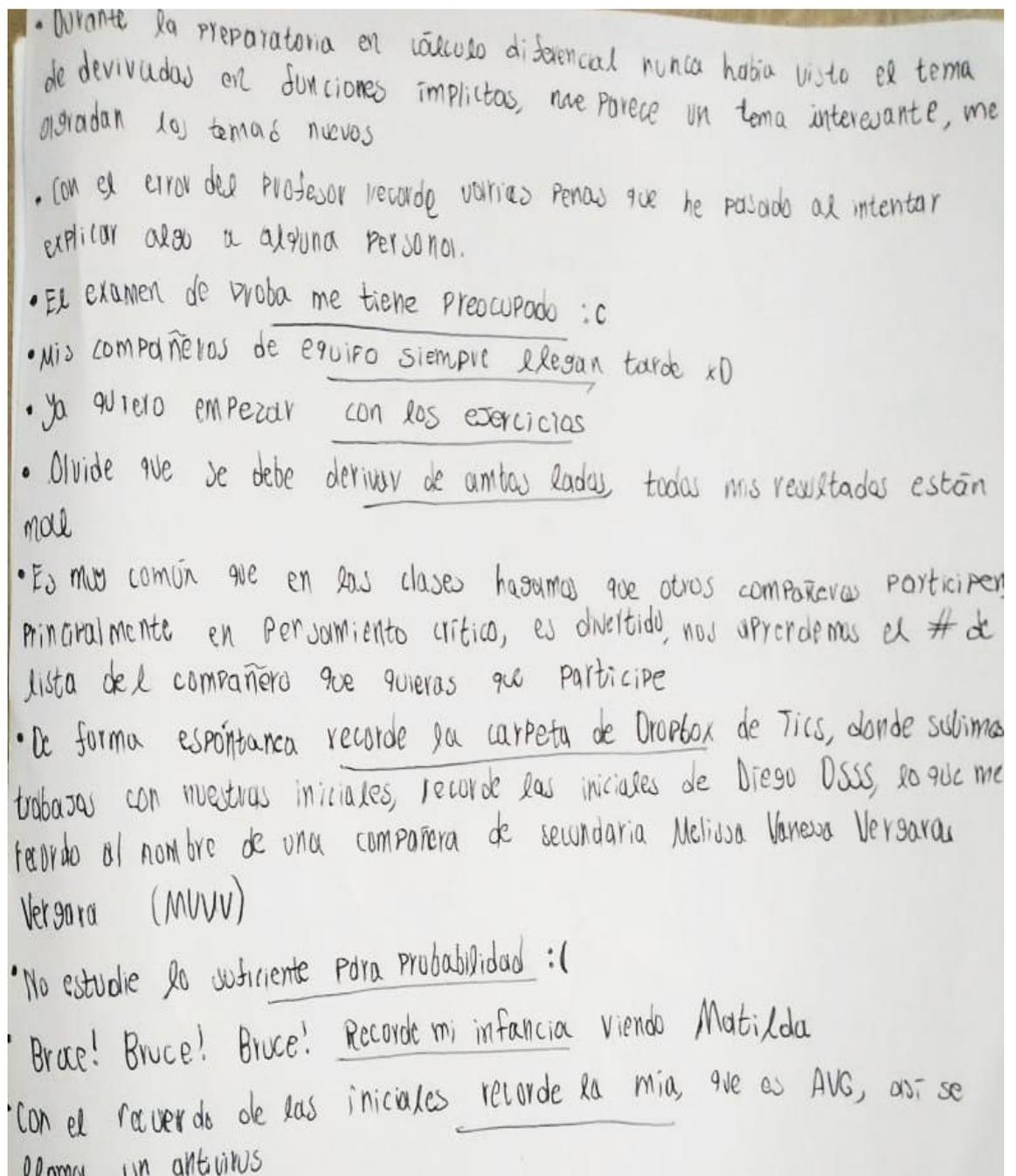


Figura 21. Mapa cognitivo del estudiante VGA.

Por otro lado, el estudiante con EA acomodador (AMIP) a penas y escribió puede ser porque ese día llegó 10 minutos tarde o bien porque su atención estuvo dirigida a otro tipo de interés (véase la figura 22).

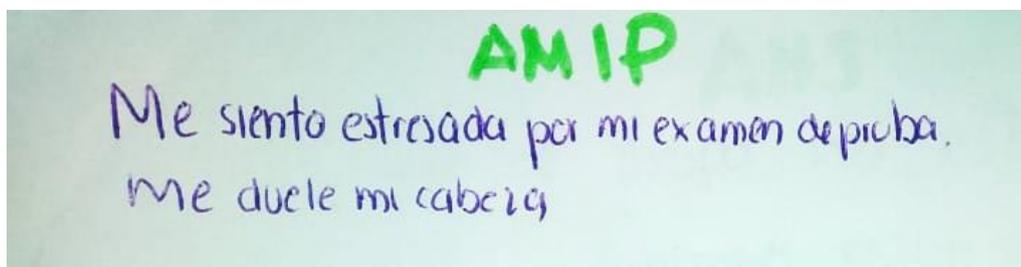


Figura 22. Mapa cognitivo de AMIP

Sin embargo, los cuatro dieron muestra de cansancio mental que se manifestó con sentimientos de estrés, de ansiedad, de inseguridad y dolor físico ocasionado por el examen de Probabilidad y Estadística de la clase siguiente.

Cabe mencionar que en esta sesión, VHA realizó unas notas de clase cortas (de una página) a diferencia de otras notas de clase tomadas en otros días, pudo ser porque estaba estudiando para el examen o bien por anotar en la hoja que se le dio para su mapa cognitivo. Inclusive fue el día que más errores cometió de ejecución donde olvidó aplicar la transformación de derivada a toda la equivalencia dejando los términos independientes sin cambios (véase recuadro rojo figura 23). Sin embargo esta situación no pasó desapercibida por el estudiante ya que si lo comentó en su mapa cognitivo pero no corrige los procedimientos de los ejercicios.

• FUNCIONES IMPLICITAS

$$y e^x + x^2 = 0$$

$$y e^x + e^x y' + 2x = 0$$

$$y' = \frac{-2x - y e^x}{e^x}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = x$$

$$\frac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 1$$

$$(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y') = (x-y)^2$$

$$x + x y' - y - y y' = x + x y' - y + y y' = (x-y)^2$$

$$2x y' - 2y = (x-y)^2$$

$$2x y' = (x-y)^2 + 2y$$

$$y' = \frac{(x-y)^2 + 2y}{2x}$$

1. $x^2 + y^2 = 4$ $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 2y y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = \frac{4-2x}{2y}$

2. $2xy = 1$ $2x y' + y \cdot 2 = 1 \Rightarrow 2x y' = 1 - 2y \Rightarrow y' = \frac{1-2y}{2x}$

3. $y^2 - 8x = 0$ $2y y' - 8 = 0 \Rightarrow 2y y' = 8 \Rightarrow y' = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}$

4. $x^2 + 2y^2 + 5x - 2y - 1 = 0$ $2x + 4y y' + 5 - 2y' = 0$
 $4y y' - 2y' = -2x - 5$
 $2y'(2y - 1) = -2x - 5$
 $y' = \frac{-2x - 5}{2y - 1} = \frac{-2x - 5}{2y - 1}$
 $y' = \frac{-2x - 5}{2(2y - 1)} = \frac{-2x - 5}{4y - 2}$

Figura 23. Notas de clase de VGA del 8 de octubre de 2020.

En resumen, algunos estudiantes presentaron una atención dividida por intentar atender a dos propósitos distintos: la clase de ese momento y estudiar para el examen de la siguiente clase.

Ese mismo día sucedieron situaciones que funcionaron como distractores. Mientras algunos alumnos estudiaban o ponían atención a la clase algunos otros se pusieron a jugar con un cubo Rubik (véase la figura 24).



Figura 24. Estudiantes jugando con el cubo de Rubik.

Había quienes utilizaron el celular durante la clase con otros fines distintos a la toma de fotografías o a la consulta de algún tema de la clase (véase figura 25). En las observaciones se prestó particular atención a algunos estudiantes que dedicaron un largo periodo de tiempo y una atención especial al celular lo que sugiere que podrían estar escuchando música, viendo videos o revisando sus redes sociales.



Estudiantes usando su celular para ver algún video.



Estudiante escuchando un audio.

La estudiante del fondo se encuentra comiendo.

Figura 25. Estudiantes distraídos de la clase.

Se puede ver en la figura 25 también como varios estudiantes estuvieron comiendo durante la clase sin que el docente se percatara de ello, una de ellas era el estudiante RMAS que inicialmente era uno de los participantes con sus notas de clase.

5.5 Características de las notas de clase de los tres participantes

El análisis de las notas de los tres estudiantes participantes que hemos llamado VGA, AMIP y AHS se presenta a continuación:

- Las notas de clase de VGA

En el análisis completo de las notas del estudiante VGA que resulto tener preferencia del EA divergente se encontró que la libreta que usa el estudiante VGA era una libreta profesional de cuadro grande cuya portada era una imagen de marciano. Las notas que se realizaron antes del 17 de septiembre DE 2020 se consideran notas del periodo pre-estudio. El aspecto general que tenían estas presentaban información sobre el campo de los números Reales (**R**) y su estructura, en esas partes de escrito predominaba el estilo de escrito verbal que poco a poco conforme avanzaba el curso el estilo evolucionaba al estilo simbólico. En las notas del estudiante no se encontraron *faltas de ortografía* en el lenguaje natural.

La nota de clase tomada el 17 de septiembre consta de 3 páginas y la cual fue construida en las diferentes partes de la secuencia didáctica del profesor. Por ejemplo la parte de la nota enmarcada en el recuadro de color purpura de la página 1 (véase la figura 26) se realizó cuando sucedía la exposición inicial de la clase con la gráfica que uso el docente para explicar la derivada por definición y el ejemplo de la función cuadrada ($f [x]=x^2$). Mientras los dos ejercicios siguientes el docente se los solicitó a los estudiantes para que los realizarán ($f [x]=2x^3 -x^2$ y $f [x]=\sqrt{x}$) para que después de cierto tiempo el docente los resolviera (véase recuadros negros en las página 1 y 2 de la nota de clase, fig. 26 y 27).

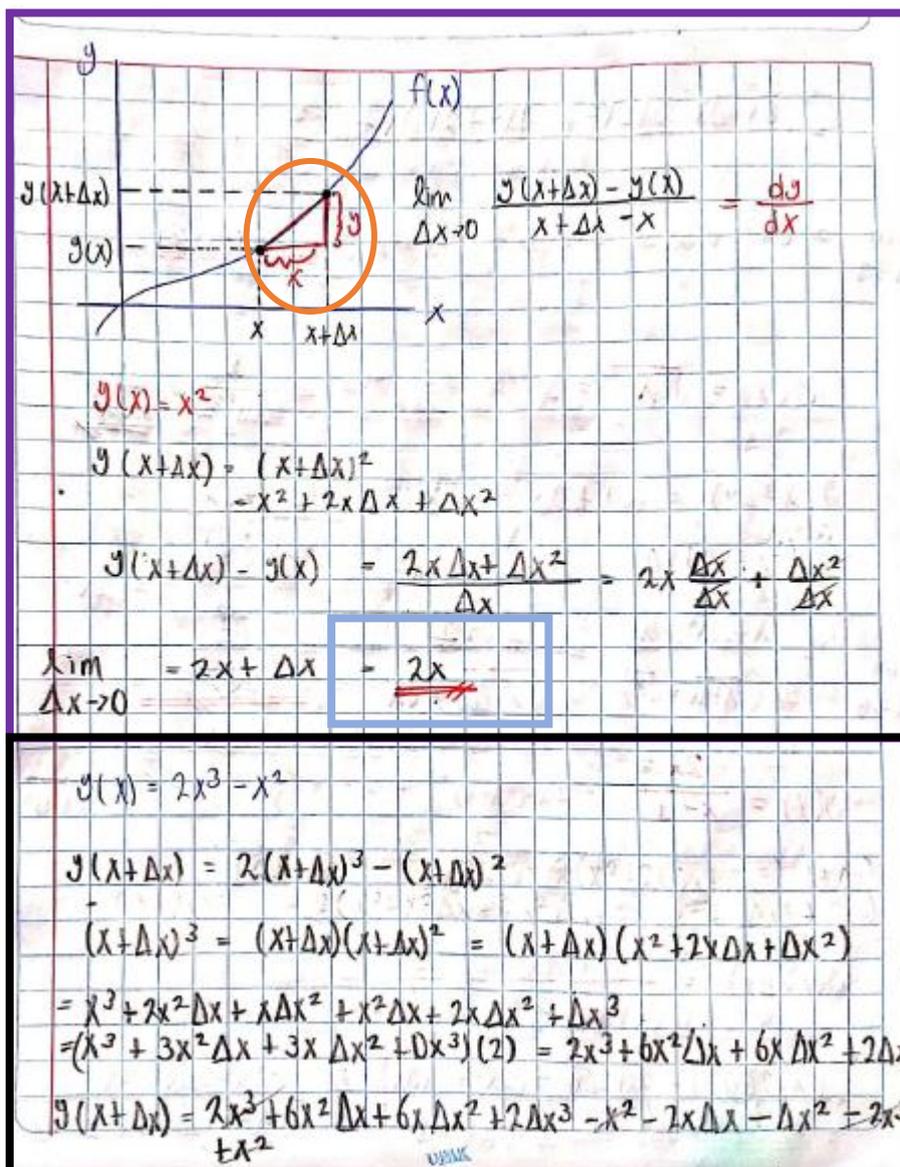


Figura 26. Página número 1 de la nota del 17 de septiembre del estudiante VGA.

$$= \frac{6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 - 2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 - 2x - \Delta x = \underline{\underline{6x^2 - 2x}}$$

$$y(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

$$y(x+\Delta x) = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

$$y(x) = \frac{2x}{x-1} = 2x \cdot (x-1)^{-1} = 2 \cdot -(x-1)^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = \underline{\underline{-\frac{2}{x^2 - 2x + 1}}}$$

$$y(x+\Delta x) = \frac{2(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)-1} - \frac{2x}{x-1}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x)(x) - (2x+2\Delta x) - (2x^2+2x\Delta x) - 2x}{x^2+x\Delta x-x-x-\Delta x+1} = \frac{-2x-2\Delta x+2x}{x^2+x\Delta x-2x-\Delta x+1}$$

Figura 27. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante VGA.

Los últimos ejercicios se resolvieron durante la parte didáctica llamada resolución del pizarrón, sin embargo es aquí cuando el estudiante decide utilizar otro procedimiento alternativo además del que propuso el docente para encontrar la derivada de una función que es utilizando las fórmulas directas (véase figura 27 y 28).

Handwritten mathematical work on grid paper showing the derivation of the derivative of $y = \frac{3}{x^2}$. The work includes several steps of algebraic manipulation, with key results boxed in blue and intermediate steps circled in red.

$$y = \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x^2 + x\Delta x - 2x\Delta x + \Delta x + 1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{x^2\Delta x + x\Delta x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + \Delta x}$$

$$= \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

Key result boxed in blue: $\frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$

Intermediate steps circled in red: $x^{-2} = +2x^{-3} = -2 \frac{1}{x^3} = \frac{-2}{x^3} \cdot 3 = \frac{-6}{x^3}$

$$y(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$y(x+\Delta x) = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} - \frac{3}{x^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} = \frac{3x^2 - 3x^2 - 6x\Delta x - 3\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} = \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2}$$

$$= \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$$

Key result boxed in blue: $\frac{-6}{x^3}$

Figura 28. Página número 3 de la nota del 17 de septiembre del estudiante VGA.

Las características de la nota de clase que se observaron del estudiante VGA fueron: la nota es ordenada y limpia, no tiene fecha, la forma de escritura permite la lectura lineal y secuencial, no existen información complementaria (ayudas que dio el profesor), el uso de los colores para remarcar información importante y el resultado final de un ejercicio estas últimas acciones que se confirman en el organizador de procesos (véase figura 15). Tuvo errores de equivalencia entre la función y la transformación derivada en los dos ejercicios que empleo el procedimiento alternativo al utilizado por el profesor (véase los óvalos de color rojo en la figura 27 y 28) pero no se detectaron errores de notación. Es posible que el estudiante utilice el procedimiento de fórmulas definidas porque no requieren el dominio de un conocimiento matemático mayor más que la reproducción es por ello que se equivoca al utilizar el símbolo de igual (error de notación) pero no logra distinguir la diferencia entre las funciones. Ya que los ejercicios recuperan conocimientos previos tal vez provenientes de sus estudios de bachillerato.

Una vez que se terminó de comparar la nota de clase de este estudiante con la información que presentó el profesor, se concluye que el estudiante seleccionó aquellas cosas más relevantes para anotarlas pues en su nota no contenía todo lo que se desarrolló en las clases ni las ayudas que dio el profesor confirmando lo que contestó en el cuestionario.

- Las notas de clase de AHS

La estudiante AHS con EA divergente, tenía una libreta profesional de cuadro grande, su portada era de color azul, con las siguientes características: el estilo de escritura con el que empezó fue el verbal por el tipo de contenidos introductorios sin embargo también utilizó su lenguaje natural para parafrasear e incluir ayudas que dio el docente, por lo que puede catalogarse como estilo de escritura mixto. A diferencia de VGA, AHS inició su nota de clase del 20 de agosto, considerada dentro del periodo pre-estudio, anotando las ponderaciones de evaluación, la bibliografía y la tarea dejada por el docente (véase figura 29). La nota de clase que tomó AHS el 17 de septiembre constó de 4 páginas las cuales pueden verse a continuación:

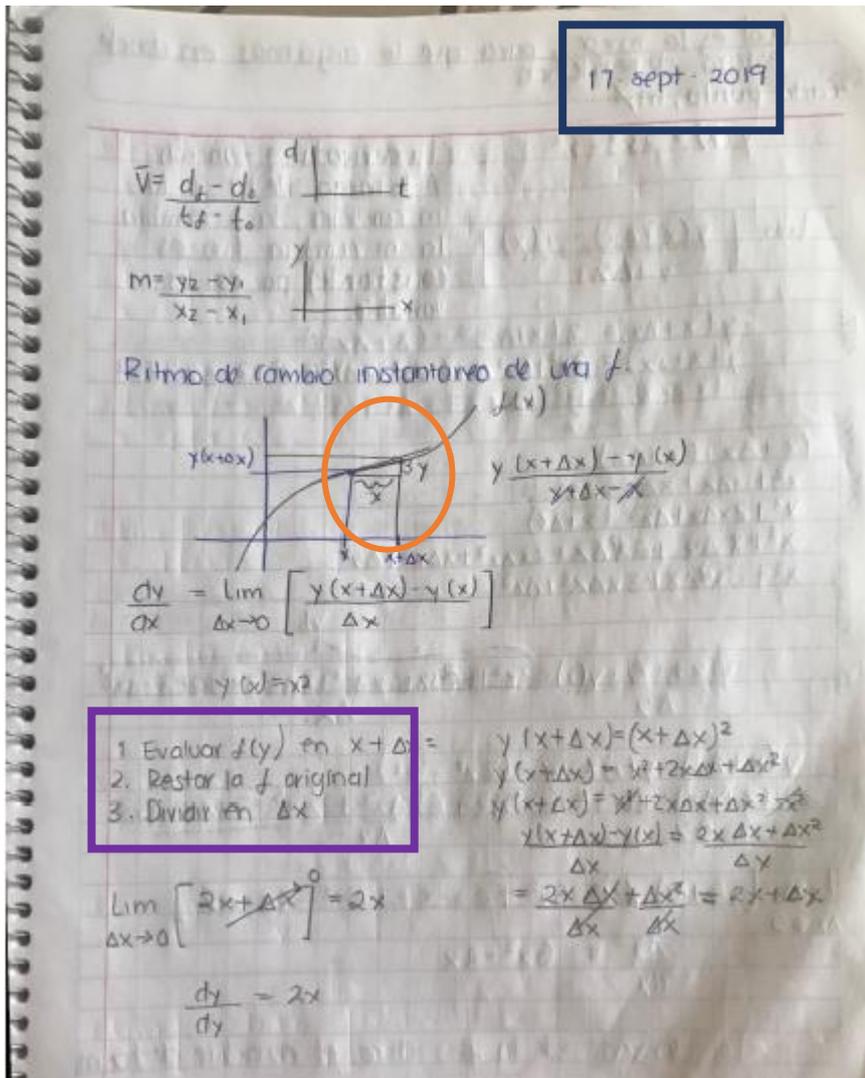


Figura 29. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS en la cual se observa el mismo error cometido por el docente ese día.

Las características encontradas en las notas de este día fueron: el apunto era ordenado y limpio, la estudiante AHS coloca fecha pero no título en esta ocasión utiliza solo dos colores de tinta para remarcar o escribir información importante pero no utilizó alguna señalización en los resultados finales (véase figura 29) y la forma de escritura permitió realizar una lectura no necesariamente lineal y secuencial (véase recuadro amarillo en figura 30),

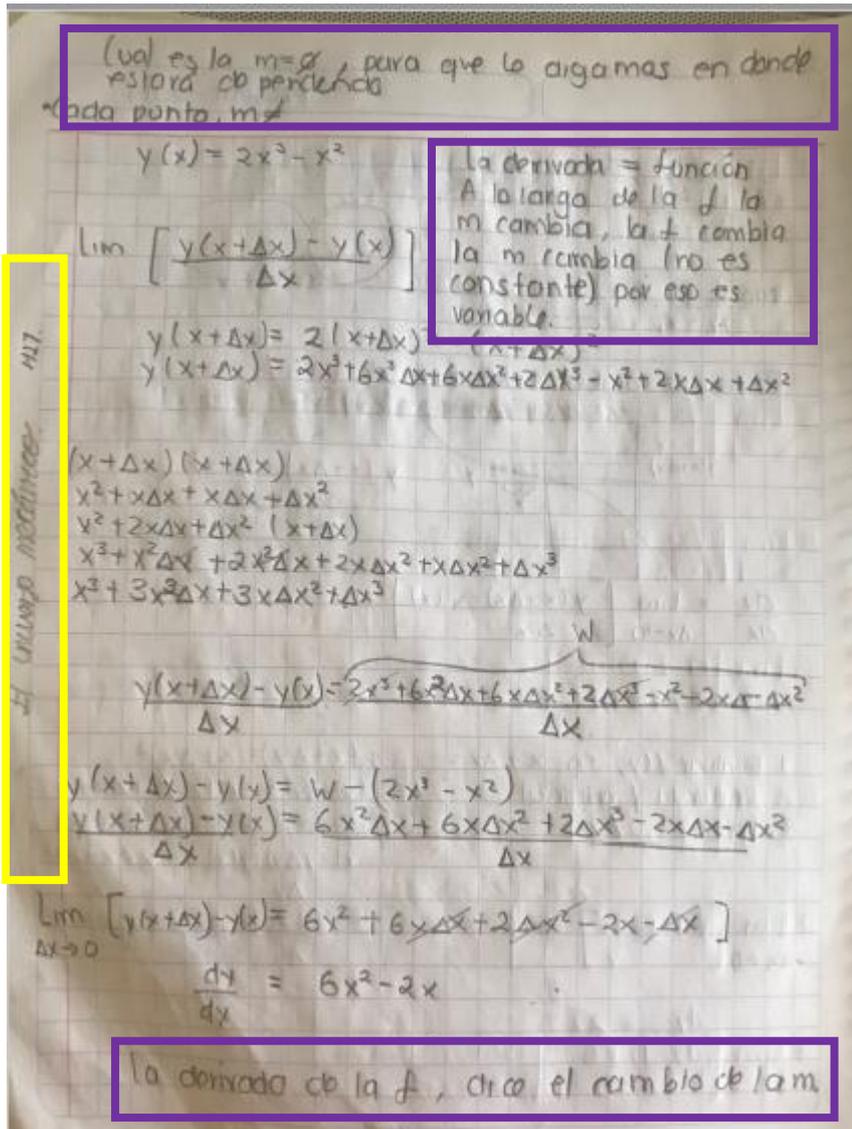


Figura 30. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS en donde se muestra un ejemplo de parafraseado.

En el caso de las notas de clase de la estudiante AHS, en estas se encontraron un nivel Alto de inclusión, por haber registrado las ayudas verbales del docente dentro de sus notas de clase (véase el recuadro morado en la figura 29 y 30) que los otros dos estudiantes AMIP y VGA no anotaron.

E28 P:1213 (20)

$$y(x) = \sqrt{x}$$

$$y(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Racional= por sí mismo, signo diferente.

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \right] = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{2(x+\Delta x) - 2x}{(x+\Delta x) - 1} = \frac{2x+2\Delta x - 2x}{x+\Delta x - 1} = \frac{2\Delta x}{x+\Delta x - 1}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{2x+2\Delta x}{x+\Delta x - 1} - \frac{2x}{x-1}$$

Figura 31. Página número 3 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS que muestra que no concluye ese ejercicio.

EJERCICIO 4

$$y(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$y(x+\Delta x) = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} = \frac{3}{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2} - \frac{3}{x^2}}{\Delta x}$$

$$y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{3}{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^2 - 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)x^2}$$

$$y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{-6x\Delta x - 3\Delta x^2}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)x^2}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{-6x - 3\Delta x}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)x^2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{-6x - 3\Delta x}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)x^2} \right] = \frac{-6x}{(x^2)x^2} = \frac{-6}{x^3}$$

Figura 32. Página número 4 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AHS.

Además en la página 3 (véase figura 31) se puede ver que el penúltimo ejercicio que el docente dejó para resolverlo la estudiante no lo terminó aun cuando un compañero paso a resolverlo correctamente y el docente todavía tomó unos minutos para verificar que estuviera correcto. Finalmente en la última página de su nota la estudiante cometió un error de notación pero no tuvo errores de equivalencia entre funciones asociados a los errores del tipo semántico (véase figura 32). Comparando las respuestas que dio AHS en el cuestionario donde manifiesta utilizar las notas de clase para recordar procedimientos y algunos conceptos y le permite a prestar atención a pesar de que su estilo de anotación es de transcripción literal las ayudas encontradas sugieren un esfuerzo por tratar de entender el tema enseñado que puede ser un indicador de que la estudiante puede ser del tipo copista a reserva.

- Las notas de clase de AMIP

Finalmente, la libreta que usó AMIP era de tamaño profesional de cuadro grande, al igual que VGA, y su portada tenía la imagen de flores con un globo. Las notas del estudiante AMIP, que tenía preferencia por el EA acomodador, en el periodo pre-estudio empezaron directamente con el tema de la estructuración de los números Reales (**R**) y a diferencia de AHS escribía pocas ayudas verbales lo que hace que su estilo de escrito tuviera una tendencia más cercana hacia el estilo simbólico (véase figura 33). Además se puede observar en las notas que si tenía fecha pero no el título del tema (véase recuadro azul marino en figura 34).

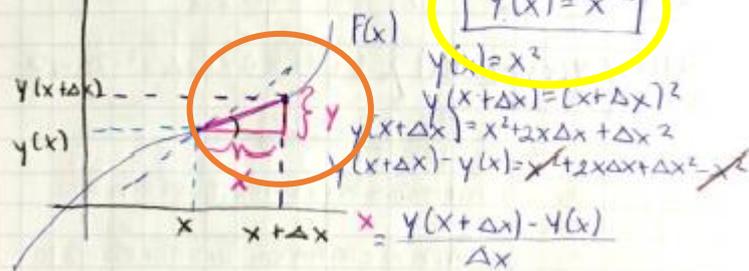
17/Septiembre/2019

$$V = \frac{df - d_0}{tF - t_0}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{x+\Delta x - x}$$

$$y(x) = x^2$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = 2x$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Figura 33. Página número 1 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.

En esta nota de clase no se encuentran alteraciones, cambios de orden igual a las notas de los otros dos participantes.

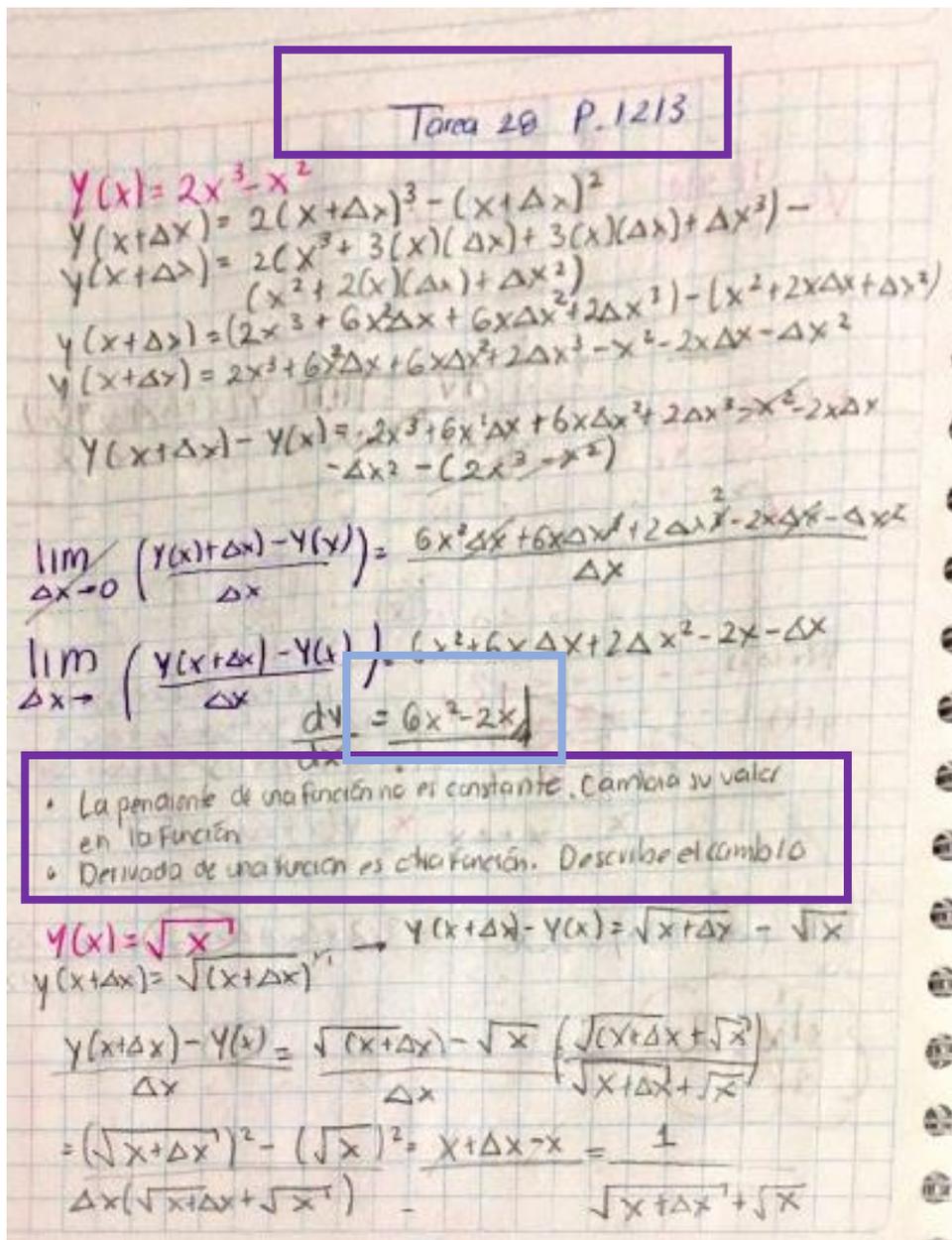


Figura 34. Página número 2 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.

La nota de clase es ordenada y limpia igual que las realizadas por los estudiantes, posee registradas algunas de las ayudas que dio el docente ese día como los datos de la tarea y algunas conclusiones (véase recuadros morados en figura 34).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$y(x+\Delta x) = \frac{2(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)-1} = \frac{2x+2\Delta x}{x+\Delta x-1}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{2x+2\Delta x}{x+\Delta x-1} - \frac{2x}{x-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(2x+2\Delta x) - (2x)(x+\Delta x-1)}{(x-1)(x+\Delta x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x\Delta x - 2x - 2\Delta x - 2x^2 - 2x\Delta x + 2x}{x^2 + x\Delta x - x - \Delta x + 1}$$

$$= \frac{-2\Delta x}{x^2 - 2x + x\Delta x + 1}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{x^2 - 2x + x\Delta x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + x\Delta x + 1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^2 - 2x + x\Delta x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Figura 35. Página número 3 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.

Sin embargo, las notas de clase de AMIP presentaron una mayor variedad de colores de tinta (véase figura 33) comparado con sus otros dos compañeros VGA y AHS. Además de utilizar el subrayado para representar que se terminó el procedimiento con el resultado, esta acción también pudo verse en las notas de VGA (véase recuadros azules en figuras 26-28 y 34-35).

$$y(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$f(x+\Delta x) = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} = \frac{3}{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x} - \left(\frac{3}{x^2}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{3x^2 - 3x^2 - 6x\Delta x - 3\Delta x^2}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x)(x)^2}$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{-6x\Delta x - 3\Delta x^2}{\Delta x(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x)(x^2)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x - 3\Delta x}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x)(x^2)} = \frac{-6x}{(x^2)(x^2)} = \frac{-6}{x^3}$$

Figura 36. Página número 4 de la nota del 17 de septiembre del estudiante AMIP.

Pero igual que AHS tiene errores de notación (véase óvalos rojos en figura 36) que pueden haber sucedido por estar sentadas a lado una de la otra y tratar de colaborar en sus métodos. Sin embargo las estudiantes no se percataron de estas diferencias con el cuadrado del término a partir de tener en el pizarrón el procedimiento correcto. Cabe mencionar que tanto AMIP como AHS no utilizaron el procedimiento para determinar la derivada de la función empleado por VGA.

Analizar qué es lo que está pasando en la elaboración de la nota y ubicarla dentro de una temporalidad permitió describir otros aspectos de la nota como: la función que cumple la nota y la contextualización ciertas acciones que aparecen en la nota de clase como la utilización de un procedimiento para la obtención de la derivada. Es decir la función que fue cumpliendo la nota en cada momento de la clase es distinta ya que fue una nota que se fue elaborando en el transcurso de la clase, por ejemplo como la

clase tiene una modalidad expositiva en la cual el maestro dio información y realizó ejemplos el estudiante VGA trató de recuperar la mayoría de lo que estuvo escrito en el pizarrón. Pero en cambio cuando se encontraron en el momento de resolución guiada las notas tuvieron un proceso distinto en el cual el estudiante trató de replicar el método que realizó el docente para esperar y comparar con el resultado del docente. En donde no sorprendería que existieran muestras de correcciones. Sin embargo en los ejercicios para resolver en el pizarrón la utilización del procedimiento en un espacio al mismo nivel del docente atiende más a la verificación de resultados.

A diferencia de lo que sucedió en la sesión del 8 de octubre con las notas de clase de AHS que a pesar de que empezó a notar que el docente dudaba conforme desarrollaba el ejemplo fue escribiendo todo de forma literal, lo que puede interpretarse que estuvo más preocupada por registrar el detalle de la información más que por la comprensión. Porque no hubo tiempo para pensar y reflexionar hasta que el docente paró el procedimiento y empezó a revisarlo, fue así como la estudiante AHS decidió ya no seguir escribiéndolo aun cuando el docente termino el ejercicio puede ser por lo confuso del ejemplo. Lo que no sucedió con las notas de clase de AMIP que no tienen escrito casi nada y VGA ni siquiera anoto algo de ese ejemplo.

Con los datos obtenidos al analizar y comparar los estilos de aprendizaje con las características de las notas de los participantes no se puede determinar si existe relación concreta entre estas dos variables, sin embargo por ser una muestra pequeña estos resultados no son concluyentes. Por lo que también se consideró el estilo de escrito matemático en la siguiente subsección.

5.5.1 Características de las notas de clase de acuerdo con los criterios de forma y fondo

Con el objetivo de dar una descripción clara de los resultados encontrados en las notas de clase, se inició con las categorías propuesta por Monereo et al. (2000). Por el grado de selectividad se encontró que las notas de clase de VGA son del tipo selectivo, a diferencia de AMIP Y AHS que son más del tipo exhaustivo. Luego por el grado de caracterización que incluye el nivel gráfico, nivel de parafraseado y el nivel de inclusión de acuerdo con Monereo et al. (2000). Para los cuales se propusieron cuatro niveles de acuerdo con la frecuencia de ocurrencia: el nulo, el bajo, el medio y el alto.

Además, estas categorías se reordenaron y se volvieron subcategorías durante el análisis que se hizo de las notas de clase, que dieron paso a las categorías de *forma* y el *fondo*.

La categoría de forma se reconceptualizó como el conjunto de características de estilo que el estudiante determina al elaborar la nota de clase. De las que se desprendieron las subcategorías:

- Tipo de libreta: profesional, forma italiana o francesa, entre otros.
- Nivel gráfico: el cual se define como la cantidad de gráficos usados dentro de la nota, como flechas, sangrado, abreviaturas, señales gráficas y colores (Monereo y otros, 2000).
- Tipo de organizador gráfico: como diagramas de Venn, de flujo o jerárquicos, mapas mentales o conceptuales, entre otros.
- Estilo del escrito matemático: verbal, mixto o simbólico (Pimm, 2002).

La categoría fondo se redefine en este estudio como las características que describe la naturaleza del contenido escrito en la nota de clase como:

- el nivel de parafraseado hace alusión a la traducción de la información recibida a los propios términos del estudiante.
- el nivel de inclusión de conocimientos como los enunciados personales (Monereo y otros, 2000).
- la sintaxis matemática (Pimm, 2002), se determinó el dominio que se muestra a partir de los errores presentes en la nota de este tipo.

En la siguiente tabla 13 se muestra la síntesis de las características de forma de las notas de los estudiantes:

Estilo de aprendizaje	Categoría Subcategorías/ estudiante	Forma			
		Tipo de libreta	Nivel gráfico	Tipo de Organizador gráfico	Estilo de escrito matemático
Divergente	VGA	Tamaño profesional de cuadro grande. Portada con una imagen de marciano.	Medio	Ninguno	Estilo simbólico
Acomodador	AMIP	Tamaño profesional de cuadro grande, cuya portada tiene una imagen de flores.	Bajo	Ninguno	Estilo simbólico.
Divergente	AHS	Tamaño profesional de cuadro grande, con portada color azul.	Medio	Ninguno	Estilo mixto con marcada tendencia al estilo simbólico.

Tabla 13. Cuadro comparativo entre estudiante y características de la categoría forma.

Como conclusión de esta tabla es que los dos estudiantes que tenían preferencias por el EA divergentes también obtuvieron un nivel medio en el nivel gráfico, mientras que para la estudiante con EA acomodador obtuvo nivel bajo.

Las características de las notas por la categoría fondo se resumieron en la siguiente tabla 14:

Estilo de aprendizaje	Categoría	Fondo		
		Niveles de parafraseado	Nivel de inclusión	Sintaxis matemática
Divergente	VGA	Nulo	Nulo	Alto
Acomodador	AMIP	Nulo	Bajo	Media
Divergente	AHS	Nulo	Alto	Media

Tabla 14. Cuadro comparativo entre estudiante y características de la categoría fondo.

Donde el estudiante VGA tiene un nivel nulo de inclusión y de parafraseado pero un nivel alto de sintaxis matemática, en comparación con AMIP que tiene un nivel nulo de parafraseado, un nivel bajo de inclusión pero un nivel de sintaxis media por los errores que cometió. La estudiante AHS también tuvo nivel medio en la sintaxis y un nivel alto en inclusión pero un nivel nulo en parafraseado.

En relación con el estilo del escrito matemático de la categoría forma y el nivel de parafraseado perteneciente a la categoría de fondo, puede ser que los resultados sean los mismo porque los tres estudiantes atienden y aprenden las convenciones tradicionalistas que utilizan la mayoría de los docentes de matemáticas, en particular el docente de CD.

5.5.2 Sintaxis de las formas matemáticas en las notas de clase

Dentro de la sintaxis matemática podemos también analizar las notas de clase de los estudiantes. Por ejemplo, los errores encontrados en la nota de clase del estudiante VGA atienden a dificultades en las transformaciones oracionales, véase figura 37:

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2

$$y(x) = \frac{2x}{x-1} = 2x \cdot (x-1)^{-1} = 2 \cdot - (x-1)^{-2} = 2 \cdot - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = - \frac{2}{x^2 - 2x + 1}$$

Figura 37. Ejemplo de inequivalencias entre la función y su transformación llamada derivada.

En este ejemplo se pudieron observar varias cosas: la primera fue que el estudiante trató de calcular la derivada de la función por medio de las fórmulas directas, la segunda fueron los dos tipos diferentes de errores que se encontraron, una del tipo semántico y otro del tipo sintáctico. La nota de clase fue elaborada durante la actividad de desarrollo independiente propuesta por el docente para que los estudiantes resolvieran algunos ejercicios. Constatando de la *sobregeneralización* de la igualdad por el uso indiscriminado del símbolo igual por falta del significado del límite, a la que hizo referencia Pimm (2002). Es fundamental conocer el momento dónde se crea la nota de clase puesto que como podemos observar en la figura 16 el estudiante VGA no solo utiliza el procedimiento enseñando por el profesor, sino que además elige otro procedimiento alternativo a la definición de derivada por definición utilizando las fórmulas de derivadas para revisar el resultado obtenido. Aunque la fórmula es correcta a nivel técnico lo que muestra es un dominio mecánico de ella ya que no diferencia la transformación de la función derivada.

Aunque este error lo podría haber detectado el profesor de haber revisado lo que el estudiante VGA anotó en su libreta no es común que el docente realice una revisión de la parte de la libreta en la que se elaboran las notas de clase o de realizar un chequeo general entre los estudiantes mientras anotan o desarrollan un problema. De no ser corregidos cualquiera de los errores del tipo sintácticos, lógicos, semánticos, de ejecución o gramaticales

por el docente es posible que sigan causando confusión en la conceptualización del concepto derivada de una función en la mente de algunos estudiantes.

En cambio, sí se reconoce que el docente *firmó* las partes de la libreta destinadas a las tareas de ejercicios como se puede ver en la figura 38 el recuadro verde:

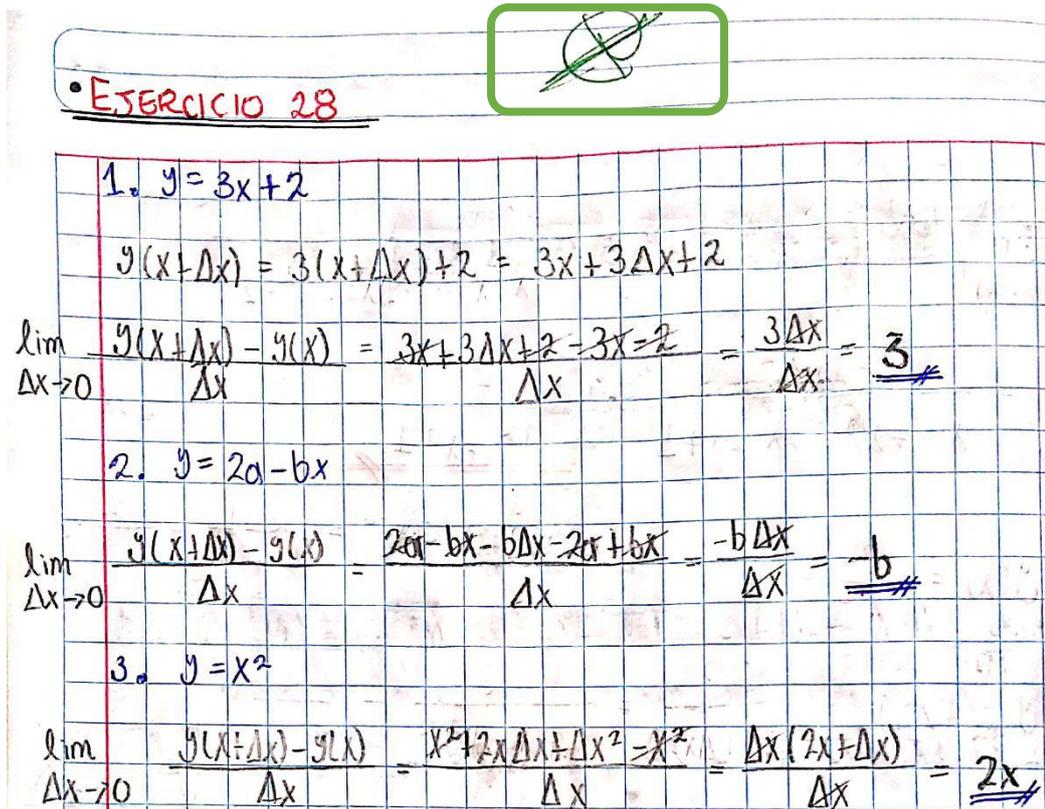


Figura 38. Lista de ejercicios firmados por el profesor.

Aún que se desconocen los criterios de evaluación que utilizó el docente en los ejercicios resueltos de manera independiente por los estudiantes. Además, se puede observar en esta figura que el procedimiento que sigue el estudiante VGA es un estilo de mecanización, aunque existe la posibilidad de que el estudiante tenga otro instrumento alterno dónde realizar sus intentos de resolución y coloque en este espacio sus resultados de manera más organizada para la entrega al docente.

Algo que resultó relevante encontrar en las notas de clase de los tres participantes fueron los tipos de errores que se encontraron en las notas de los estudiantes (véase tabla 15) que muestran el tipo de dificultad que presenta el estudiante en matemáticas dentro de los escritos matemáticos.

Categorías de dificultad dentro de las notas de clase

Error sintáctico	Se produce cuando se escribe la estructura de una forma no admitida por las reglas de orden del lenguaje algebraico.
Error Semántica	Se produce cuando la sintaxis de la estructura matemática es correcta, pero la semántica o significado no es el que se pretendía.
Error de ejecución	Se produce cuando el estudiante no puede ejecutar alguna regla matemática de forma correcta.
Error de lógica	Se produce cuando los resultados obtenidos por el estudiante no son los esperados, causado de utilizar una operación/regla matemática por otra.
Error gramatical	Se cometen cuando escribimos de manera que no corresponde a las reglas gramaticales del sistema símbolos matemáticos.
Error de notación	Se comete cuando por descuido escribimos de más, o no, algún(os) símbolo(s).

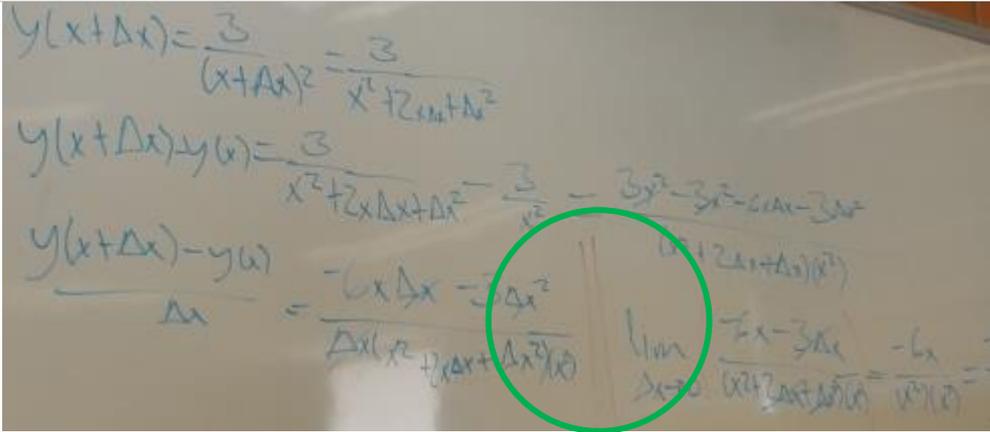
Tabla 15. Errores encontrados en las notas de clases de los estudiantes participantes.

Mientras que las notas de AMIP y AHS mostraron más dificultades en las transformaciones estructurales cuando se tuvo que simplificar las expresiones algebraicas por su equivalencia reducida.

$$\begin{aligned}
 x^2 y^2 &= e^{\ln xy} \\
 x^2 y^2 &= xy \\
 2x^2 y y' + 2xy^2 &= xy' + y \\
 2x^2 y y' - xy' &= y - 2xy^2 \\
 y' \cdot (2x^2 y - x) &= y - 2xy^2 \\
 y' &= \frac{y - 2xy^2}{2x^2 y - x}
 \end{aligned}$$

Figura 39. Ejemplo de un ejercicio resuelto por el estudiante AMIP donde le falta simplificar la expresión.

Este ejemplo de la figura 39 también ayuda a visualizar que a pesar de que fue un ejercicio que se desarrolló en una parte del trabajo independiente, al momento en el que el docente lo resolvió en el pizarrón y presentó la respuesta con la expresión simplificada, el estudiante no modificó en la nota su procedimiento para llegar al mismo resultado.

COMPARATIVO ENTRE LA NOTA DEL PIZARRÓN Y LOS ESTUDIANTES	
Imagen del Pizarrón	Comentario
	
Nota de clase del estudiante	

	<p>Le hace falta el cuadrado del trinomio cuadrado perfecto.</p>
	<p>Le hace falta el cuadrado del trinomio cuadrado perfecto.</p>
	<p>Error semántico.</p>

Tabla 16. Comparación en las notas de clase del último ejemplo de la sesión.

En la primera fila de la tabla 16 lo que se tiene señalado con óvalo verde muestra la intervención que el docente realizó a un ejemplo desarrollado por

el estudiante X-MCA en el pizarrón y en el cual el estudiante VGA también presentó el mismo tipo de error del uso excesivo del símbolo igual entre expresiones que no tienen entre si relación de sinonimia (fila 4 durante todo el desarrollo del procedimiento). Se observó también en las notas de clase de VGA que seguía presentando problemas semánticos cuando quería calcular la derivada por medio de la fórmula, cuando tiene que escribir la función original y la función derivada (recuadro rojo, fila 4 en la tabla 16).

Mientras que en las notas de clase de AHS y AMIP se pudo revisar que presentaron errores de lógica marcados en los óvalos de color rojo frecuentes en esta clase (filas 2 y 3), pues les hace faltan el número dos como subíndice para señalar los cuadrados que van en esos términos. La nota del estudiante VGA demostró que el estudiante factorizó en este ejemplo, marcado con un óvalo azul y evitó que tuviera el mismo error que sus compañeras. Este tipo de errores pueden sugerirnos descuido al realizar un procedimiento, incomprensión del proceso operacional, el discernimiento del tipo de operación o bien la falta de dominio herramientas algebraicas.

Estas categorías son importantes porque si fueran incluidas dentro de la enseñanza del lenguaje algebraico por ejemplo a los estudiantes podrían entender el sistema de notación matemático y en consecuencia tendrían la posibilidad de atenderlas en el desarrollo de su pensamiento al momento de escribir. Cosa que implicaría un cambio en los contenidos curriculares que proporcionaría un espacio de horas considerable al registro matemático en el aula no solo a los conceptos y técnicas matemáticas.

5.5.3 Otros apoyos digitales de recuperación de la información utilizados

Otros apoyos de recuperación utilizados en la clase por los estudiantes fue el teléfono celular, ya que los estudiantes lo usaron en repetidas ocasiones para recuperar y guardar la información del pizarrón (véase figura 40).



Figura 40. Estudiantes tomando fotografías del pizarrón.

El análisis del procedimiento de toma de notas nos mostró rutas de lo que dicen los estudiantes que hacen al tomar una foto, pero cuando se les preguntó en el grupo focal cómo integran este tipo la gran mayoría comenta que se les pierde en su galería sin complementar su nota de clase. Esto puede interpretarse como una respuesta automática de algunos estudiantes por la necesidad de poseer la mayor cantidad de información del conocimiento de otros más que por tener algún tipo de estrategia de estudio, que implicará revisar la foto para valorar el contenido y en su caso integrar aquello que para el estudiante sea significativo de rescatar o bien utilizarla como parte de un repositorio de consulta en una carpeta digital.

5.6 Atribuciones que los estudiantes les dan a las notas de clase

Se presentan los resultados de las preguntas 2, 3 y 4 del cuestionario de la Megamatriz para conocer las atribuciones que los estudiantes le dan a la elaboración de las notas de clase como a las notas en sí (véase anexo 3).

- En el caso de la pregunta 2. *¿Por qué tomas notas en clase?*

Se encontraron tres categorías principales memorizar, estudiar y aprender. Dentro de la categoría de memorizar los códigos fueron: repasar, recordar, guiar, recuperar; mientras que en la categoría de estudiar se encontraron: entender y comprender; y aprender.

- Para la pregunta 3. *En la asignatura de Cálculo Diferencial ¿cómo sabes cuándo y qué anotar?*

Los estudiantes contestaron anotar cuando:

- ✓ Desconoce el tema.
- ✓ No entienden.
- ✓ Se inicia un tema.
- ✓ Antes de que se borre el pizarrón.
- ✓ Casi todo/ todo el tiempo.

En esta pregunta la respuesta del estudiante AAKE responde:” cuando no tengo específico el tema lo anoto con algunas estrategias”, que indica que tiene sistematizado una serie de acciones que le ayuden cuando desconoce el tema.

- Las respuestas de la pregunta 4. *¿Para qué te sirven las notas de clase? Descríbelo.*

A comparación de la pregunta 2, se logró identificar tres categorías en las que algunas se interceptan fig. 41:

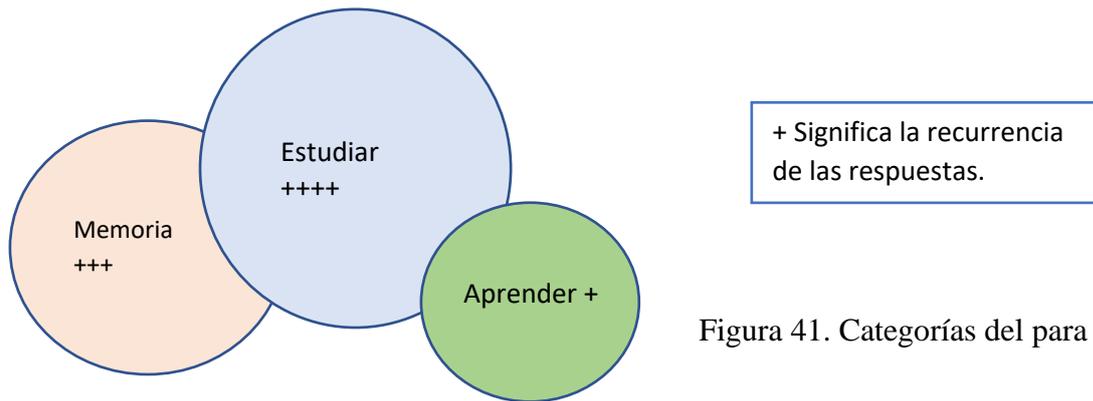


Figura 41. Categorías del para qué.

En esta figura se nota que las respuestas se interceptaban formando combinaciones como memoria-estudio, estudio-aprendizaje, solo a la memoria, pero también aparecieron solo a estudiar o bien en menor medida a aprender.

Cuando se cuestionó a los estudiantes en los grupos focales ¿qué les permite la nota de clase? Contestaron muy parecido a sus respuestas del cuestionario, en el grupo focal 1 responden estudiar, repasar (y practicar) y aprender, y para el grupo focal 2 las notas de clase les permiten repasar (y recordar) y entender, subcategorías que se encuentran dentro de las tres categorías de memoria, de estudio y de aprendizaje.

- Dentro de las respuestas que se obtuvieron del cuestionario y en la pregunta 6. *¿Qué cosas son las que anotas durante la clase de Cálculo?*

Se encontró que las cosas que anotan los estudiantes son:

- ✓ Ejercicios, el proceso.
- ✓ Información, como datos claves, temas importantes/ no se deben olvidar.
- ✓ Fórmulas.
- ✓ Ayudas verbales que da el profesor.

Es el tipo de respuestas hacen alusión al estilo de enseñanza del profesor que se encontró, en donde se priorizan los conocimientos conceptuales y

procedimentales (pregunta 6) de aprendizajes memorísticos y mecánicos (pregunta 2).

- De la pregunta número 7. *¿complementas fuera del salón los apuntes que tomaste en clase?:*

La mayoría contestó que no lo cual significaría que todavía el docente figura como la fuente principal de la información. De los grupos de estudiantes que contestaron que sí, casi todos consultan información de internet solo uno que consulta libros.

Capítulo 6. Conclusiones

Lo que se encontró en la triangulación de los resultados de las técnicas fue que:

1. Existen estudiantes que dicen no tomar notas de clase, pero se les vio anotando en algunas ocasiones sobre todo en el momento didáctico de que los estudiantes llaman “práctica” que es más una ejercitación de procedimientos. Es el caso del estudiante X-MCA:



Segunda observación



Tercera observación

Figura 42. Estudiante X-MCA anotando.

El estudiante X-MCA que dice que no toma notas de clase, pero contesta en el cuestionario exploratorio cómo lo hace este proceso de anotación. Lo cual puede sugerir que ha realizado notas de manera esporádica y esto hace que no lo considere un hábito y por eso lo niega, o bien porque sus conceptos de anotación y de notas de clase son distintos a los que hacemos referencia (trayectoria pintada de verde en la figura 14).

2. Se esperaba encontrar en las notas de clase más elementos que hicieran referencia al nivel de parafraseado o evidencias del uso de organizadores gráficos de la información que indicaran una apropiación del conocimiento más personal.

3. No se buscaba encontrar evidencia del tipo de enseñanza del docente sin embargo esta fue un elemento importante que condicionó las formas de construcción del registro matemático, los estilos de anotación y las características de las notas de clase.

Incluso, las consideraciones previas al curso que requiere la didáctica como algunas características de los estudiantes tales como conocer los EA. Es decir una gran parte de los estudiantes no son reconocidos en la práctica pues si el docente integrara otras dimensiones didácticas con mayor variedad de experiencias en el aula sería posible amplificar la posibilidad de beneficiar el aprendizaje de los estudiantes.

4. Se esperaba encontrar evidencia de la existencia entre los EA y las características de los estudiantes, pero debido a la cantidad de estudiantes que compartieron sus estudiantes no se pudo realizar un estudio más completo en esta parte.
5. Una de las intenciones de este estudio inicialmente era la de recuperar la nota de clase con la pluma digital para incluirla en la comparativa sin embargo la estudiante solo la utilizó para hacer algunas notas de clase de manera esporádica y decidió ya no seguir participando con sus notas. Por lo que se modificaron los objetivos iniciales (véase figura 43).

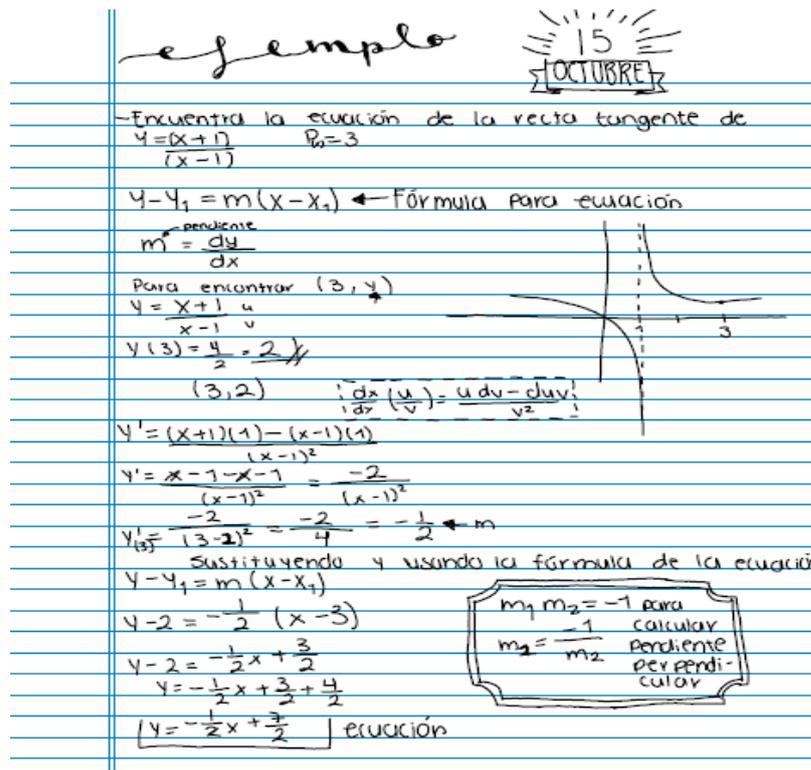


Figura 43. Nota de clase con la pluma digital

- La organización y estructuración de las notas de los estudiantes VGA, AHS y AMIP responden más a necesidad de tener organizada la información para su comprensión que a alguna característica particular de un EA. Esto sucede con el uso de los colores para la elaboración de las notas de clase.

En general, las ayudas verbales del docente no son recuperados por los estudiantes desaparecen después de que el docente las dice. Si acaso en las notas de clase de AHS y AMIP a veces aparecen junto a los ejemplos que el docente desarrolla.

De la contrastación de respuestas entre los dos grupos focales se pudo rescatar que al estudiante que frecuentemente le pedían sus apuntes era a VGA ya que tiene sus notas de clase completas y ordenadas con letra legible, y algunos también mencionaron a AHS y a AMIP. A pesar de que se detectó en las observaciones que había “los grupitos de amigos”, la interacción entre los estudiantes dio muestras de compañerismo y solidaridad entre varios de ellos, como compartir apuntes y fotografías de la clase.

7. Los celulares fueron utilizados por los estudiantes como instrumentos tecnológicos para registrar la información por medio de fotografías durante la clase. Sin embargo comentaron en los grupos focales que pocas veces regresan a consultar esas fotos porque se pierden dentro de su galería, de tal manera que si se los vuelven a encontrar difícilmente recuerdan a cuál contexto aludían. Hubo una estudiante que comentó que cuando toma fotografías en ocasiones las comparte en su grupo de difusión del WhatsApp.

Cabe señalar que cuando se les pregunto a los estudiantes en caso hipotético de no tener un instrumento tradicional para registrar sus notas de clase como la libreta y el lápiz, contestaron que no resultaría un impedimento para recuperar la información de la clase. Pues varios estudiantes mencionan que, en caso de no tenerlos, podrían el teléfono celular ya sea para tomar fotografías, videos o bien anotar en el blog de notas.

El uso de los celulares también presentó una desventaja, ya que fueron un distractor en la clase, posiblemente por el tipo perfil del docente no haya intentado restringir el uso del dispositivo en clase para no caer en prácticas autoritarias, sobre todo por el nivel en el que se encuentra.

8. Las notas de clase de los estudiantes no solo pueden leerse de manera lineal sino también de manera horizontal y otras direcciones que responden a una necesidad en el pensamiento del estudiante y a sus construcciones conceptuales (hipertexto), véase figura 30 por ejemplo.

Lo que implica que en algunos casos, la forma de la nota está revolucionando, incorporando medios de información como las fotografías y los videos o inclusive cambiando el medio de soporte en el que se elabora como el blog de notas o la pluma electrónica orientado al material hipermedia (Aguilar, 2011).

Además, las notas de clase trascienden el espacio áulico y el tiempo pues la mayoría de los estudiantes mencionan consultarlos fuera de clases. La toma de notas de clase no es una tarea exclusiva que realicen los estudiantes durante la clase, ya que los estudiantes realizan otras tareas al mismo tiempo (multitask) que elaboran su nota de clase por ejemplo atender la clase, pensar en un examen, entre otras.

9. El factor de conocimientos previos también incluye el conocimiento sobre estrategias de anotación en la que solo dos estudiantes del grupo mencionaron que alguna vez alguien les enseñó a tomar notas de clase, uno fue aquel estudiante hijo de una docente. El segundo estudiante menciona que sus propios compañeros le han sugerido cómo hacerlos sin embargo para él es más significativo cuando cada uno personaliza su nota de clase.

10. Se desarrollaron también dos categorías de análisis en las notas de clase para poder explicar lo que se encontraba en ellas, las primeras que atienden al contenido de las notas y otra a la forma en que se elaboran. Para la mayoría de los participantes de los grupos focales una buena “nota de clase” debe tener los siguientes aspectos:

- I. Características de forma: debe tener estructura con una buena organización en el espacio de la hoja, que usen colores y que sea legible el contenido de la nota.
- II. Características del fondo: un procedimiento que tenga una serie de pasos y lo que se escriba sea comprensible.

Pero estas características a los que los estudiantes hacen referencia atienden a dos cuestiones que debemos reflexionar. La primera que tiene que ver lo que el estudiante entiende por aprender y la segunda que tiene que ver con las creencias que se tienen de la matemática.

Podemos revisar en los discursos de los estudiantes que lo que ellos entienden por aprender está limitado a el dominio fórmulas y la aplicación de las técnicas matemáticas, dando la impresión de que se menos precia el análisis consiente de los conocimientos declarativos y los procesos mentales, causando en el proceso de aprendizaje la invisibilización del desarrollo de las habilidades propias de la disciplina. La segunda cuestión para reflexionar tiene que ver con las convenciones y prácticas docentes, institucionales o gubernamentales, en las que se encuentra el estudiante, van instruyendo su forma pensamiento y determinando las formas de conducir sus prácticas escolares. Por ejemplo, cuando se usan reactivos como los que se encuentran dentro de las pruebas estandarizadas (véase la sección 3.7) que promueven en su mayoría aprendizajes memorísticos y asociativos (Pozo, 2014, p, 253 y p.403). Pero la segunda cuestión no está excluida de la primera, ya que como se dijo muchas veces el estudiante construye sus ideas alrededor de los significados del registro escolar y responde a las direcciones y requisiciones que le plantee la educación formal, es decir el estudiante está condicionado y las herramientas que utiliza son elegidas en función de ese tipo de solicitudes.

11. De la frase “tener una buena nota de clase es un factor para que aprendas CD” donde los estudiantes debían decir si era cierta o falsa, muchos estudiantes contestaron que es falso, ya que los estudiantes utilizaron el argumento de que *las matemáticas son prácticas porque resuelven ejercicios y las notas de clase solo les ayudan a memorizar conceptos* lo que para ellos eso es su conceptualización de las matemáticas, de la asignatura de CD y las notas que realizan en clase, los cual resulta una creencia falsa porque la *forma* en que argumentan y trabajan sus notas de clase da la impresión de que estos contenidos

conceptuales y procedimentales no tienen una trascendencia o fin mayor.

Tal es el caso de utilizar estos contenidos como aprendizajes previos a otras asignaturas del mapa curricular o bien para ser considerados como herramientas matemáticas para el diseño y desarrollo de proyectos que resuelvan algún problema de la sociedad.

La mayoría de los estudiantes hacen una marcada diferencia en la organización de la libreta seccionándola primero lo que ven en clase -que asocian con la nota de clase- y la segunda sección donde resuelven los ejercicios que les dejan - es en esa parte donde ellos ponen en práctica las matemáticas-. Diferencia que mencionan en los grupos focales pero que con pocos estudiantes podría encontrarse alguna marca de separación en las notas entre estas dos divisiones. Sin embargo, para dos estudiantes, entre ellas AHS, unas buenas notas de clase te ayudan a entender “porque puedes comprender, es importante pero no es elemental”. Y sirven porque puedes personalizar tus notas de clase.

En sus respuestas puede notarse como las convenciones de la enseñanza permean en las prácticas, en las formas de pensamiento y la epistemología del conocimiento del estudiante. Por ejemplo, la creencia de que una “buena nota de clase” solo es un registro de información y en la mayoría de sus diálogos no se percibe que la nota de clase cumpla alguna función metacognitiva. Porque para esos estudiantes el hecho de aprender es dominar formulas y aplicar técnicas.

12. Derivado de las observaciones se puede caracterizar la práctica del docente participante como tradicional, centrada en la repetición y el uso de definiciones con una limitada función o énfasis en los conceptos.

*En las notas de clase y durante las observaciones el docente solo proponía la resolución de ejercicios.

*Al menos en el ejemplo de la función implícita el requerimiento cognitivo se encontraba fuera de la ZDP basándonos como primer ejemplo.

*No se presentaron actividades que representaran retos para el estudiante, no uso estrategias de aprendizaje como la resolución de problemas o los proyectos, ni empleo instrumentos de evaluación distintos a la lista de ejercicios o al examen.

*Su registro matemático está orientado a las formas de enseñanza en matemáticas formal y tradicional (Pimm, 2002).

*En algunas partes del desarrollo de la explicación, el docente recurría a metáforas, analogías o técnicas que dejaban aun lado las transformaciones oracionales u operacionales de la matemática (transposición didáctica) perdiendo el significado del concepto matemático o el objeto de estudio.

Por lo que tiene limitaciones para promover otros tipos de aprendizajes que no sean del tipo memorístico y mecánico, y en la comprensión de conceptos matemáticos, que pudieran ser derivados de la falta de dominio lingüístico en el metalenguaje matemático o de bases didácticas propias de las matemáticas.

13. Se puede dar muestra de que es necesaria la presencia y la intervención de la parte institucional para revisar las prácticas docentes y apoyar al profesorado en su formación tanto pedagógica como la específica de la asignatura de matemáticas. Con las cuales se pueda ir modificando las convenciones negativas dentro de la enseñanza matemática. Se debe por ejemplo incluir talleres donde se les enseñe a los estudiantes a aprender usando herramientas metacognitivas del aprendizaje. Además, se requiere del interés de los profesores para hacer cambios en los registros matemáticos que les permitan evitar ambigüedades y construcciones erróneas del saber matemático. Para todo ello se

requiere un cambio de actitudes que involucre hacer conciencia-y a veces aceptar- del problema que se enfrenta en todos los niveles en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en la ES.

Como las notas en clase son una consecuencia del aprendizaje de herramientas de autogestión para el aprendizaje, sería interesante estudiar la relación que tiene estas herramientas del estudiante con las notas de clase. Esto había enriquecido mi estudio ya que podría incorporarse una descripción más amplia de la categoría dificultad histórica del estudiante y podría poderse incluso llevado a un diseño de investigación de corte descriptivo donde se podrían considerar hacer comparaciones entre variables cuantitativas.

Consideraciones finales

Se consideró en un principio indagar sobre las notas complementarias postclase, sin embargo, se descartó esa dirección en el estudio por dos razones. En primera era demasiado material para hacer un análisis de contenido ya que los tres estudiantes dieron sus apuntes de casi dos meses, en los que incluían las notas de clase y las postclase. Y en segundo lugar porque las nota postclase no podrían compararse directamente entre sí, ni contrastarlas con una sola fuente de información -docente-. Pero existen suficientes argumentos para estudiar las notas de clase fuera de ella para futuros estudios.

Aunque esta investigación es sobre los usos que los estudiantes les dan a la nota de clase y sus características, aunque no era parte de mi objeto de estudio, habla también de los estilos tradicionalistas que se tienen en la enseñanza matemática. Se pudo registrar dentro de esta investigación cómo

los registros matemáticos del docente, ya sea de manera implícita o explícita, orientan las prácticas culturales escolares de los estudiantes y “educan” su pensamiento –modelo conductista- basado en las clases expositivas del docente y los ejercicios de práctica. Además, se pudo constatar dentro del análisis de las transcripciones cómo el uso de las convenciones de los matemáticos/docentes de matemáticas, de las que habla Pimm, se practican dentro de la enseñanza matemática pues los estudiantes las van aprendiendo tanto en la forma de hablar cómo en la forma de escribir y porque no considerar en la forma de pensar. Lo que permite cuestionarme si ¿la enseñanza de la matemática puede ser de otro modo? ¿Será posible pensar en otras formas de enseñar matemáticas? Yo creo que sí.

Por lo que es necesario hacer más investigación sobre las técnicas de anotación y sus posibles efectos en el aprendizaje de las matemáticas, que responda en menos medida al aprendizaje por memorización y reproducción proporcionándole sistemas de organización y comprensión de la información, en particular, en el aprendizaje de las matemáticas con entendimiento. Sobre todo, porque las concepciones actuales que tienen los estudiantes acerca de “aprender matemáticas” a tienden a solo dominar fórmulas y reproducir procedimientos.

Finalmente, sobre la relación entre el estilo de aprendizaje y las características de la nota de clase, durante el estudio no se recolectaron los suficientes datos ni el análisis arrojó evidencias concluyentes para poder negar o descartar tal supuesto. Por lo que también sería un tema para de investigación al respecto.

Referencias.

Aguilar, M. (2011). Artefactos culturales y su función como mediadores y facilitadores del aprendizaje de conceptos. En C. Barona & F. Loila (Coords.) *Innovaciones en Pedagogía Universitaria: Estudios de Caso en México y en Quebec*. (pp. 138-169). Montreal: CRIFPE Université de Montreal.

Aguilar, M. (2012). *Didáctica del mapa conceptual en la educación superior. Experiencias y aplicaciones para ayudar el aprendizaje de conceptos* (1ª ed.). D.F., México: Ediciones Mínimas.

Aldana, G. (2013). La lectoescritura en pregrado en el contexto de la formación investigativa. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (39), 85-94. Recuperado en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=1942/194227509008>

Alonso, C., Gallegos, D. & Honey, P. (2007). *Estilos de Aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora*. España: Mensajero.

Andréu, J. (s.f.). Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada. Recuperado de <http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2018/02/Andreu.-analisis-de-contenido.-34-pags-pdf.pdf>

Álvarez- Gayou, J.L. (2009). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. México: Paidós

Arancibia, V., Herrera, P. & Strasser, K. (2008). *Manual de Psicología Educacional*. Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica Chile.

Arce, M. (2016). *Análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos de bachillerato: Percepciones, perfiles de elaboración y utilización y rendimiento académico* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid, España

Arce, M., Conejo, L. & Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las ciencias*, 34.1 (2016): 149-172. Recuperado de <https://ensciencias.uab.es/article/view/v34-n1-arce-conejo-ortega>

Arjan, L. (2018). *Elucidating the Cognitive Processes involved in the note-taking Effect* (tesis doctoral). Institute of Cognitive Science, Colorado, E.U. A.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación Educativa*. Madrid, España: La Muralla.

Boch, F. & Piolat, A. (2005). Note Taking and Learning: A Summary of Research. *The WAC Journal*, 16, 101-113. Recuperado de <https://wac.colostate.edu/journal/vol16/boch.pdf>

Bohay, M, Blakely, D., Tamplin A. & Radvansky, G. (2011). Note Taking, Review, Memory and Comprehension. *American Journal of Psychology*, 124(1), 63-73. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/51064014_Note_Taking_Review_Memory_and_Comprehension

Caballero, F. & Espínola, J.G (2016). El rechazo al aprendizaje de las matemáticas a causa de la violencia en el Bachillerato Tecnológico. *Ra Ximhai*, 12(3), 143-161. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/461/46146811009.pdf>

Caracas, B. & Ornelas, M. (2019). La evaluación de la comprensión lectora en México. El caso de las pruebas EXCALE, PLANEA y PISA. *Perfiles Educativos*, (164) XIX, 8-27. Recuperado de <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2019.164.59087>

Castañeda, A. (2014). *¿Cómo aprender en competencias?* CDMX, México: Servicios y Formas Gráficas.

Castelló, M. & Monereo, C. (1999). El conocimiento estratégico en la toma de apuntes: un estudio en educación superior. *Infancia y Aprendizaje*, 22, 25-42. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/233666768_El_conocimiento_estrategico_en_la_toma_de_apuntes_un_estudio_en_la_educacion_superior_Strategic_knowledge_in_note-taking_An_study_in_High_Education

Cea D' Ancona, M.A. (1996). *Metodología cuantitativa: Estrategias y Técnicas de investigación social*. Madrid, España: SINTESIS SOCIOLOGÍA.

Cedeño, M. A. (2001). Aportes de la investigación cualitativa y sus alcances en el ámbito educativo. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, (1) 1. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=447/44710105>

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: AIQUE.

Closas, A. H. (2016). *Modelización estadística del rendimiento matemático con variables psicoeducativas en estudiantes universitarios* (tesis doctoral). Universidad Pública de Navarra. Pamplona, España.

Cobos, A. (2013). *La toma de notas como Estrategia de aprendizaje para mejorar la comprensión auditiva en los estudiantes de niveles elementales* (tesis de pregrado). Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.

Cole, M., Steiner, J., Scribner, S., & Souberman, E. (2003). *Lev s. Vygotsky. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Compañ, J. (2018). Los resultados de Planea 2017 y algunos factores asociados. Educación Nexos. Recuperado de <https://educacion.nexos.com.mx/?p=970>

Correa, M., Castro, F. & Lira, H. (2002). Hacia una conceptualización de la metacognición y sus ámbitos de desarrollo. *Horizontes Educativos*, (7), 58-63. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=979/97917885008>

Delgado, J. R. (2014). *La enseñanza de la matemática desde una óptica vigotskiana*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/261699400_La_ensenanza_de_la_Matematica_desde_una_optica_vigotskiana

Delgado, P. (2018) El problema de las pruebas estandarizadas. Observatorio TEC. Recuperado de <https://observatorio.tec.mx/edu-news/el-problema-de-las-pruebas-estandarizadas>

Díaz, F. (2006). *Enseñanza situada: Vínculo entre la escuela y la vida*. México, D.F., México: McGraw-Hill.

Díaz, C., García, J., García-Martín, J. & Pacheco, D. (2014). Dificultades de aprendizaje en las matemáticas, prevención y actuación. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/261703968_Dificultades_de_aprendizaje_en_las_matematicas_prevenccion_y_actuacion

Escolano, A. (2017). *Experiencia, Memoria, Arqueología*. Brasil: Alínea.

Espino-Datsira, S. (2017). *La toma de apuntes. Visión de los estudiantes universitarios mexicanos*. *Scielo*, 8(22), 64-83. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_isoref&pid=S2007-28722017000200064&lng=es&tlng=es

Estrada, C. (2005). *Manual operativo de Metodología cuantitativa*. FONAD.

Flores, H. & Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación matemática*, 21(2), 117-142. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200005&lng=es&tlng=es

García, N., Robaina, T. & Aparicio, A. (2019). Caracterización de la toma de notas en estudiantes universitarios. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo*. Recuperado de <https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/06/apuntes-estudiantes-universitarios.html>

García, T. (2003). *El cuestionario como instrumento de Investigación/Evaluación*. Recuperado de http://www.univsantana.com/sociologia/El_Cuestionario.pdf

González, M. (2011) *Estilos de Aprendizaje. Su influencia para aprender a Aprender*. Recuperado de https://www2.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/numero_7/articulos/lsr_7_articulo_12.pdf

González, J. (2016). Programa de apoyo al primer ingreso en la facultad de Química, UNAM. Congreso CLABES III, México. Recuperado de <https://revistas.utp.ac.pa/index.php/clabes/article/view/963/2163>

Grisales, L. & González, E. (2009) El saber sabio y el saber enseñado: un problema para la didáctica universitaria. *Educación y Educadores*, 12(2), 77-86. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83412219005>

Guerra, J. (2003). Metacognición: Definición y Enfoques Teóricos que la explican. *Revista Electrónica de Psicología Iztacala*. (6)2. Recuperado de <http://www.journals.unam.mx/index.php/rep/rep/article/view/21698>

Gutiérrez, M. (2018). Estilos de aprendizaje, estrategias para enseñar. Su relación con el desarrollo emocional y “aprender a aprender”. *Tendencias pedagógicas*: 31, 83-96. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6383448.pdf>

Hamui, A., & Varela, M. (2013). La técnica de grupos focales. *Revista Investigación en Educación Médica*. Recuperado de http://riem.facmed.unam.mx/sites/all/archivos/V2Num01/09_MI_HAMUI.PDF

Hernández, E. (2015). El desarrollo de la capacidad de abstracción mediante el aprendizaje acelerado en la enseñanza de las ecuaciones lineales en la Educación Secundaria. (Tesis de grado). Universidad Politécnica del Estado de Morelos. Jiutepec, México.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2015) *Metodología de la investigación*. México, México: Mc Graw Hill.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE]. (2019). *Resultados 2017*. Recuperado de <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/07/Resultados2017.pdf>

INEE. (2018). Documentos rectores. Recuperado de <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2018/12/P1E305.pdf>

INEE. (2018). *Las nuevas reformas educativas en América Latina: recuento y perspectivas desde México* .<https://www.inee.edu.mx/las-reformas-educativas-en-america-latina-recuento-y-perspectivas-desde-mexico/>

Kasuga, L., Gutiérrez, C. & Muñoz, J. (2002). *Aprendizaje Acelerado: estrategias para la potencialización del aprendizaje*. México: Grupo Editorial Tomo.

Larson, R. & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. China: Mc Graw Hill.

Lara, V. (s. f.) *Test de Kolb: "Estilos de Aprendizaje"*. Recuperado de

<https://victorhugolara.files.wordpress.com/2016/04/test-kolb-victorhugolara.com-2019.pdf>

Larrazolo, N., Backhoff, E. & Tirado, F. (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista mexicana de investigación educativa*, 18(59), 1137-1163. Recuperado en 11 de junio de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662013000400006&lng=es&tlng=es.

Ledesma, M. (2014). *Análisis de la teoría de Vygotsky para la reconstrucción de la inteligencia social*. Ecuador: EDUNICA

Longcamp, M., Boucard, C., Gilhodes, J., Anton, J., Roth, M., Nazarian, B., & Velay, J. (2008). Learning through Hand- or Typewriting Influences Visual Recognition of New Graphic Shapes: Behavioral and Functional Imaging Evidence. *Journal of cognitive neuroscience*. Recuperado de

https://www.researchgate.net/publication/5650672_Learning_through_Hand-or_Typewriting_Influences_Visual_Recognition_of_New_Graphic_Shapes_Behavioral_and_Functional_Imaging_Evidence.

Luna, E. & Rosales, O. (2014). Identificación de las variables de contexto que promueven la calidad de la enseñanza en educación superior. *Revista Argentina de Educación Superior*, (9), 91-109. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6526906.pdf>

Makany, T., Kemp, J. & Dror, I. (2008). *Optimising the use of note-taking as an external cognitive aid for increasing learning*. *British Journal of Educational Technology*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/227715356_Optimising_the_use_of_note-taking_as_an_external_cognitive_aid_for_increasing_learning

Martínez, F. (2018). ¿Por qué es tan difícil mejorar los niveles de aprendizaje? A propósito de las nuevas reformas a la educación básica mexicana. *Perfiles Educativos*.

159(XI), 161-176. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v40n159/0185-2698-peredu-40-159-162.pdf>

Meneses, J., Rodríguez, D. (s.f.) *El cuestionario y la entrevista*. Recuperado de http://femrecerca.cat/meneses/files/pid_00174026.pdf

Miles, M.B., Huberman, M. & Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis. A Methods Sourcebook*, 3a edición. Los Ángeles, Londres, Nueva Delhi, Singapur, Washington, D.C.

Monereo, C. (coord.) (1999). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje, Formación del profesorado y aplicación en la escuela*. Barcelona, España: Editorial Graó.

Monereo, C., Barberá, E., Castelló, M., & Pérez, M.L. (2000). *Tomar apuntes: un enfoque estratégico* (1ª ed.). Madrid, España: A. Machado Libros.

Monereo, C., Castelló, M. (1999) El conocimiento estratégico en la toma de apuntes: un estudio en la educación superior Strategic knowledge in note-taking: An study in High Education. *Infancia y Aprendizaje*. 22. 25-42. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/233666768_El_conocimiento_estrategico_en_la_toma_de_apuntes_un_estudio_en_la_educacion_superior_Strategic_knowledge_in_note-taking_An_study_in_High_Education/citation/download

Morales, O., Rincón, A. & Romero, T. (2005). Cómo enseñar a investigar en la universidad. *Educere*, 9 (29), 217-224. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=356/35602910>

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE]. *Muestra de reactivos empleados en la evaluación PISA 2000. Aptitudes para la lectura, matemáticas y ciencias*. México: Santillana.

OCDE. (2018). *Programa para la evaluación Internacional de alumnos (PISA) 2018-Resultados*. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

OCDE. (s.f.). *Country note-México_ español*. Recuperado de https://www.oecd.org/centrodemexico/medios/Country%20note%20-%20Mexico_espa%3B1ol.pdf

OCDE. (2018). *Resultados TALIS 2018 (Volumen I)*. Recuperado de <https://www.oecd-ilibrary.org/sites/1d0bc92a-en/1/2/2/index.html?itemId=/content/publication/1d0bc92a-en&csp=1418ec5a16ddb9919c5bc207486a271c&itemIGO=oecd&itemContentType=book>

Perez, O. (2006). ¿Cómo diseñar el Sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? *Relime*, (9)2, 267-297. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n2/v9n2a6.pdf>

Pérez, M. (2015). *Metacognition and sensorimotor Components Underlying the process of Handwriting and Keyboarding and Their Impact on Learning. An Analysis from the Perspective of Embodied Psychology*. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815005078#kwd0005>

Pilar, A. (2018). *Las notas de los alumnos: estilos, usos y sentidos en la construcción del conocimiento*. Cuadernos de Investigación Educativa. 2(29). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/323502331_Los_Apuntos_de_los_alumnos_estilos_usos_y_sentidos_en_la_construccion_del_conocimiento

Pimm, D. (2002). *Lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata.

Piolat, A., Olive, T. & Kellogg, R. (2005). Cognitive Effort during Note Taking. *Applied Cognitive Psychology*. 19,219-132. Recuperado de <http://centrepsyche.amu.fr/wp-content/uploads/2014/01/POK2005-ApplCogPSy.pdf>

Plan de estudios FCQEI_ UAEM. (2015). Recuperado de <https://www.uaem.mx/admision-y-oferta/nivel-superior/ingenieria-industrial.php>

Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes [PLANEA]. (2015). Matemáticas 09_Planea Nacional 2015. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba/docs/2019/reactivos_tipicos/Matematicas_09_2015_.pdf

PLANEA. (2015). Planea. Documento rector. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba_ei/docs/2019/PRUEBA_EVALUACION_INTERNA_SEXTO_PRIMARIA.pdf

PLANEA. (2017). Planea. Simulador. <http://143.137.111.131/Planea/Resultados2017/MediaSuperior2017Exámenes/R17Exam enMediaSuperiorPreguntas.aspx?id=01#ParteSuperior>

PLANEA. (2017). Planea. Resultados 2017. <http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF>

PLANEA. (2019). Planea. Prueba de Evaluación interna sexto de primaria. Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2015/PlaneaDocumentoRector.pdf>

Popham, W. (1999). ¿Por qué las pruebas estandarizadas no miden la calidad educativa? *Educational Leadership*, (56)6. Recuperado de https://escalae.org/wp-content/uploads/2015/09/pruebas_estandarizadas_no_miden_calidad_educativa_popham1.pdf

Pozo, J. & Pérez, M. (coords.). (2009). *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*. Madrid, España: Morata.

Pozo, J. (2014). *Psicología del Aprendizaje Humano* (1ª ed.). Madrid, España: Morata.

Preciado, T. (2015). Crea la Upemor cuatrimestre “cero” para nivelar conocimientos de matemáticas y física. Cuernavaca, Morelos: La Unión de Morelos. Recuperado de <https://www.launion.com.mx/morelos/sociedad/noticias/70529-crea-la-upemor-cuatrimestre-cero-para-nivelar-conocimientos-de-matem>

Programa para la evaluación Internacional de las Competencias de los Adultos [PIAAC]. (s.f.). Recuperado de http://www.dgep.sep.gob.mx/PIAAC2019/Inicio_Piaac.asp

Programa para la evaluación Internacional de las Competencias de los Adultos. (2019). Additional results from the survey of adult skills. Recuperado de <http://www.dgep.sep.gob.mx/PIAAC2019/docs/ReporteInternacionalPIAAC.pdf>

Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos [PISA]. (2015). PISA 2015-OCDE. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf>

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed.). Consultado en <https://www.rae.es/>

Rodríguez, J. (2019). *La deserción escolar universitaria en México. La experiencia de la Universidad Autónoma Metropolitana Campus Iztapalapa*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/28210675_La_desercion_escolar_universitaria_en_Mexico_La_experiencia_de_la_Universidad_Autonoma_Metropolitana_Campus_Iztapalapa

Romero, L., Salinas, V. & Mortera, F. (2010). *Estilos de Aprendizaje basados en el modelo de Kolb en la educación virtual*. *Apertura*. 2(1). Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/688/68820841007.pdf>

Ruiz, Y. (2011). Aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital para profesionales de enseñanza*. Recuperado de <https://www.feandalucia.ccoo.es/andalucia/docu/p5sd8451.pdf>

Salazar, C., Alfaro, D. & Jurado, D. (2005). La metacognición en el diseño instruccional de e-learning. *Virtualeduca 2005*, VI Encuentro Internacional sobre Educación, Capacidad Profesional, Tecnologías de la información e Innovación Educativa. UNAM-México. Recuperado de <http://www.virtualeduca2005.unam.mx/memorias/ve/extensos/carteles/mesa2/2005-03-30399Metacognicion.pdf>

Salgado, D. & Maz, A. (2013). Toma de apuntes y aprendizaje en estudiantes de Educación Superior. *Revistas Científicas Complutenses*, 24(2), 341-358. Recuperado de <http://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/viewFile/42083/40058>

Secretaria de Educación Pública. (2017.). Aprendizajes Clave para la educación integral. Recuperado de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf

Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa*. México: PEARSON.

Tamayo, S. (2019). Enseñanza con PLANEA. CDMX: INEE. Recuperado de <https://www.inee.edu.mx/ensenanza-con-planea/>

Test de estilos de aprendizaje (s.f.). Recuperado de https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2011/2/GL5101/1/material_docente/bajar?id_material=382449

Universidad de Quintana Roo. (2016). Taller de metacognición para estudiantes universitarios. Sala de prensa de UQROO. Recuperado de <http://saladeprensa.uqroo.mx/noticias/3232-taller-de-metacognicion-para-estudiantes-universitarios/>

Vázquez, I. (s.f.) *Tipos de estudio y métodos de investigación*. Recuperado de <https://nodo.ugto.mx/wp-content/uploads/2016/05/Tipos-de-estudio-y-m%C3%A9todos-de-investigaci%C3%B3n.pdf>

Vygotsky, L. (1982). *Sobranie socinenii [Obras completas]*, Vols. I-VI. Moscú, Pedagogika.

Vygotsky, L. (1987). *Thinking and Speech. The Collected Works of L. S. Vygotsky*. Vol. 1. New York: Plenum Press

Vygotsky, L. (2001). *Obras Escogidas II. (Incluye Pensamiento y lenguaje). Conferencias sobre psicología*. (2ª. Ed). España: Visoc.

Willis, J. (2011). *The Brain-Based Benefits of Writing for Math and Science Learning*. Edutopia. The George Lukas Educational Foundation. Recuperado de: <https://www.edutopia.org/blog/writing-executive-function-brain-research-judy-willis>.

Anexo 1. Formulario de consentimiento

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Este formulario de consentimiento establece que usted ha leído y comprendido lo que implicará participar en esta investigación:

1. Estoy de acuerdo en participar en el estudio “NOTAS DE CLASE”.
2. Entiendo que mi participación es voluntaria y que soy libre de retirarme en cualquier momento.
3. Entiendo que cualquier información que proporcione será usada de forma anónima y puedo ser identificado con alguna etiqueta cuando mis opiniones sean relevantes para su análisis en alguna publicación e informe.
4. Los procedimientos requeridos para el proyecto y el tiempo requerido. Me han explicado, y cualquier pregunta que tenga sobre el proyecto ha sido respondida a mi entera satisfacción.
5. Acepto la entrevista y seré grabado en otras sesiones.
6. Acepto que el equipo de investigación tenga los siguientes datos personales detalles con el propósito de contactarme directamente para arreglar cualquier entrevista de investigación.
7. Me comprometo a prestar mis libretas/ materiales realizados en clase para su análisis.

Nombre y Firma del estudiante

Anexo 2. Cuestionario en Google Forms

10/6/2020 CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES

7. 2. ¿Cuándo cursas asignaturas de matemáticas, tienes el hábito de tomar apuntes en clases? *

Marca solo un óvalo.

SI

No (en el caso de que contestas "No" en las demás respuestas escribe N/A-No aplica).

8. ¿Por qué tomas apuntes en clase? *

9. 3. En la asignatura de Cálculo Diferencial ¿cómo sabes cuándo y qué anotar? *

10. 4. ¿Para qué te sirven los apuntes de clase? Describelo. *

10/6/2020 CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES

CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES

DATOS GENERALES

Obligatorio

1. Nombre completo iniciando por apellido paterno. *

2. Edad *

3. Género *

4. Semestre *

5. Carrera *

APUNTES DE CLASE

Constate cada una de las preguntas cuidando explicar su respuesta (según sea el caso)

6. 1. ¿Tienes cuadernos de apuntes divididos por materia? *

11. ¿Tienes algún estilo particular para tomar tus apuntes de Cálculo Diferencial? En caso de que tu respuesta sea afirmativa descríbelo. *

12. ¿Qué cosas son las que anotas durante la clase de Cálculo Diferencial? *

13. ¿Complementas fuera del salón los apuntes que tomaste en clase? En caso afirmativo comenta con qué complementas. *

14. ¿Utilizas algún tipo de señalización en tus apuntes de clase que indique que eso es importante? En caso de contestar si, comenta que tipo de señalizaciones. *

15. ¿Utilizas algún otro instrumento que no sea tu libreta/lapicero/lápiz para tener registro de la clase? ¿cuál(es)? *

16. ¿Cuándo tomas apuntes seleccionas la información que escribirás? ¿Por qué?

17. Utilizas algún tipo de organizador del conocimiento (mapa mental, conceptual, cuadro sinóptico, etc.) para construir algunos apuntes en clase.

Marca solo un óvalo.

- Sí
 No
 A veces

18. ¿Tomar apuntes te ayuda a prestar atención a la clase de Cálculo Diferencial? *

Marca solo un óvalo.

- Sí
 No
 A veces



Gracias por tu participación

Google no creó ni aprobó este contenido.

Google Formularios

Anexo 4. Test de EA de Kolb contestados

Test de estilos de Aprendizaje
(Autor: Profesor David Kolb)

Quando Aprendo:	Prefiero valenme de mis asociaciones y sentimientos 1	Prefiero mirar y sentir 4	Prefiero pensar en las ideas 3	Prefiero hacer cosas 2
Aprendo mejor cuando:	Confío en mis corazonadas y sentimientos 1	Atiendo y observo cuidadosamente 4	Confío en mis pensamientos lógicos 3	Trabajo directamente para que las cosas queden realizadas 2
Quando estoy aprendiendo:	Tengo sentimientos y reacciones fuertes 1	Soy reservado y tranquilo 3	Hago razonar sobre las cosas que están sucediendo 4	Me siento responsable de las cosas 2
Aprendo a través de:	Sentimientos 1	Observaciones 3	Razonamientos 4	Acciones 2
Quando aprendo:	Estoy abierto a nuevas experiencias 1	Tomo en cuenta todos los aspectos relacionados 3	Prefiero analizar las cosas dividiéndolas en sus partes correspondientes 4	Prefiero hacer las cosas directamente 2
Quando estoy aprendiendo:	Soy una persona intuitiva 1	Soy una persona observadora 4	Soy una persona lógica 3	Soy una persona activa 2
Aprendo mejor a través de:	Las relaciones con mi compañero 1	La observación 4	Teorías racionales 3	La práctica de las cosas 2
Quando aprendo:	Me siento involucrado en las cosas que hago 1	Me fero mi tiempo antes de actuar 4	Prefiero las teorías y las ideas 3	Prefiero ser los resultados a través de mi propio trabajo 2
Aprendo mejor cuando:	Me baso en mis intuiciones y sentimientos 1	Me baso en mis observaciones personales 4	Tomo en cuenta mis propias ideas sobre el tema 3	Pruebo personalmente la cosa 2
Quando estoy aprendiendo:	Soy una persona abierta 1	Soy una persona reservada 3	Soy una persona racional 4	Soy una persona responsable 2
Quando aprendo:	Me es claro 1	Prefiero observar 3	Prefiero evaluar las cosas 4	Prefiero sentir una acción activa 2
Aprendo mejor cuando:	Soy receptivo y de mente abierta 1	Soy cuidadoso 2	Analizo las ideas 3	Soy práctico 4
Totales de la suma de cada columna:	12	41	41	26
	EC	OR	CA	EA

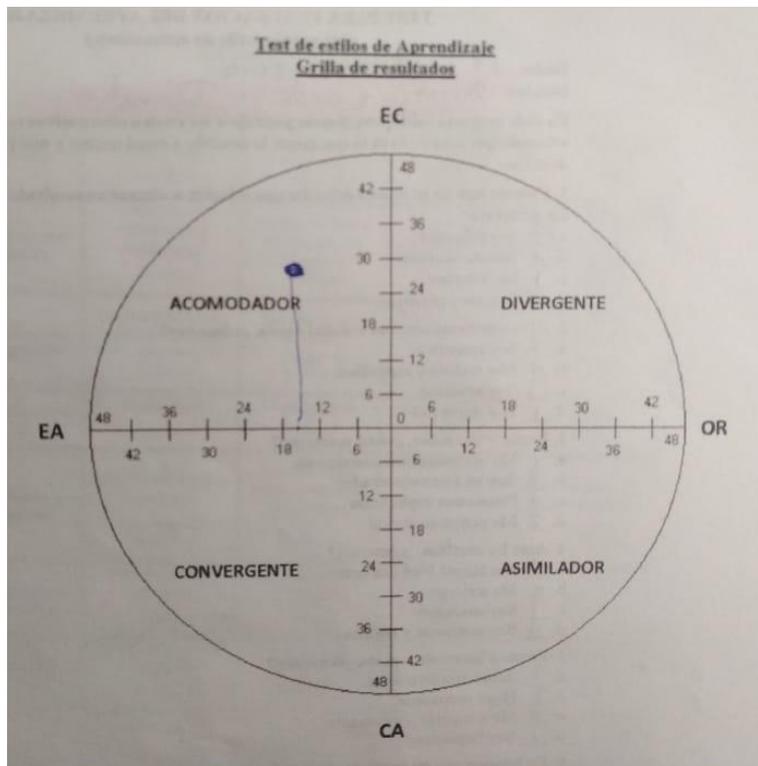
(Asignar 4 puntos a cada respuesta para mejorar el "estudiante")

TEST PARA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE
(Mi propio estilo de aprendizaje)

Fecha: **17 septiembre 2010**
Nombre: **Arista Cordera David**

En cada pregunta califique dando puntaje a las cuatro alternativas (completar) sabiendo que cuatro (4) es lo que mejor lo describe a usted mismo y uno (1) lo que peor lo describe.

- Quando ante un problema debo dar una solución u obtener un resultado urgente, ¿cómo me comporto?
 - Soy selectivo
 - 4** Intento acciones
 - Me intereso
 - Soy muy práctico
- Al encontrarme con una realidad nueva, ¿cómo soy?
 - Soy receptivo
 - 4** Soy realista y específico
 - Soy analítico
 - Soy imparcial
- Frente a un suceso, ¿cómo reacciono?
 - Me involucro emocionalmente
 - 3** Soy un mero observador
 - Hago una explicación
 - Me pongo en acción
- Ante los cambios, ¿cómo soy?
 - 2** Los acepto bien dispuesto
 - Me arreglo
 - Soy cuidadoso
 - 4** Soy consciente y realista
- Frente a las imbecilidades, ¿cómo soy?
 - Actúo instintivamente
 - Hago preguntas
 - 4** Me comporto lógicamente
 - Soy inquisitivo
- En relación con mi punto de vista, ¿cómo soy?
 - Soy abstracto
 - 3** Soy observador
 - 4** Soy concreto
 - Soy activo
- En la utilización del tiempo, ¿cómo soy?
 - Me proyecto en el presente
 - 2** Soy reflexivo
 - 4** Me proyecto hacia el futuro
 - Soy pragmático
- En un proceso considero más importante:
 - 3** La experiencia
 - 4** La observación
 - La conceptualización
 - La experimentación
- En mi trabajo soy:
 - Intensamente dedicado
 - 1** Personalista y reservado
 - Lógico y racional
 - Responsable y cumplidor



la Morales Irma Pamela.

Test de estilos de Aprendizaje
(Autor: Professor David Kolb)

Cuando Aprendo:	Prefiero reflexionar de mis experiencias y sentimientos [3]	Prefiero mirar y escuchar [4]	Prefiero pensar en las ideas [3]	Prefiero hacer cosas [2]
Aprendo mejor cuando:	Discuto mis ideas con otros y me explico [3]	Atiendo y observo cuidadosamente [4]	Confo en mis pensamientos lógicos [3]	Trabajo duro para que las cosas queden hechas [2]
Cuando estoy aprendiendo:	Tengo entusiasmo y entusiasmo fluyen [3]	Soy reservado y tranquilo [4]	Hago relaciones entre las cosas que estoy aprendiendo [2]	Me siento responsable de las cosas [3]
Aprendo a través de:	Experimentar [4]	Observaciones [4]	Razonamiento [3]	Acción [2]
Cuando aprendo:	Estoy abierto a nuevas experiencias [3]	Tanto en cuanto a todos los aspectos relacionados [4]	Prefiero analizar las cosas de relaciones en sus partes componentes [3]	Prefiero hacer las cosas directamente [2]
Cuando estoy aprendiendo:	Soy una persona tímida [3]	Soy una persona observadora [4]	Soy una persona lógica [2]	Soy una persona activa [3]
Aprendo mejor a través de:	Las relaciones con mis compañeros [2]	La observación [4]	Técnicas racionales [3]	La práctica de las cosas aprendidas [3]
Cuando aprendo:	Me siento involucrado en los temas tratados [2]	Me siento en tiempo antes de actuar [4]	Prefiero las técnicas y las ideas [3]	Prefiero ver los resultados a través de un proceso lógico [3]
Aprendo mejor cuando:	Me baso en mis experiencias y sentimientos [2]	Me baso en las observaciones que voy haciendo [4]	Tanto en cuanto a mis propios ideas como a las de los demás [2]	Pronto personalmente la hago [2]
Cuando estoy aprendiendo:	Soy una persona abierta [2]	Soy una persona reservada [4]	Soy una persona racional [2]	Soy una persona responsable [3]
Cuando aprendo:	Me soy abierto [2]	Prefiero observar [4]	Prefiero evaluar las cosas [3]	Prefiero asumir una actitud activa [2]
Aprendo mejor cuando:	Soy receptivo y de mente abierta [2]	Soy cuidadoso [4]	Analizo las ideas [3]	Soy práctico [2]
Total de la suma de cada columna:	19	48	33	20

(Asignar el puntaje a cada respuesta para mejorar el "resultado")

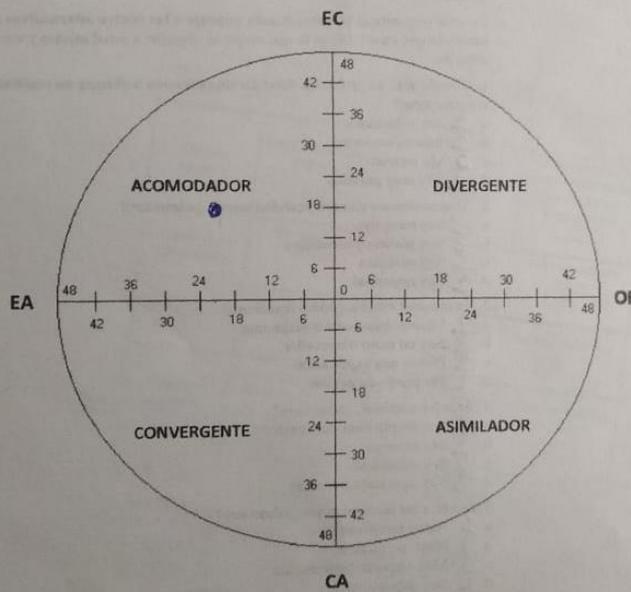
TEST PARA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE
(MI propio estilo de aprendizaje)

Fecha:
Nombre:

En cada pregunta califíquese dando puntaje a las cuatro alternativas (completar ____), sabiendo que cuatro (4) es lo que mejor lo describe a usted mismo y uno (1) lo que peor lo describe.

1. Cuando ante un problema debo dar una solución a obtener un resultado urgente, ¿cómo me comporto?
 - a. 2. Soy subjetivo
 - b. 2. Intento soluciones
 - c. 2. Me intereso
 - d. 2. Soy muy práctico
2. Al encontrarme con una realidad nueva, ¿cómo soy?
 - a. 2. Soy neutro
 - b. 2. Soy realista y específico
 - c. 2. Soy analítico
 - d. 2. Soy imparcial
3. Frente a un suceso, ¿cómo reacciono?
 - a. 2. Me involucro emocionalmente
 - b. 2. Soy un mero observador
 - c. 2. Pienso una explicación
 - d. 2. Me pongo en acción
4. Ante los cambios, ¿cómo soy?
 - a. 2. Los acepto bien dispuesto
 - b. 2. Me arrinco
 - c. 2. Soy cuidadoso
 - d. 2. Soy consistente y realista
5. Frente a las incoherencias, ¿cómo soy?
 - a. 2. Actúo intuitivamente
 - b. 2. Hago preguntas
 - c. 2. Me comporto lógicamente
 - d. 2. Soy inquisitivo
6. En relación con mi punto de vista, ¿cómo soy?
 - a. 2. Soy abstracto
 - b. 2. Soy observador
 - c. 2. Soy concreto
 - d. 2. Soy activo
7. En la utilización del tiempo, ¿cómo soy?
 - a. 2. Me proyecto en el presente
 - b. 2. Soy reflexivo
 - c. 2. Me proyecto hacia el futuro
 - d. 2. Soy pragmático
8. En un proceso considero más importante:
 - a. 2. La experiencia
 - b. 2. La observación
 - c. 2. La conceptualización
 - d. 2. La experimentación
9. En mi trabajo soy:
 - a. 2. Intensamente dedicado
 - b. 2. Personalista y reservado
 - c. 2. Lógico y racional
 - d. 2. Responsable y cumplidor

Test de estilos de Aprendizaje
Grilla de resultados



Test de estilos de Aprendizaje
(Autor Profesor David Kolb)

Cuando Aprendo:	Prefiero valarme de mis sensaciones y sentimientos <input type="checkbox"/> 1	Prefiero mirar y sentir <input type="checkbox"/> 2	Prefiero pensar en las ideas <input type="checkbox"/> 3	Prefiero hacer cosas <input type="checkbox"/> 4
Aprendo mejor cuando:	Confío en mi corazonada y sentimientos <input type="checkbox"/> 1	Atiendo y observo cuidadosamente <input type="checkbox"/> 1	Confío en mis pensamientos lógicos <input type="checkbox"/> 3	Trabajo directamente para que las cosas queden hechas <input type="checkbox"/> 4
Cuando estoy aprendiendo:	Tengo sensaciones y reacciones fuertes <input type="checkbox"/> 1	Soy reservado y tranquilo <input type="checkbox"/> 2	Disco racional sobre las cosas que están sucediendo <input type="checkbox"/> 4	Me siento responsable de las cosas <input type="checkbox"/> 2
Aprendo a través de:	Sentimientos <input type="checkbox"/> 1	Observaciones <input type="checkbox"/> 2	Razonamientos <input type="checkbox"/> 4	Acciones <input type="checkbox"/> 3
Cuando aprendo:	Estoy abierto a nuevas experiencias <input type="checkbox"/> 1	Tomo en cuenta todos los aspectos relacionados <input type="checkbox"/> 2	Prefiero analizar las cosas dividiéndolas en sus partes componentes <input type="checkbox"/> 3	Prefiero hacer las cosas directamente <input type="checkbox"/> 4
Cuando estoy aprendiendo:	Soy una persona abierta <input type="checkbox"/> 1	Soy una persona observadora <input type="checkbox"/> 2	Soy una persona lógica <input type="checkbox"/> 4	Soy una persona activa <input type="checkbox"/> 3
Aprendo mejor a través de:	Las relaciones con mi compañero <input type="checkbox"/> 1	La observación <input type="checkbox"/> 2	Teorías racionales <input type="checkbox"/> 3	La práctica de los temas tratados <input type="checkbox"/> 4
Cuando aprendo:	Me siento involucrado en los temas tratados <input type="checkbox"/> 1	Me tomo mi tiempo antes de actuar <input type="checkbox"/> 3	Prefiero las teorías y las ideas <input type="checkbox"/> 2	Prefiero ver los resultados a través de mi propio trabajo <input type="checkbox"/> 4
Aprendo mejor cuando:	Me baso en mis intuiciones y sentimientos <input type="checkbox"/> 1	Me baso en observaciones personales <input type="checkbox"/> 2	Tomo en cuenta mis propias ideas sobre el tema <input type="checkbox"/> 3	Pruebo personalmente la tarea <input type="checkbox"/> 4
Cuando estoy aprendiendo:	Soy una persona abierta <input type="checkbox"/> 1	Soy una persona reservada <input type="checkbox"/> 2	Soy una persona racional <input type="checkbox"/> 4	Soy una persona responsable <input type="checkbox"/> 3
Cuando aprendo:	Me involucro <input type="checkbox"/> 1	Prefiero observar <input type="checkbox"/> 2	Prefiero evaluar las cosas <input type="checkbox"/> 3	Prefiero asumir una actitud activa <input type="checkbox"/> 4
Aprendo mejor cuando:	Soy receptivo y de mente abierta <input type="checkbox"/> 1	Soy cuidadoso <input type="checkbox"/> 2	Analizo las ideas <input type="checkbox"/> 3	Soy práctico <input type="checkbox"/> 4
Total de la suma de cada columna	16	22	39	43
	EC	OR	CA	EA

(Asignar 4 puntos a cada respuesta para mejorar el "escala")

TEST PARA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE
(Mi propio estilo de aprendizaje)

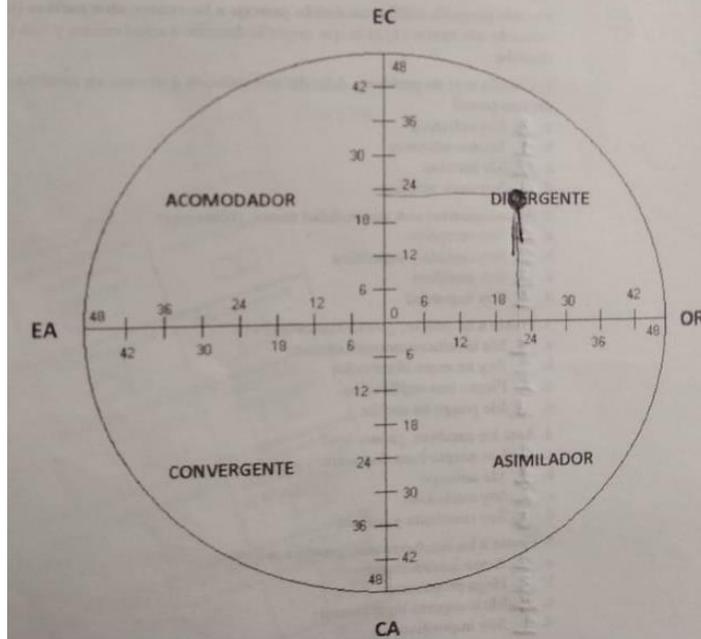
Fecha:

Nombre:

En cada pregunta califique dando puntaje a las cuatro alternativas (completar ...) sabiendo que cuatro (4) es lo que mejor lo describe a usted mismo y uno (1) lo que peor lo describe.

- Cuando ante un problema debo dar una solución u obtener un resultado urgente, ¿cómo me comporto?
 - Soy selectivo
 - Intento acciones
 - Me intereso
 - Soy muy práctico
- Al encontrarme con una realidad nueva, ¿cómo soy?
 - Soy receptivo
 - Soy realista y específico
 - Soy analítico
 - Soy imparcial
- Frente a un suceso, ¿cómo reacciono?
 - Me involucro emocionalmente
 - Soy un mero observador
 - Pienso una explicación
 - Me pongo en acción
- Ante los cambios, ¿cómo soy?
 - Los acepto bien dispuesto
 - Me sorriego
 - Soy cuidadoso
 - Soy consciente y realista
- Frente a las incógnitas, ¿cómo soy?
 - Actúo intuitivamente
 - Hago propuestas
 - Me comporto lógicamente
 - Soy inquisitivo
- En relación con mi punto de vista, ¿cómo soy?
 - Soy abstracto
 - Soy observador
 - Soy concreto
 - Soy activo
- En la utilización del tiempo, ¿cómo soy?
 - Me proyecta en el presente
 - Soy reflexivo
 - Me proyecta hacia el futuro
 - Soy pragmático
- En un proceso considero más importante:
 - La experiencia
 - La observación
 - La conceptualización
 - La experimentación
- En mi trabajo soy:
 - Intensamente dedicado
 - Personalista y reservado
 - Lógico y racional
 - Responsable y cumplidor

Test de estilos de Aprendizaje
Grilla de resultados



Anexo 5 Guía de preguntas para el grupo focal

1. Imagina que un día llegaran a la clase de Cálculo y no tienen algo para anotar ni dónde anotar ¿Qué pasaría?
2. **COMPLETA LA FRASE CON UNA IDEA CLARA Y DETALLADA:** Y si algún otro compañero trae algo con que anotar, lo que haces tú es...
¿PORQUE TOMAS APUNTES EN CLASE?
3. ¿Qué pasa si se distraen durante la clase, por una llamada, un mensaje o algún compañero? ¿Qué haces para regresar a la dinámica de la clase?
4. ¿Alguna vez alguien te dijo cómo tomar un apunte de clase?
5. ¿Siempre has hecho tus apuntes de esta manera?

*Para contestar aquellos que usan lapiceros de diferentes colores, ¿Para qué usas colores diferentes en tu apunte?

*los que no apuntan ¿Cómo recuperas el tema de la clase?

*Para los que toman fotos del pizarrón, ¿Qué hacen con las fotos?, ¿la integran al apunte o que pasa con ella?

6. ¿Alguna vez han pedido el apunte de clase a algún compañero?
7. Si pides a otro compañero, ¿a quién se lo pides y por qué?
8. **COMPLETA LA FRASE CON UNA IDEA CLARA Y DETALLADA.** Un apunte de clase me permite...
9. ¿Cuándo tienes alguna evaluación CD recurres a tus apuntes? Describe qué haces con ellos.
10. ¿Qué características tiene un buen apunte?
11. **CONTESTAR FALSO/VERDADERO.** Tener un buen apunte es un factor para que aprendas CD. ¿Por qué?

Anexo 6. Cuadro de comparación entre los escritos de los estudiantes para el mapa cognitivo.

Estilo de aprendizaje	Sujeto de estudio	Descripción	Muestran
DIVERGENTE	<p>AHS</p> <p>El examen de propa, no estude lo suficiente Omega! las funciones están complejas Tengo hambre Necesito estudiar.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Pendiente por una evaluación de otra asignatura-Probabilidad- Preocupación por el tipo de funciones que el docente está presentando como ejemplos. Hambre. Pendiente por el examen de la otra asignatura-Probabilidad- 	<p>Inseguridad</p> <ul style="list-style-type: none"> Esta desconectada de la clase. Se conecta. Se desconecta. <p>Impaciencia</p>
ACOMODADOR	<p>AMIP</p> <p>Me siento estresada por mi examen de propa Me duele mi cabeza</p>	<ul style="list-style-type: none"> Estrés por su examen de Probabilidad. Dolor físico. 	Cansancio mental
DIVERGENTE	<p>Examen de probabilidades, el cual no entiendo nada</p> <p>Me duele mi cabeza y tengo sueño</p> <p>Estoy cansada por el examen y no me puedo concentrar mucho-25</p> <p>Me puso nerviosa el prof cuando me pasó al pizarrón</p> <p>$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \cdot x'$</p> <p>RNAS</p>	<p>Examen de probabilidad.</p> <p>Dolor físico.</p> <p>Falta de concentración</p> <p>Estrés</p> <p>Ansiedad</p>	<p>Cansancio mental</p> <ul style="list-style-type: none"> Se desconecta Hoja funciona como un distractor para centrar su atención en la clase.
DIVERGENTE	<p>• Aunque la derivación en cálculo diferencial para haber visto el tema de derivadas en funciones implícitas, me pasó un tema interesante, y al menos le gané nada</p> <p>• Con el uso de palabras nuevas voy a ir a la clase al momento de leerlas o a algunas personas.</p> <p>• El examen de propa me tiene preocupado :c</p> <p>• Mis compañeros de estudio siempre llegan tarde :D</p> <p>• Ya voy a empezar con los ejercicios</p> <p>• Ojalá me de de deber de antes luego, tengo mis resultados así mal</p> <p>• Es más común que en las clases humanas se otros compañeros por lo principalmente en Persepolis están, es divertido ver a otros en el aula del computador que voy a participar</p> <p>• La firma espinosa recuerda la carpeta de Dora de Tico, donde la Dora con muchas historias, recordo su nombre de Dora DSS de la escuela al nombre de una compañía de tecnología México Unión Verano (MUV)</p> <p>• No estudio lo suficiente por probabilidades :f</p> <p>• Buze! Buze! Buze! Recordo mi infancia voy a estudiar</p> <p>• Con el tema de las integrales recordo la mia, me a AG, en un examen</p>	<ul style="list-style-type: none"> Sorpresa <p>Error de ejecución</p> <ul style="list-style-type: none"> Inseguridad Molestia Ansiedad <ul style="list-style-type: none"> Inseguridad 	<ul style="list-style-type: none"> Conecta y desconecta El contenido de la hoja no solo permite identificar los pensamientos del estudiante sino también funcionó como desahogo para el estudiante aunque eso implicará transformarse en un distractor también.]

Anexo 7. Transcripciones de las clases

Parte de la transcripción de la primera clase que se usa para el análisis.

D: Nosotros queremos encontrar “eme” que es la pendiente de la función, tenemos aquí a la pendiente, la que nosotros estamos buscando es la pendiente en un solo punto no el promedio. En un solo punto, pero tenemos un problema, ¿recuerdan cuál era el problema?

[Los estudiantes murmuran]

D: que si acercábamos estos dos nos daba cero sobre cero. Entonces en una función vamos a hacer esto, tenemos un puntito que le vamos a llamar “equis” y ¿aquí qué es? [Señalando un punto en el eje vertical]

E: ¡“ye”!

D: ¡“ye” !, este “ye” es la función de “equis”, recuerdan, que “ye” está en función de “equis”, ¿recuerdan? que está escrito solo de manera distinta pero que en realidad “ye” es una función, “ye” de “equis” o “f” de “equis”

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

D: vamos a ponerlo aquí como... este ‘mmm’ “ye” que es en función de “equis”. Va, aaah, ‘mmm’. Primero que nada, vamos a hacer un promedio, vamos primero a encontrar una pendiente aproximada de este punto, ¿cómo lo vamos a hacer? A “equis” le vamos a sumar un pedacito, “equis” más un pedacito de “equis”, esa es “delta equis”, no se pueden separar, ¿no?, no están solitos eso significa que esto es “delta equis” es una letra por sí misma.

[Escribiendo sobre el plano cartesiano]

D: No se pueden separar, aaah ‘mmm’... Si nosotros nos movemos un poquito a la derecha la altura cambia, ¿cierto?

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

E: si...

D: si aquí esta evaluado la “ye” en “equis”, acá ¿en qué va a estar evaluado?... ¿en qué?

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

E: “equis” más “delta equis”

D: “equis” más “delta equis”, así es, esta evaluado en “equis” más “delta equis”,

[Escribiendo sobre el plano cartesiano]

D: ahora aquí si se fijan acabamos de hacer un pequeño triangulito... si nosotros queremos conocer la pendiente al igual que en estas dos formulitas, pues tenemos que dividir este pedacito en “ye” entre este pedacito en “equis”, ahora ¿cuál será el pedacito en “ye”? ¿Cuánto mide ese pedacito en “ye”? haber ustedes díganme...

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

Se escuchan puros murmullos pon unos instantes,

D: ¿Quién? ¿Quién? ¿Quién? Haber tenemos esta regla de siete centímetros, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y tenemos aquí un lápiz, ¿cuánto mide el lápiz?

[Dibujando un segmento de regla y un lápiz paralelo a la regla en el pizarrón]

E: Tres

D: ¿Por qué? No solo a “ojo de buen cubero”, ¿cómo lo hicieron aritméticamente? ¿Qué operación hicieron para saber que eso vale tres? [Dirigiéndose hacia los estudiantes]

No se entiende que contestan solo se escuchan los murmullos. Pero el docente parece que si escuchó.

D: Gracias, el total, si al total le restamos este pedacito, se borra, entonces nos queda esto, ¿ok?, o sea total o bueno final menos inicial nos da este tramo,

[Señalando la imagen del lápiz]

D: ¿cuánto vale este tramo de “ye”?

[Regresando al triángulo en el plano]

E: “equis más “delta equis”.

D: este tramo, no éste, éste.

[Señalando la altura del triángulo en el plano]

E: “ye” evaluado en “equis” más “delta equis” menos “ye” evaluado en “equis”.

D: bien esto es el tramo evaluado de “ye” ahora viene el tramo de “equis”, y ¿cuánto da eso?

[Escribiendo sobre el plano cartesiano]

Algunos estudiantes murmuran sin que lo que dicen fuera claro.

D: “equis” más “delta equis” menos “equis”, éste y éste pues se van, ¿no? Se están restando y nos queda “ye” en “equis” más “delta equis” menos “ye” en “equis” entre el puro “delta equis”.

[Escribiendo sobre plano cartesiano]

(...)

Parte de la transcripción de la segunda observación que se usa para el análisis.

D: Hay unas derivadas que se, por ejemplo, tenemos algunas funciones, más adelante las veremos, este, en otros semestres más a fondo que se, específicamente en tercero que es ecuaciones diferenciales, aaah por ejemplo que pasa si tenemos, aaah, logaritmo natural de “equis” más “ye” es igual a seno de “equis” más “ye”,

[Escribiendo en el pizarrón]

D: Si nosotros quisiéramos hacer una derivada como las que hemos aprendido a hacer hasta ahorita pues tendríamos forzosamente que despejar la letra “ye”, como esta acá, que se vuelva una unidad independiente y después derivarla, derivada de “equis” respecto de “ye”, en este caso,

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

D: aaah, pues no podemos hacerlo porque se encuentra dentro de un argumento y del argumento. No hay manera de despejar “ye”.

[Señalando ambos lados de la función implícita de logaritmo]

D: Entonces tenemos que encontrar la manera de derivarlo tal cual esta así esta función, estas funciones se llaman funciones implícitas. Una función implícita es en donde la variable dependiente no se puede despejar, no está despejada, aaah, entonces ¿Qué hacemos con estas funciones implícitas?

[Hojeando algo en su libreta]

D: Primero que nada, demos de recordar o debemos dejar en claro o dejar establecido que “ye” es una función de “equis”, ¿ok?,

[Escribiendo en el pizarrón]

D: o sea que “ye” no es una variable independiente solita, o sea que “ye” dentro de una función que no conocemos porque no podemos despejarla en “equis”, ¿va?, entonces tomando en cuenta eso lo que hacemos es derivar la función completa

[Encerrando ambos lados de la función implícita de logaritmo]

D: derivar la función completa con reglas de la cadena ¿ok?, la derivada de un logaritmo ¿cuál es?, ahora recuerdan que en un apartado vimos ´mmm´

[Escribiendo en el pizarrón]

D: haber por favor, ¿cuánto es tres más dos?...

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

E: ¡cinco!

D: cinco, esto es una igualdad es una ecuación, ¿sale? lo que nos indica que lo que está del lado izquierdo es equivalente a lo que está del lado derecho, ¿sale?, entonces si nosotros queremos multiplicar este por dos, ¿qué tendremos que hacer?

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

E: ¡multiplicar por dos!

D: tendremos que multiplicar por dos forzosamente, o sea, lo que hacemos del lado izquierdo se tiene que hacer de lado derecho para no afectar la igualdad.

[Dirigiéndose a los estudiantes y escribiendo en el pizarrón alternadamente]

D: Bueno, si tenemos una función, en este caso una igualdad, que es una función implícita, es decir que tiene funciones de ambos lados y queremos aplicar la derivada tenemos que aplicar la derivada en ambos lados, ¿verdad?, la derivada de todo lo que está del lado izquierdo va hacer igual a la derivada de todo lo que está del lado derecho. Del lado izquierdo ¿cuál es la derivada de un logaritmo?

E: uno sobre “equis” más “ye”

D: Ok, esto quedamos que es el argumento del logaritmo, la derivada de la función logaritmo es uno sobre uno sobre el argumento y el argumento se escribe tal cual, “equis” más “ye” y luego en la parte de arriba se va a escribir ¿qué?

E: “ye prima”.

D: la derivada de la función la derivada del argumento es, es una suma por lo tanto son dos derivadas. La derivada de “equis” ¿cuál es?

E: uno

D: ¡Uno! Más, ahora pregunta, notación si yo tengo “ye” y la quiero derivar ¿cómo se escribe?

E: “ye prima”

D: “ye prima” es una de las forma de escribirlo, otra manera ¿cuál era?

No se escuchan claramente la respuesta por los murmullos que hacen los estudiantes.

D: “de ye” entre “de equis”, ok. Sabiendo que “ye” es una función de “equis” cuando yo quiero derivar “ye” obtengo o “ye prima” o “de ye” entre “de equis”, ok. Entonces ¿cuál es la derivada de “ye”?

E: “ye prima”

D: Es igual, bueno ahí se acabó la regla de la cadena, aaah, de lado derecho ¿la derivada de seno?

E: coseno

D: coseno, coseno del mismo argumento “equis” más “ye” por la derivada del argumento, ¿y cuál es la derivada del argumento?

E: Uno más “ye prima”.

D: Uno más “ye prima”. ¡Muy bien! Hasta aquí la función implícita ya está derivada, lo bueno de las funciones implícitas es que por la regla de la cadena siempre nos va a arrojar una “ye prima” “que ya no se encuentra dentro del argumento o sea la derivada normalmente se puede despejar, entonces en esta si va a hacer necesario que utilicemos el álgebra para poder despejar a esta “ye”. Y entonces bueno pues lo vamos a... vamos a hacerlo, voy a escribirlo por este lado. Aaah ´mmm´ todo este término que se está multiplicando, lo vamos a pasar que esta con signo positivo, lo vamos a pasar de este lado restando, con signo negativo para que quede una expresión como esta.

[Esto último hablando para sí mismo]

D: En ambos términos se repite algo ¿qué es?

E: uno más “ye prima”

En eso unos estudiantes entraron al salón de clases y se sentaron rápido en la silla desocupada más cercana a su grupo de amigos mientras el docente proseguía:

D: uno más “ye prima”. Este no puede ser porque este término de aquí es algebraico. Y este de aquí es trigonométrico, está dentro de la función...de coseno, pues no se puede, este, pero este de arriba si, este es el mismo que este, entonces podemos factorizarlo. Uno más “ye prima” factor de, si aquí le quitamos este nos queda lo mismo que este. Entonces podemos factorizarlo, uno más “ye prima” factor de, si aquí le quitamos este ¿qué queda?

E: uno...

D: “equis” más “ye”, menos, si a esta función le quitamos este paréntesis ¿qué queda?

E: coseno de...

D: Coseno de “equis” más “ye”, igual con cero. ¡Ay caray! No puede ser...

E: ¿qué?...

D: Algo hice mal porque si lo pasamos dividiendo se hace cero y queda que “ye” igual a menos uno. Hice algo mal, a ver qué hice mal...

Cuando termina el docente el ejemplo se da cuenta que la derivada de esta función da un número lo que le causa desconcierto, revisa dos veces el método verifica que las operaciones algebraicas empleadas sean correctas y prefiere cambiar de ejemplo, no antes de comentar con los estudiantes. Mientras que el bullicio crece en el salón.

D: Pues no algebraicamente se ve bastante bien, o sea, aquí el problema (...) ¿por qué me pasa esto cuando tengo invitada?”

[Los estudiantes ríen]

(...)

Parte de la transcripción de la tercera clase

D: (...) dijimos que íbamos a hablar de máximos y mínimos, ¿no?, recuerdan que vimos, aaah, que, si la pendiente era como una patineta que estaba aaah, pues si patinando sobre una función pues la inclinación iba a ser la derivada ¿cierto?

[Terminando de señalar el comportamiento de la curva con el plumón para dirigirse a los
estudiantes]

E: si

D: y que había unos puntos en donde la inclinación o la pendiente era cero, dijimos que, si bien la derivada, que había unos puntos donde la inclinación era cero, bien, a estos puntos les vamos a denominar puntos críticos y pues básicamente vamos a tener tres distintos. Vamos a tener estos de acá arriba que ya vimos que son máximos, estos mínimos y este que está aquí es un punto de inflexión. Va ahí tenemos tres puntos, máximo, mínimo y punto de inflexión. Entonces vamos a ver cómo vamos a encontrar los puntos de críticos máximos y mínimos pues son iguales, la pendiente es cero en ambos, aaah, claro habíamos dicho que la propiedad de un máximo es que todos los puntos alrededor de él eran ¿qué?, eran ¿qué?,

Se escuchan puros murmullos

E: menores,

D: eran menores, y en el mínimo todos los puntos a su alrededor son mayores a él. Entonces bueno vamos a ver entonces. Todos estos puntos críticos, tanto los máximos cómo los mínimos, los vamos a encontrar igualando “efe de equis” igual a cero, perdón la derivada de “equis” igual a cero y además despejando “equis”, y nos va a decir en que “equis” esta derivada vale cero, es decir, en que “equis” la pendiente vale cero y así vamos a encontrar estos puntos críticos. Una manera de saber si es un punto crítico, y si el punto crítico es un máximo o es un mínimo es evaluando puntos alrededor de él, es decir, si “efe de equis”, “efe de equis” prima es igual a cero cuando “equis” vale-no se entiende-pues entonces lo que vamos hacer es, aaah, evaluar la función original, aaah, eh, un poquito después evaluar la misma función original un poquito antes y podemos encontrar, si ambos puntos son mayores que el punto crítico pues significa ¿qué es un...?

E: mínimo,

D: que es un mínimo. Si ambos son menores pues significa que es un máximo. Hagámoslo de esta manera y hoy vamos a encontrar una manera un poco más bonita y sencilla de cómo evaluarlo, va... Bien, veamos esta función tres “equis” cuadrado menos doce “equis” más quince, por favor derívenla, iguálenla a cero y despejen “equis” y ahorita vamos a interpretar esa, ese resultado. Derívenla, iguálenla a cero y despejen “equis”.

[Dirigiéndose hacia la puerta]

E: ¿en dónde?

D: en su cuaderno.

[Dirigiéndose hacia los estudiantes]

(...)

Anexo 8. Análisis de la prueba PLANEA

Los contenidos temáticos 1, 3 y 4 de la estructura de la prueba PLANEA (véase Tabla 2) se empiezan a enseñar en la educación básica (SEP, 2017.) para que los niños vayan trabajándolos como palabras y preconceptos (Vygotsky, 2000) durante los próximos 8 años de vida escolar hasta llegar a la secundaria que agrega un contenido temático más llamado *Cambios y relaciones* (3), en el cual se revisan aquellos conceptos encargados de la construcción y el uso de los modelos gráficos o simbólicos que resuelvan problemas de regularidad y cambio que impliquen secuencias, es decir del lenguaje matemático. De tal manera que al llegar a la preparatoria la mayoría de estos conceptos han sido previamente estudiados en clase de matemáticas – o al menos ese es el entendido en el discurso oficial- pero en este nivel educativo se formaliza los conceptos matemáticos, que implica un nivel de abstracción mayor, y se integran con otros conceptos científicos cambiando las formas en qué se presentan las representaciones gráficas y las simbólicas además de cambiar el tipo de ejercicios y problemas donde se trabaja con menos información pues se deben deducir la mayoría de los datos, las herramientas de solución requieren un lenguaje más especializado- el lenguaje algebraico-.

Relación entre ítem y el tipo de conocimiento matemático requerido

Esta sección pretende visualizar, que independientemente del contenido temático al que atienda cada ítem, el conocimiento requiere cada ítem es distinto:

En el primer ejemplo se puede distinguir que este reactivo no tiene un contexto que haga alusión a un conjunto de circunstancias del entorno

natural, social, económico o político. Está más orientado a considerarse un ejercicio tiene un procedimiento de resolución establecido. Para el cálculo es necesario aplicar el algoritmo de la multiplicación de las fracciones y al resultado obtenido aplicar el algoritmo de la división de las fracciones.

En el segundo ejemplo, a diferencia del primer ejemplo, tiene una caracterización contextual en el ámbito de la construcción, éste requiere que el estudiante lea con atención para entenderlos, sabe más o menos lo que busca, pero ignora el camino. Para la solución de este problema debe saberse el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor (MCD) de los valores 120, 160 y 200 aunque el estudiante podría utilizar otros métodos más empíricos. El reactivo no dice explícitamente la manera de resolver el problema a diferencia del ejemplo 1 donde los mismos signos tienen esa carga semántica -significado- para guiar la lógica de operación. Por lo que el estudiante debe comprender qué es lo que pide el problema: la determinación de la longitud común entre los tubos, y además implica que el estudiante utilice el algoritmo de Euclides calcular esa solución.

Para el tercer ejemplo el estudiante requiere organizar y relacionar sus conocimientos ya que son situaciones menos definidas a partir de las expresiones algebraicas de los lados–valores- se identifican las propiedades de los lados por ende se concluye con el tipo de figura geométrica en la imagen, en el caso del cuadrado el valor de sus lados es el mismo; además de integrarlo dentro del Teorema de Pitágoras - trigonometría-. Para resolver este problema se debe partir el cuadrado por la mitad con los vértices opuestos para generar dos triángulos rectángulos, condición necesaria para la aplicación del teorema. Es así como al usar el valor de cada lado del cuadrado (expresión algebraica) en el Teorema de Pitágoras es posible determinar la expresión que modela esta situación. Note que enunciado no es una situación caracterizada en algún contexto ya que a pesar de que

aparezca un sujeto (Mariana) la imagen corresponde a una figura geométrica no a una imagen de un terreno real.

En el cuarto ejemplo, los conceptos matemáticos inmersos son específicos provenientes de la trigonometría como los ángulos de elevación, los ángulos de depresión y las relaciones trigonométricas. Para resolver este problema el estudiante debe evaluar cuál de las 3 relaciones trigonométricas puede determinar el ancho del río, en este caso la tangente es el modelo más directo para hacer el cálculo. Además de que el estudiante debe conocer los valores principales que toma esta relación en 0° , 30° , 45° , 60° , etc. Observe también que este reactivo no tiene alguna representación gráfica (imagen) que ayude a la comprensión del problema, aunque si este inmerso en una caracterización contextual más detallada requiriendo del estudiante su capacidad de imaginación y de abstracción.

Algunos de estos ítems podrían contestarse mediante un recurso específico de la memoria (aprendizaje memorístico que puede apoyarse de la repetición mecánica). Como en el ejemplo 1, las estrategias de resolución para este ítem pueden variar, puede ser visto como una serie de pasos que se deben reproducir, a tendiendo a una estrategia mecanicista. O bien como una expresión aritmética, esta contiene una carga semántica para que el estudiante identifique los símbolos numéricos de los signos de puntuación y los logogramas (+, -), en la cual se debe comprender esa carga semántica para pensar en la solución. El objetivo de cada ítem debe atender a la intención de los NL, pero también a la funcionalidad y estos se pueden medir. Sin embargo, este estilo de preguntas cerradas limita el tipo de conocimiento que los estudiantes pueden aprender.

Por lo que varios ítems no necesariamente podrán resolverse por procedimientos aprendidos de memoria. Por ejemplo, en la prueba PLANEA para el nivel de educación básica los reactivos tienen la información clara y

concreta para que los estudiantes identifiquen los elementos relevantes para dar solución a los problemas que plantea las pruebas. El conocimiento de los conceptos matemáticos del currículum está asociados a la operacionalización de las notaciones de diferentes tipos de números, a la utilización de las nociones que se tengan de las propiedades de las representaciones matemáticas y del manejo de las expresiones algebraicas, en los cuales basta que los procesos de pensamiento que operen sean, en su mayoría, los memorísticos y asociativos (véase la figura 44) a diferencia de lo que sucede en el nivel EMS que requiere de otro tipo de razonamiento y de conexiones, es decir, otro tipo de pensamiento que facilite el análisis de los conceptos matemáticos como lo llega a ser el pensamiento matemático.

19. Una pipa tiene una capacidad de 19 684 litros de gasolina. La gasolina se distribuyó en cantidades iguales a 19 gasolineras. ¿Cuántos litros de gasolina se distribuyeron en cada gasolinera?
- A) 136
B) 1 036
C) 19 703
D) 373 996

Figura 44. Ejemplo de ítem en matemáticas de la prueba PLANEA del nivel de educación básica en sexto de primaria de 2018. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba_ei/docs/2019/PRUEBA_EVALUACION_INTERNA_SEXTO_PRIMARIA.pdf

Este problema aunque tiene asociados términos coloquiales próximos a su entorno requiere para su solución dos cosas: primero comprender lo que se “lee” y lo que “requiere” el enunciado (es un proceso mental que va de la mano con el significado de las palabras) y la elección de los datos relevantes para el resolver el problema, después la utilización del algoritmo (que puede o no seguir siendo un proceso mental pero en la mayoría de los casos se manifiesta como un acto que utiliza sistemas de representación externos, como el uso de símbolos matemáticos para la escritura). El niño debe comprender el significado contenido en el párrafo para asociar a la notación

matemática correspondiente al número de litros de gasolina el cociente de la división como el valor que da respuesta a la pregunta del problema (interpretación de los valores); y entonces el requerimiento que se le pide al estudiante es que tenga dominio sobre el algoritmo de la división (división euclidiana) y el conjunto de todo lo expuesto anterior podría demostrar su habilidad de resolver este tipo de problemas.

En el caso de los problemas propuestos para el nivel educativo básico de tercero de secundaria se puede verificar que los ítems requieren del uso de conocimientos memorísticos y mecánicos, se presenta el siguiente ejemplo (véase figura 45):

En México se producen 1.3×10^8 toneladas de basura por año. Se sabe que una tonelada es igual a 1×10^3 kg, y hay 1.1×10^8 mexicanos. ¿Qué cantidad de basura, en kg, produce al año cada mexicano?

- A) 1.18×10^3 kg
- B) 11.8×10^3 kg
- C) 1.18×10^{11} kg
- D) 1.18×10^{-3} kg

Figura 45. Ejemplo de ítem en matemáticas de la prueba PLANEA del nivel de educación básica en tercero de secundaria de 2018. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/ba/docs/2019/reactivos_tipicos/Matematicas_09_2015_.pdf

En este problema el estudiante no solo debe comprender el enunciado y tener el dominio de los algoritmos de la multiplicación y de la división sino además las reglas que aplican con estas operaciones las representaciones de las bases y sus exponentes (leyes de los exponentes). Sin embargo, las herramientas culturales que se utilizan no deben ser muy elaboradas y el nivel de conciencia necesario puede ser solo el estado de alerta.

El problema del uso de preguntas tipo ítem, es que este tipo de problemas-preguntas, solicitan una respuesta, y esta puede ser respondida por el estudiante de distintas formas, las cuales pueden no ser visibles en la propia respuesta (Pérez, 2006; Flores & Gómez, 2009). Las pruebas

estandarizadas como PISA y ENLACE tienen ítems de la misma clase (PISA, 2015; OCDE, 2002, 2018; INEE, 2015, 2018).

Es común encontrar, dentro de los libros de texto y las actividades propuestas por el docente, problemas con estructuras que obligan al estudiante a contestar los ítems de dos formas distintas principalmente: la primera atiende a la idea de relacionar el “tipo de reactivo” para tratar de construir una estrategia basada en la predicción de la estructura de la pregunta, por ejemplo: “Juan va a la papelería y compra 2 lápices que cuestan \$5.00 cada uno, 3 libretas,…” es igual a “El granjero Pedro compra algunos animales en el mercado por 3 gallinas y 5 cerdos, cada gallina cuesta \$50.00…” y entonces se responde con el mismo esquema. Para la segunda tiene que ver con la interpretación del contenido del ítem en donde involucre actos de pensamientos más complejos que la mera asociación que le proporcionen la ayuda necesaria para encontrar los valores útiles que resuelvan el problema “para este problema selecciono la suma, para éste la división, para este otro la regla de tres” pero sin tener un método propio, planificado y estratégico; sin embargo, para cualquiera de estas formas de resolver supone un modelo mecanicista. Ya que, en algunos casos, la comparación de las soluciones entre tipos de ítems podría hacer pensar al lector –en la interpretación solamente del resultado– que el estudiante despliega conceptos de memoria, pero con una comprensión limitada ya que no puede aplicarlos en la resolución de otro tipo de problemas que requieran del razonamiento mediante estos mismos conceptos y da la impresión de “omitir” las estrategias que se utilizan para la resolución del problema.

De acuerdo con Arancibia, Herrera y Strasser (1997), un problema para ser considerado problema el estudiante debe aceptarlo como desafío, además de cumplir con los siguientes tres criterios: la aceptación, el bloqueo y la exploración del estudiante. Este tercero deriva en la estrategia que el estudiante deberá proponer para resolver el problema. El tiempo de respuesta

también condiciona el tipo de estrategia usada por el estudiante, ya que se encuentra limitado por el tiempo de aplicación de la prueba PLANEA y aunque el estudiante pudiera elegir otro camino más organizado y fundamentado para resolver el problema no siempre tienen el tiempo para hacerlo. Por ejemplo, los dos modelos presentados por Arancibia, Herrera y Strasser (1997) para resolver problemas requieren que el tipo de problema sea planteado de diferente manera, más orientado a problemas contextualizados, pero resolverlos requeriría de un lapso más considerable. Es por ello que la mayoría de los ítems que se presentan en PLANEA apenas cumplen con las condiciones mínimas para considerarse *problemas* mencionadas por Arancibia, Herrera y Strasser (1997). Sobre todo si se quiere gestionar otro tipo de pensamiento como el razonamiento matemático y desarrollar otros tipos de habilidades en los estudiantes.

Análisis de los resultados de la prueba PLANEA

El proceso metodológico del análisis de datos no se encuentra detallado en los registros publicados en la página de PLANEA (2017), ni en el documento rector (INEE, 2018), tampoco en las bases de datos encontrados del (INEE, 2018), o del gobierno federal que permitan hacer una interpretación correcta entre los datos y la gráfica, haciendo que el análisis sea complejo para cualquier persona por las inferencias que se deben hacer con la poca información que se obtuvo. Además de provocar confusiones por la cantidad de estados y datos presentados en una sola figura y otras derivadas de la métrica utilizada para todas las barras (área de la barra) ya que no reflejan el tamaño real de la muestra en cada estado. Al final del informe aparecen unas conclusiones contradictorias ya que en ellas se menciona que las estadísticas obtenidas de la prueba estandarizada son consecuencia de varios factores de índole individual, como hábitos de

estudio, las actitudes y los valores morales; factores socioeconómicos; y factores institucionales (PLANEA, 2019) y que por lo tanto estos resultados solo pueden considerarse como insumos de reflexión en el reto que representa para cada institución educativa.

En gráfica 2, que muestra los resultados nacionales de la prueba PLANEA, se puede apreciar que la barra de cada estado comparada con las demás barras se encuentra alineada a la derecha del NL-I - como si fuera el origen del eje x- dejando de lado izquierdo el área proporcional al porcentaje alcanzado por el NL- I, y del lado derecho las áreas correspondientes a los otros niveles. Por otro lado, para el análisis de los promedios de los puntajes en PLANEA por estado se incluyó una prueba de contraste de medias con un 95% de significancia, donde se compararon cada una de ellas con la media nacional (500 puntos), se pueden ver en la gráfica 2, diez estados que se encuentran marcados con un punto morado, en los cuales se encontraron diferencias significativas con respecto al valor promedio nacional, es decir, que los datos arrojados por esas muestras son realmente diferentes a la media nacional atribuidos a errores de tipo muestral del 5% y que por ende son muestras que no se consideran significativamente confiables- en términos estadísticos-.

Es así que al pie de la gráfica se incluyen dos aclaraciones más relacionados al coeficiente de variación entre los valores promedio la primera marcada con un asterisco en donde se explica que este valor promedio fue obtenido de una muestra homogénea pero que pudiera estar sesgada por otros factores -como es el caso del estado de Guerrero-; sin embargo la aclaración asociada a dos asteriscos menciona que el valor promedio de ese estado -por ejemplo el estado de Coahuila- no es estadísticamente confiable por tener una muestra del tipo heterogéneo.

Una relación interesante se construye cuando se comparan los estados que se encuentran en los límites del rango del puntaje promedio de la figura 3 y los estados en los resultados de la medición de la pobreza en México. De los diez estados que están marcados con un punto morado dos estados de este grupo no solo tienen el menor puntaje de la prueba sino además se encuentran dentro de los estados de la república mexicana con mayor número de habitantes en pobreza extrema (entre los años 2016-2018), mientras que los cinco primeros estados con mayor puntaje en la prueba PLANEA (véase gráfica 2) mantienen un mínimo porcentaje de personas (de 0.5 a 3) en situaciones de pobreza extrema como lo es Aguascalientes (CONEVAL, 2019). Sería interesante investigar si existe una correlación entre ambas variables y en qué condiciones existe esa correlación en algún otro estudio a futuro.