

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS

## DETECCIÓN HOMODINA CONDICIONADA DE FLUORESCENCIA RESONANTE

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS  
CON OPCIÓN TERMINAL EN: TECNOLOGÍA ELÉCTRICA

M. EN C. (FÍSICA) LUIS GUTIÉRREZ

DIRECTOR: DR. HÉCTOR MANUEL CASTRO BELTRÁN

SINODALES: DR. DARWIN MAYORGA CRUZ  
DRA. VIVECHANA AGARWAL  
DR. GILBERTO ANZUETO SÁNCHEZ  
DR. ADALBERTO ALEJO MOLINA  
DR. OUTMANE OUBRAM  
DR. ALEJANDRO AMAYA TAPIA

# Resumen

En esta tesis se investigan teóricamente propiedades dependientes de la fase de la luz emitida espontáneamente por un átomo iluminado por láseres. Esta luz, denominada fluorescencia resonante, tiene propiedades que requieren un análisis mecánico cuántico. El estudio se enfoca en el aspecto ondulatorio de la luz más que en el de partícula. Para ello, se emplea la técnica de detección homodina condicionada desarrollada inicialmente para la detección de luz débilmente comprimida, donde las fluctuaciones en una cuadratura son reducidas a expensas de incrementar las fluctuaciones de la otra. La detección homodina condicionada es una versión mejorada de la detección homodina balanceada, ya que la primera es independiente de la baja eficiencia cuántica de los detectores y de la baja eficiencia de recolección de la luz (ángulo sólido) del átomo. Puesto que la compresión en fluorescencia resonante sólo ocurre si la excitación es débil, con frecuencia se necesita un láser más intenso para obtener suficiente fluorescencia. La detección homodina condicionada, en consecuencia, recoge la no linealidad óptica inducida, la cual se manifiesta como fluctuaciones no gaussianas, reflejo de dinámica fuera de equilibrio.

Se tratan tres modelos de átomos de pocos niveles. Primero se tiene un sistema de dos niveles forzado por un láser de intensidad baja a saturación, observando la desviación de las fluctuaciones de comprimida a no gaussiana. Después, un átomo de tres niveles donde el tercer nivel es metaestable, causando intermitencia en la fluorescencia de la transición fuerte. Esto se manifiesta como un pico muy angosto en el espectro de la cuadratura comprimida. Finalmente, un átomo de tres niveles tipo V forzado por dos láseres muestra una inusual correlación amplitud-intensidad asimétrica, medida por la detección homodina condicionada, la cual se debe a la competencia entre dos transiciones, una fuerte y una débil. Esta asimetría también es una marca de fluctuaciones no gaussianas.

# Summary

In this thesis the phase-dependent properties of the light emitted spontaneously by a laser-driven single atom are theoretically investigated. This light, called resonance fluorescence, has properties that need a quantum mechanical analysis. The study focuses on the wave aspect of the light rather than the particle aspect. For this, the method of conditional homodyne detection technique developed initially for the detection of weak squeezed light is used, where the fluctuations in one quadrature are reduced at the expense of the increasing fluctuations in the other. Conditional homodyne detection is an improved version of balanced homodyne detection that is independent on the low quantum efficiency of the detector and the low collection efficiency (solid angle) of the light from the atom. Since squeezing in resonance fluorescence occurs only for weak driving, a stronger laser is often needed to collect enough fluorescence. Conditional homodyne detection, as a consequence, picks the induced optical non-linearity, which manifests as non-Gaussian fluctuations, signature of nonequilibrium dynamics.

Three atomic models of few levels are considered. The first one is a two-level atom driven by a laser of weak to saturating intensity, observing the deviation of the fluctuations from squeezed to non-Gaussian. Second, a three-level atom where the third level is metastable, causing the fluorescence of the strong transition to display intermittency. This is reflected in a very narrow peak in the spectrum of the squeezed quadrature. Finally, a V-type three-level atom driven by two lasers displays an unusual asymmetry in the amplitude-intensity correlation measured by the conditional homodyne detection scheme, that is due to the competition among a strong and a weak transition. This asymmetry is also a strong signature of non-Gaussian fluctuations.

# Agradecimientos

Al director de tesis:

Dr. Héctor Castro Beltrán, Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, UAEM.

Por todas las enseñanzas que recibí a lo largo del doctorado. En los cursos curriculares y en las frecuentes reuniones de trabajo, siempre dispuesto a contestar mis preguntas y una paciencia infinita para aclarar dudas. Mi aprendizaje en el desarrollo de los tres artículos publicados es invaluable.

A los sinodales:

Dr. Darwin Mayorga Cruz, Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, UAEM.

Dra. Vivechana Agarwal, Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, UAEM.

Dr. Gilberto Anzueto Sánchez, Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, UAEM.

Dr. Outmane Oubram, Facultad de Ciencias Químicas e Ingeniería, UAEM.

Dr. Alejandro Amaya Tapia, Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos.

Por la revisión de ésta tesis, muchas gracias.

M. en C. (física) Luis Gutiérrez

•  
A la memoria de mi madre  
Catalina Gutiérrez

A Marisela y Kathya  
a  
Mariselita y Lía Fernanda  
con amor

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Interacción átomo-láser</b>	<b>8</b>
2.1. Ecuación maestra . . . . .	10
2.2. Ecuaciones de Bloch ópticas . . . . .	14
2.2.1. Soluciones en estado estacionario . . . . .	15
2.2.2. Soluciones dependientes del tiempo . . . . .	16
2.3. Intensidad de la luz dispersada . . . . .	21
2.4. Estado coherente y estados comprimidos . . . . .	23
2.5. Varianza del estado comprimido . . . . .	26
<b>3. Mediciones de fluctuaciones cuánticas: Funciones de correlación</b>	<b>30</b>
3.1. DHC y función de correlación . . . . .	33
3.2. Fluctuaciones del operador $\sigma_{\ell m}$ . . . . .	39
3.3. Función de correlación en fluctuaciones . . . . .	40
3.4. Solución matricial de las EBO . . . . .	44
3.5. Fórmula cuántica de regresión . . . . .	45
3.6. Correlaciones de operadores en fluctuaciones . . . . .	47
3.7. Espectro de fluorescencia resonante . . . . .	49
<b>4. DHC de la fluorescencia del átomo de 2 niveles</b>	<b>51</b>
<b>5. DHC de la fluorescencia del átomo de 3 niveles tipo <math>\Lambda</math></b>	<b>58</b>
5.1. Ecuaciones de Bloch ópticas . . . . .	59
5.2. Espectro de fluorescencia . . . . .	66

5.3. Espectro de luz comprimida . . . . .	67
5.4. Espectro de ruido de las cuadraturas . . . . .	70
<b>6. DHC de la fluorescencia del átomo de 3 niveles tipo V</b>	<b>76</b>
6.1. Ecuaciones de Bloch ópticas . . . . .	77
6.2. Fluctuaciones cuánticas . . . . .	81
6.3. Función de correlación . . . . .	82
6.4. Espectro de ruido y varianza de las cuadraturas . . . . .	85
<b>7. Conclusiones</b>	<b>90</b>
<b>A. Condiciones iniciales</b>	<b>93</b>
<b>B. Cálculo de producto de fluctuaciones</b>	<b>99</b>
<b>C. Anexo: artículos publicados y otros productos académicos</b>	<b>101</b>

# Índice de tablas

A.1. Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión para el A2N, Ecs. (3.77, 3.85). donde $\alpha_{ee} = (1 + \alpha_z) / 2$ . . . . .	96
A.2. Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión para el A3N- $\Lambda$ , Ecs. (3.77, 3.85). . . . .	97
A.3. Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión para el A3N-V, Ec. (3.77). . . . .	97
A.4. Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión en fluctuaciones para el A3N-V, Ec. (3.85). . . . .	98

# Índice de figuras

1.1.	Roy J. Glauber (1925-2018) pronunciando su conferencia Nobel en el Aula Magna de la Universidad de Estocolmo el 8 de diciembre de 2005 [26].	2
1.2.	La luz como partícula. Representación esquemática de series de tiempo de fotoconteo para luz de una lámpara (agrupamiento), luz coherente de un láser (aleatorio) y luz de un átomo de dos niveles (anti agrupamiento) [7, Fig. 4].	4
2.1.	Modelo aproximado de un átomo de 2 niveles. Cuando un láser monocromático de frecuencia angular $\nu_e$ coincide con una de las transiciones ópticas del átomo se tiene una interacción resonante entre esa transición y el campo de luz, donde $\omega_e$ es la frecuencia angular de la transición entre $ g\rangle$ y $ e\rangle$ , $\Omega_e$ es la frecuencia angular de Rabi y $\gamma_e$ la razón de emisión espontánea del estado excitado.	10
2.2.	Solución analítica de $\langle\sigma_z(t)\rangle$ , Ec. (2.36). (a) $\gamma_e t = [0, 15]$ , $\Omega_e/\gamma_e = [0, 3.3]$ y $\Delta_e = 0$ . (b) (i) $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii) $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii) $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv) $\Omega_e = 2\gamma_e$ y (v) $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .	18
2.3.	Solución analítica de $\text{Im}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$ , Ec. (2.37), con $\Delta_e = 0$ . (i) $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii) $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii) $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv) $\Omega_e = 2\gamma_e$ y (v) $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ . La línea punteada horizontal verde muestra el cero. En resonancia $\text{Re}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle = 0$ , Ec. (2.37).	19
2.4.	Comportamiento general de $\langle\sigma_z(t)\rangle$ . Su máximo valor en estado estacionario se indica con la línea punteada horizontal verde. (a) $\Delta_e = 0.1\gamma_e$ y (b) $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambos casos, (i) $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii) $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii) $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv) $\Omega_e = 2\gamma_e$ y (v) $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .	19
2.5.	Comportamiento general de $\text{Re}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$ para $\Delta_e \neq 0$ , Ecs. (2.37). La línea punteada horizontal verde muestra el cero. (a) $\Delta_e = 0.1\gamma_e$ y (b) $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambos casos, (i) $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii) $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii) $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv) $\Omega_e = 2\gamma_e$ y (v) $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .	20

2.6.	Comportamiento general de $\text{Im} \langle \sigma_{eg}(t) \rangle$ para $\Delta_e \neq 0$ , Ec. (2.28). La línea punteada horizontal verde muestra el cero. (a) $\Delta_e = 0.1\gamma_e$ y (b) $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambos casos, (i) $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii) $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii) $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv) $\Omega_e = 2\gamma_e$ y (v) $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ . . . . .	21
2.7.	Contribuciones coherente e incoherente a la intensidad de la luz dispersada para el A2N. Curvas en negro para $\Delta_e = 0$ , las cuales se cruzan en $\Omega_e = \gamma_e/\sqrt{2}$ , excitación en saturación. Curvas en rojo para $\Delta_e = 2\gamma_e$ . La línea punteada azul indica el límite asintótico de probabilidad 1/2 al que tiende $I_{inc}$ . . . . .	22
2.8.	El estado de vacío se representa con un círculo de incertidumbre cuántica de diámetro 1/2. (a) Estado coherente $ \alpha\rangle$ de longitud $ \alpha  = \sqrt{\bar{n}} \gg 1$ y fase óptica promedio $\varphi$ . (b) Incertidumbre en el número de fotones, $\sqrt{\bar{n}}$ , e incertidumbre en la fase, $\Delta\varphi$ . . . . .	25
2.9.	Estados de cuadratura comprimida, el círculo punteado muestra la incertidumbre en la cuadratura de los estados de vacío/coherente con $\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{2}$ . (a) Vacío comprimido. (b) Luz comprimida en fase. (c) Luz comprimida en amplitud. . . . .	26
2.10.	Varianza, Ecs. (2.66, 2.67), con $\gamma_e = 1$ . (a) Para $V_0$ : (i) $\Delta_e = 0$ , (ii) $\Delta_e = 0.6\gamma_e$ , (iii) $\Delta_e = 1.2\gamma_e$ , (iv) $\Delta_e = 2.4\gamma_e$ y (v) $\Delta_e = 4.2\gamma_e$ . (b) Para $V_{\frac{\pi}{2}}$ : (i) $\Delta_e = 0$ , (ii) $\Delta_e = 0.2\gamma_e$ , (iii) $\Delta_e = 0.4\gamma_e$ y (iv) $\Delta_e = 0.6\gamma_e$ . La línea punteada horizontal verde muestra el cero y la línea punteada horizontal anaranjada muestra el límite de 1/4 al que tienden las varianzas cuando $\frac{\Omega_e}{\gamma_e} \rightarrow \infty$ , Ec. (2.68). . . . .	28
2.11.	Comparación cualitativa de las varianzas de la fluorescencia resonante. (a) Átomo de 2 niveles, Collett, <i>et al.</i> [25]. (b) Sistema de 2 niveles, Schulte, <i>et al.</i> [24]. Los símbolos en las líneas punteadas son mediciones, las líneas continuas son teoría. La variable $s = P/P_{sat}$ , es la potencia de excitación, donde la potencia de saturación, $P_{sat}$ , produce la mitad de la máxima intensidad de fluorescencia resonante accesible. Los parámetros son diferentes en cada caso y las fases son arbitrarias de una gráfica a la otra. . . . .	29
3.1.	Función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(\tau)$ para luz caótica proveniente de una lámpara de descarga y luz perfectamente coherente, donde $\tau_c \approx 1/\Delta\omega$ es el tiempo de coherencia y $\Delta\omega$ es el ancho espectral [23, p. 112]. . . . .	33

3.2. La detección homodina condicionada consiste en un oscilador local y en la técnica de DHB, así como de un detector  $\mathcal{I}$ . Se muestra en rojo (azul) el estudio de la fluorescencia de la transición débil (fuerte) del A3N-V. El sistema atómico puede ser el A2N o el A3N- $\Lambda$  y emplearse sólo un láser. Con DHC se mide la función de correlación  $h_\phi(\tau)$ . Para sólo medir en DHB se cancela la trayectoria al detector  $\mathcal{I}$ . . . . . 34

3.3. El operador  $\sigma(t)$  en términos de su media más fluctuaciones:  $\sigma(t) = \alpha + \Delta\sigma(t)$ , donde  $\langle \Delta\sigma(t) \rangle = 0$ , esto es, las fluctuaciones promedian a cero. 40

4.1. Espectros en fluctuaciones para el A2N con  $\phi = \pi/2$ . (a) Excitación débil,  $\Omega_e = \gamma_e/10$ . (b) Excitación crítica  $\Omega_e = \gamma_e/4$ . En ambos casos se muestra en (i) el segundo orden, en (ii) el tercer orden y en (iii) el espectro total [16, Fig. 4 y Fig. 5]. . . . . 57

5.1. En el A3N- $\Lambda$  un láser de frecuencia angular  $\nu_s$  y frecuencia de Rabi  $\Omega_s$  excita la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ . El estado excitado puede decaer espontáneamente al estado base con razón de decaimiento  $\gamma_s$  o puede hacerlo al estado metaestable  $|w\rangle$  con razón de decaimiento  $\gamma_d$ , el cual a su vez decae al estado base  $|g\rangle$  con  $\gamma_w$ . . . . . 59

5.2. Dos tipos de decaimiento gobiernan a  $\langle \sigma_{ss}(t) \rangle$  del A3N- $\Lambda$ . Inicialmente domina la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ , curva con guiones rojos que va como  $e^{-\gamma_s t}$ . Posteriormente domina el decaimiento de  $|s\rangle$  a  $|w\rangle$  descrito por la curva con guiones azules y que va como  $e^{-\gamma_w t}$ . Finalmente la población tiende a su valor en estado estacionario  $\alpha_{ss} = 0.184$ . Parámetros:  $\Omega_s = 3.5/\gamma_s$ ,  $\gamma_s = 1$ ,  $\gamma_d = 0.050$ ,  $\gamma_w = 0.015$  y  $\Delta_s = 0$ . . . . . 64

5.3. Espectro incoherente del A3N- $\Lambda$ . (a) Para un campo de láser en saturación,  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$ . (b) Para un campo fuerte,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Ambos espectros con  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$  y  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$ . Las curvas continua negra y la punteada roja son los espectros exacto y aproximado, respectivamente, y la curva con guiones verdes es el espectro del A2N. . . . . 66

5.4. Espectros  $S_\phi^{lc}(\omega)$  del A3N- $\Lambda$  para  $\phi = \pi/2$  con (a)  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ , (b)  $\Omega_s = 0.2625\gamma_s$  y (c)  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Las curvas continua negra y la punteada roja son los espectros exacto y aproximado del A3N- $\Lambda$ , respectivamente, con parámetros  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$ ,  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$  y  $\eta = 1$ . Las curvas con guión verdes son los espectros del A2N. . . . . 68

5.5. Varianza de la fluorescencia resonante para excitaciones de débil a moderadamente fuerte. Para el A2N, Ecs. (2.66, 2.67), y para el A3N-A, Ecs. (5.53, 5.54). Los parámetros adicionales para el A3N-A son  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$  y  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$ . . . . . 69

5.6. Para el A3N-A, función de correlación amplitud-intensidad  $h_{\pi/2}(\tau)$  (línea continua negra) y sus componentes  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau)$  (línea punteada azul) y  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$  (línea con guiones rojos) para (a) un campo de láser en saturación,  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$  y (b) para un campo fuerte,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Ambos con  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$  y  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$ . Sólo se grafican los resultados analíticos. . . . . 71

5.7. Espectros de las cuadraturas para  $\phi = \pi/2$  del A3N-A (línea continua negra) y del A2N (línea con guiones verdes) para: (a) campo débil  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ , (b) campo moderado  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$  y (c) campo fuerte  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Los recuadros muestran  $S_{\pi/2}^{(3)}(\omega)$  del A3N-A (línea continua roja), Ec. (5.67), y del A2N (línea con guiones azules), Ec. (4.20). Los espectros  $S_{\pi/2}^{(2)}(\omega)$  son los de la Fig. 5.4. Se presentan solamente los resultados analíticos. . . . . 73

6.1. (a) El A3N-V excitado bicromáticamente por láseres de frecuencias angulares  $\nu_s, \nu_w$ . Dado que  $\gamma_s > \gamma_w$  se llama a  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  ( $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$ ) la transición fuerte (débil). (b) Si  $\Omega_s \gg \gamma_s$  la transición fuerte experimenta un desdoblamiento Stark AC (líneas punteadas). . . . . 76

6.2. Correlaciones intensidad-intensidad  $g_j^{(2)}(\tau)$  del A3N-V con  $\gamma_w = \Omega_w = 0.5\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ . (a)  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$  y (b)  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . . . . . 81

6.3. (a) Función de correlación asimétrica de la luz proveniente de la transición débil del A3N-V. (b) Descomposición de  $h_{\pi/2}(\geq 0)$  (azul) en  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}$  (negro) y  $h_{\pi/2}^{(3)}$  (verde). Los parámetros empleados son  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ . . . . . 84

6.4. Lo mismo que en la Fig. 6.3, excepto en la excitación más fuerte,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ , en la transición fuerte. . . . . 84

6.5. (a) Espectros del A3N-V para  $\phi = \pi/2$  de la transición débil, Ecs. (4.14, 4.15), graficados en la Fig. 6.3(a). (b) Descomposición de  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  en sus componentes de segundo y tercer orden, Ecs. (4.16, 4.17). Los parámetros son  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ . . . . . 86

6.6. (a) Espectros del A3N-V para  $\phi = \pi/2$  de la transición débil, Ecs. (4.14, 4.15), graficados en la Fig. 6.4(a). (b) Descomposición de  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  en sus componentes de segundo y tercer orden, Ecs. (4.16, 4.17). Los parámetros son  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ . . . . . 86

---

6.7.	A3N-V. (a) Varianza de la fluorescencia de la transición fuerte para $\phi = \pi/2$ . Los parámetros son: (i) $\gamma_w = 0.01\gamma_s$ , $\Omega_w = 0.05\gamma_s$ ; (ii) $\gamma_w = 0.01\gamma_s$ , $\Omega_w = 0.1\gamma_s$ ; (iii) $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ , $\Omega_w = 0.1\gamma_s$ . (b) Varianza de la fluorescencia de la transición débil para $\phi = \pi/2$ , $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ e (i) $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ ; (ii) $\Omega_s = 0.2\gamma_s$ ; (iii) $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ . Los dos casos con desintonía cero. . . . .	87
6.8.	Ruido para $\phi = \pi/2$ proveniente de DHC para la transición débil del A3N-V. (a) Segundo orden, (b) tercer orden, ambos para $\tau \geq 0$ ; y (c) para $\tau \leq 0$ . Los parámetros son: $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ (línea continua en negro), $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ (curva con puntos rojos) y $\Omega_s = 0.9\gamma_s$ (curva con guiones verdes). Todas las curvas con $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ y desintonía cero. . . . .	88

# Lista de acrónimos

A2N	Átomo de 2 niveles
A3N- $\Lambda$	Átomo de 3 niveles tipo $\Lambda$
A3N-V	Átomo de 3 niveles tipo V
DHB	Detección homodina balanceada
DHC	Detección homodina condicionada
EBO	Ecuaciones de Bloch ópticas
EBO-EE	EBO en estado estacionario
EdeM	Ecuaciones de movimiento
EdeM-F	EdeM en fluctuaciones
EM	Campo electromagnético
FCR	Fórmula cuántica de regresión
FR	Fluorescencia resonante
HBT	Hanbury-Brown y Twiss
QED	Electrodinámica cuántica
QED	Quantum electrodynamics
TCCO	Teoría cuántica de la coherencia óptica

# Capítulo 1

## Introducción

Una forma de conocer las propiedades de un átomo (u otro material) es mediante su fluorescencia, la luz que emite tras ser excitado a niveles de mayor energía. La información que se obtiene consiste usualmente en conocer intensidades, frecuencias y anchuras de la fluorescencia del átomo. La excitación de un átomo por un láser permite la excitación selectiva de una transición entre dos niveles de energía y, con ello, obtener notables mejoras en la precisión de las mediciones sobre la transición. A la emisión espontánea<sup>1</sup> de luz mientras el átomo es iluminado se le denomina Fluorescencia Resonante (FR). La FR es una de las principales herramientas de diagnóstico en espectroscopia láser, aplicada en enfriamiento de átomos con láseres, mediciones de alta precisión para relojes atómicos y determinación de constantes fundamentales, así como en la óptica cuántica, donde es de crucial interés conocer las propiedades estadísticas de la luz emitida.

La óptica cuántica moderna nace con la invención del láser en 1960, y una de sus primeras tareas fue determinar las propiedades estadísticas de la luz del láser y sus mecanismos fundamentales de generación. Uno de los primeros grandes triunfos de la nueva disciplina fue la Teoría Cuántica de la Coherencia Óptica (TCCO), abanderada por Roy J. Glauber en 1963, y a quien se le reconoció con el Premio Nobel de Física en 2005 [1], ver Fig. 1.1. Uno de los elementos centrales de dicha teoría es el estado coherente, el estado cuántico de la luz más cercano al campo coherente clásico de amplitud y frecuencia fija del campo Electromagnético (EM). La TCCO reconoce que todo campo EM

---

<sup>1</sup>Emisión espontánea: fotones emitidos en dirección aleatoria y sin relación de fase. Emisión estimulada: fotones emitidos en la dirección del campo incidente y en fase con él, la amplitud del campo incidente se suma a la del campo emitido.



Figura 1.1: Roy J. Glauber (1925-2018) pronunciando su conferencia Nobel en el Aula Magna de la Universidad de Estocolmo el 8 de diciembre de 2005 [26].

tiene fluctuaciones. El estado coherente, para empezar, es un campo cuyas fluctuaciones en amplitud y fase son iguales entre sí, y cumplen una relación de incertidumbre. Además, los campos EMs con otras propiedades estadísticas se describen como superposiciones de estados coherentes. Se sentaban, entonces, las bases para el estudio de las fluctuaciones de la luz en diferentes estados producidos por cualquier tipo de emisor.

La TCCO tiene otro elemento crucial: un conjunto de funciones de correlación del campo EM a diferentes tiempos que permiten distinguir luz de diferentes fuentes que a primer orden pueden parecer idénticas, tales como la luz de una lámpara de descarga filtrada y colimada para tener el mismo ancho de banda y direccionalidad que un láser [2]. Estas funciones de correlación están sustentadas en el funcionamiento de los fotodetectores y en las mediciones por coincidencias que ya eran parte de mediciones en astronomía y otras disciplinas. En astronomía son famosos los experimentos de Hanbury-Brown y Twiss (HBT). En 1954 desarrollaron un nuevo interferómetro de intensidad que emplearon para medir diámetros angulares de fuentes de ondas de radiofrecuencia en el cielo empleando dos antenas [3]. La señal en cada antena se detecta independientemente y se registra la correlación entre las salidas de baja frecuencia de los detectores. La fase relativa de las dos señales de radio se pierde y sólo se mide la correlación de sus fluctuaciones de intensidad. A diferencia del anterior, en el interferómetro de Michelson sólo hay un detector, las dos señales se combinan antes de la detección y su fase relativa

se conserva. En 1956 HBT [4] modificaron su interferómetro de intensidad, reemplazaron las antenas por dos espejos y los detectores de radiofrecuencia por dos celdas fotoeléctricas. Midieron, como función de la separación de los espejos, la correlación entre las fluctuaciones de las corrientes provenientes de las celdas cuando eran iluminadas por una estrella. Mostraron más allá de toda duda que los fotones en dos haces coherentes de luz están correlacionados. No es que los fotones interfieran físicamente, son sus amplitudes de probabilidad las que interfieren y éstas se pueden definir igualmente para números arbitrarios de fotones.

La segunda generación, por así decirlo, de avances en la óptica cuántica viene del estudio de las propiedades de la luz que no pueden describirse por el campo EM ni por la estadística clásica. En 1976 Carmichael y Walls [5] demostraron teóricamente, y Kimble y Mandel [6] experimentalmente, que un átomo de dos niveles (posteriormente generalizado a otros sistemas) no puede emitir dos fotones simultáneamente. Al emitir un fotón el átomo pasa a su estado base, desde el cual no radia; debe ser excitado nuevamente para emitir otro fotón. Este efecto se llama anti agrupamiento (antibunching), opuesto a lo que ocurre con la luz de una fuente térmica (lámpara de descarga) donde es más probable que se emitan dos fotones a la vez, llamado agrupamiento (bunching). La luz de un láser, lo más cercano a un estado coherente, es independiente del intervalo de emisión entre dos fotones, esto es, los fotones se emiten en forma aleatoria. Este comportamiento se observó en [7] por medio del conteo de fotones provenientes de diferentes fuentes de luz como función del tiempo, Fig. 1.2.

La FR de un átomo de dos niveles convertiría a éste en uno de los sistemas más simple y no trivial para estudiar propiedades cuánticas de la luz. Mollow [8] calculó el espectro de potencia de la luz dispersada por un átomo de 2 niveles, excitado casi en resonancia por un campo eléctrico clásico monocromático. El espectro de potencia se obtiene de la función de correlación del momento dipolar atómico a dos tiempos. En el modelo se considera a la radiación dispersada, como compuesta, además de la monocromática (componente elástica), de una componente inelástica resultado de las fluctuaciones cuánticas del dipolo. En el límite de campos de excitación débiles la dispersión es casi completamente elástica. Conforme se incrementa la intensidad del campo excitador la dispersión inelástica empieza a contribuir, llegando a ser apreciable cuando la frecuencia angular de Rabi  $\Omega_e$  de la transición atómica inducida llega a ser comparable con la razón de decaimiento  $\gamma_e$ . En el límite de campos de excitación fuertes ( $\Omega_e \gg \gamma_e$ ) la dispersión inelástica

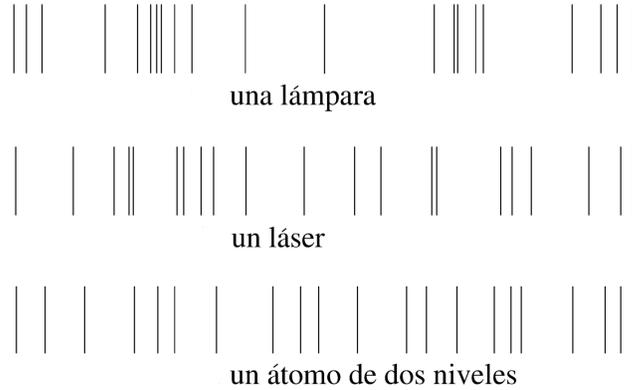


Figura 1.2: La luz como partícula. Representación esquemática de series de tiempo de fotocuento para luz de una lámpara (agrupamiento), luz coherente de un láser (aleatorio) y luz de un átomo de dos niveles (anti agrupamiento) [7, Fig. 4].

predomina sobre la dispersión elástica. En este límite el espectro de potencia del campo dispersado, como función de la frecuencia angular  $\omega$ , tiene un pico central con máxima amplitud en  $\omega \equiv \omega_{\text{fluorescencia}} - \nu_e = 0$  y dos picos laterales de menor amplitud ubicados en  $\omega \equiv \omega_{\text{fluorescencia}} - \nu_e = \pm\Omega_e$ , con anchuras proporcionales a la razón de decaimiento  $\gamma_e$ . Estos picos se conocen actualmente en el argot de la óptica cuántica como el “tripleto de Mollow”.

El siguiente objetivo sería estudiar las propiedades dependientes de la fase de la luz. En 1981 Walls y Zoller [9] demostraron que esas ocurren en los llamados estados comprimidos (squeezed), fluctuaciones cuánticas reducidas, donde por medio de una interacción átomo-láser no lineal, las fluctuaciones de la fase (amplitud) de la luz se reducen a niveles menores a las de un estado coherente a expensas de incrementar las fluctuaciones en la amplitud (fase), y seguir cumpliendo la relación de incertidumbre del estado coherente. Walls y Zoller sugirieron que para observar dichos estados comprimidos se podrían realizar mediciones empleando la técnica de detección homodina balanceada (DHB), que requiere un haz coherente de referencia haciendo interferencia con la luz de interés. El espectro (transformada de Fourier) de la señal de un estado comprimido presenta valores negativos en ciertos intervalos de frecuencia, indicando menor ruido respecto al de un estado coherente, o bien, al del vacío.

La historia de 30 años, hasta 2015, de los esfuerzos realizados para producir los estados comprimidos está relatada por Andersen, *et al.* [10, y sus

referencias]. El estudio inicial fue de Slusher, *et al.* en 1985 cuando obtuvieron la evidencia del estado comprimido en su experimento conceptual inicial usando el proceso de mezcla de cuatro ondas en un vapor atómico de átomos de sodio. Entre la tecnología de vapores atómicos y un enfoque basado en explotar la no linealidad tipo Kerr de tercer orden de  $\text{SiO}_2$ , así como el enfoque basado en la no linealidad de segundo orden de un cristal ferroeléctrico, ganaron estas dos últimas tecnologías logrando generar luz comprimida, Wu en 1986 y Vinet en 2010. Otra tecnología, basada en la supresión del ruido en la corriente de un láser semiconductor, implementada por Machida en 1986, también logró observar el fenómeno a la salida de un diodo láser. Estos cuatro experimentos fueron los primeros que mostraron un verdadero efecto cuántico dependiente de la fase de la luz.

Sin embargo, la baja eficiencia de los fotodetectores, así como la poca luz recolectada en los experimentos mencionados en el párrafo anterior impidió la observación de la compresión de la luz en la FR. Un sistema óptico que también presenta una baja producción de compresión, con mucho mejor eficiencia de recolección de fotones, es el de un átomo o átomos en una cavidad electrodinámica cuántica, QED.<sup>2</sup> La baja eficiencia cuántica<sup>3</sup> de fotodetección es suficiente para ocultar la compresión. Para resolver el problema, en el 2000, Carmichael, *et al.* [11] idearon y demostraron el método de Detección Homodina Condicionada (DHC), en el que el sistema de DHB, necesario para la medición dependiente de la fase, reemplaza uno de los detectores del interferómetro de HBT (ver pág. 2) caracterizado por ser casi inmune a la (baja) eficiencia de detección. Esto significa que la detección de un fotón se mide en coincidencia con la amplitud de una cuadratura de la luz, entonces, la correlación es de tercer orden en la amplitud del campo.

La observación de compresión del sistema en la cavidad QED, así como de la FR, se limita al régimen de excitación débil. Sin embargo, para producir la cantidad de luz suficiente para su observación hay que excitar al sistema un poco más fuerte. Esto genera una contribución de tercer orden en la DHC producto de la no linealidad inducida, mientras que la compresión es de segundo orden en las fluctuaciones. En el experimento de Foster, *et al.* [12, Fig. 3] esta contribución es pequeña, la cual permitía ignorarla en un primer nivel y poder identificar el espectro como el de compresión, pero notable

---

<sup>2</sup>Del inglés quantum electrodynamics (QED).

<sup>3</sup>Los fotodetectores se especifican por su eficiencia cuántica  $\eta$ , que se define como la razón del número de fotocuentas al número de fotones incidentes.

en la asimetría temporal en la correlación. Esta asimetría fue explicada por Denisov, *et al.* [13] como un efecto de rompimiento del balance detallado por ser un sistema fuera de equilibrio, un tópicó de gran actualidad. La solución a un problema llevó a más preguntas.

Los sistemas de cavidades QED son muy difíciles de explorar analíticamente fuera del régimen de excitación débil. La FR es más accesible a cualquier régimen, así que la ruta más adecuada para entender las desviaciones al efecto de compresión y la asimetría de la correlación amplitud-intensidad de la DHC es trabajar con la FR de sistemas de átomos de dos o más niveles. En 2008 Marquina-Cruz y Castro-Beltrán [14] demostraron teóricamente la asimetría en la correlación amplitud-intensidad de la DHC en un átomo de tres niveles tipo V, donde dos láseres excitan dos transiciones diferentes con un estado base en común. Sin embargo, aún había que determinar el papel de la no linealidad y el grado en que las fluctuaciones se presentan. Estos estudios se realizaron para el átomo de dos niveles en 2010 por Castro-Beltrán [15] y en 2015 por Castro-Beltrán, *et al.* [16]. Para el átomo de tres niveles tipo V se realizaron en 2014 por Castro-Beltrán, *et al.* [17] y en 2017 por Gutiérrez, *et al.* [18]. En 2016 Castro-Beltrán, *et al.* [19] hicieron dichos estudios aplicando la DHC a la FR de un átomo de tres niveles tipo  $\Lambda$ .

El autor de esta tesis considera que los artículos citados en el párrafo anterior constituyen una contribución altamente original y pertinente en la óptica cuántica. En particular por las propiedades dependientes de la fase de la FR de átomos de dos o tres niveles, y sus implicaciones en la teoría de la coherencia en general, así como por las propiedades estadísticas de sistemas fuera de equilibrio. Esta tesis consta fundamentalmente del trabajo realizado y reportado en los trabajos citados en el párrafo anterior y particularmente en los últimos cuatro artículos en los que el autor de esta tesis es coautor.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el Cap. 2 se presentan los principales conceptos de la interacción de un átomo de 2 niveles de energía con un láser monocromático en espacio libre. Se definen la frecuencia angular de Rabi y la razón de decaimiento de emisión espontánea cuando el átomo decae a un estado inferior de energía emitiendo un fotón de frecuencia muy cercana a la de la transición. A partir de la ecuación maestra se obtienen las ecuaciones de Bloch ópticas que describen la evolución del sistema a todo tiempo, con soluciones analíticas sólo en el caso de desintonía igual a cero, en resonancia. Sus soluciones en estado estacionario son importantes porque dan información de cómo se comporta el sistema cuando el tiempo tiende a infinito. La intensidad de luz dispersada es proporcional a la po-

blación en estado estacionario del estado de mayor energía. El concepto de estado coherente, definido en términos de las cuadraturas  $X_1$ ,  $X_2$ , permite estudiar un verdadero efecto cuántico de la luz: Los estados comprimidos o luz comprimida. La huella digital de tales estados está dada por la varianza, o ruido, de la cuadratura  $X_1$  o  $X_2$ .

El Cap. 3 es un poco matemático porque inicia con el concepto, en general, de función de correlación en óptica cuántica para pasar a estudiar, por un lado, la técnica de medición de detección homodina condicionada y, por otro lado, se define la función de correlación a dos tiempos, la cual está relacionada con la técnica mencionada. La función de correlación permite el estudio de las fluctuaciones de la FR emitida por una transición en un átomo. La fórmula cuántica de regresión es muy importante en óptica cuántica ya que permite calcular los valores esperados de funciones a dos tiempos. Los cálculos de dichas funciones y los de las condiciones iniciales que se requieren son temas que se desarrollan en el capítulo y se complementan en el Apéndice A.

En los Caps. 4, 5 y 6 se presentan los trabajos desarrollados durante el trabajo de tesis, los cuales se reproducen en el Apéndice C. El Cap. 4 está dedicado al átomo de dos niveles, el sistema más básico, pero no trivial, que permite estudiar los conceptos fundamentales de la óptica cuántica. El Cap. 5 estudia el átomo de tres niveles tipo  $\Lambda$ , el cual presenta el fenómeno de intermitencia de la FR debido a la presencia del estado metaestable de larga vida, comparada con la de la transición fuerte. A diferencia de los dos casos anteriores, el átomo de tres niveles tipo V, en el Cap. 6 se estudia cómo este átomo presenta una función de correlación asimétrica. En los tres modelos de átomos se estudian las condiciones óptimas para medir el espectro de la luz comprimida. En el Cap. 7 se presentan las conclusiones.

## Capítulo 2

# Interacción átomo-láser

En este capítulo se estudia la interacción de un átomo de 2 niveles de energía con un láser monocromático en espacio libre, uno de los sistemas cuánticos más simples pero nada triviales. Con esto, se establecen los conceptos básicos de la óptica cuántica para estudiar otros modelos de átomo que se tratan en esta tesis, a saber, el átomo de tres niveles tipo  $\Lambda$  y el átomo de tres niveles tipo  $V$ . Que se pueda reducir un sistema atómico a un sistema de dos niveles se debe principalmente a la monocromaticidad de los láseres, pudiendo ignorar otras transiciones. En caso que los niveles de energía tengan degeneración es posible obtener un sistema de dos niveles mediante bombeo óptico con láseres de polarizaciones apropiadas.

En esta tesis se considera que el láser es un campo perfectamente coherente en el sentido de la óptica clásica: estable en amplitud y monocromático, ignorando fluctuaciones cuánticas. Esto significa que, junto con la cuantización de la energía atómica se utiliza la llamada teoría semiclásica de la electrodinámica. Se ignoran además las fluctuaciones del láser debidas a diversas fuentes de ruido. Se considera también que el átomo está fijo en el espacio. Esto no es problema si se usa un punto cuántico, pero puede serlo con un ion en una trampa de radio frecuencia o trampa de Paul.<sup>1</sup> Sin embargo, es rutinariamente posible confinar el micro movimiento a un paquete de onda de tamaño mucho menor que la longitud de onda de la transición. Estas aproximaciones son comunes en la literatura.

El interés en óptica cuántica es estudiar las propiedades estadísticas de la luz y la dinámica del sistema que la produce. Las fuentes emiten fotones

---

<sup>1</sup>En honor del físico alemán Wolfgang Paul (1913-1993) quien inventó las trampas de radiofrecuencia. Premio Nobel de Física en 1989.

que se propagan alejándose de la fuente hasta que son absorbidos por las paredes del laboratorio o son detectados. Para analizar las propiedades de la luz se emplean métodos estadísticos cuánticos. Los átomos excitados actúan como una fuente de radiación a través de emisión espontánea y estimulada.<sup>2</sup> Dichas fuentes son sistemas abiertos que se pueden estudiar por medio de los métodos usados para tratar con disipación en mecánica cuántica. Estos métodos permiten separar convenientemente entre el tratamiento de la fuente, como un sistema cuántico amortiguado, y el tratamiento de los campos emitidos. La separación consiste, por un lado, en un sistema  $S$  que representa todo el funcionamiento interno de la fuente, formado por la fuente (el átomo excitado) y los láseres, y por otro lado, un entorno o recipiente  $R$  que causa la emisión espontánea y que porta los campos emitidos (la fluorescencia). En el lenguaje de sistemas disipativos,  $R$  describe el ambiente en el cual la fuente pierde energía. Para fuentes emisoras de fotones la pérdida de energía es energía útil, aparece en  $R$  como campos emitidos que se pueden observar en un experimento, o se puede reorientar para usarla en otra parte, Carmichael [20, p. 5].

En este capítulo se estudia el átomo de 2 niveles (A2N) con el propósito de revisar los conceptos fundamentales de la óptica cuántica, sentar las bases de la nomenclatura y revisar el comportamiento general de una transición atómica entre dos niveles. Lo anterior, a su vez, sienta las bases para posteriormente estudiar átomos de 3 niveles.

La Fig. 2.1 es un esquema para el modelo aproximado de un A2N, el cual se supone que está aislado y fijo en una posición. El átomo está acoplado con un láser de frecuencia angular  $\nu_e$  constante. La frecuencia angular  $\omega_e$  es la de la transición entre el estado base  $|g\rangle$  y el estado excitado  $|e\rangle$ , el sistema  $S$  está acoplado a un entorno ( $R$ ) en el cual la fuente pierde energía emitiendo espontáneamente fotones a razón  $\gamma_e$ , cantidad también llamada coeficiente  $A$  de Einstein.

En la Fig. 2.1,  $\Omega_e$  es la frecuencia angular de Rabi que describe la intensidad del acoplamiento entre al átomo y el láser para la transición entre el estado base  $|g\rangle$  y el estado excitado  $|e\rangle$ . La frecuencia angular de Rabi, en general, está dada por [21, p. 79]

$$\Omega_j = \frac{p_{jg}E_0}{\hbar}, \quad (2.1)$$

donde  $p_{jg}$  es la magnitud del momento dipolar de la transición  $|j\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  y

---

<sup>2</sup>Véase pie de pág. 1

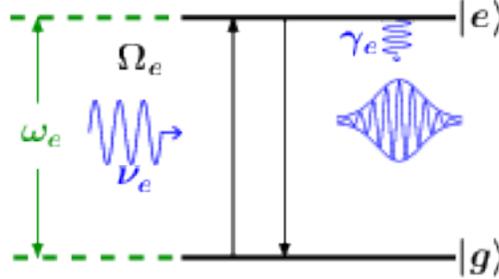


Figura 2.1: Modelo aproximado de un átomo de 2 niveles. Cuando un láser monocromático de frecuencia angular  $\nu_e$  coincide con una de las transiciones ópticas del átomo se tiene una interacción resonante entre esa transición y el campo de luz, donde  $\omega_e$  es la frecuencia angular de la transición entre  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ ,  $\Omega_e$  es la frecuencia angular de Rabi y  $\gamma_e$  la razón de emisión espontánea del estado excitado.

$E_0$  es la amplitud del campo de luz. En este tratamiento se ignora el hecho de que usualmente los niveles tienen a su vez subniveles y que todos pueden contribuir a una transición resonante, lo cual produce complicaciones cuando en los experimentos se usan átomos multinivel para probar teorías basadas en la aproximación de un sistema de dos niveles.

## 2.1. Ecuación maestra

Para estudiar el átomo de 2 niveles se emplean los operadores de pseudoespín de Pauli:<sup>3</sup>  $\sigma_+ \equiv \sigma_{eg}$ ,  $\sigma_- \equiv \sigma_{ge}$  y  $\sigma_z$ , donde los operadores de transición están dados por

$$\sigma_{eg} = |e\rangle \langle g| \quad , \quad \sigma_{ge} = |g\rangle \langle e|, \quad (2.2)$$

y corresponden a las transiciones  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ ,  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , respectivamente. A  $\sigma_{eg}$  se le llama “operador atómico de ascenso” y a  $\sigma_{ge}$  “operador atómico de descenso”. El operador  $\sigma_z$  se define como

$$\sigma_z = [\sigma_{eg}, \sigma_{ge}] = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \sigma_{ee} - \sigma_{gg}, \quad (2.3)$$

<sup>3</sup>Las matrices de espín de Pauli en el contexto de transiciones magnéticas en sistemas de espín  $\frac{1}{2}$  son  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , donde se definen  $\sigma_{eg} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$  y  $\sigma_{ge} = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$ . De acuerdo a lo anterior, cuando  $\sigma_{eg}$ ,  $\sigma_{ge}$  y  $\sigma_z$  se aplican a un átomo de 2 niveles se les llama operadores de pseudoespín de Pauli, mismos que ya no están relacionados con los estados de un espín real [22, pp. 30-31].

## CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER

### 2.1. ECUACIÓN MAESTRA

---

donde se empleó la ortogonalidad de los estados  $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ , con  $m, n = e, g$  y con  $\delta_{mn}$  la delta de Kronecker.

La energía del sistema consiste en dos partes: la energía libre del átomo,  $H_A = \hbar\omega_e\sigma_{eg}\sigma_{ge} = \hbar\omega_e\sigma_{ee}$  y la energía de interacción entre el átomo y el láser en la aproximación dipolar,  $H_I = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , donde  $\mathbf{p} = e\mathbf{d}(\sigma_+ + \sigma_-)$  es el operador de momento dipolar,  $q_e$  es la carga del electrón; y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)(e^{i\nu_e t} + e^{-i\nu_e t})/2$  es el operador de campo eléctrico del láser en la posición del dipolo  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$ . En el régimen óptico es posible aplicar la Aproximación de Onda Rotante, que consiste en ignorar los términos con frecuencias  $\omega_e + \nu_e$ , por lo que se puede escribir el operador de energía como el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}' = \hbar\omega_e\sigma_{ee} + \frac{\hbar\Omega_e}{2} (\sigma_{eg}e^{-i\nu_e t} + \sigma_{ge}e^{i\nu_e t}). \quad (2.4)$$

Aquí se considera que los operadores  $\sigma_{eg}$  y  $\sigma_{ge}$  tienen la dependencia temporal implícita, esto es,  $\sigma_{eg} \equiv \sigma_{eg}(t) = \sigma_{eg}(0)e^{i\omega_e t}$  y  $\sigma_{ge} \equiv \sigma_{ge}(t) = \sigma_{ge}(0)e^{-i\omega_e t}$ . Ahora conviene expresar el Hamiltoniano en un marco rotante lento, que permita reducir la dinámica a las frecuencias lentas dadas por  $\gamma_e$  y  $\Omega_e$ , que son del orden de  $\sim 10^6$  Hz. Lo anterior se logra haciendo  $\mathcal{H} = U^\dagger \mathcal{H}' U$ , donde  $U = e^{-i\nu_e \sigma_{ee} t}$  es el operador de transformación, esto es

$$\mathcal{H} = \hbar\Delta_e\sigma_{ee} + \frac{\hbar\Omega_e}{2} (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}), \quad (2.5)$$

donde  $\Delta_e \equiv \omega_e - \nu_e$  es la desintonía átomo-campo, que toma valores desde cero hasta valores del orden de  $10^6$  Hz.

El átomo se describe mediante la función de onda

$$|\psi\rangle = C_e |e\rangle + C_g |g\rangle, \quad (2.6)$$

donde  $|e\rangle, |g\rangle$  son las funciones propias de cada estado con los varios números cuánticos (nivel principal, orbital, magnético y espín). La función de onda  $\psi$  obedece la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

Otra forma de estudiar un sistema cuántico, además de la ecuación de Schrödinger, es empleando el operador de densidad  $\rho$  definido como  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , donde la barra sobre el proyector  $|\psi\rangle\langle\psi|$  denota promedio estadístico. Los elementos de matriz de  $\rho$  se definen como

$$\rho_{jk} \equiv \langle j|\rho|k\rangle. \quad (2.8)$$

## CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER

### 2.1. ECUACIÓN MAESTRA

---

Dado que  $\rho$  es una matriz hermitiana o auto adjunta,<sup>4</sup> los elementos de matriz de la diagonal son tales que  $\rho_{jj} \equiv (\rho_{jj})^*$ , con  $\sum_j \rho_{jj} = 1$ , mientras que para los elementos de matriz fuera de la diagonal ( $j \neq k$ ) se tiene que  $\rho_{kj} = \rho_{jk}^*$ .

Sustituyendo la función de onda  $|\psi\rangle$ , Ec. (2.6), en  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  y empleando la Ec. (2.8) se tiene que

$$\rho_{ee} = |C_e|^2, \quad \rho_{gg} = |C_g|^2, \quad \rho_{eg} = C_e C_g^*, \quad \rho_{ge} = \rho_{eg}^*. \quad (2.9)$$

Se sabe que un átomo en estado excitado decaerá, en ausencia de colisiones u otros procesos, a un estado inferior, fenómeno llamado emisión espontánea que, si no se ignora, se suele introducir en forma fenomenológica. Su origen radica en que el átomo se acopla dipolarmente con todos los osciladores de frecuencias  $\omega_R$  del entorno o reservorio (modos del campo EM), donde el factor de acoplamiento  $g_S$  es tal que  $g_S \propto \sqrt{\omega_R/V}$ , con  $V$  el volumen del entorno. Dada la dependencia inversa del volumen, en espacio libre (cavidad infinita) el acoplamiento es muy débil. Este entorno es muy grande y resolver entonces la ecuación de Schrödinger se vuelve imposible. Sin embargo, no interesa seguir la dinámica de los grados de libertad del entorno. Es posible “eliminar” este entorno con el procedimiento de Weisskopf y Wigner que consta de dos aproximaciones: el acoplamiento  $g_S$  es débil y el entorno *no* tiene memoria. El resultado es la emisión espontánea, en la que el átomo decae a razón  $\gamma_e$  a un estado inferior emitiendo un fotón de frecuencia muy cercana a la de la transición. La razón  $\gamma_e$  está dada, en general [21, p. 344], por

$$\gamma_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4p_{jg}^2 \omega_j^3}{3\hbar c^3} = \frac{p_{jg}^2 \omega_j^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}, \quad (2.10)$$

donde,  $\gamma_j$  se denomina razón de decaimiento de emisión espontánea,  $p_{jg} = |\mathbf{p}_{jg}| = q_e d_{jg}$  es la magnitud del momento dipolar de la transición<sup>5</sup>  $|j\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  y  $d_{jg}$  es la magnitud del vector de posición del electrón. El tiempo de vida del estado excitado es  $1/\gamma_j$ .

A temperatura finita el entorno es radiación de cuerpo negro, que además puede provocar absorción y emisión estimulada. En la región óptica del campo EM, que es el interés en esta tesis, el número de fotones térmicos del

---

<sup>4</sup>Si  $A$  es una matriz, la matriz adjunta de  $A$  se denota por  $A^\dagger$  y se define como  $A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T$ , donde  $A^T$  ( $A^*$ ) es la matriz transpuesta (conjugada) de  $A$ . Si además  $A^\dagger = A$ , se dice que la matriz  $A$  es hermitiana o auto adjunta.

<sup>5</sup>Véase Ec. (2.25)

entorno es despreciable y entonces no causa absorción y emisión estimuladas. El término disipativo de la ecuación de Schrödinger para el operador de densidad es entonces, en general [21, p. 370],

$$\mathcal{L}\rho = \frac{\gamma_j}{2} (2\sigma_{gj}\rho\sigma_{jg} - \sigma_{jg}\sigma_{gj}\rho - \rho\sigma_{jg}\sigma_{gj}), \quad (2.11)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el súper operador Liouvilliano actuando sobre el operador de densidad  $\rho$ ,<sup>6</sup> y describe la evolución no hermitiana debido a la interacción del átomo con su entorno y es el responsable de la disipación irreversible.

La dinámica del átomo se describe por medio de la llamada ecuación maestra para el operador de densidad  $\rho$  del átomo, dada por [21, p. 369]

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \rho] + \mathcal{L}\rho. \quad (2.12)$$

Incorporando en la Ec. (2.12) la expresión para el hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , Ec. (2.5), y la expresión para  $\mathcal{L}\rho$ , Ec. (2.11) con  $\sigma_{eg}\sigma_{ge} = \sigma_{ee}$ , se obtiene la ecuación maestra para el átomo de 2 niveles, esto es

$$\dot{\rho} = -i\frac{\Omega_e}{2} [\sigma_{eg} + \sigma_{ge}, \rho] - i\Delta_e [\sigma_{ee}, \rho] + \frac{\gamma_e}{2} (2\sigma_{ge}\rho\sigma_{eg} - \sigma_{ee}\rho - \rho\sigma_{ee}). \quad (2.13)$$

Las ecuaciones diferenciales para los elementos de matriz  $\rho_{jk}$ , Ec. (2.8), para el átomo de 2 niveles se obtienen de calcular cada una de sus derivadas  $\dot{\rho}_{jk} = \langle j|\dot{\rho}|k\rangle$  con  $\dot{\rho}$  dado por la Ec. (2.13), es decir, en ésta última ecuación se multiplica, simultáneamente, por la izquierda por  $\langle j|$  y por la derecha por  $|g\rangle$ . Haciendo las operaciones correspondientes se obtiene

$$\dot{\rho}_{ee} = i\frac{\Omega_e}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) - \gamma_e\rho_{ee}, \quad (2.14)$$

$$\dot{\rho}_{eg} = i\frac{\Omega_e}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) - \left(\frac{\gamma_e}{2} + i\Delta_e\right) \rho_{eg}, \quad (2.15)$$

$$\dot{\rho}_{ge} = -i\frac{\Omega_e}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) - \left(\frac{\gamma_e}{2} - i\Delta_e\right) \rho_{ge}, \quad (2.16)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = -i\frac{\Omega_e}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) + \gamma_e\rho_{ee}. \quad (2.17)$$

Del hecho que  $Tr[\rho] = 1$  se tienen las siguientes relaciones

$$\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1 \Rightarrow \rho_{ee} - \rho_{gg} = 2\rho_{ee} - 1 \Rightarrow \dot{\rho}_{gg} = -\dot{\rho}_{ee}, \quad (2.18)$$

---

<sup>6</sup>Para preservar la traza del operador de densidad,  $Tr[\rho] = 1$ , el término  $\mathcal{L}\rho$  debe referirse como de la forma de Lindblad [21, p. 369].

ecuaciones de las cuales, por un lado, al sustituir  $\rho_{ee} - \rho_{gg} = 2\rho_{ee} - 1$  en las Ecs. (2.15, 2.16), éstas toman otra forma. Por otro lado, considerando que  $\dot{\rho}_{gg} = -\dot{\rho}_{ee}$  se puede eliminar la Ec. (2.17).

## 2.2. Ecuaciones de Bloch ópticas

Las Ecuaciones de Bloch Ópticas (EBO)<sup>7</sup> para el átomo de 2 niveles permiten conocer y predecir el comportamiento del sistema a todo tiempo. Estas ecuaciones describen la interacción del átomo con un láser monocromático en espacio libre y se obtienen a partir de las ecuaciones de los elementos de matriz de  $\rho$ , Ecs. (2.14-2.17), a través de la definición del valor esperado de un operador arbitrario  $\mathcal{O}$ , esto es

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Tr[\mathcal{O}\rho] \quad \Rightarrow \quad \langle \dot{\mathcal{O}} \rangle = Tr[\mathcal{O}\dot{\rho}]. \quad (2.19)$$

Sustituyendo  $\mathcal{O} = \sigma_{jk}$  en la Ec. (2.19) se obtiene

$$\langle \sigma_{jk} \rangle = Tr[\sigma_{jk}\rho] = \rho_{kj} \quad \Rightarrow \quad \langle \dot{\sigma}_{jk} \rangle = Tr[\sigma_{jk}\dot{\rho}] = \dot{\rho}_{kj}. \quad (2.20)$$

Por ejemplo

$$\langle \sigma_{ee} \rangle = \rho_{ee}, \quad \langle \sigma_{gg} \rangle = \rho_{gg}, \quad \langle \sigma_{eg} \rangle = \rho_{ge}, \quad \langle \sigma_{ge} \rangle = \langle \sigma_{eg} \rangle^*, \quad (2.21)$$

donde  $\langle \sigma_{ee} \rangle$  ( $\langle \sigma_{gg} \rangle$ ) es la población o probabilidad de ocupación del estado excitado (estado base) y es positiva. El valor esperado de  $\sigma_z$  está dado por

$$\langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_{ee} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle = \rho_{ee} - \rho_{gg}, \quad (2.22)$$

que recibe el nombre de “inversión de población” o simplemente de “inversión”. En forma consistente con las Ecs. (2.18) se tiene para la suma de las poblaciones que

$$\langle \sigma_{ee} \rangle + \langle \sigma_{gg} \rangle = 1. \quad (2.23)$$

La polarización atómica promedio está expresada en términos de  $\langle \sigma_{eg} \rangle$  y de  $\langle \sigma_{ge} \rangle$  de la siguiente forma

$$\langle q_e \mathbf{d} \rangle = \mathbf{d}_{eg} \langle \sigma_{eg} \rangle + \mathbf{d}_{ge} \langle \sigma_{ge} \rangle, \quad (2.24)$$

---

<sup>7</sup>En analogía con las ecuaciones de Bloch de una partícula de espín 1/2 en un campo magnético, Carmichael [22, p. 51].

donde  $\mathbf{p} = q_e \mathbf{d}$  es el operador de momento dipolar,  $q_e$  es la carga del electrón,  $\mathbf{d}$  es el operador de la coordenada del electrón ligado y

$$\mathbf{d}_{eg} = q_e \langle e | \mathbf{d} | g \rangle = q_e \mathbf{d}_{eg} = \mathbf{p}_{eg} \quad , \quad \mathbf{d}_{ge} = (\mathbf{d}_{eg})^* \quad , \quad (2.25)$$

son los elementos de matriz del dipolo atómico [22, pp. 30-31].

Sustituyendo las Ecs. (2.18) en la Ec. (2.22) se obtiene

$$\langle \sigma_z \rangle = 2\rho_{ee} - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_{ee} = \frac{1}{2} (1 + \langle \sigma_z \rangle) \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}_{ee} = \frac{1}{2} \langle \dot{\sigma}_z \rangle \quad , \\ \rho_{gg} = \frac{1}{2} (1 - \langle \sigma_z \rangle) \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}_{gg} = -\frac{1}{2} \langle \dot{\sigma}_z \rangle \quad . \end{cases} \quad (2.26)$$

Ahora, sustituyendo las Ecs. (2.20, 2.26) en las Ecs. (2.14-2.17) se obtienen finalmente las EBO para el átomo de 2 niveles, esto es

$$\langle \dot{\sigma}_z \rangle = -i\Omega_e (\langle \sigma_{eg} \rangle - \langle \sigma_{ge} \rangle) - \gamma_e (1 + \langle \sigma_z \rangle) \quad , \quad (2.27)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{eg} \rangle = -i\frac{\Omega_e}{2} \langle \sigma_z \rangle - \left( \frac{\gamma_e}{2} - i\Delta_e \right) \langle \sigma_{eg} \rangle \quad , \quad (2.28)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{ge} \rangle = i\frac{\Omega_e}{2} \langle \sigma_z \rangle - \left( \frac{\gamma_e}{2} + i\Delta_e \right) \langle \sigma_{ge} \rangle \quad . \quad (2.29)$$

Como se observa, éstas ecuaciones son más simples que las Ecs. (2.14-2.17). Las “poblaciones” o probabilidades de ocupación de niveles son  $\langle \sigma_{ee} \rangle$  y  $\langle \sigma_{gg} \rangle$ . Si el átomo se irradia con luz incoherente se tiene que  $\langle \sigma_{eg} \rangle = \langle \sigma_{ge} \rangle = 0$ , mientras que, por otro lado, si el átomo se irradia con luz *coherente*,  $\langle \sigma_{eg} \rangle \neq 0$  y  $\langle \sigma_{ge} \rangle \neq 0$ , y se les llama *coherencias*, las cuales están relacionadas con la polarización atómica promedio, Ec. (2.24).

### 2.2.1. Soluciones en estado estacionario

Previo a resolver las Ecs. (2.27-2.29) conviene obtener las EBO en Estado Estacionario (EBO-EE), es decir, el estado al que llega el átomo para un tiempo suficientemente grande y para el cual sus valores ya no cambian en el tiempo, esto es

$$\langle \dot{\sigma}_m \rangle_{st} = 0, \quad \text{entonces} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_m(t) \rangle \equiv \langle \sigma_m(0) \rangle \equiv \langle \sigma_m \rangle_{st} \equiv \alpha_m, \quad (2.30)$$

donde  $m = z, eg, ge$ . Aplicando las Ecs. (2.30) en cada una de las Ecs. (2.27-2.29) se obtiene

$$-i\Omega_e (\alpha_{eg} - \alpha_{ge}) - \gamma_e (1 + \alpha_z) = 0, \quad (2.31)$$

$$-i\frac{\Omega_e}{2}\alpha_z - \left(\frac{\gamma_e}{2} - i\Delta_e\right)\alpha_{eg} = 0, \quad (2.32)$$

$$i\frac{\Omega_e}{2}\alpha_z - \left(\frac{\gamma_e}{2} + i\Delta_e\right)\alpha_{ge} = 0, \quad (2.33)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\alpha_z = -\frac{\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2}{\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2}, \quad (2.34)$$

$$\alpha_{eg} = -\frac{\Omega_e (2\Delta_e - i\gamma_e)}{\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2}, \quad \alpha_{ge} = -\frac{\Omega_e (2\Delta_e + i\gamma_e)}{\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2}, \quad (2.35)$$

donde se observa principalmente que  $\alpha_z < 0$ .

### 2.2.2. Soluciones dependientes del tiempo

Las soluciones de las ecuaciones de Bloch se obtienen en forma numérica para  $\Delta_e \neq 0$ . Soluciones analíticas son posibles solamente si las frecuencias angulares de la transición y del láser son iguales, esto es, en resonancia,  $\Delta_e \equiv \omega_e - \nu_e = 0$ , y son bien conocidas en la literatura de la óptica cuántica. Dichas soluciones analíticas se obtienen, por ejemplo, aplicando el método de la transformada de Laplace a las Ecs. (2.27-2.29):

$$\langle \sigma_z(t) \rangle = -\frac{1}{1+Y^2} \left\{ 1 + Y^2 e^{-\frac{3\gamma_e}{4}t} \left[ \cosh \delta t + \frac{3\gamma_e/4}{\delta} \sinh \delta t \right] \right\}, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{eg}(t) \rangle &= i\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{Y}{1+Y^2} \right) \left\{ 1 - e^{-\frac{3\gamma_e}{4}t} \left[ \cosh \delta t + \frac{3\gamma_e/4}{\delta} \sinh \delta t \right] \right\} \\ &\quad + i\sqrt{2}Y e^{-\frac{3\gamma_e}{4}t} \left( \frac{\gamma_e/4}{\delta} \right) \sinh \delta t, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ge}(t) \rangle &= -i\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{Y}{1+Y^2} \right) \left\{ 1 - e^{-\frac{3\gamma_e}{4}t} \left[ \cosh \delta t + \frac{3\gamma_e/4}{\delta} \sinh \delta t \right] \right\} \\ &\quad - i\sqrt{2}Y e^{-\frac{3\gamma_e}{4}t} \left( \frac{\gamma_e/4}{\delta} \right) \sinh \delta t, \end{aligned} \quad (2.38)$$

## CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER

### 2.2. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

donde

$$Y = \sqrt{2} \frac{\Omega_e}{\gamma_e} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\gamma_e}{4} \sqrt{1 - 8Y^2}. \quad (2.39)$$

Para el presente caso en que  $\Delta_e = 0$  y siguiendo las definiciones de la Ec. (2.30), las soluciones en estado estacionario se obtienen tomando el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  en las Ecs. (2.36-2.38), esto es

$$\alpha_z \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_z(t) \rangle = -\frac{1}{1 + Y^2}, \quad (2.40)$$

$$\alpha_{eg} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_{eg}(t) \rangle = i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{Y}{1 + Y^2} \right), \quad (2.41)$$

$$\alpha_{ge} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_{ge}(t) \rangle = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{Y}{1 + Y^2} \right). \quad (2.42)$$

En relación a las Ecs. (2.37, 2.38, 2.41, 2.42) se observa que  $\langle \sigma_{ge} \rangle = \langle \sigma_{eg} \rangle^*$ ,  $\alpha_{ge} = \alpha_{eg}^*$  y que en resonancia

$$\text{Re}[\alpha_{eg}] = \text{Re}[\alpha_{ge}] = 0. \quad (2.43)$$

Tres casos son de interés en el estudio de la FR del átomo de 2 niveles. Un caso es considerar una excitación débil, para el que  $Y^2 \ll 1$  o  $\Omega_e^2 \ll \gamma_e^2$ . El segundo corresponde a una excitación con  $\Omega_e = \gamma_e/4$ , llamada excitación crítica, para la cual  $\delta = \frac{1}{4} \sqrt{\gamma_e^2 - 16\Omega_e^2} = 0$ , Ec. (2.39). Si  $\Omega_e < \gamma_e/4 \Rightarrow \delta > 0$ , las soluciones muestran un comportamiento monótono creciente hacia su valor en estado estacionario. Si  $\Omega_e > \gamma_e/4$  cambia el comportamiento matemático de las soluciones ya que  $\gamma_e^2 - 16\Omega_e^2 < 0$ , entonces los términos con funciones hiperbólicas se convierten en funciones trigonométricas y es la razón de que se presenten oscilaciones en las soluciones. Cuando  $\Delta_e \neq 0$  también se presentan oscilaciones sin que se satisfaga que  $\Omega_e > \gamma_e/4$ . El tercer caso de interés es considerar una excitación fuerte con  $\Omega_e \gg \gamma_e$ .

En esta sección se estudian los tres casos mencionados, así como dos casos de excitaciones intermedias entre la excitación crítica y la excitación fuerte. Estos cinco casos, con  $\gamma_e = 1$ , se estudian en resonancia,  $\Delta_e = 0$ , con una desintonía pequeña,  $\Delta_e = 0.1\gamma_e$ , y con una desintonía diez veces mayor,  $\Delta_e = \gamma_e$ .

En la Fig. 2.2 se muestran dos aspectos de la solución analítica de  $\langle \sigma_z(t) \rangle$  para el caso de resonancia, con estado inicial  $\langle \sigma_z(0) \rangle = -1$ , Ec. (2.36), para diferentes valores de  $\Omega_e/\gamma_e$ : (i) excitación débil  $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii) excitación crítica  $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii), (iv) dos valores de excitación intermedios  $\Omega_e = \gamma_e$ ,

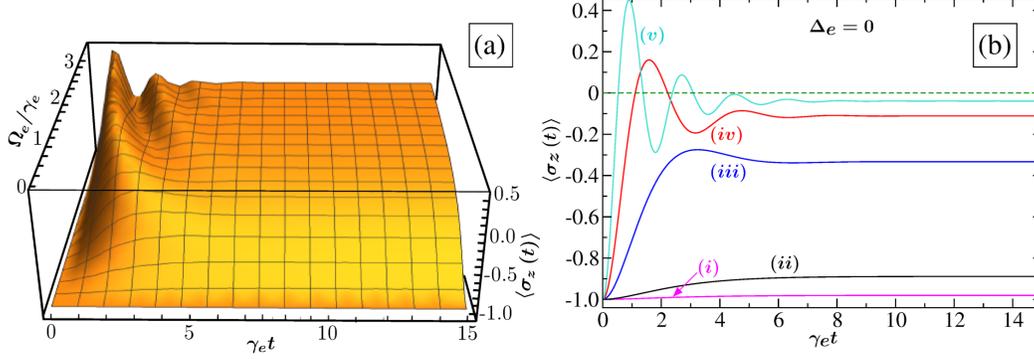


Figura 2.2: Solución analítica de  $\langle \sigma_z(t) \rangle$ , Ec. (2.36). (a)  $\gamma_e t = [0, 15]$ ,  $\Omega_e/\gamma_e = [0, 3.3]$  y  $\Delta_e = 0$ . (b) (i)  $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii)  $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii)  $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv)  $\Omega_e = 2\gamma_e$  y (v)  $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .

$\Omega_e = 2\gamma_e$  y (v) excitación fuerte  $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ . En (a), a partir de  $\gamma_e t \sim 6$  y  $\Omega_e \gtrsim 0.5\gamma_e$  empieza a aparecer, a insinuarse, el primer máximo. En (i), (ii) de (b) se aprecia mejor un crecimiento monótono de  $\langle \sigma_z \rangle$  debido a que dominan las funciones hiperbólicas en las soluciones, mientras que en (iii) – (v), para valores mayores a la excitación crítica,  $\Omega_e = \gamma_e/4$ , se presentan oscilaciones. El primer máximo indica una mayor probabilidad de que el átomo ocupe el estado  $|e\rangle$ . A mayor intensidad del campo, más pronto ocurrirá el máximo.

En la Fig. 2.3 se muestra la parte imaginaria de la coherencia  $\langle \sigma_{eg}(t) \rangle$ . Los valores de  $\Omega_e$  son los mismos que los de la Fig. 2.2. En la Ec. (2.43) se mostró que en resonancia ocurre que  $\text{Re} \langle \sigma_{eg}(t) \rangle = 0$ . En la figura se aprecia en (i), (ii) un crecimiento monótono como el de  $\langle \sigma_z \rangle$  en (i), (ii) de Fig. 2.2(b). Mientras que en (iii) – (v) se presentan oscilaciones. Recuérdese que  $\langle \sigma_{ge}(t) \rangle = \langle \sigma_{eg}(t) \rangle^*$ .

Como se vio en la sección anterior, cuando  $\Delta_e \neq 0$  las ecuaciones de Bloch se resuelven en forma numérica. En esta tesis se empleó Mathematica para tal fin. Las Figs. 2.4 (a) y (b) muestran el comportamiento general de  $\langle \sigma_z(t) \rangle$  con las condiciones iniciales  $\langle \sigma_{eg}(0) \rangle = \langle \sigma_{ge}(0) \rangle = 0$  y  $\langle \sigma_z(0) \rangle = -1$ , átomo en estado base. Los valores de  $\Omega_e$  son los mismos que los de la Fig. 2.2. La Fig. 2.4(a) corresponde a  $\langle \sigma_z(t) \rangle$  con un valor de desintonía pequeño,  $\Delta_e = 0.1\gamma_e$ , y la Fig. 2.4(b) con un valor de desintonía  $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambas gráficas se observa que razonablemente para  $\gamma_e t \simeq 10$  se alcanza el estado estacionario, para el cual  $\langle \sigma_z \rangle_{st} < 0$ , consistente con las Ecs. (2.34, 2.40).

CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER  
2.2. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

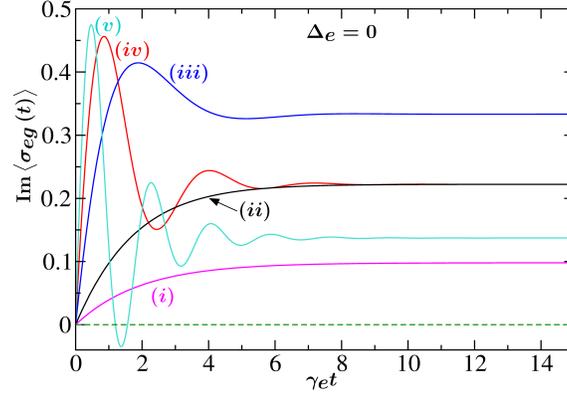


Figura 2.3: Solución analítica de  $\text{Im} \langle \sigma_{eg}(t) \rangle$ , Ec. (2.37), con  $\Delta_e = 0$ . (i)  $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii)  $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii)  $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv)  $\Omega_e = 2\gamma_e$  y (v)  $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ . La línea punteada horizontal verde muestra el cero. En resonancia  $\text{Re} \langle \sigma_{eg}(t) \rangle = 0$ , Ec. (2.37).

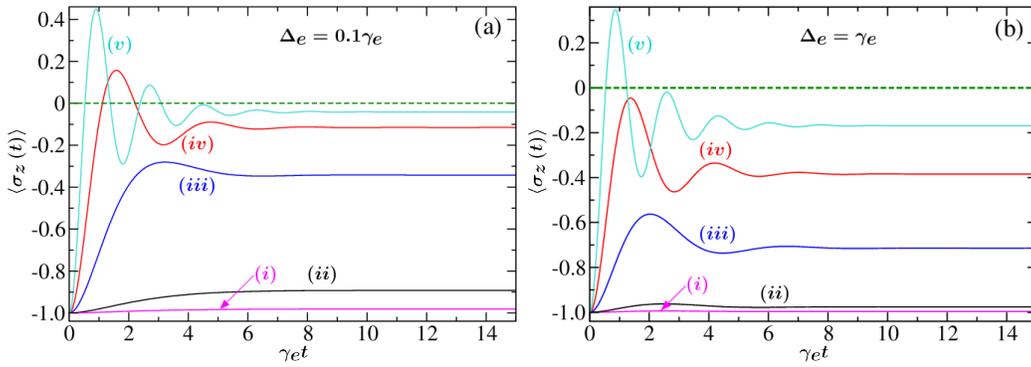


Figura 2.4: Comportamiento general de  $\langle \sigma_z(t) \rangle$ . Su máximo valor en estado estacionario se indica con la línea punteada horizontal verde. (a)  $\Delta_e = 0.1\gamma_e$  y (b)  $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambos casos, (i)  $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii)  $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii)  $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv)  $\Omega_e = 2\gamma_e$  y (v)  $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .

## CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER

### 2.2. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

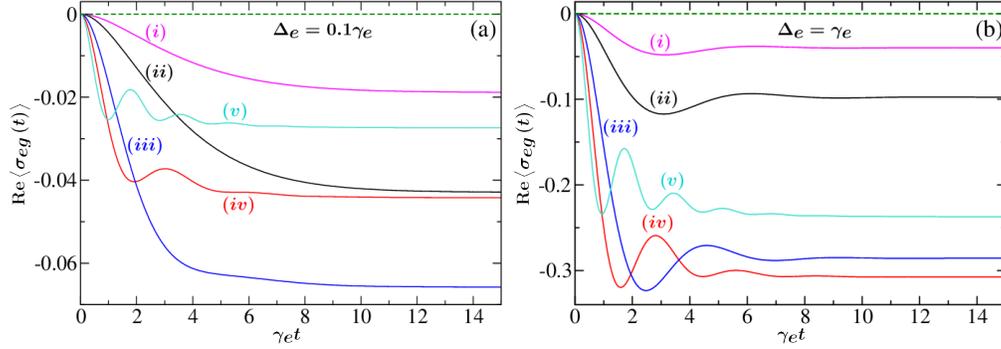


Figura 2.5: Comportamiento general de  $\text{Re}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  para  $\Delta_e \neq 0$ , Ecs. (2.37). La línea punteada horizontal verde muestra el cero. (a)  $\Delta_e = 0.1\gamma_e$  y (b)  $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambos casos, (i)  $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii)  $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii)  $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv)  $\Omega_e = 2\gamma_e$  y (v)  $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .

Se observan más oscilaciones de  $\langle\sigma_z(t)\rangle$  con una desintonía de  $\Delta_e = \gamma_e$  que con  $\Delta_e = 0.1\gamma_e$ . Mientras la desintonía aumenta, los valores máximos de los picos disminuyen, por ejemplo, el máximo para (iv) pasa de positivo a negativo en  $\gamma_e t \sim 1.4$  y para (v) el máximo se hace negativo en  $\gamma_e t \sim 0.85$  cuando  $\Delta_e \gtrsim 2.5\gamma_e$ . La Fig. 2.2(b) y la Fig. 2.4(a) se parecen mucho ya que la desintonía sólo pasó de 0 a 0.1, respectivamente. Por otro lado, la Fig. 2.4(b) muestra siempre oscilaciones, aunque en (i) y (ii) apenas se notan.

La Fig. 2.5 muestra dos gráficas de la parte real de la coherencia  $\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  cuando  $\Delta_e \neq 0$  y siempre toma valores negativos. Como antes, los valores de  $\Omega_e$  son los mismos que en la Fig. 2.2. En la Ec. (2.37) se ve que para  $\Delta_e = 0$  se tiene que  $\text{Re}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle = 0$ . Los diferentes valores que se alcanzan en estado estacionario se obtienen de la Ec. (2.35), donde  $\text{Re}[\alpha_{eg}] < 0$ . Como se observa en la figura, conforme aumenta la desintonía los valores de  $\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  son mayores y se presentan más oscilaciones en (b) que en (a).

La Fig. 2.6 muestra la parte imaginaria de la coherencia  $\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  cuando  $\Delta_e \neq 0$ . Los valores de  $\Omega_e$  son los mismos que en la Fig. 2.2. Como en (a) la desintonía es pequeña,  $\text{Im}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  muestra un comportamiento muy similar al caso en resonancia, Fig. 2.3, con amplitudes ligeramente disminuidas. En (b), la forma general de  $\text{Im}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  es casi la misma que en (a), con amplitudes disminuidas y siempre presenta oscilaciones.

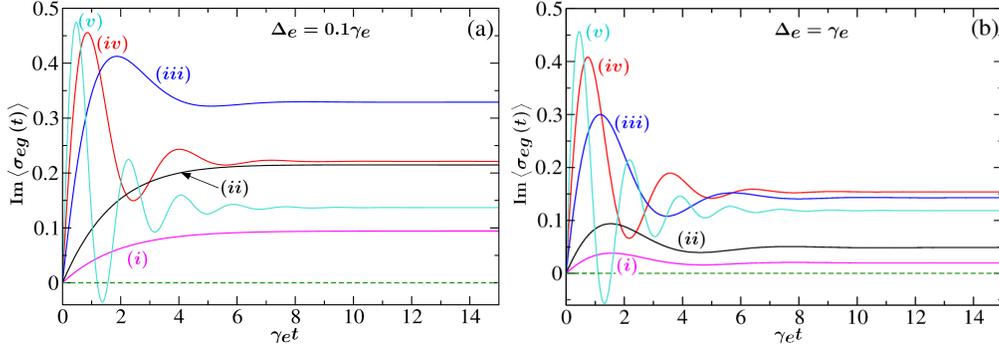


Figura 2.6: Comportamiento general de  $\text{Im}\langle\sigma_{eg}(t)\rangle$  para  $\Delta_e \neq 0$ , Ec. (2.28). La línea punteada horizontal verde muestra el cero. (a)  $\Delta_e = 0.1\gamma_e$  y (b)  $\Delta_e = \gamma_e$ . En ambos casos, (i)  $\Omega_e = 0.1\gamma_e$ , (ii)  $\Omega_e = 0.25\gamma_e$ , (iii)  $\Omega_e = \gamma_e$ , (iv)  $\Omega_e = 2\gamma_e$  y (v)  $\Omega_e = 3.5\gamma_e$ .

### 2.3. Intensidad de la luz dispersada

La intensidad de luz dispersada  $I$  es proporcional a la población en estado estacionario del estado excitado  $|j\rangle$ , es decir, proporcional a  $\alpha_{jj}$  y está dada por

$$I = f(\mathbf{r}) \langle\sigma_{jg}\sigma_{gj}\rangle_{st} = f(\mathbf{r}) \langle\sigma_{jj}\rangle_{st} \equiv f(\mathbf{r}) \alpha_{jj}, \quad (2.44)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición del átomo y  $f(\mathbf{r})$  es un parámetro geométrico, Carmichael [22, p. 48], parámetro que aquí se hace igual a uno. El proceso de emisión es un proceso estadístico-cuántico, por lo que está sujeto a fluctuaciones cuánticas. Entonces, es importante ver cuál es el papel de dichas fluctuaciones. La intensidad se calcula escribiendo los operadores como la suma de su media,  $\langle\sigma_{jk}\rangle_{st}$ , más fluctuaciones,  $\Delta\sigma_{jk}$ , esto es,  $\sigma_{jk} = \alpha_{jk} + \Delta\sigma_{jk}$ . Sustituyendo este desarrollo en la Ec. (2.44) se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \langle(\alpha_{jg} + \Delta\sigma_{jg})(\alpha_{gj} + \Delta\sigma_{gj})\rangle \\ &= |\alpha_{jg}|^2 + \langle\Delta\sigma_{jg}\Delta\sigma_{gj}\rangle \\ &= I_{coh} + I_{inc}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde se empleó que  $\alpha_{jg}\alpha_{gj} = |\alpha_{jg}|^2$  y el hecho de que las fluctuaciones promedian a cero,  $\langle\Delta\sigma_{jk}\rangle = 0$ . En la Ec. (2.45) se identifican

$$I_{coh} = |\alpha_{jg}|^2 \quad \text{e} \quad I_{inc} = \alpha_{jj} - I_{coh} = \langle\Delta\sigma_{jg}\Delta\sigma_{gj}\rangle = \alpha_{jj} - |\alpha_{jg}|^2, \quad (2.46)$$

## CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER

### 2.3. INTENSIDAD DE LA LUZ DISPERSADA

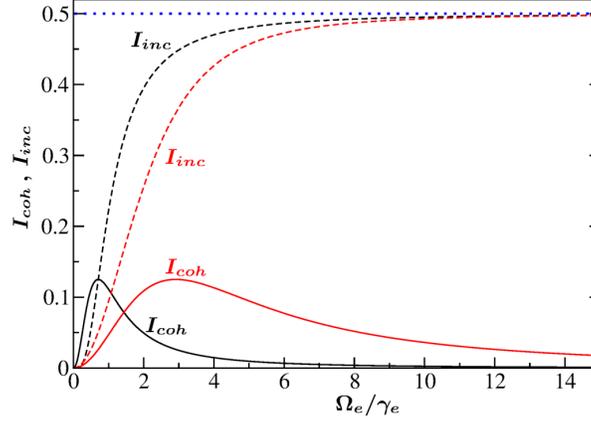


Figura 2.7: Contribuciones coherente e incoherente a la intensidad de la luz dispersada para el A2N. Curvas en negro para  $\Delta_e = 0$ , las cuales se cruzan en  $\Omega_e = \gamma_e/\sqrt{2}$ , excitación en saturación. Curvas en rojo para  $\Delta_e = 2\gamma_e$ . La línea punteada azul indica el límite asintótico de probabilidad 1/2 al que tiende  $I_{inc}$ .

donde la intensidad coherente,  $I_{coh}$ , se debe al movimiento promedio del dipolo excitado por el láser y la intensidad incoherente,  $I_{inc}$ , se debe a las fluctuaciones del dipolo inducidas por el láser.

Para el A2N se hace  $j = e$  en las Ecs. (2.46), y de las expresiones para  $\alpha_z$ ,  $\alpha_{eg}$ ,  $\alpha_{ge}$ , Ecs. (2.34, 2.35), con

$$\alpha_{ee} = \frac{1 + \alpha_z}{2} = \frac{\Omega_e^2}{\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2} \quad (2.47)$$

se tiene que

$$I_{coh} = \frac{\Omega_e^2 (\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2)}{(\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2)^2}, \quad (2.48)$$

$$I_{inc} = \frac{2\Omega_e^4}{(\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2)^2}. \quad (2.49)$$

La Fig. 2.7 muestra las gráficas de  $I_{coh}$  e  $I_{inc}$  para dos casos de desintonía. Para  $\Delta_e = 0$ , por un lado, cuando la excitación es muy débil,  $\Omega_e \ll \gamma_e$ , empieza dominando  $I_{coh}$  y se cruza con  $I_{inc}$  para una excitación de  $\Omega_e = \gamma_e/\sqrt{2}$  ( $Y = 1$ ), llamada excitación en saturación, mientras que para  $\Omega_e \gg \gamma_e$ ,  $I_{coh}$  se va a cero y domina  $I_{inc}$ , aumentando en forma asintótica hacia 1/2. Esto último resulta contra intuitivo, ya que para excitación fuerte

se esperaría que dominara  $I_{coh} \propto |\alpha_{eg}|^2$  en este régimen. Es sorprendente porque mientras se aumenta  $\Omega_e$  para poblar cada vez más el estado  $|e\rangle$ , y como consecuencia obtener una mayor  $I_{coh}$  dispersada, resulta que ocurre lo contrario,  $I_{coh}$  tiende a cero. En contraste, la  $I_{inc}$  que proviene de la emisión espontánea de  $|e\rangle$  tiene una probabilidad de ocupación de aproximadamente 1/2 para excitación fuerte. En el límite de excitación muy débil, con sólo decaimiento radiativo, el A2N permanece esencialmente en  $|g\rangle$ , casi sin que ocurra emisión espontánea. En la Fig. 2.7, para  $\Delta_e = 2\gamma_e$  se tiene que para cualquier valor de excitación  $I_{inc} > I_{coh}$  y se observan dos hechos, ambos en relación al caso  $\Delta_e = 0$ , que  $I_{coh}$  decae más lento a cero y que  $I_{inc}$  también crece asintóticamente hacia 1/2 [21, pp. 390-392].

Una relación importante es el parámetro de saturación  $I_s$  definido como

$$I_s = \frac{I_{inc}}{I_{coh}}, \quad (2.50)$$

el cual da la intensidad necesaria del campo excitador para saturar el átomo, en saturación  $I_{inc} > I_{coh}$ . Para el A2N, sustituyendo las Ecs. (2.48, 2.49) en la Ec. (2.50) se obtiene

$$I_s = \frac{\alpha_{ee} - |\alpha_{eg}|^2}{|\alpha_{eg}|^2} = \frac{2\Omega_e^2}{\gamma^2 + 4\Delta_e^2}, \quad (2.51)$$

el cual es una medida adimensional de la intensidad de excitación del láser. En resonancia y en excitación en saturación se tiene que  $I_s = 1$ . El concepto de saturación sirve para explicar el nivel de no linealidad de la interacción.

## 2.4. Estado coherente y estados comprimidos

Hasta ahora solamente se han tratado fluctuaciones de la intensidad  $I$ , es decir, fluctuaciones en el número de fotones  $n$  del campo,  $I \sim n$ . En un tratamiento completo del campo EM es necesario considerar su comportamiento como onda y, por lo tanto, sus fluctuaciones. En el Cap. 1 se mencionó cómo en los inicios de la óptica cuántica jugó un papel fundamental la TCCO, Glauber [1].

Uno de los elementos centrales de dicha teoría es el estado coherente,  $|\alpha\rangle$ , el cual es el equivalente mecánico-cuántico de una onda electromagnética monocromática clásica, con un campo eléctrico dado por  $E = E_0 e^{i\varphi}$ , con  $E_0$  su amplitud. El significado de  $\alpha$  consiste en considerar un modo polarizado

## CAPÍTULO 2. INTERACCIÓN ÁTOMO-LÁSER

### 2.4. ESTADO COHERENTE Y ESTADOS COMPRIMIDOS

---

linealmente de frecuencia angular  $\omega$  encerrado en una cavidad de volumen  $V$ . La definición de  $\alpha$  y las relaciones entre su longitud  $|\alpha|$  y fase  $\varphi$  están dadas por [23, pp. 134-136]

$$\alpha = X_1 + iX_2 = |\alpha| e^{i\varphi}, \quad |\alpha| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad (2.52)$$

$$X_1 = |\alpha| \cos \varphi, \quad X_2 = |\alpha| \sin \varphi, \quad (2.53)$$

donde  $X_1, X_2$  son las cuadraturas adimensionales del campo EM de la luz dispersada dentro de la cavidad, relacionadas directamente con las coordenadas generalizadas de posición  $q(t)$  y momento  $p(t)$ , para las cuales:  $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ . Dichas cuadraturas se definen como

$$X_1(t) = \left( \frac{\varepsilon_0 V}{4\hbar\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_0 \cos \omega t = \left( \frac{\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} q(t), \quad (2.54)$$

$$X_2(t) = \left( \frac{\varepsilon_0 V}{4\hbar\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_0 \sin \omega t = \left( \frac{1}{2\hbar\omega} \right)^{\frac{1}{2}} p(t), \quad (2.55)$$

las cuales satisfacen una relación de incertidumbre cuántica dada por

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}. \quad (2.56)$$

Las incertidumbres de las cuadraturas para cualquier estado coherente y para el estado de vacío deben ser idénticas, esto es

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}, \quad (2.57)$$

es decir, las fluctuaciones en fase son iguales en magnitud a las de amplitud.

En la Fig. 2.8(a) se muestra cómo el estado coherente se considera como un estado de vacío desplazado, con el círculo de incertidumbre de vacío desplazado del origen por el vector  $\alpha$ . El círculo de incertidumbre introduce a su vez una incertidumbre  $\Delta n$  en el número promedio de fotones  $\bar{n}$ ,<sup>8</sup> Fig. 2.8(b),

$$\Delta n = |\alpha| = \sqrt{\bar{n}}, \quad (2.58)$$

---

<sup>8</sup>La energía clásica está dada por  $E_{\text{clásica}} = \hbar\omega |\alpha|^2$  y la energía cuántica por  $E_{\text{cuántica}} = \bar{n}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega$ . De estas expresiones se tiene que  $|\alpha|^2 = \bar{n}$  [23, p. 135].

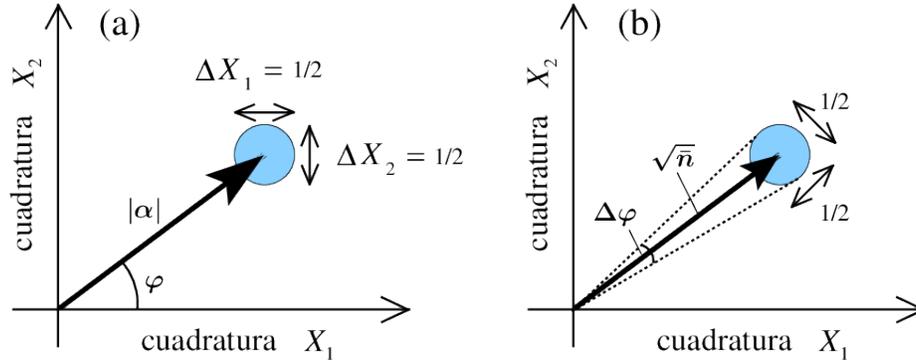


Figura 2.8: El estado de vacío se representa con un círculo de incertidumbre cuántica de diámetro  $1/2$ . (a) Estado coherente  $|\alpha\rangle$  de longitud  $|\alpha| = \sqrt{n} \gg 1$  y fase óptica promedio  $\varphi$ . (b) Incertidumbre en el número de fotones,  $\sqrt{n}$ , e incertidumbre en la fase,  $\Delta\varphi$ .

e incertidumbre en la fase  $\Delta\varphi$  como

$$\Delta\varphi = \frac{\text{incertidumbre en el diámetro}}{|\alpha|} = \frac{1/2}{\sqrt{n}}, \quad (2.59)$$

cantidades que satisfacen una relación de incertidumbre cuántica, esto es

$$\Delta n \Delta\varphi \geq \frac{1}{2}. \quad (2.60)$$

El estado comprimido, o fluctuaciones cuánticas reducidas, es la reducción del ruido (fluctuaciones) en una cuadratura del campo por abajo del nivel de un estado coherente (vacío) a expensas de incrementar el ruido en la otra cuadratura con tal de que  $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}$ .

La Fig. 2.9 muestra tres diferentes tipos de estados de cuadratura comprimida en los que, o se comprime el círculo de incertidumbre de vacío o se comprime el estado coherente en una elipse de la misma área. La Fig. 2.9(a) es un estado de vacío comprimido, un estado cuántico de la luz en el cual la cuadratura  $\Delta X_1$  del círculo de incertidumbre se comprime en una dirección a expensas de la otra, dando lugar a una elipse. Otras formas de luz comprimida se dan en las Figs. (b) y (c), en las que el círculo de incertidumbre del estado coherente de la Fig. 2.8(a) se comprime en una elipse de la misma área. En la Fig. 2.9(b) el eje mayor de la elipse está alineado con el fasor del estado coherente para que la incertidumbre en la fase sea menor que la del estado coherente original. Esta luz comprimida en fase, Ec. (2.60), permite

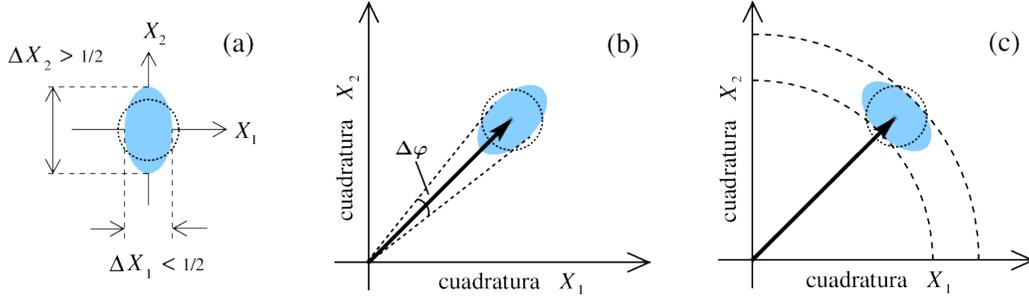


Figura 2.9: Estados de cuadratura comprimida, el círculo punteado muestra la incertidumbre en la cuadratura de los estados de vacío/coherente con  $\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{2}$ . (a) Vacío comprimido. (b) Luz comprimida en fase. (c) Luz comprimida en amplitud.

mediciones interferométricas con mayor precisión que las obtenidas con un estado coherente. Por otro lado, en la Fig. 2.9(c) el eje menor de la elipse es el que está alineado con el fasor del estado coherente para reducir la incertidumbre en la amplitud; esta luz comprimida en amplitud da lugar a un menor ruido en la amplitud que el de un estado coherente.

## 2.5. Varianza del estado comprimido

La varianza  $V_\phi$  de una cuadratura del estado comprimido en FR es una medida del ruido de dicho estado. A diferencia del cálculo de la intensidad de la luz dispersada, donde se empleó el desarrollo de los operadores como la suma de su media más fluctuaciones, aquí sólo aparecen las fluctuaciones de los operadores. La varianza se define como

$$V_\phi = \langle : (\Delta\sigma_\phi)^2 : \rangle = \text{Re} [e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{jg} \Delta\sigma_\phi \rangle], \quad (2.61)$$

donde  $\phi$  es la fase del oscilador local, tema que se trata en la Sec. 3.1, y los dobles puntos  $: :$  dentro del valor esperado denotan ordenamiento normal de los operadores, véase pie de pág. 35. El operador de fluctuación de cuadratura del dipolo es  $\Delta\sigma_\phi = \frac{1}{2} (\Delta\sigma_{jg} e^{-i\phi} + \Delta\sigma_{gj} e^{i\phi})$ , y se obtiene

$$\begin{aligned} V_\phi &= \frac{1}{2} \text{Re} [e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{jg} (\Delta\sigma_{gj} e^{i\phi} + \Delta\sigma_{jg} e^{-i\phi}) \rangle], \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} [\langle \Delta\sigma_{jg} \Delta\sigma_{gj} \rangle + \langle \Delta\sigma_{jg} \Delta\sigma_{jg} \rangle e^{-2i\phi}], \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde a su vez

$$\langle \Delta\sigma_{jg}\Delta\sigma_{gj} \rangle = \alpha_{jj} - |\alpha_{jg}|^2 \quad \text{y} \quad \langle \Delta\sigma_{jg}\Delta\sigma_{jg} \rangle = -\alpha_{jg}^2, \quad (2.63)$$

expresiones que se obtienen en el Apéndice A, Ecs. (A.17, A.18) con  $\ell = j$ ,  $m = g$ . Sustituyendo las Ecs. (2.63) en la Ec. (2.62) se obtiene

$$V_\phi = \frac{1}{2} \text{Re} [\alpha_{jj} - |\alpha_{jg}|^2 - \alpha_{jg}^2 e^{-2i\phi}]. \quad (2.64)$$

La varianza  $V_\phi$  para A2N se obtiene sustituyendo  $j = e$  en la Ec. (2.64), de donde, para  $\phi = 0$  y  $\phi = \frac{\pi}{2}$  se tiene que

$$V_0 = \frac{1}{2} \text{Re} [\alpha_{ee} - |\alpha_{eg}|^2 - \alpha_{eg}^2] \quad , \quad V_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\alpha_{ee} - |\alpha_{eg}|^2 + \alpha_{eg}^2], \quad (2.65)$$

con  $\alpha_{eg}$  y  $\alpha_{ee}$  dados en las Ecs. (2.35, 2.47), respectivamente. Sustituyendo dichos valores en las Ecs. (2.65) se obtiene

$$V_0 = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{2\Omega_e^4 + \Omega_e^2(\gamma_e + 2i\Delta_e)^2}{(\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2)^2} \right] = \frac{\gamma_e^2\Omega_e^2 - 4\Delta_e^2\Omega_e^2 + 2\Omega_e^4}{2(\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2)^2}, \quad (2.66)$$

$$V_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{2\Omega_e^4 - \Omega_e^2(\gamma_e + 2i\Delta_e)^2}{(\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2)^2} \right] = \frac{-\gamma_e^2\Omega_e^2 + 4\Delta_e^2\Omega_e^2 + 2\Omega_e^4}{2(\gamma_e^2 + 4\Delta_e^2 + 2\Omega_e^2)^2}, \quad (2.67)$$

expresiones para las que

$$\lim_{\Omega_e \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{\Omega_e \rightarrow \infty} V_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}. \quad (2.68)$$

La huella digital de la presencia del estado comprimido es cuando  $V_\phi < 0$ . Como se aprecia en la Fig. 2.10(a), en resonancia,  $\Delta_e = 0$ ,  $V_0$  no presenta compresión, mientras que para desintonías  $\Delta_e > 0$  se tiene que  $V_0 < 0$  en el intervalo<sup>9</sup>  $\Omega_e/\gamma_e \in [0, \sqrt{(4\Delta_e^2 - 1)/2}]$ , con un valor mínimo  $V_0^{\min} \simeq -0.03$ . En la Fig. 2.10(b) para la fase  $\phi = \pi/2$  se tiene que sólo en el intervalo  $\Omega_e/\gamma_e \in [0, \sqrt{(1 - 4\Delta_e^2)/2}]$ , con  $\Delta_e \leq \gamma_e/2$  ocurre que  $V_{\frac{\pi}{2}} < 0$ . Lo que se quiere es optimizar los parámetros para poder medir la varianza del estado comprimido. Como se desprende de la expresión del intervalo citado,

<sup>9</sup>La varianza  $V_0 = 0 \Rightarrow \Omega_e \in \sqrt{(4\Delta_e^2 - \gamma_e^2)/2}$ , Ec. (2.66), y la varianza  $V_{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \Omega_e \in \sqrt{(\gamma_e^2 - 4\Delta_e^2)/2}$ , Ec. (2.67).

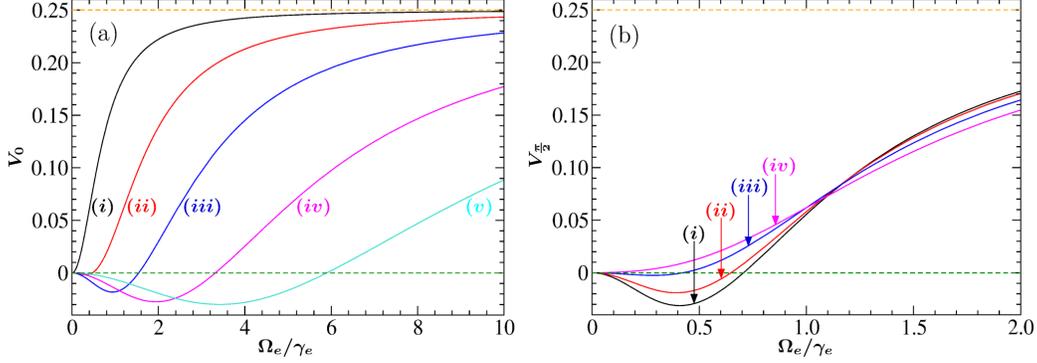


Figura 2.10: Varianza, Ecs. (2.66, 2.67), con  $\gamma_e = 1$ . (a) Para  $V_0$ : (i)  $\Delta_e = 0$ , (ii)  $\Delta_e = 0.6\gamma_e$ , (iii)  $\Delta_e = 1.2\gamma_e$ , (iv)  $\Delta_e = 2.4\gamma_e$  y (v)  $\Delta_e = 4.2\gamma_e$ . (b) Para  $V_{\pi/2}$ : (i)  $\Delta_e = 0$ , (ii)  $\Delta_e = 0.2\gamma_e$ , (iii)  $\Delta_e = 0.4\gamma_e$  y (iv)  $\Delta_e = 0.6\gamma_e$ . La línea punteada horizontal verde muestra el cero y la línea punteada horizontal anaranjada muestra el límite de  $1/4$  al que tienden las varianzas cuando  $\frac{\Omega_e}{\gamma_e} \rightarrow \infty$ , Ec. (2.68).

el mayor intervalo de valores de excitaciones para las que  $V_{\pi/2} < 0$  corresponde a  $\Delta_e = 0 \Rightarrow \Omega_e/\gamma_e \in [0, 1/\sqrt{2}]$ , justo el intervalo de excitaciones en que domina la intensidad coherente,  $I_{coh}$ , Fig. 2.7. Para este caso  $V_{\pi/2}^{\min} \simeq -0.03$ . A partir de una desintonía de  $\Delta_e \geq \gamma_e/2$  se tiene que  $V_{\pi/2} > 0$  y otra vez no existe el estado comprimido, como se muestra claramente en (iv).

Las primeras predicciones de estados comprimidos para FR en un átomo de 2 niveles las hicieron Walls y Zoller [9]. De su artículo llama la atención que afirman que el interés para realizar su estudio estaba estimulado por los esfuerzos dirigidos a detectar ondas gravitacionales. La FR se emite en un ángulo  $4\pi$  (en todas direcciones). Lo anterior, aunado a la baja eficiencia cuántica de los detectores hace que en un experimento sólo se colecte un porcentaje bajo de luz. Esto impuso muy fuertes condiciones para observar el estado comprimido en FR. Fue hasta 2015 en el trabajo de Schulte, *et al.* [24] que se observó tal estado en un punto cuántico semiconductor, el cual se comporta como un sistema de 2 niveles.

En la Fig. 2.11 se comparan cualitativamente las varianzas de la FR de un átomo de 2 niveles de Collett, *et al.* [25] y los resultados de Schulte, *et al.* [24]. En esta tesis  $E_\phi \propto \sigma_\phi \Rightarrow \Delta\sigma_\phi \propto \Delta E_\phi$ . Para Schulte, *et al.* [24],  $E(\phi) \propto X(\phi) = (X_1 \cos \phi + X_2 \sin \phi) \Rightarrow \Delta X(\phi) \propto \Delta E(\phi)$ .

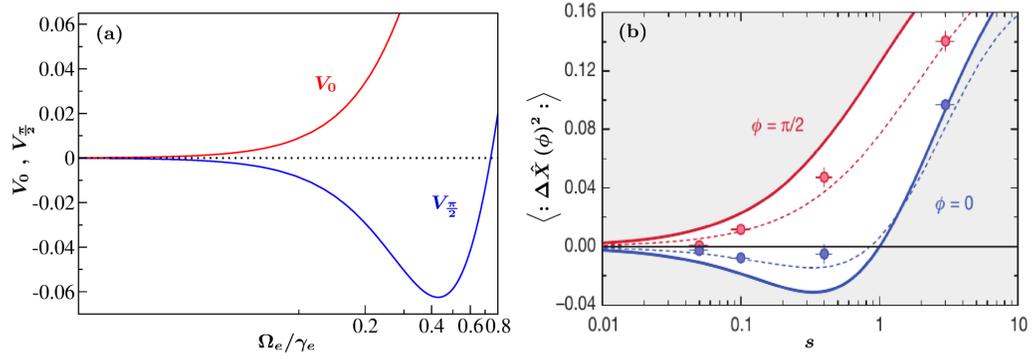


Figura 2.11: Comparación cualitativa de las varianzas de la fluorescencia resonante. (a) Átomo de 2 niveles, Collett, *et al.* [25]. (b) Sistema de 2 niveles, Schulte, *et al.* [24]. Los símbolos en las líneas punteadas son mediciones, las líneas continuas son teoría. La variable  $s = P/P_{sat}$ , es la potencia de excitación, donde la potencia de saturación,  $P_{sat}$ , produce la mitad de la máxima intensidad de fluorescencia resonante accesible. Los parámetros son diferentes en cada caso y las fases son arbitrarias de una gráfica a la otra.

## Capítulo 3

# Mediciones de fluctuaciones cuánticas: Funciones de correlación

En este capítulo se presenta el análisis de funciones de correlación a dos tiempos y someramente la correlación de HBT. Como tema central de esta tesis se hace una descripción más detallada de la DHC y cómo se calcula la función  $h_\phi$ . Se plantea la solución de las EBO a todo tiempo y en estado estacionario. Se revisa el concepto del espectro de la fluorescencia. Los resultados de  $h_\phi$  y de espectros para los sistemas de 2 y tres niveles se muestran en los siguientes capítulos.

En el Cap. 1 se mencionaron tres observables físicas a partir de las cuales se estudian sus propiedades en fluctuaciones: de intensidad, de fase y en el espectro de la luz. En estos casos se presenta la situación de que se realizan mediciones de la luz a dos tiempos en uno o dos detectores. Los experimentos de HBT consisten en la medición en coincidencias retardadas de fotones en dos detectores, esto es, consisten en medir las correlaciones entre las intensidades de la luz estelar registradas en coincidencias retardadas. Sus experimentos provocaron muchas controversias hasta que se demostró que sus resultados se podían explicar tratando a la luz de forma clásica y aplicando solo la teoría cuántica al proceso de fotodetección. En este capítulo se trata con un poco de más amplitud el tema.

Las mediciones de la intensidad de la luz se hacen con haces de luz estables, por lo que resulta sencillo describir dichas mediciones en términos simples y esencialmente clásicos. Separando el campo eléctrico oscilante de

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

---

la forma

$$E(\mathbf{r}, t) = E^+(\mathbf{r}, t) + E^-(\mathbf{r}, t) \quad \text{con} \quad E^-(\mathbf{r}, t) = [E^+(\mathbf{r}, t)]^*, \quad (3.1)$$

donde,  $E^+(\mathbf{r}, t)$ ,  $E^-(\mathbf{r}, t)$  son las partes del campo de frecuencia angular  $\omega_C$  positiva y negativa, respectivamente. En forma clásica la intensidad de la luz resultante se estudia por medio de la función de correlación del campo

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = \langle E^-(\mathbf{r}_1 t_1) E^+(\mathbf{r}_2 t_2) \rangle. \quad (3.2)$$

Si esta función de correlación cruzada satisface que

$$|G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2)|^2 = G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_1 t_1) G^{(1)}(\mathbf{r}_2 t_2, \mathbf{r}_2 t_2), \quad (3.3)$$

$$= I(\mathbf{r}_1 t_1) I(\mathbf{r}_2 t_2), \quad (3.4)$$

donde, con  $x_j = \mathbf{r}_j t_j$ , la intensidad es  $I(x_j) = |E(x_j)|^2$ , entonces se dice que los campos en  $x_1$  y en  $x_2$  son ópticamente coherentes entre ellos. Esta es la definición de coherencia relativa de la óptica tradicional.

En mecánica cuántica las variables físicas como  $E^{(\pm)}(\mathbf{r}t)$  son operadores de los vectores del espacio de Hilbert  $|\rangle$  que representan el estado del campo EM. En general, los observables se describen por operadores  $\mathcal{O}$  de modo que se trata con funciones de correlación de la forma  $\langle \mathcal{O}_1(t) \mathcal{O}_2(t+\tau) \mathcal{O}_1(t) \rangle$ . Es claro que su estudio representa un paso adicional en complejidad comparado con mediciones a un solo tiempo como  $\langle \mathcal{O}(t) \rangle$ .

De acuerdo con lo arriba expuesto se define la forma teórico-cuántica de la función de correlación dada en Ec. (3.2) como

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = Tr [\rho E^-(\mathbf{r}_1 t_1) E^+(\mathbf{r}_2 t_2)], \quad (3.5)$$

$$= \langle E^-(\mathbf{r}_1 t_1) E^+(\mathbf{r}_2 t_2) \rangle, \quad (3.6)$$

definición que satisface la Ec. (3.3) y se emplea para definir la coherencia óptica.

En el experimento de HBT si los dos contadores de fotones son sensibles a las coordenadas espacio-tiempo, entonces se requieren dos operadores de descenso  $E^+(\mathbf{r}_1 t_1)$ ,  $E^+(\mathbf{r}_2 t_2)$ , los cuales conmutan, para describir la medición con retraso de cuentas en coincidencia. La amplitud para que el campo vaya del estado  $|i\rangle$  al estado  $|f\rangle$  con dos cuantos menos es

$$\langle f | E^+(\mathbf{r}_2 t_2) E^+(\mathbf{r}_1 t_1) | i \rangle. \quad (3.7)$$

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

---

Una nueva función de correlación se obtiene de la Ec. (3.7) al calcular  $\sum_f |\langle f | E^+(\mathbf{r}_2 t_2) E^+(\mathbf{r}_1 t_1) | i \rangle|^2$ , de lo cual se obtiene<sup>1</sup>

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1 t_1 \mathbf{r}_2 t_2 \mathbf{r}_2 t_2 \mathbf{r}_1 t_1) = Tr [\rho E^-(\mathbf{r}_1 t_1) E^-(\mathbf{r}_2 t_2) E^+(\mathbf{r}_2 t_2) E^+(\mathbf{r}_1 t_1)]. \quad (3.8)$$

La función de correlación de segundo orden más general está dada por

$$G^{(2)}(x_1 x_2 x_3 x_4) = Tr [\rho E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_3) E^+(x_4)], \quad (3.9)$$

$$= \langle E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_3) E^+(x_4) \rangle, \quad (3.10)$$

por lo que la Ec. (3.8) es un caso particular de la Ec. (3.9).

El conteo de fotones para cualquier intervalo de tiempo da lugar a ciertas distribuciones estadísticas. Para predecir esas distribuciones se necesita, en general, conocer las funciones de correlación  $G^{(n)}$  de órdenes arbitrarios por lo que [21, pp. 312-313]

**la madre de todas las funciones de correlación**

es la función de correlación de orden  $n$

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = Tr [\rho E^-(x_1) \cdots E^-(x_n) E^+(x_{n+1}) \cdots E^+(x_{2n})]. \quad (3.11)$$

En los experimentos ópticos se emplea luz lo más cercanamente posible a luz monocromática o coherente, para la cual se emplea la notación  $E^+ = \mathcal{E}$ . En dichos experimentos se emplean fuentes de luz estables o estadísticamente estacionarias. Aquí el significado de una fuente en estado estacionario consiste en que, en general, la función  $G$  con dos diferentes argumentos,  $t_1$  y  $t_2$ , puede en efecto sólo depender de su diferencia, es decir, como en  $G^{(1)}(t_1 - t_2) = \mathcal{E}^*(t_1) \mathcal{E}(t_2)$  o como en  $G^{(1)}(\tau) = \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t + \tau)$ . En adelante sólo se consideran en esta tesis funciones de correlación cuyo argumento sólo dependa de la diferencia de dos tiempos.

A partir de la Ec. (3.6) se define la función de correlación de primer orden normalizada como

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t + \tau) \rangle}{\langle |\mathcal{E}(t)|^2 \rangle}, \quad (3.12)$$

denotada así porque se emplea la primera potencia del campo eléctrico, cuantifica la forma en la que el campo eléctrico fluctúa en el tiempo.

---

<sup>1</sup>Como parte del cálculo se emplea que  $\rho = |f\rangle \langle f|$  y que  $\sum_i \langle i | \rho | i \rangle = \sum_i \rho_{ii} = \text{Tr}[\rho]$ .

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.1. DHC Y FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

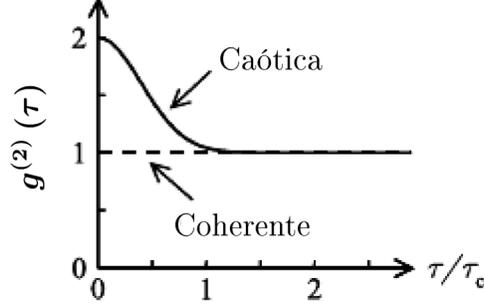


Figura 3.1: Función de correlación de segundo orden  $g^{(2)}(\tau)$  para luz caótica proveniente de una lámpara de descarga y luz perfectamente coherente, donde  $\tau_c \approx 1/\Delta\omega$  es el tiempo de coherencia y  $\Delta\omega$  es el ancho espectral [23, p. 112].

En el interferómetro de intensidad de HBT<sup>2</sup> se quiere medir, en coincidencias retardadas, la detección de fotones en dos detectores. Uno de ellos, al registrar la detección de un fotón, da inicio a un reloj que mide el retardo  $\tau$  para la detección de otro fotón en el otro detector. La repetición de este proceso de medición lleva a la distribución  $G^{(2)}(\tau)$  de los retardos  $\tau$  en la detección entre dos fotones, Ec. (3.10). La función de correlación de HBT de segundo orden  $G^{(2)}(\tau)$  normalizada es

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}^*(t+\tau) \mathcal{E}(t+\tau) \mathcal{E}(t) \rangle}{\langle \mathcal{E}^*(t) \mathcal{E}(t) \rangle \langle \mathcal{E}^*(t+\tau) \mathcal{E}(t+\tau) \rangle} = \frac{\langle I(t) I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle}, \quad (3.13)$$

donde  $I(t)$  es la intensidad del haz de luz al tiempo  $t$ , proporcional al número de fotones. Es de segundo orden ya que la intensidad óptica es proporcional a la segunda potencia del campo eléctrico.

La función de correlación  $g^{(2)}$  cuantifica las fluctuaciones de intensidad, como en el interferómetro de intensidad de HBT, y conduce a una clasificación alternativa en que la luz se describe como no agrupada (antibunched),  $g^{(2)}(0) < 1$ , coherente (aleatoria),  $g^{(2)}(0) = 1$ , y agrupada (bunched) o caótica,  $g^{(2)}(0) > 1$ . Ver Fig. 3.1.

### 3.1. DHC y función de correlación

La DHC desarrollada por Carmichael, *et al.* [11] es un tema central de esta tesis, razón por la cual se toma aquí un espacio para abundar sobre el

---

<sup>2</sup>Interferómetro de intensidad de Hanbury-Brown y Twiss, pág. 2.

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.1. DHC Y FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

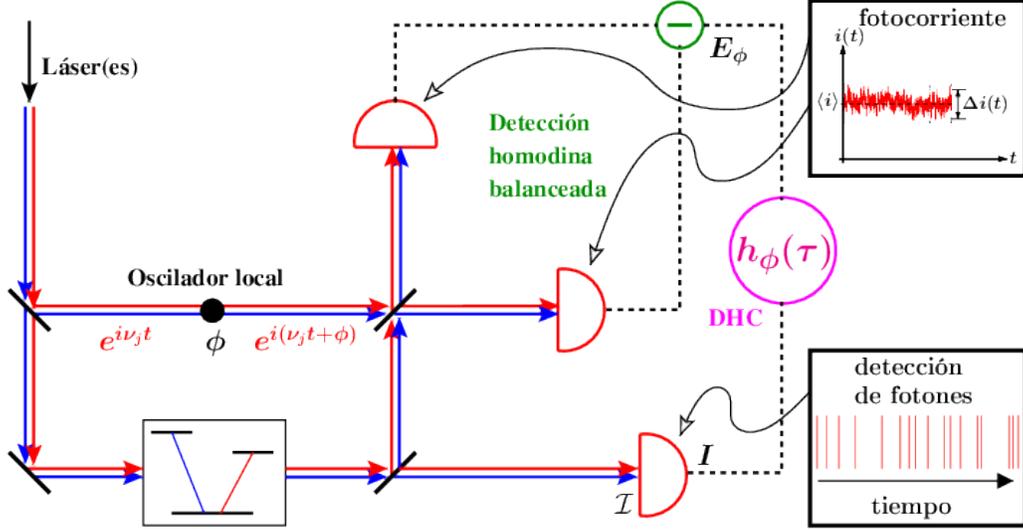


Figura 3.2: La detección homodina condicionada consiste en un oscilador local y en la técnica de DHB, así como de un detector  $\mathcal{I}$ . Se muestra en rojo (azul) el estudio de la fluorescencia de la transición débil (fuerte) del A3N-V. El sistema atómico puede ser el A2N o el A3N-A y emplearse sólo un láser. Con DHC se mide la función de correlación  $h_\phi(\tau)$ . Para sólo medir en DHC se cancela la trayectoria al detector  $\mathcal{I}$ .

tema. En el Cap. 1, pág. 5, se mencionó cómo la DHC surge como una técnica de medida que resuelve el problema de la baja eficiencia cuántica de fotodetección, lo cual es suficiente para ocultar la detección de luz comprimida.

La Fig. 3.2 muestra la DHC para medir la función de correlación  $h_\phi(\tau)$  del A3N-V. La frecuencia angular del láser es  $\nu_j$  con un campo eléctrico  $\sim e^{i\nu_j t}$ , donde  $\nu_s$  ( $\nu_w$ ) se emplea para estudiar la transición fuerte (débil). Es un interferómetro de dos brazos. En uno de ellos se mide el comportamiento ondulatorio de la luz por medio de DHB, pág. 4, técnica con la que se mide la cuadratura de la amplitud del campo  $E_\phi \propto \sigma_\phi$  y la cual incluye la introducción de una fase  $\phi$  en la amplitud del campo  $\sim e^{i(\nu_j t + \phi)}$ . En el otro brazo del interferómetro se mide el comportamiento corpuscular de la luz y consiste en un detector  $\mathcal{I}$  para medir la intensidad de la luz  $I \propto \sigma_{jg}\sigma_{gj}$ .<sup>3</sup> Cuando se quiere medir luz comprimida no se emplea el detector  $\mathcal{I}$ , se bloquea la trayectoria hacia éste y sólo se mide en DHB. Se muestra el estudio de la fluorescencia de la transición débil (en rojo) del A3N-V, para la cual están

<sup>3</sup>La constante de proporcionalidad en  $E_\phi \propto \sigma_\phi$  y en  $I \propto \sigma_{jg}\sigma_{gj}$  es la eficiencia del detector.

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.1. DHC Y FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

preparados los tres detectores (en rojo) y se habrá evitado que lleguen a ellos el láser azul y la fluorescencia de la transición fuerte (en azul). Lo análogo se hace para estudiar la fluorescencia de la transición fuerte. El sistema atómico bajo estudio puede ser el A2N o el A3N- $\Lambda$  y emplearse solamente un láser.

Dada una transición atómica entre el estado excitado  $|j\rangle$  y el estado base  $|g\rangle$ , para esa transición específica se calcula en la DHC la cuadratura de la amplitud del campo,  $E_\phi \propto \sigma_\phi$ , condicionada a la medición directa de la intensidad,  $I \propto \sigma_{jg}\sigma_{gj}$ , y viceversa. Dichos cálculos se realizan por medio de la función de correlación

$$H_\phi(\tau) = \langle : I(t) E_\phi(t + \tau) : \rangle = \langle : I(0) E_\phi(\tau) : \rangle \quad (3.14)$$

$$= \langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_\phi(\tau) : \rangle = \langle : \sigma_{jj}(0) \sigma_\phi(\tau) : \rangle \quad (3.15)$$

con la fase  $\phi$  del oscilador local como parámetro, se hace  $t = 0$ ,  $I \propto \sigma_{jg}\sigma_{gj} = \sigma_{jj}$  y los dobles puntos  $::$  dentro del valor esperado denotan ordenamiento normal y temporal de los operadores.<sup>4</sup> La conveniencia de hacer  $t = 0$  corresponde a la interpretación que se hace del proceso de medición de  $H_\phi(\tau \geq 0)$  o de  $H_\phi(\tau \leq 0)$ , como se muestra abajo.

Las funciones  $G^{(2)}(\tau)$  y  $H_\phi(\tau)$  son ejemplos de funciones de correlación a dos tiempos que se emplean para analizar las fluctuaciones de una observable posterior a la medición de la misma u otra observable a otro tiempo.

La función  $H_\phi$  normalizada es

$$h_\phi(\tau) = \frac{H_\phi(\tau)}{\langle I \rangle_{st} \langle E_\phi \rangle_{st}} = \frac{\langle : \sigma_{jj}(0) \sigma_\phi(\tau) : \rangle}{\langle \sigma_{jj} \rangle_{st} \langle \sigma_\phi \rangle_{st}}, \quad (3.16)$$

donde el subíndice “ $st$ ” denota valores en “estado estacionario”. En la Ec. (3.16)  $\sigma_\phi(\tau)$  es el operador de cuadratura del dipolo y  $\langle \sigma_\phi \rangle_{st}$  su valor esperado en estado estacionario. El primer operador se define como

$$\sigma_\phi(\tau) = \frac{1}{2} (\sigma_{jg}(\tau)e^{-i\phi} + \sigma_{gj}(\tau)e^{i\phi}) = \text{Re} [\sigma_{jg}(\tau)e^{-i\phi}], \quad (3.17)$$

---

<sup>4</sup>El ordenamiento normal y temporal de los operadores aparece debido a que el proceso fundamental de medición es la absorción de un fotón. El ordenamiento normal consiste en colocar los operadores de creación,  $\hat{a}^\dagger$ , a la izquierda y los de aniquilación,  $\hat{a}$ , a la derecha, sin usar relaciones de conmutación, por ejemplo,  $\langle : \hat{a} \hat{a}^\dagger : \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ ,  $\langle : \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b} : \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} \rangle = \langle (\hat{b}^\dagger)^3 \hat{b}^2 \rangle$ . En el ordenamiento temporal los operadores con parte temporal inicial (tiempos menores) se colocan en los extremos y los operadores que tienen parte temporal mayor (tiempos mayores) en medio, esto es  $\langle : : \rangle \Rightarrow \langle \text{tiempos menores} \rightarrow \text{tiempos mayores} \leftarrow \text{tiempos menores} \rangle$ .

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.1. DHC Y FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

con valor esperado

$$\langle \sigma_\phi(\tau) \rangle = \frac{1}{2} (\langle \sigma_{jg}(\tau) \rangle e^{-i\phi} + \langle \sigma_{gj}(\tau) \rangle e^{i\phi}) \quad (3.18)$$

$$= \text{Re} [\langle \sigma_{jg}(\tau) \rangle e^{-i\phi}] = \text{Re} [\langle \sigma_{gj}(\tau) \rangle e^{i\phi}]. \quad (3.19)$$

El segundo operador es su valor en estado estacionario

$$\langle \sigma_\phi(\tau) \rangle_{st} \equiv \langle \sigma_\phi \rangle_{st} \equiv \alpha_\phi = \frac{1}{2} (\langle \sigma_{jg}(\tau) \rangle_{st} e^{-i\phi} + \langle \sigma_{gj}(\tau) \rangle_{st} e^{i\phi}) \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha_{jg} e^{-i\phi} + \alpha_{gj} e^{i\phi}) \quad (3.21)$$

$$= \text{Re} [\alpha_{jg} e^{-i\phi}] = \text{Re} [\alpha_{gj} e^{i\phi}], \quad (3.22)$$

donde se empleó que  $\langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle_{st} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle \equiv \langle \sigma_{\ell m}(0) \rangle \equiv \langle \sigma_{\ell m} \rangle_{st} \equiv \alpha_{\ell m}$ , Ec. (3.39), y las identidades son para abreviar la notación.

De acuerdo a la Ec. (3.18), el operador de fluctuación de cuadratura del dipolo y su valor esperado están dados por

$$\Delta \sigma_\phi(\tau) = \frac{1}{2} (\Delta \sigma_{jg}(\tau) e^{-i\phi} + \Delta \sigma_{gj}(\tau) e^{i\phi}) = \text{Re} [\Delta \sigma_{jg}(\tau) e^{-i\phi}] \quad (3.23)$$

$$\langle \Delta \sigma_\phi(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \Delta \sigma_{jg}(\tau) \rangle e^{-i\phi} + \langle \Delta \sigma_{gj}(\tau) \rangle e^{i\phi} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Siguiendo con la DHC como tema central e incorporando las Ecs. (3.20, 3.39) en la función  $h_\phi(\tau)$ , Ec. (3.16), ésta toma la forma

$$h_\phi(\tau) = \frac{H_\phi(\tau)}{\alpha_{jj}\alpha_\phi} = \frac{\langle : \sigma_{jj}(0) \sigma_\phi(\tau) : \rangle}{\alpha_{jj}\alpha_\phi}. \quad (3.25)$$

A continuación se indica cómo se calcula la función  $H_\phi(\tau) \sim h_\phi(\tau)$ , Ec. (3.25), para  $\tau \geq 0$  y para  $\tau \leq 0$ . La razón de separar de esta manera el cálculo se debe, por un lado, a que se aplica el ordenamiento normal y temporal de los operadores y, por otro lado, a la **interpretación** que se hace del proceso de medición. Lo anterior se expone a continuación.

Para  $\tau \geq 0$  la detección de una cuadratura del campo emitido a un tiempo de retardo  $\tau$  (comportamiento ondulatorio) por medio de la DHB, se condiciona a que se haya hecho primero la detección de un fotón en el detector  $\mathcal{I}$  al tiempo  $t = \tau = 0$  (comportamiento corpuscular), lo anterior

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.1. DHC Y FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

significa que una vez que se midió  $I(0)$ , se inicia un reloj,  $t = 0$ , y se mide el retardo  $\tau$  para a su vez medir  $E_\phi(\tau)$  en DHB. Por otro lado, para  $\tau \leq 0$ , las mediciones se interpretan como la detección de un fotón en el detector  $\mathcal{I}$  al tiempo de retraso  $\tau$ , condicionado a que se haga primero la detección de una cuadratura del campo emitido, en DHB, a un tiempo  $t = 0$ , esto es, una vez que se midió  $E_\phi(0)$  se mide  $I(\tau)$ .

Para calcular  $H_\phi(\tau \geq 0)$  de la Ec. (3.16) se aplica el ordenamiento normal y temporal de los operadores<sup>5</sup> para obtener

$$H_\phi(\tau \geq 0) = \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_\phi(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle = \text{Re} \left[ e^{-i\phi} \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle \right], \quad (3.26)$$

donde se empleó la Ec. (3.17).

Para calcular  $H_\phi(\tau \leq 0)$  se sigue un cierto procedimiento matemático consistente de **cuatro puntos**, a saber.<sup>6</sup> **Primer punto:** se sustituye  $\sigma_\phi(\tau)$ , Ec. (3.17), en  $H_\phi(\tau)$ , Ec. (3.25), para obtener

$$\begin{aligned} H_\phi(\tau \leq 0) &= \frac{1}{2} \langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) [\sigma_{gj}(\tau) e^{i\phi} + \sigma_{jg}(\tau) e^{-i\phi}] : \rangle, \\ &= \frac{1}{2} \left[ \langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_{gj}(\tau) : \rangle e^{i\phi} + \langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_{jg}(\tau) : \rangle e^{-i\phi} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[ \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle e^{i\phi} + \langle \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \rangle e^{-i\phi} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[ \langle \sigma_{jj}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle e^{i\phi} + \langle \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{jj}(0) \rangle e^{-i\phi} \right], \\ &= \text{Re} \left[ \langle \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{jj}(0) \rangle e^{-i\phi} \right] = \text{Re} \left[ \langle \sigma_{jj}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle e^{i\phi} \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde, en el tercer renglón se aplicó el ordenamiento normal y temporal de los operadores,<sup>7</sup> se aplicó que  $\sigma_{jg}(0)\sigma(0) = \sigma_{jj}(0)$  y finalmente se dan dos resultados equivalentes. Como **segundo punto** se hace la siguiente consideración: dado que la propagación de los operadores debe hacerse desde  $\tau = 0$  hasta  $\tau = \infty$ , en este caso de  $H_\phi(\tau \leq 0)$  se hace un corrimiento en el tiempo

---

<sup>5</sup>Ec. (3.25)  $\rightarrow \langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_\phi(\tau) : \rangle \Rightarrow$  ordenamiento normal  $\rightarrow \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_\phi(\tau) \rangle \Rightarrow$  ordenamiento temporal  $\rightarrow \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_\phi(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle$ .

<sup>6</sup>Recuérdese que la función de correlación  $H_\phi(\tau \leq 0)$  se interpreta como medir la intensidad  $I$  condicionada a medir la amplitud del campo  $E_\phi$ .

<sup>7</sup>Para  $\langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_{jj}(\tau) : \rangle \Rightarrow$  ordenamiento normal  $\rightarrow \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_{jj}(\tau) \rangle \Rightarrow$  ordenamiento temporal  $\rightarrow \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jj}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle$ . Para  $\langle : \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \sigma_{jg}(\tau) : \rangle \Rightarrow$  ordenamiento normal  $\rightarrow \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle \Rightarrow$  ordenamiento temporal  $\rightarrow \langle \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(0) \rangle$ .

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.1. DHC Y FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

de la forma

$$0 \rightarrow 0 + |\tau| = |\tau|, \quad (3.28)$$

$$\tau \rightarrow \tau + |\tau| = 0, \quad (3.29)$$

para propagar los operadores en tiempos positivos. En consecuencia, se aplican las Ecs. (3.28, 3.29) en ambos resultados de la Ec. (3.27) para obtener

$$\begin{aligned} H_\phi(|\tau|) &= \text{Re} [\langle \sigma_{jg}(\tau + |\tau|) \sigma_{jj}(0 + |\tau|) \rangle e^{-i\phi}], \\ &\quad \text{Re} [\langle \sigma_{jj}(0 + |\tau|) \sigma_{gj}(\tau + |\tau|) \rangle e^{i\phi}], \\ &= \text{Re} [\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jj}(|\tau|) \rangle e^{-i\phi}] = \text{Re} [\langle \sigma_{jj}(|\tau|) \sigma_{gj}(0) \rangle e^{i\phi}]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como **tercer punto**, al calcular la Ec. (3.30) ya se hace la propagación de los operadores para tiempos positivos desde  $|\tau| = 0$  hasta  $|\tau| = \infty$ , por lo que, como **cuarto punto**, una vez realizado dicho cálculo se hace una reflexión espejo respecto a  $\tau = 0$  en los valores de  $H_\phi(|\tau|) \sim h_\phi(|\tau|)$  para recuperar  $H_\phi(\tau \leq 0) \sim h_\phi(\tau \leq 0)$  en el intervalo  $(-\infty, 0]$ .

Sustituyendo las Ecs. (3.26, 3.30) en la Ec. (3.25) se obtienen las expresiones para la función de correlación de tercer orden

$$h_\phi(\tau \geq 0) = \frac{\text{Re} [e^{-i\phi} \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle]}{\alpha_{jj} \alpha_\phi}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} h_\phi(|\tau|) &= \frac{\text{Re} [\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jj}(|\tau|) \rangle e^{-i\phi}]}{\alpha_{jj} \alpha_\phi} \\ &= \frac{\text{Re} [\langle \sigma_{jj}(|\tau|) \sigma_{gj}(0) \rangle e^{i\phi}]}{\alpha_{jj} \alpha_\phi}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde  $\alpha_{jj}$  y  $\alpha_{jg}$ ,  $\alpha_{gj}$  en  $\alpha_\phi = \text{Re} [\alpha_{jg} e^{-i\phi}] = \text{Re} [\alpha_{gj} e^{i\phi}]$  son soluciones a las ecuaciones de Bloch en estado estacionario. Juntando el resultado de la Ec. (3.31) y el resultado de aplicar la reflexión espejo respecto a  $\tau = 0$  en  $h_\phi(|\tau|)$ , Ec. (3.32), ya se tienen los valores de  $h_\phi(\tau)$  en el intervalo  $\tau \in (-\infty, \infty)$ .

Las Ecs. (3.31, 3.32) sólo son válidas para fase  $\phi = \pi/2$  y  $\forall \Delta_j$ , y para la fase  $\phi = 0$  y  $\Delta_j \neq 0$ . El interés en esta tesis es calcular  $h_{\frac{\pi}{2}}(\tau)$  y  $h_0(\tau)$ . Sustituyendo  $\phi = \frac{\pi}{2}$  en dichas ecuaciones se obtiene

$$h_{\frac{\pi}{2}}(\tau \geq 0) = \frac{\text{Re} [-i \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle]}{\alpha_{jj} \alpha_{\frac{\pi}{2}}}, \quad (3.33)$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}(|\tau|) = \frac{\text{Re} [-i \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jj}(|\tau|) \rangle]}{\alpha_{jj} \alpha_{\frac{\pi}{2}}}, \quad (3.34)$$

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.2. FLUCTUACIONES DEL OPERADOR  $\sigma_{\ell M}$

---

y sustituyendo  $\phi = 0$  en las Ecs. (3.31, 3.32) se obtiene

$$h_0(\tau \geq 0) = \frac{\text{Re} [\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jj}(\tau) \sigma_{gj}(0) \rangle]}{\alpha_{jj} \alpha_0}, \quad (3.35)$$

$$h_0(|\tau|) = \frac{\text{Re} [\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{jj}(|\tau|) \rangle]}{\alpha_{jj} \alpha_0}. \quad (3.36)$$

En las cuatro ecuaciones de arriba se emplea la Fórmula Cuántica de Regresión (FCR) para calcular los valores esperados de los productos de dos y tres operadores a dos tiempos, tema que se expone en la Sec. 3.5. Una vez calculadas  $h_{\frac{\pi}{2}}(|\tau|)$  y/o  $h_0(|\tau|)$  se aplica el **cuarto punto** descrito arriba para obtener  $h_{\frac{\pi}{2}}(\tau \leq 0)$  y/o  $h_0(\tau \leq 0)$  en el intervalo  $\tau \in (-\infty, 0]$ .

Para el caso especial de fase  $\phi = 0$  y en el que simultáneamente el átomo está en resonancia,  $\Delta_j = 0$ , ocurre que el valor de  $\alpha_0$  es idénticamente igual a cero, lo que da origen a una singularidad en la Ec. (3.25). Por un lado, este hecho ya se analizó en la Ec. (2.43) para el átomo de 2 niveles y, por otro lado, siempre que se resuelven numéricamente las EBO-EE con  $\phi = 0$  y  $\Delta_j = 0$ , siempre, se obtiene el resultado  $\alpha_0 = 0$ . Dicha singularidad se evita sumando un término de compensación (un offset)<sup>8</sup> a cada uno de los operadores  $\sigma_{jg}$ ,  $\sigma_{gj}$  en la Ec. (3.15) y a su vez en  $\sigma_\phi$ , Ec. (3.17). El offset,  $E_{\text{off}}$ , es la cantidad dada por

$$E_{\text{off}} = A e^{\pm \phi}, \quad (3.37)$$

donde  $A$  es una amplitud real arbitraria y  $\phi$  es la fase del oscilador local, Fig. 3.2. No es de interés en esta tesis este caso especial y no se abunda en el tema.

## 3.2. Fluctuaciones del operador $\sigma_{\ell m}$

El desarrollo en fluctuaciones de los operadores  $\sigma_{\ell m}(t)$  consiste en escribirlos en términos de su media más fluctuaciones, esto es

$$\sigma_{\ell m}(t) = \langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle_{\text{st}} + \Delta \sigma_{\ell m}(t), \quad (3.38)$$

donde

$$\langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle_{\text{st}} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle \equiv \langle \sigma_{\ell m}(0) \rangle \equiv \langle \sigma_{\ell m} \rangle_{\text{st}} \equiv \alpha_{\ell m}, \quad (3.39)$$

---

<sup>8</sup>El autor de esta tesis se toma la licencia para emplear el significado de la palabra offset del inglés, esto es, como “compensación”.

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN EN FLUCTUACIONES

---

expresión en que las primeras tres identidades-definiciones involucran el aspecto conceptual de considerar el estado estacionario de  $\langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle$ , para el cual, a tiempos suficientemente grandes sus valores ya no cambian; la última definición es para abreviar la notación. Incorporando la Ec. (3.39) en la Ec. (3.38) se tiene que

$$\sigma_{\ell m}(t) = \alpha_{\ell m} + \Delta\sigma_{\ell m}(t), \quad (3.40)$$

donde, por definición  $\langle \Delta\sigma_{\ell m}(t) \rangle = 0$ , es decir, las fluctuaciones promedian a cero y el valor esperado de la Ec. (3.40) toma la forma

$$\langle \sigma_{\ell m}(t) \rangle = \langle \alpha_{\ell m} + \Delta\sigma_{\ell m}(t) \rangle = \alpha_{\ell m}, \quad (3.41)$$

lo que significa que coincide con su valor esperado en estado estacionario. Los valores de  $\alpha_{\ell m}$  son soluciones a las EBO-EE, Ec. (3.70). Una imagen de la Ec. (3.40) se da en la Fig. 3.3.

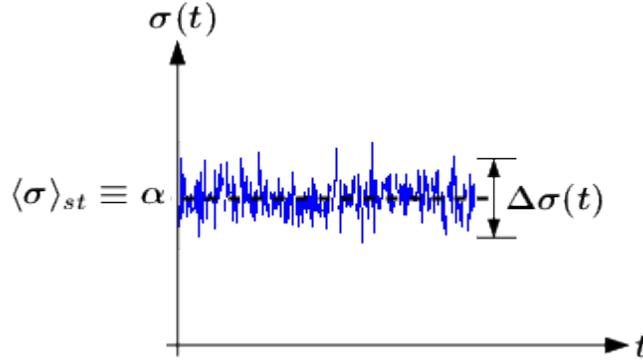


Figura 3.3: El operador  $\sigma(t)$  en términos de su media más fluctuaciones:  $\sigma(t) = \alpha + \Delta\sigma(t)$ , donde  $\langle \Delta\sigma(t) \rangle = 0$ , esto es, las fluctuaciones promedian a cero.

### 3.3. Función de correlación en fluctuaciones

El desarrollo en fluctuaciones de los operadores es una herramienta útil en esta sección para obtener la función de correlación en fluctuaciones a partir de la función de correlación  $h_\phi(\tau)$ , Ec. (3.25), agregando el superíndice “fluc”, esto es

$$h_\phi^{\text{fluc}}(\tau) = \frac{H_\phi^{\text{fluc}}(\tau)}{\alpha_{jj}^{\text{fluc}} \alpha_\phi^{\text{fluc}}}, \quad (3.42)$$

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN EN FLUCTUACIONES

---

donde

$$H_\phi^{\text{fluc}}(\tau) = \langle : \sigma_{jg}^{\text{fluc}}(0) \sigma_{gj}^{\text{fluc}}(0) \sigma_\phi^{\text{fluc}}(\tau) : \rangle \quad (3.43)$$

es la función de correlación en fluctuaciones sin normalizar. Es importante decir que  $h_\phi$  y  $h_\phi^{\text{fluc}}$  son la misma función, colocar el superíndice “fluc” en los diferentes operadores significa emplear el desarrollo en fluctuaciones del operador:  $\sigma_{\ell m} = \alpha_{\ell m} + \Delta\sigma_{\ell m}$ , Ec. (3.40). Para el denominador de la Ec. (3.42) se tiene que

$$\alpha_{jj}^{\text{fluc}} \equiv \langle \sigma_{jj}^{\text{fluc}} \rangle_{st} = \langle \alpha_{jj} + \Delta\alpha_{jj} \rangle = \alpha_{jj}, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \alpha_\phi^{\text{fluc}} &\equiv \langle \sigma_\phi^{\text{fluc}}(\tau) \rangle_{st} = \frac{1}{2} \langle ([\alpha_{jg} + \Delta\sigma_{jg}] e^{-i\phi} + [\alpha_{gj} + \Delta\sigma_{gj}] e^{i\phi}) \rangle \\ &= \alpha_\phi, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde se empleó que  $\langle \Delta\sigma_{\ell m} \rangle = 0$ .

El cálculo de  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau)$ , debido al ordenamiento normal y temporal de los operadores, se separa en el caso en que  $\tau \geq 0$  y en el caso en que  $\tau \leq 0$ , casos análogos a los presentados en la pág. 36 donde se calcularon  $H_\phi(\tau \geq 0)$ , Ec. (3.26), y  $H_\phi(\tau \leq 0)$ , Ec. (3.32).

Para calcular  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0)$  se aplica el ordenamiento normal y temporal en la Ec. (3.43) para obtener  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) = \langle \sigma_{jg}^{\text{fluc}}(0) \sigma_\phi^{\text{fluc}}(\tau) \sigma_{gj}^{\text{fluc}}(0) \rangle$ , expresión en la cual se sustituye la Ec. (3.40) para obtener

$$\begin{aligned} H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) &= \langle [\alpha_{jg} + \Delta\sigma_{jg}(0)] [\alpha_\phi + \Delta\sigma_\phi(\tau)] [\alpha_{gj} + \Delta\sigma_{gj}(0)] \rangle, \\ &= \alpha_{jj}\alpha_\phi + 2\text{Re}[\alpha_{gj} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) \rangle] \\ &\quad + \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) \Delta\sigma_{gj}(0) \rangle, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde, se empleó la Ec. (3.24) para hacer  $\langle \Delta\sigma_\phi \rangle = 0$ .

A partir de  $H_\phi(\tau \leq 0) = \text{Re}[\langle \sigma_{jg}(\tau) \sigma_{jj}(0) \rangle e^{-i\phi}]$ , Ec. (3.27), se construye la expresión para  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \leq 0) = \text{Re}[\langle \sigma_{jg}^{\text{fluc}}(\tau) \sigma_{jj}^{\text{fluc}}(0) \rangle e^{-i\phi}]$ , sustituyendo en esta expresión la Ec. (3.40) se tiene que

$$\begin{aligned} H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \leq 0) &= \text{Re}[\langle [\alpha_{jg} + \Delta\sigma_{jg}(\tau)] [\alpha_{jj} + \Delta\sigma_{jj}(0)] \rangle e^{-i\phi}] \\ &= \alpha_{jj}\alpha_\phi + \text{Re}[\langle \Delta\sigma_{jg}(\tau) \Delta\sigma_{jj}(0) \rangle e^{-i\phi}] \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde se empleó que  $\alpha_\phi = \text{Re}[\alpha_{jg} e^{-i\phi}]$ , Ec. (3.22).

Como se expuso en el **segundo punto** de la Sec. 3.1, para  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \leq 0)$  se hace la propagación de los operadores desde  $\tau = 0$  hasta  $\tau = \infty$ , por lo

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN EN FLUCTUACIONES

---

tanto se aplica el corrimiento en el tiempo, Ec. (3.29), a la Ec. (3.47), esto es

$$\begin{aligned} H_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|) &= \alpha_{jj}\alpha_\phi + \text{Re} [\langle \Delta\sigma_{jg}(\tau + |\tau|) \Delta\sigma_{jj}(0 + |\tau|) \rangle e^{-i\phi}], \\ &= \alpha_{jj}\alpha_\phi + \text{Re} [\langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{jj}(|\tau|) \rangle e^{-i\phi}]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ahora, análogo al **tercer punto** de la Sec. 3.1, al calcular la Ec. (3.48) ya se hace la propagación de los operadores para tiempos positivos desde  $|\tau| = 0$  hasta  $|\tau| = \infty$ , por lo que, como **cuarto punto**, una vez realizado dicho cálculo se hace una reflexión espejo respecto a  $\tau = 0$  en los valores de  $H_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|) \sim h_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|)$  para recuperar  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \leq 0) \sim h_\phi^{\text{fluc}}(\tau \leq 0)$  en el intervalo  $(-\infty, 0]$ .

La expresión general para la función de correlación en fluctuaciones  $h_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0)$ , Ec. (3.42), se obtiene sustituyendo en ésta la expresión para  $H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0)$ , Ec. (3.46), y las Ecs. (3.44, 3.45), esto es

$$\begin{aligned} h_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) &= \frac{H_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0)}{\alpha_{jj}\alpha_\phi}, \\ &= \frac{1}{\sigma_{jj}\sigma_\phi} \{ \alpha_{jj}\alpha_\phi + 2\text{Re} [\alpha_{gj} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) \rangle] \\ &\quad + \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) \Delta\sigma_{gj}(0) \rangle \}, \\ &= 1 + h_\phi^{(2)}(\tau) + h_\phi^{(3)}(\tau), \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde los términos de segundo y tercer orden están dados, respectivamente, por

$$h_\phi^{(2)}(\tau \geq 0) = \frac{2\text{Re} [\alpha_{gj} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) \rangle]}{\alpha_{jj}\alpha_\phi}, \quad (3.50)$$

$$h_\phi^{(3)}(\tau \geq 0) = \frac{\langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) \Delta\sigma_{gj}(0) \rangle}{\alpha_{jj}\alpha_\phi}. \quad (3.51)$$

La expresión general para la función de correlación en fluctuaciones  $h_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|)$ , Ec. (3.42), se obtiene sustituyendo en ésta la expresión para  $H_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|)$ , Ec. (3.48), y las Ecs. (3.44, 3.45), esto es

$$\begin{aligned} h_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|) &= \frac{H_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|)}{\alpha_{jj}\alpha_\phi}, \\ &= \frac{1}{\alpha_{jj}\alpha_\phi} \{ \sigma_{jj}\sigma_\phi + \text{Re} [e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{jj}(|\tau|) \rangle] \} \\ &= 1 + h_\phi^{(2)}(|\tau|), \end{aligned} \quad (3.52)$$

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN EN FLUCTUACIONES

---

donde sólo hay un término de segundo orden dado por

$$h_{\phi}^{(2)}(|\tau|) = \frac{\text{Re} [e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{jj}(|\tau|) \rangle]}{\alpha_{jj}\alpha_{\phi}}. \quad (3.53)$$

Las Ecs. (3.49-3.53) sólo son válidas para fase  $\phi = \pi/2$  y  $\forall \Delta_j$ , y para la fase  $\phi = 0$  y  $\Delta_j \neq 0$ . El interés en esta tesis es calcular  $h_{\frac{\pi}{2}}^{\text{fluc}}(\tau)$  y  $h_0^{\text{fluc}}(\tau)$ . Sustituyendo  $\phi = \frac{\pi}{2}$  en dichas ecuaciones se obtiene

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) = 1 + h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\tau) + h_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\tau), \quad (3.54)$$

donde

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\tau \geq 0) = \frac{2\text{Re} [\sigma_{gj} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle]}{\alpha_{jj}\alpha_{\frac{\pi}{2}}}, \quad (3.55)$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\tau \geq 0) = \frac{\langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \Delta\sigma_{gj}(0) \rangle}{\alpha_{jj}\alpha_{\frac{\pi}{2}}}, \quad (3.56)$$

y

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{\text{fluc}}(|\tau|) = 1 + h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(|\tau|), \quad (3.57)$$

donde

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(|\tau|) = \frac{\text{Re} [-i \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{jj}(|\tau|) \rangle]}{\alpha_{jj}\alpha_{\frac{\pi}{2}}}. \quad (3.58)$$

Sustituyendo  $\phi = 0$  en las Ecs. (3.49-3.53) se obtiene

$$h_0^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) = 1 + h_0^{(2)}(\tau) + h_0^{(3)}(\tau), \quad (3.59)$$

donde

$$h_0^{(2)}(\tau \geq 0) = \frac{2\text{Re} [\sigma_{gj} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_0(\tau) \rangle]}{\alpha_{jj}\alpha_0}, \quad (3.60)$$

$$h_0^{(3)}(\tau \geq 0) = \frac{\langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_0(\tau) \Delta\sigma_{gj}(0) \rangle}{\alpha_{jj}\alpha_0}. \quad (3.61)$$

y

3.4. SOLUCIÓN MATRICIAL DE LAS EBO

---

$$h_0^{\text{fluc}}(|\tau|) = 1 + h_0^{(2)}(|\tau|), \quad (3.62)$$

donde sólo hay términos de segundo orden dado por

$$h_0^{(2)}(|\tau|) = \frac{\text{Re}[\langle \Delta\sigma_{jg}(0)\Delta\sigma_{jj}(|\tau|) \rangle]}{\alpha_{jj}\alpha_0}. \quad (3.63)$$

No es de interés en esta tesis calcular la función de correlación en fluctuaciones para el caso especial de fase  $\phi = 0$  y en el que simultáneamente el átomo esté en resonancia,  $\Delta_j = 0$ . En la pág. 39 se comentó que en resonancia se requiere sumar un offset ( $Ae^{\pm i\phi}$ ) a los operadores  $\sigma_{jg}$ ,  $\sigma_{gj}$  para evitar una singularidad, en este caso, en  $h_\phi^{\text{fluc}}$ , Ec. (3.42).

### 3.4. Solución matricial de las EBO

Conviene replantear la solución de las ecuaciones de Bloch ópticas y su solución formal de la forma

$$\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbf{b}, \quad (3.64)$$

donde  $\mathbf{s}$  es el vector columna con componentes de los operadores de pseudoespín  $\sigma_{jk}$ ,  $\mathbb{M}$  es la matriz cuyos elementos son los diferentes coeficientes de  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  en las EBO,  $\mathbf{b}$  es un vector columna con los coeficientes de decaimiento en caso que el número de ecuaciones sea mayor que el número de poblaciones o de coherencias.

Las soluciones formales para las ecuaciones de Bloch

$$\frac{d}{dt} (\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}) = \mathbb{M} (\langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}) \quad (3.65)$$

están dadas por

$$\langle \mathbf{s}(t) \rangle = e^{\mathbb{M}t} [\langle \mathbf{s}(0) \rangle + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}] - \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3.66)$$

$$= \mathbb{S}^{-1}e^{\mathbb{P}t}\mathbb{S} [\langle \mathbf{s}(0) \rangle + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}] - \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3.67)$$

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.5. FÓRMULA CUÁNTICA DE REGRESIÓN

---

donde  $\mathbb{S}$  es una matriz que diagonaliza a  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{P}$  es la matriz diagonal con eigenvalores  $p_m$  y  $\langle \mathbf{s}(0) \rangle$  es la condición inicial. Si  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  en la Ec. (3.64) la solución toma la forma

$$\langle \mathbf{s}(t) \rangle = e^{\mathbb{M}t} \langle \mathbf{s}(0) \rangle. \quad (3.68)$$

En general, una solución analítica a las Ecs. (3.64) no es posible. Sólo lo es en el caso de resonancia, desintonía átomo-láser igual a cero, para el A2N y el A3N- $\Lambda$  se conocen soluciones analíticas, en este último caso con ciertas aproximaciones, Castro-Beltrán, *et al.* [19].

Las EBO-EE son importantes porque dan información sobre el sistema atómico en estudio, una vez que el sistema ha pasado el transitorio, esto es, a tiempos suficientemente grandes. Dichas ecuaciones se escriben a partir de las Ec. (3.64) agregando el subíndice “ $st$ ”, esto es

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{s}(t) \rangle_{st} = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle_{st} + \mathbf{b}. \quad (3.69)$$

El estado estacionario significa que los valores de  $\langle \mathbf{s}(t) \rangle$  ya no cambian en el tiempo, lo que implica que  $\langle \mathbf{s}(t) \rangle_{st} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathbf{s}(t) \rangle \equiv \langle \mathbf{s}(0) \rangle \equiv \langle \mathbf{s} \rangle_{st} \equiv \boldsymbol{\alpha}$ , donde, las componentes del vector columna  $\boldsymbol{\alpha}$  son  $\langle \sigma_{jk} \rangle_{st} \equiv \alpha_{jk}$ , Ec. (3.39). Por lo tanto  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha} = 0$  y las EBO-EE son un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{0} = \mathbb{M} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbb{M}^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.70)$$

Tanto para el A2N como para el A3N- $\Lambda$  se tienen soluciones analíticas para sus EBO-EE, Subsec. 2.2.1 y Sec. 5.1, respectivamente; mientras que para A3N-V se obtienen numéricamente en la Sec. 6.1.

### 3.5. Fórmula cuántica de regresión

La FCR<sup>9</sup> la desarrolló Lax [27] y permite extender las EBO de valores a un tiempo de  $\langle \mathbf{s}(t) \rangle$  a valores a dos tiempos de la forma  $\langle \mathcal{O}_1(0) \mathbf{s}(t) \mathcal{O}_2(0) \rangle$ ,

---

<sup>9</sup>La fórmula cuántica de regresión la desarrolló Lax en 1963 [27] hablando de que «...las regresiones de las fluctuaciones obedecen a las ecuaciones de movimiento “macroscópicas”». Dado que Mollow en 1969 [8], haciendo referencia a Lax, la citó como teorema cuántico de regresión en un pie de página de su artículo [8, p. 1973], la mayoría de la gente sigue usando el término teorema. Hasta donde sabe el autor de esta tesis no se puede demostrar como un teorema matemático, se emplea en óptica cuántica como una formulación matemática... !que si funciona!

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.5. FÓRMULA CUÁNTICA DE REGRESIÓN

---

donde  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  son operadores. La FCR se reduce a un procedimiento matemático de seis pasos para obtener las ecuaciones de movimiento para el vector columna  $\langle \mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(t)\mathcal{O}_2(0) \rangle$ , con su condición inicial y soluciones.

Dadas las ecuaciones de Bloch ópticas y su solución, Ecs. (3.64, 3.66),

$$\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{s}(t) \rangle = e^{\mathbb{M}t} [\langle \mathbf{s}(0) \rangle + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}] - \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3.71)$$

la fórmula cuántica de regresión consiste en realizar el siguiente procedimiento matemático

1. En la ecuación  $\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbf{b}$  se quitan los brackets

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s}(t) = \mathbb{M}\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}. \quad (3.72)$$

2. El vector  $\mathbf{s}(t)$  se multiplica por la izquierda por el operador  $\mathcal{O}_1(0)$  y se multiplica por la derecha por el operador  $\mathcal{O}_2(0)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(t)\mathcal{O}_2(0) = \mathbb{M}\mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(t)\mathcal{O}_2(0) + \mathcal{O}_1(0)\mathbf{b}\mathcal{O}_2(0). \quad (3.73)$$

3. Se cambia  $t$  por  $\tau$

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(\tau)\mathcal{O}_2(0) = \mathbb{M}\mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(\tau)\mathcal{O}_2(0) + \mathcal{O}_1(0)\mathbf{b}\mathcal{O}_2(0). \quad (3.74)$$

4. Se reponen los brackets en la Ec. (3.74)

$$\frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(\tau)\mathcal{O}_2(0) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(\tau)\mathcal{O}_2(0) \rangle + \mathcal{O}_1(0)\mathbf{b}\mathcal{O}_2(0). \quad (3.75)$$

5. Con la condición inicial

$$\langle \mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(0)\mathcal{O}_2(0) \rangle. \quad (3.76)$$

6. La solución a la Ec. (3.75) tiene (regresa a) la misma forma que la solución de la Ec. (3.71), esto es, a la solución de

$$\frac{d}{d\tau} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle + \mathbf{b}, \quad \text{con la condición inicial } \langle \mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(0)\mathcal{O}_2(0) \rangle. \quad (3.77)$$

Lo que afirma la fórmula cuántica de regresión es que el promedio a dos tiempos tiene la misma dinámica que el promedio a un tiempo. Es en este sentido la afirmación en el punto 6. de que la solución de las Ecs. (3.75, 3.77) tiene la misma forma. Tanto la Ec. (3.75) como la Ec. (3.77) se denotarán como Ecuaciones de Movimiento (EdeM).<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>El nombre de ecuaciones de Bloch ópticas se deja sólo para las ecuaciones que se

### 3.6. Correlaciones de operadores en fluctuaciones

En la Sec. 3.2 se hizo el desarrollo en fluctuaciones de los operadores  $\sigma_{\ell m}(t)$  al escribirlos en términos de su media,  $\alpha_{\ell m}$ , más fluctuaciones,  $\Delta\sigma_{\ell m}$ , Ec. (3.38), con su valor esperado  $\langle\sigma_{\ell m}(t)\rangle$  dado en la Ec. (3.41).

En esta sección se obtienen las Ecuaciones de Movimiento en Fluctuaciones (EdeM-F) por medio de escribir el vector columna  $\mathbf{s}(t)$ , con componentes  $\sigma_{jk}$ , en términos de su media más fluctuaciones, lo cual significa que

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\alpha} + \Delta\mathbf{s}(t), \quad (3.78)$$

donde  $\langle\mathbf{s}(t)\rangle_{st} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\mathbf{s}(t)\rangle \equiv \langle\mathbf{s}(0)\rangle \equiv \langle\mathbf{s}\rangle_{st} \equiv \boldsymbol{\alpha}$ . Se sustituye la Ec. (3.78) en  $\frac{d}{dt} \langle\mathbf{s}(t)\rangle = \mathbb{M} \langle\mathbf{s}(t)\rangle + \mathbf{b}$ , Ec. (3.64), y se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha} + \frac{d}{dt} \langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle &= \cancel{\mathbb{M}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b}} + \mathbb{M} \langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle \\ \frac{d}{dt} \langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle &= \mathbb{M} \langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle, \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde los términos que se cancelan del lado derecho de la igualdad se deben a las EBO-EE, Ec. (3.70). Resolver la Ec. (3.79) no tiene sentido ya que de antemano se sabe que el promedio de las fluctuaciones de una función vale cero, eso es,  $\langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle = 0$ .

Por lo tanto, las EdeM-F que involucran a las fluctuaciones de  $\mathbf{s}(t)$ , es decir, que involucran a  $\Delta\mathbf{s}(t)$  se obtienen siguiendo los seis pasos de la FCR, Sec. 3.5, aplicados a la Ec. (3.79), esto es

1) En la ecuación  $\frac{d}{dt} \langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle = \mathbb{M} \langle\Delta\mathbf{s}(t)\rangle$  se quitan los brackets

$$\frac{d}{dt} \Delta\mathbf{s}(t) = \mathbb{M} \Delta\mathbf{s}(t). \quad (3.80)$$

2) El vector  $\Delta\mathbf{s}(t)$  se multiplica por la izquierda por el operador  $\Delta\mathcal{O}_1(0)$  y se multiplica por la derecha por el operador  $\Delta\mathcal{O}_2(0)$

$$\frac{d}{dt} \Delta\mathcal{O}_1(0) \Delta\mathbf{s}(t) \Delta\mathcal{O}_2(0) = \mathbb{M} \Delta\mathcal{O}_1(0) \Delta\mathbf{s}(t) \Delta\mathcal{O}_2(0). \quad (3.81)$$

---

obtienen a través de las ecuaciones para los elementos de matriz del operador de densidad  $\rho$  para el A2N, para el A3N  $\Lambda$  y para el A3N-V. Para cada uno de éstos sistemas, a las ecuaciones que se obtienen aplicando la FCR se les llama ecuaciones de movimiento.

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.6. CORRELACIONES DE OPERADORES EN FLUCTUACIONES

---

3. Se cambia  $t$  por  $\tau$

$$\frac{d}{d\tau} \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) = \mathbb{M} \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0). \quad (3.82)$$

4. Se reponen los brackets en la Ec. (3.82)

$$\frac{d}{d\tau} \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle = \mathbb{M} \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle. \quad (3.83)$$

5. La condición inicial es

$$\langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(0) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle. \quad (3.84)$$

6. La solución a la Ec. (3.83) es (regresa a) la misma solución que la de la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle, \text{ con la condición inicial } \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(0) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle. \quad (3.85)$$

Con el procedimiento expuesto, el vector columna  $\langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle$  ya no necesariamente es cero y la Ec. (3.83) tiene solución, a diferencia de lo que ocurre con la Ec. (3.79). Las Ecs. (3.83, 3.85) son las EdeM-F.

Otra forma de decir lo que afirma la FCR es la siguiente. La solución a la Ec. (3.83) es

$$\langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle = e^{\mathbb{M}\tau} \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(0) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle, \quad (3.86)$$

y regresa a ser la misma solución que la de la Ec. (3.85)

$$\langle \mathbf{s}(\tau) \rangle = e^{\mathbb{M}t} \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(0) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle, \quad (3.87)$$

que a su vez es de la misma forma que la solución de la Ec. (3.68) pero con la condición inicial en Ec. (3.84).

En el Apéndice. A se muestra el procedimiento para calcular los valores de las condiciones iniciales en las Ecs. (3.76, 3.84). Para el A2N las condiciones iniciales se resumen en la Tabla A.1, para el A3N- $\Lambda$  en la Tabla A.2 y para el A3N-V en la Tabla. A.3 y en la Tabla. A.4.

### 3.7. Espectro de fluorescencia resonante

En el Cap. 1, pág. 4, se dijo que para observar estados comprimidos se emplea la técnica DHB, la cual requiere un haz coherente de referencia haciendo interferencia con la fluorescencia de interés. El espectro  $S(\omega)$  de la FR de dichos estados es la parte real de la transformada de Fourier de la función de correlación a dos tiempos  $\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle$ , de acuerdo con Evers y Keitel [28, Ec. (7)]

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi\alpha_{jj}} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle, \quad (3.88)$$

donde  $1/\pi\alpha_{jj}$  permite normalizar el espectro como  $\int_{-\infty}^\infty S(\omega) d\omega = 1$ ,  $\alpha_{jj}$  es la población en estado estacionario del estado excitado  $|j\rangle$ ,  $\omega \equiv \omega_{\text{fluorescencia}} - \nu_j$  y  $\nu_j$  es la frecuencia angular del láser que excita la transición  $|g\rangle \rightarrow |j\rangle$ . La fluorescencia de un estado comprimido presenta valores negativos de  $S(\omega)$  en ciertos intervalos de frecuencia, indicando menor ruido respecto al de un estado coherente, o bien, al del vacío.

Para revelar más claramente el papel de las fluctuaciones en  $S(\omega)$ , Ec. (3.88), en la expresión  $\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle$  se separan los operadores atómicos  $\sigma_{jk}$  en su media,  $\alpha_{jk}$ , más fluctuaciones,  $\Delta\sigma_{jk}$ , Ec. (3.40), por lo que su movimiento promedio y sus fluctuaciones al rededor del promedio son

$$\langle \sigma_{jg}(0) \sigma_{gj}(\tau) \rangle = |\alpha_{jg}|^2 + \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{gj}(\tau) \rangle. \quad (3.89)$$

Para el retraso  $\tau = 0$

$$\langle \sigma_{jg}\sigma_{gj} \rangle \equiv \langle \sigma_{jj} \rangle = |\alpha_{jg}|^2 + \langle \Delta\sigma_{jg}\Delta\sigma_{gj} \rangle, \quad (3.90)$$

donde el primer término del lado derecho de la igualdad es la intensidad coherente y el segundo término es la intensidad incoherente, Ecs. (2.46).

Sustituyendo la Ec. (3.89) en la Ec. (3.88), el espectro se separa en dos partes como

$$S(\omega) = S_{coh}(\omega) + S_{inc}(\omega), \quad (3.91)$$

donde

CAPÍTULO 3. MEDICIONES DE FLUCTUACIONES CUÁNTICAS:  
FUNCIONES DE CORRELACIÓN

3.7. ESPECTRO DE FLUORESCENCIA RESONANTE

---

$$S_{coh}(\omega) = \frac{|\alpha_{jg}|^2}{\pi\alpha_{jj}} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{|\alpha_{jg}|^2}{\pi\alpha_{jj}} \delta(\omega) \quad (3.92)$$

es el espectro coherente (elástico) debido al movimiento promedio, y

$$S_{inc}(\omega) = \frac{1}{\pi\alpha_{jj}} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{gj}(\tau) \rangle \quad (3.93)$$

es el espectro incoherente (inelástico) debido a las fluctuaciones atómicas.

# Capítulo 4

## DHC de la fluorescencia del átomo de 2 niveles

Empleando la detección homodina condicionada, en este capítulo se presentan dos estudios sobre el átomo de 2 niveles. El primero realizado por Castro-Beltrán [15] y el segundo reportado por Castro-Beltrán, *et al.* [16]. Este último fue desarrollado en el transcurso de los estudios de doctorado y se reproduce en Anexos: Apéndice C, pág. 102.

En el Cap. 1, pág. 3, se mencionó cómo la FR de un A2N se convertiría en uno de los sistemas más simples y no triviales para estudiar propiedades cuánticas de la luz. En el Cap. 2, pág. 9, se inició la revisión de los conceptos fundamentales de la óptica cuántica para sentar las bases de la nomenclatura y revisar el comportamiento general de una transición atómica entre dos niveles. En la Sec. 2.2 se obtuvieron las EBO del A2N, Ecs. (2.27-2.29), las cuales se escriben de la forma  $\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbf{b}$ , Ec. (3.64), con

$$\mathbf{s} = (\sigma_z, \sigma_{eg}, \sigma_{ge})^T, \quad (4.1)$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_e & -i\Omega_e & i\Omega_e \\ -i\Omega_e/2 & -(\frac{\gamma_e}{2} - i\Delta_e) & 0 \\ i\Omega_e/2 & 0 & -(\frac{\gamma_e}{2} + i\Delta_e) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{b} = (-\gamma_e, 0, 0)^T \quad (4.3)$$

y sus soluciones en resonancia se dan en la Subsec. 2.2.2. Las EBO-EE están dadas por  $\mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , Ecs. (2.31-2.33), sus soluciones en general son las Ecs. (2.34, 2.35) y sus soluciones en resonancia son las Ecs. (2.40-2.42).

CAPÍTULO 4. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 2 NIVELES

---

Dado que los espectros de ruido, definidos más abajo, están en términos de las funciones de correlación en fluctuaciones para  $\tau \geq 0$ , se presentan aquí dichas funciones:  $h_{\phi}^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) = 1 + h_{\phi}^{(2)}(\tau) + h_{\phi}^{(3)}(\tau)$ , Ec. (3.49), para el caso de interés en esta tesis,  $\Delta_e = 0$  y  $\phi = \pi/2$ , las cuales están dadas por las Ecs. (3.55, 3.56) con  $j = e$ , esto es

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\tau \geq 0) = \frac{2\text{Re} [\alpha_{ge} \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle]}{\alpha_{ee}\alpha_{\frac{\pi}{2}}} \quad (4.4)$$

$$= \frac{2\text{Re} [\alpha_{ge} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle] - 2|\alpha_{eg}|^2 \text{Re} [-i \langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle]}{\alpha_{ee}\alpha_{\frac{\pi}{2}}}, \quad (4.5)$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\tau \geq 0) = \frac{\langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \Delta\sigma_{ge}(0) \rangle}{\alpha_{ee}\alpha_{\frac{\pi}{2}}} \quad (4.6)$$

$$= \frac{\langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle - 2\text{Re} [\alpha_{eg} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle]}{\alpha_{ee}\alpha_{\frac{\pi}{2}}} + \frac{|\alpha_{eg}|^2 \text{Re} [-i \langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle] + |\alpha_{eg}|^2 \text{Re} [-i\alpha_{eg}]}{\alpha_{ee}\alpha_{\frac{\pi}{2}}} - 1. \quad (4.7)$$

En los numeradores de las Ecs. (4.4, 4.6) se empleó que  $\Delta\sigma_{\ell m} = \sigma_{\ell m} - \alpha_{\ell m}$ , Ec. (3.40), y que  $\Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) = \sigma_{\pi/2}(\tau) - \alpha_{\pi/2}$ , expresión que se obtiene de las Ecs. (3.17, 3.21, 3.23). El denominador toma el valor de  $\alpha_{ee}\alpha_{\pi/2} = \frac{Y^3}{2\sqrt{2}(1+Y^2)^2}$ . En el Apéndice. B se muestran estos cálculos.

De acuerdo a la FCR, en las Ecs. (4.5, 4.7), los valores de  $\langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle$ , de  $\langle \sigma_{\pi/2}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle$  y los de  $\langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\pi/2}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle$  son los mismos que los de  $\langle \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle = \text{Re} [-i \langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle]$ , donde  $\langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle$  está dada en la Ec. (2.37). Sustituyendo lo anterior en las Ecs. (4.5, 4.7) junto con los valores en estado estacionario, Ecs. (2.40-2.42), se obtiene

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\tau \geq 0) = -\frac{1}{1+Y^2}e^{-\frac{3\gamma_e}{4}\tau} \left[ (1-Y^2) \cosh(\delta\tau) + \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma_e} \sinh(\delta\tau) \right], \quad (4.8)$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\tau \geq 0) = -\frac{2Y^2}{1+Y^2}e^{-\frac{3\gamma_e}{4}\tau} \left[ \cosh(\delta\tau) + \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma_e} \sinh(\delta\tau) \right], \quad (4.9)$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) = 1 - e^{-\frac{3\gamma_e}{4}\tau} \left[ \cosh(\delta\tau) + \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma_e} \sinh(\delta\tau) \right], \quad (4.10)$$

siendo esta última la función de correlación total.

Casos especiales para la función de correlación total  $h_{\frac{\pi}{2}}(\tau \geq 0)$ , Ec. (4.10), son aquellos para el límite de campo débil,  $Y^2 \ll 1$ ,<sup>1</sup>

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{\text{débil}}(\tau \geq 0) = 1 - e^{-\frac{3\gamma_e}{4}\tau} \left[ \cosh\left(\frac{\gamma_e}{4}\tau\right) + \sinh\left(\frac{\gamma_e}{4}\tau\right) \right] \quad (4.11)$$

y para excitación crítica,  $\Omega_e = \gamma_e/4$  (o  $Y^2 = 1/8$ ),<sup>2</sup>

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{\text{crítica}}(\tau \geq 0) = 1 - e^{-\frac{3\gamma_e}{4}\tau} \left( 1 + \frac{3}{16}\gamma_e\tau \right). \quad (4.12)$$

En muchos esquemas experimentales la luz comprimida se estudia en el dominio de la frecuencia. En DHC se hace en el dominio del tiempo. Esto permite asegurar lo no clásico de las cuadraturas, comprimidas o no, debido a que en FR se violan uno o más de los límites de las desigualdades clásicas, de Castro-Beltrán [15] se tiene que

$$0 \leq h_\phi(\tau) - 1 \leq 1 \quad \text{y} \quad |h_\phi(\tau) - 1| \leq |h_\phi(0) - 1| \leq 1. \quad (4.13)$$

Para calcular los espectros de ruido de las cuadraturas  $S_\phi(\omega)$  se puede tener la impresión de emplear la transformada exponencial de Fourier,  $\int_{-\infty}^{\infty} [h_\phi^{\text{fluc}}(\tau) - 1] e^{i\omega\tau} d\tau$ . Sin embargo, esta transformada sólo promedia los espectros en ambos lados de  $h_\phi^{\text{fluc}}(\tau)$ , dando información incorrecta cuando  $h_\phi^{\text{fluc}}(\tau)$  es asimétrica como ocurre en el caso del A3N-V. En este caso,  $h_\phi^{\text{fluc}}(\tau)$  lleva información diferente para  $\tau \leq 0$  y para  $\tau \geq 0$ .

<sup>1</sup>En este límite se hace  $Y^2 \ll 1$  en la Ec. (4.10)  $\Rightarrow \delta \cong \gamma_e/4$  y  $(1-2Y^2)\gamma_e/4\delta \cong 1$ .

<sup>2</sup>En la Ec. (4.10) se toman los dos primeros términos del desarrollo en series de  $\cosh(\delta\tau)$  y de  $\sinh(\delta\tau)$ , además,  $\Omega_e = \gamma_e/4 \Rightarrow \delta = 0$ .

Por la razón arriba expuesta es que  $S_\phi(\omega)$  se obtiene a partir de la transformada coseno de Fourier de las funciones de correlación en fluctuaciones<sup>3</sup>  $h_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) - 1 = h_\phi^{(2)}(\tau) + h_\phi^{(3)}(\tau)$  y  $h_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|) = 1 + h_\phi^{(2)}(|\tau|)$  de las Ecs. (3.49, 3.52), respectivamente; de acuerdo con Carmichael, *et al.* [11] y con Castro-Beltrán [15] se tiene que

$$S_\phi^{\tau \geq 0}(\omega) = 4\gamma_j \alpha_{jj} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) [h_\phi^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) - 1], \quad (4.14)$$

$$S_\phi^{\tau \leq 0}(\omega) = 4\gamma_j \alpha_{jj} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) [h_\phi^{\text{fluc}}(|\tau|) - 1], \quad (4.15)$$

en donde,  $\omega \equiv \omega_{\text{fluorescencia}} - \nu_j$  y  $\nu_j$  es la frecuencia angular del láser que excita la transición  $|g\rangle \rightarrow |j\rangle$ . Cuando  $h_\phi^{\text{fluc}}(\tau)$  es simétrica, como en el A2N y en el A3N- $\Lambda$ , no se emplean los superíndices  $\tau \geq 0$  y  $\tau \leq 0$  en  $S_\phi(\omega)$ . Sustituyendo la Ec. (3.49) en la Ec. (4.14), el espectro  $S_\phi^{\tau \geq 0}(\omega)$  se separa como  $S_\phi^{\tau \geq 0}(\omega) = S_\phi^{(2)}(\omega) + S_\phi^{(3)}(\omega)$ , donde

$$S_\phi^{(2)}(\omega) = 4\gamma_j \alpha_{jj} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) h_\phi^{(2)}(\tau \geq 0), \quad (4.16)$$

$$S_\phi^{(3)}(\omega) = 4\gamma_j \alpha_{jj} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) h_\phi^{(3)}(\tau \geq 0), \quad (4.17)$$

y a su vez  $h_\phi^{(2)}(\tau \geq 0)$ ,  $h_\phi^{(3)}(\tau \geq 0)$  están dadas en las Ecs. (3.50, 3.51), respectivamente. Sustituyendo la Ec. (3.52) en la Ec. (4.15), sólo hay un término de segundo orden en el espectro  $S_\phi^{\tau \leq 0}(\omega)$  y está dado por

$$S_\phi^{(2)}(\omega) = 4\gamma_j \alpha_{jj} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) h_\phi^{(2)}(|\tau|), \quad (4.18)$$

donde  $h_\phi^{(2)}(|\tau|)$  está dada en la Ec. (3.53).

La Ec. (4.16) es una variante del espectro de luz comprimida. Para  $\phi = \pi/2$ , de las Ecs. (4.5, 4.7) se tiene que, para el A2N

---

<sup>3</sup>Recuérdese que  $h_{\frac{\tau}{2}}(\tau) \equiv h_{\frac{\tau}{2}}^{\text{fluc}}(\tau)$ , el superíndice recuerda que los operadores están desarrollados en fluctuaciones.

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\omega) = \frac{\gamma_e Y^2}{(1+Y^2)^2} \left[ \left(1 - Y^2 + \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma_e}\right) \frac{\lambda_+}{\omega + \lambda_+^2} + \left(1 - Y^2 - \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma_e}\right) \frac{\lambda_-}{\omega + \lambda_-^2} \right], \quad (4.19)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\omega) = \frac{2\gamma_e Y^4}{(1+Y^2)^2} \left[ \left(1 + Y^2 + \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma_e}\right) \frac{\lambda_+}{\omega + \lambda_+^2} + \left(1 - Y^2 - \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma_e}\right) \frac{\lambda_-}{\omega + \lambda_-^2} \right], \quad (4.20)$$

donde  $\lambda_{\pm} = -(3/4)\gamma_e \pm \delta$ . El espectro total,  $S_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\omega) + S_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\omega)$ , es

$$S_{\frac{\pi}{2}}(\omega) = \frac{\gamma_e Y^2}{1+Y^2} \left[ \left(1 + \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma_e}\right) \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + \left(1 - \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma_e}\right) \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} \right]. \quad (4.21)$$

El espectro total  $S_{\frac{\pi}{2}}(\omega)$  para campo débil, para excitación crítica y para excitación en saturación tiene las siguientes propiedades. Para campo débil, se mantiene una sola corrección dependiente de  $Y$  en Ec. (4.21) y se obtiene

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{\text{débil}}(\omega) \approx -\gamma_e Y^2 \left[ \frac{1}{\omega^2 + (\gamma_e/2)^2 (1+4Y^2)} + \frac{3\gamma_e Y^2/2}{[\omega^2 + (\gamma_e/2)^2 (1+Y^2)]^2} \right], \quad (4.22)$$

expresión en la se identifican dos picos, el principal con una anchura de  $\gamma_e(1+Y^2)$  y el otro pico que incrementa la anchura ligeramente. En contraste a lo anterior, Rice y Carmichael [29] encontraron que para campo débil, la luz comprimida reduce la anchura de la lorentziana del espectro incoherente de FR, la reduce porque en campo débil el espectro proviene de la resta de dos lorentzianas [29, Fig. 2], una de las cuales (la de signo negativo) lleva las fluctuaciones de la luz comprimida. En el presente caso, sin embargo, el ruido extra se correlaciona para aumentar el tamaño y el ancho del espectro de la luz comprimida. Para el valor de intensidad crítica,  $\Omega_e = \gamma_e/4$ , la Ec. (4.21) evaluada en  $Y^2 = 1/8$  ( $\Rightarrow \delta = 0$ ) da como resultado

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{\text{crítica}}(\omega) = -\frac{\gamma_e^2}{24} \frac{5(3\gamma_e/4)^2 + 3\omega^2}{[\omega^2 + (3\gamma_e/4)^2]^2}. \quad (4.23)$$

Y para la intensidad en saturación,  $\Omega_e = \gamma_e/\sqrt{2}$ , la Ec. (4.21) se evalúa en  $Y = 1$  para obtener

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{\text{sat}}(\omega) = \frac{2\gamma_e^4}{4\gamma_e^4 + \gamma_e^2\omega^2 + 4\omega^4} - \frac{4\gamma_e^2\omega^2}{4\gamma_e^4 + \gamma_e^2\omega^2 + 4\omega^4}. \quad (4.24)$$

Castro-Beltrán en [15] explica, principalmente, cómo la DHC ayuda a entender el por qué no se había podido medir la luz comprimida, la razón: la baja eficiencia cuántica de los fotodetectores y la aparición de fluctuaciones de tercer orden producidas por el valor en excitación crítica  $\Omega_e = \gamma_e/4$ . En el Cap. 2, pág. 28, se vio cómo hasta 2015 fue que se observó luz comprimida, Schulte, *et al.* [24].

Castro-Beltrán, *et al.* [16] emplearon la DHC para mostrar lo no gaussiano de las fluctuaciones en la FR y se calculó, tanto la separación del espectro del ruido de las cuadraturas en segundo y tercer orden de acuerdo con las Ecs. (4.19, 4.20), como se calculó el espectro total, Ec. (4.21). La Fig. 4.1 muestra el espectro en fluctuaciones  $S_{\pi/2}(\omega)$ , en (a) para excitación débil,  $\Omega_e = \gamma_e/10$ , y en (b) para excitación crítica,  $\Omega_e = \gamma_e/4$ . Como se puede apreciar, en (a) el espectro total está menos contaminado con el espectro de tercer orden,  $S_{\pi/2}(\omega) \simeq S_{\pi/2}^{(2)}(\omega)$ , que en (b). Emplear una excitación débil es lo que hace difícil detectar la luz comprimida.

El espectro integrado representa la potencia total emitida por el átomo. Del mismo modo, el espectro integrado dependiente de la fase representa el tamaño del ruido en una cuadratura: en el tratamiento estándar de la luz comprimida se expresa en términos de la varianza  $V_\phi = \langle : \Delta\sigma_\phi(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) : \rangle$ , Ec. (2.61), de Collett, *et al.* [25]

$$\frac{1}{4\pi\gamma_e} \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(\omega) d\omega = \langle : \Delta\sigma_\phi(0) \Delta\sigma_\phi(\tau) : \rangle. \quad (4.25)$$

Para el caso en resonancia, integrando las Ecs. (4.16, 4.17) se tiene

CAPÍTULO 4. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 2 NIVELES

---

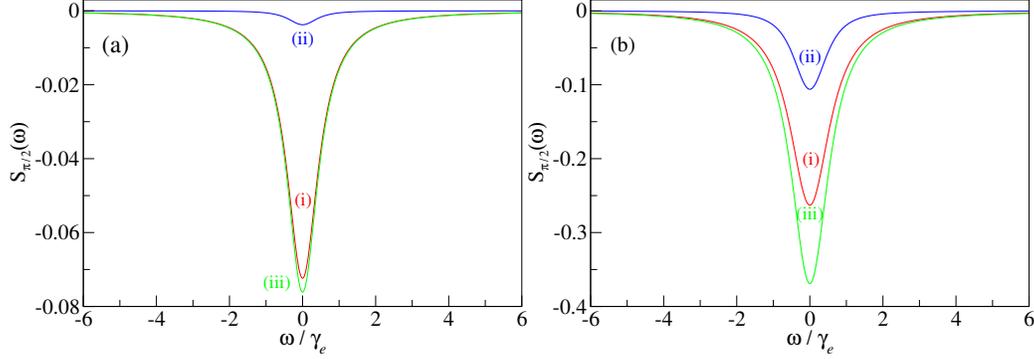


Figura 4.1: Espectros en fluctuaciones para el A2N con  $\phi = \pi/2$ . (a) Excitación débil,  $\Omega_e = \gamma_e/10$ . (b) Excitación crítica  $\Omega_e = \gamma_e/4$ . En ambos casos se muestra en (i) el segundo orden, en (ii) el tercer orden y en (iii) el espectro total [16, Fig. 4 y Fig. 5].

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma_e \frac{Y^2(1-Y^2)}{2(1+Y^2)} = 8\pi\gamma_e V_{\frac{\pi}{2}}, \quad (4.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma_e \frac{Y^4}{(1+Y^2)^2}. \quad (4.27)$$

La Ec. (4.26) es un resultado conocido, en el cual la varianza es negativa (firma de la luz comprimida) para  $Y^2 = 2(\Omega_e/\gamma_e)^2 \ll 1$ , Ec. (2.39). Es un resultado conocido ya que en la Sec. 2.5, en Ec. (2.67), se obtuvo la expresión para  $V_{\frac{\pi}{2}}$  y se vio en la pág. 28 que para  $\Delta_e = 0$  y para  $\Omega_e \in [0, 1/\sqrt{2}]$  se tiene que  $V_{\frac{\pi}{2}} < 0$ . En la Fig. 2.10(b) se analiza este caso y algunos casos para  $\Delta_e \neq 0$ . La Ec. (4.27) es un nuevo resultado, es negativo para todo valor de  $Y$  y se requiere para que coincida con el ruido total de la cuadratura en fase,  $\int_{-\infty}^{\infty} S_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\omega) d\omega$ , esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\frac{\pi}{2}}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma_e V_0,$$

donde  $V_0 = Y^2/2(1+Y^2)$ , Castro-Beltrán, *et al.* [16, Ec. (37)].

## Capítulo 5

# DHC de la fluorescencia del átomo de 3 niveles tipo $\Lambda$

En este capítulo se presenta el estudio de la detección homodina condicionada del átomo de 3 niveles tipo  $\Lambda$  (A3N- $\Lambda$ ) reportado por Castro-Beltrán, *et al.* [19], y que se reproduce en Anexos: Apéndice C, pág. 111.

Se considera un átomo de 3 niveles en el que sólo la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  está excitada por un láser de frecuencia angular de Rabi  $\Omega_s$ . El estado excitado  $|s\rangle$  tiene dos canales de decaimiento: uno directamente al estado base  $|g\rangle$  con razón de decaimiento  $\gamma_s$  y otro canal vía el estado metaestable  $|w\rangle$  de larga vida con razón de decaimiento  $\gamma_d$ , el cual a su vez decae al estado base con una razón  $\gamma_w$ , tal que  $\gamma_s \gg \gamma_d, \gamma_w$ . Este es el modelo del A3N- $\Lambda$ , Fig. 5.1.

El A3N- $\Lambda$  es importante porque la población ocasional en el estado metaestable da lugar a la existencia de intermitencia en la FR de la transición fuerte. Al estar monitoreando la FR de la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  pueden ocurrir dos situaciones. En una, por un lapso se detecta fluorescencia dando lugar a un “período brillante”. En la otra situación, el electrón en vez de decaer al estado base, lo hace al estado metaestable, permaneciendo en este un tiempo  $t \sim \gamma_d^{-1} \gg \gamma_s^{-1}$  e interrumpiendo la emisión de la fluorescencia dando lugar a un “período oscuro”. En el dominio espectral, el estado metaestable se manifiesta con la aparición de un pico inelástico muy estrecho, el cual está encima del pico central del espectro de un sistema de dos niveles como lo observaron experimentalmente en el 2000 Bühner y Tamm [30, Fig. 4]. Estos autores sugirieron realizar, en su momento, mediciones complementarias de la fluorescencia dependiente de la fase; pero hasta el momento no hay noticias

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

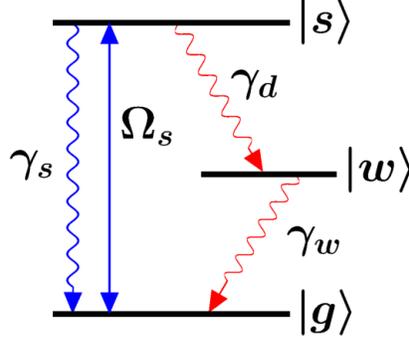


Figura 5.1: En el A3N- $\Lambda$  un láser de frecuencia angular  $\nu_s$  y frecuencia de Rabi  $\Omega_s$  excita la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ . El estado excitado puede decaer espontáneamente al estado base con razón de decaimiento  $\gamma_s$  o puede hacerlo al estado metaestable  $|w\rangle$  con razón de decaimiento  $\gamma_d$ , el cual a su vez decae al estado base  $|g\rangle$  con  $\gamma_w$ .

de que se hayan realizado, quizás debido a restricciones experimentales.

## 5.1. Ecuaciones de Bloch ópticas

Siguiendo una estrategia parecida a la empleada para el A2N en la Sec. 2.2, aquí se obtienen las ecuaciones de Bloch del A3N- $\Lambda$ . En un marco rotante lento a la frecuencia angular del láser  $\nu_s$ ,<sup>1</sup> el Hamiltoniano y la ecuación maestra para el operador de densidad  $\rho$ , Ec. (13), están dados por

$$\mathcal{H} = \hbar\Delta_s\sigma_{ss} + \hbar\frac{\Omega_s}{2}(\sigma_{sg} + \sigma_{gs}), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i\frac{\Omega_s}{2}[\sigma_{sg} + \sigma_{gs}, \rho] + \sum_{j=s,w} \frac{\gamma_j}{2}(2\sigma_{gj}\rho\sigma_{jg} - \sigma_{jj}\rho - \rho\sigma_{jj}) \\ & + \frac{\gamma_d}{2}(2\sigma_{ws}\rho\sigma_{sw} - \sigma_{ss}\rho - \rho\sigma_{ss}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} = & -i\frac{\Omega_s}{2}[\sigma_{sg} + \sigma_{gs}, \rho] - \frac{\gamma_s + \gamma_d}{2}(\sigma_{ss}\rho + \rho\sigma_{ss}) - \frac{\gamma_w}{2}(\sigma_{ww}\rho + \rho\sigma_{ww}) \\ & + \sum_{j=s,w} \gamma_j\sigma_{gj}\rho\sigma_{jg} + \gamma_d\sigma_{ws}\rho\sigma_{sw}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Marco rotante lento, véase pág. 11.

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

La desintonía átomo-campo es  $\Delta_s = \omega_s - \nu_s$  y  $\sigma_{jk}$  son los operadores de pseudoespín de Pauli.<sup>2</sup> En este capítulo se hace  $\Delta_s = 0$  con los siguientes dos propósitos. El primero es que se limita la discusión a lo esencial de los principales temas; el segundo propósito consiste en que con posteriores aproximaciones se obtienen soluciones analíticas cerradas aproximadas.

Las ecuaciones para elementos de matriz de  $\rho$  y sus derivadas temporales se calculan de la definición  $\rho_{jk} \equiv \langle j | \rho | k \rangle$ , Ec. (2.8), esto es

$$\dot{\rho}_{ss} = i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{sg} - \rho_{gs}) - (\gamma_s + \gamma_d) \rho_{ss}, \quad (5.4)$$

$$\dot{\rho}_{sg} = i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{ss} - \rho_{gg}) - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_d}{2} \right) \rho_{sg}, \quad (5.5)$$

$$\dot{\rho}_{gs} = -i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{ss} - \rho_{gg}) - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_d}{2} \right) \rho_{gs}, \quad (5.6)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = -i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{sg} - \rho_{gs}) + \gamma_s \rho_{ss} + \gamma_w \rho_{ww}, \quad (5.7)$$

.....

$$\dot{\rho}_{sw} = -i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{gw} - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_d}{2} + \frac{\gamma_a}{2} \right) \rho_{sw}, \quad (5.8)$$

$$\dot{\rho}_{ws} = i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{wg} - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_d}{2} + \frac{\gamma_w}{2} \right) \rho_{ws}, \quad (5.9)$$

$$\dot{\rho}_{ww} = \gamma_d \rho_{ss} - \gamma_w \rho_{ww}, \quad (5.10)$$

$$\dot{\rho}_{wg} = i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{ws} - \frac{\gamma_w}{2} \rho_{wg}, \quad (5.11)$$

$$\dot{\rho}_{gw} = -i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{sw} - \frac{\gamma_w}{2} \rho_{gw}. \quad (5.12)$$

En la Ec. (5.7) se sustituye  $\rho_{ww} = 1 - \rho_{ss} - \rho_{gg}$  debido a la conservación de la probabilidad. Haciendo esto, las Ecs. (5.4-5.7) quedan desacopladas del resto, ya no dependen de  $\rho_{sw}$ ,  $\rho_{ws}$ ,  $\rho_{ww}$ ,  $\rho_{wg}$ ,  $\rho_{gw}$ ; por lo que las ecuaciones para los elementos de matriz del operador de densidad que describen el A3N-

---

<sup>2</sup>Operadores de pseudoespín de Pauli, véase pie de pág. 10. En el A3N- $\Lambda$  no está definido el operador  $\sigma_z$  como en el A2N.

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

$\Lambda$  son

$$\dot{\rho}_{ss} = i\frac{\Omega_s}{2}(\rho_{sg} - \rho_{gs}) - \gamma_+\rho_{ss}, \quad (5.13)$$

$$\dot{\rho}_{sg} = i\frac{\Omega_s}{2}(\rho_{ss} - \rho_{gg}) - \frac{\gamma_+}{2}\rho_{sg}, \quad (5.14)$$

$$\dot{\rho}_{gs} = -i\frac{\Omega_s}{2}(\rho_{ss} - \rho_{gg}) - \frac{\gamma_+}{2}\rho_{gs}, \quad (5.15)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = -i\frac{\Omega_s}{2}(\rho_{sg} - \rho_{gs}) + \gamma_-\rho_{ss} - \gamma_w\rho_{gg} + \gamma_w, \quad (5.16)$$

donde

$$\gamma_+ = \gamma_s + \gamma_d, \quad \gamma_- = \gamma_s - \gamma_w. \quad (5.17)$$

Las ecuaciones de Bloch para el A3N- $\Lambda$  se obtienen sustituyendo  $\rho_{kj} = \langle \sigma_{jk} \rangle$  y  $\dot{\rho}_{kj} = \langle \dot{\sigma}_{jk} \rangle$ , Ecs. (2.20), esto es

$$\langle \dot{\sigma}_{ss} \rangle = -i\frac{\Omega_s}{2}[\langle \sigma_{sg} \rangle - \langle \sigma_{gs} \rangle] - \gamma_+ \langle \sigma_{ss} \rangle, \quad (5.18)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{sg} \rangle = -i\frac{\Omega_s}{2}[\langle \sigma_{ss} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle] - \frac{\gamma_+}{2} \langle \sigma_{sg} \rangle, \quad (5.19)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{gs} \rangle = i\frac{\Omega_s}{2}[\langle \sigma_{ss} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle] - \frac{\gamma_+}{2} \langle \sigma_{gs} \rangle, \quad (5.20)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{gg} \rangle = i\frac{\Omega_s}{2}[\langle \sigma_{sg} \rangle - \langle \sigma_{gs} \rangle] + \gamma_- \langle \sigma_{ss} \rangle - \gamma_w \langle \sigma_{gg} \rangle + \gamma_w, \quad (5.21)$$

que se escriben en la forma  $\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = \mathbf{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle + \mathbf{b}$ , Ec. (3.64),

$$\mathbf{s} = (\sigma_{ss}, \sigma_{sg}, \sigma_{gs}, \sigma_{gg})^T \quad (5.22)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_+ & -i\Omega_s/2 & i\Omega_s/2 & 0 \\ -i\Omega_s/2 & -\gamma_+/2 & 0 & i\Omega_s/2 \\ i\Omega_s/2 & 0 & -\gamma_+/2 & -i\Omega_s/2 \\ \gamma_- & i\Omega_s/2 & -i\Omega_s/2 & -\gamma_w \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{b} = (0, 0, 0, \gamma_w). \quad (5.24)$$

Las soluciones en estado estacionario del A3N- $\Lambda$ , como se vio en la Subsec. 2.2.1, se obtienen haciendo  $\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = 0$  y aplicando la Ec. (2.30), con  $j, k = s, w, g$ ;

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

$$\alpha_{ss} = \frac{\mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2)\mathcal{Y}^2}, \quad (5.25)$$

$$\alpha_{sg} = i \frac{\mathcal{Y}/\sqrt{2}}{1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2)\mathcal{Y}^2}, \quad (5.26)$$

$$\alpha_{gs} = -i \frac{\mathcal{Y}/\sqrt{2}}{1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2)\mathcal{Y}^2}, \quad (5.27)$$

$$\alpha_{gg} = \frac{1 + \mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2)\mathcal{Y}^2}, \quad (5.28)$$

$$\alpha_{ww} = q\alpha_{ss}, \quad (5.29)$$

donde  $\alpha_{jk} \equiv \langle \sigma_{jk} \rangle_{st}$  y

$$q = \frac{\gamma_d}{\gamma_w}, \quad \mathcal{Y} = \sqrt{2} \frac{\Omega_s}{\gamma_+}. \quad (5.30)$$

Las Ecs. (5.25-5.27) se convierten en las EBO-EE para el A2N, Ecs. (2.40-2.42), cuando se sustituye  $\gamma_d = 0$  ( $q = 0$ ) en las Ecs. (5.17, 5.30), y haciendo  $s = e$ , se tiene que  $\gamma_+ = \gamma_s = \gamma_e$  y que  $\mathcal{Y} = Y = \sqrt{2}\Omega_e/\gamma_e$ , Ec. (2.39). Adicionalmente se emplea que  $\alpha_z = 2\alpha_{ee} - 1$ .

Resolver analíticamente las Ecs. (5.18-5.21) en el caso general es demasiado complicado, sin embargo, en el límite

$$\gamma_s \gg \gamma_d, \gamma_w \quad (5.31)$$

se obtienen soluciones aproximadas, límite en el cual se presentan los períodos brillantes y oscuros debidos al estado metaestable  $|w\rangle$ . Se emplea la transformada de Laplace para obtener tanto los valores esperados de las componentes del vector  $\mathbf{s}(t) = (\sigma_{ss}(t), \sigma_{sg}(t), \sigma_{gs}(t), \sigma_{gg}(t))^T$ , como las correlaciones a dos tiempos (para detalles ver [19, Apéndice A]). Con la condición inicial de átomo en estado base  $\mathbf{s}(0) = (0, 0, 0, 1)^T$ , las soluciones son

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO A

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

$$\langle \sigma_{ss}(t) \rangle = \frac{\mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2} f(t) + \alpha_{ss} (1 - e^{\lambda_2 t}), \quad (5.32)$$

$$\langle \sigma_{sg}(t) \rangle = i \frac{\mathcal{Y}/\sqrt{2}}{1 + \mathcal{Y}^2} f(t) + \frac{\sqrt{2}\gamma_+\mathcal{Y}}{8\delta} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) + \alpha_{sg} (1 - e^{\lambda_2 t}), \quad (5.33)$$

$$\langle \sigma_{gs}(t) \rangle = -i \frac{\mathcal{Y}/\sqrt{2}}{1 + \mathcal{Y}^2} f(t) - \frac{\sqrt{2}\gamma_+\mathcal{Y}}{8\delta} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) + \alpha_{gs} (1 - e^{\lambda_2 t}), \quad (5.34)$$

$$\langle \sigma_{gg}(t) \rangle = e^{\lambda_2 t} - \frac{\mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2} f(t) + \alpha_{gg} (1 - e^{\lambda_2 t}), \quad (5.35)$$

donde

$$f(t) = e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{3\gamma_+}{4\epsilon} \right) e^{\lambda_+ t} + \left( 1 - \frac{3\gamma_+}{4\epsilon} \right) e^{\lambda_- t} \right], \quad (5.36)$$

$$\lambda_1 = -\gamma_+/2, \quad \lambda_2 = -\gamma_w \left( 1 + q \frac{\Omega^2}{2\Omega^2 + \gamma_s^2} \right), \quad \lambda_{\pm} = -\frac{3\gamma_+}{4} \pm \epsilon \quad (5.37)$$

y

$$\epsilon = \frac{\gamma_+}{4} \sqrt{1 - 8\mathcal{Y}^2}. \quad (5.38)$$

En la Ec. (5.38), sustituyendo  $\gamma_+ = \gamma_e$  y  $\mathcal{Y} = Y$  se obtiene  $\epsilon = \delta = \gamma_e \sqrt{1 - 8Y^2}/4$ , Ec. (2.39).

En estas soluciones aproximadas se identifican las Ecs. (5.37) como los eigenvalores de la matriz  $\mathbb{M}$ , Ec. (5.23). El primer eigenvalor,  $\lambda_1$ , es exacto y es la mitad de la razón de decaimiento del estado excitado  $|s\rangle$ . Aunque no está en las Ecs. (5.32-5.35), sí aparece más adelante en las correlaciones de segundo orden. Por otro lado,  $\lambda_2$  representa la razón de decaimiento lenta debida al estado metaestable. Esto hace que el estado estacionario se alcance después de un tiempo grande,  $t \sim \gamma_d^{-1}$ . Los eigenvalores  $\lambda_{\pm}$  representan la evolución coherente amortiguada, son reales si  $8\mathcal{Y}^2 \leq 1$  y son complejos si  $8\mathcal{Y}^2 > 1$ . Los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_{\pm}$  contienen la evolución, como en el caso de un sistema de dos niveles, hacia un estado cuasi estacionario (reemplazando la razón de decaimiento  $\gamma_e$  del A2N por  $\gamma_+$  para el A3N-A), como consecuencia del decaimiento lento.

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

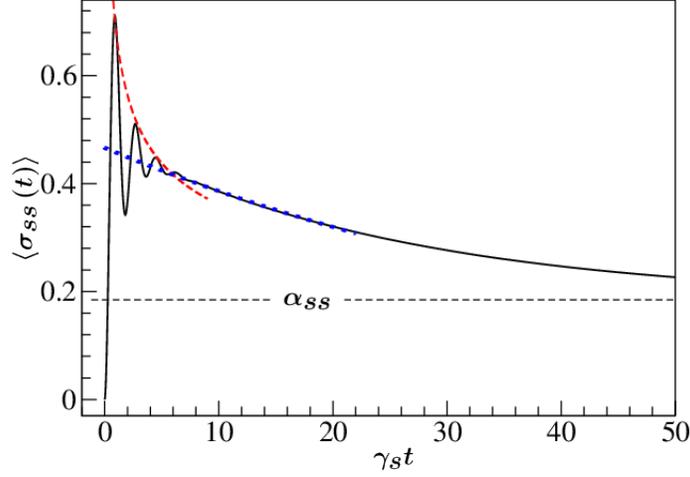


Figura 5.2: Dos tipos de decaimiento gobiernan a  $\langle \sigma_{ss}(t) \rangle$  del A3N- $\Lambda$ . Inicialmente domina la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ , curva con guiones rojos que va como  $e^{-\gamma_s t}$ . Posteriormente domina el decaimiento de  $|s\rangle$  a  $|w\rangle$  descrito por la curva con guiones azules y que va como  $e^{-\gamma_w t}$ . Finalmente la población tiende a su valor en estado estacionario  $\alpha_{ss} = 0.184$ . Parámetros:  $\Omega_s = 3.5/\gamma_s$ ,  $\gamma_s = 1$ ,  $\gamma_d = 0.050$ ,  $\gamma_w = 0.015$  y  $\Delta_s = 0$ .

En la pág. 58 se vio uno de los efectos que tiene el estado metaestable  $|w\rangle$  en el A3N- $\Lambda$ , el efecto del parpadeo en la FR. Ahora, con las soluciones a las EBO se puede analizar esto. La Fig. 5.2 muestra los dos tipos de decaimiento que gobiernan a  $\langle \sigma_{ss}(t) \rangle$ . En el primer lapso se presenta una fuerte oscilación cuya envolvente, curva con guiones rojos, va como  $e^{-\gamma_s t}$  indicando que domina la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ . La oscilación en  $\langle \sigma_{ss}(t) \rangle$  se debe a los parámetros empleados:  $\lambda_2 = -0.0390$  en Ec. (5.32) contribuye muy poco y la principal contribución es  $f(t)$ , Ec. (5.36), para la cual  $8\mathcal{Y}^2 > 1 \Rightarrow$  que  $\epsilon$  es imaginario puro y  $\lambda_{\pm} = -\frac{3\gamma_{\pm}}{4} \pm \epsilon$  hacen que las exponenciales  $e^{\lambda_{\pm} t}$  den lugar a funciones trigonométricas. Posteriormente, en otro lapso, cambia el comportamiento de la población, a la que se le puede ajustar la curva con guiones azules y que va como  $e^{-\gamma_w t}$  indicando que en este intervalo de tiempo domina el decaimiento  $|s\rangle \rightarrow |w\rangle$ , aquí domina principalmente  $\lambda_2$  y  $f(t)$  contribuye muy poco.

Como se dijo arriba, con las soluciones analíticas aproximadas se calculan las funciones de correlación a dos tiempos  $\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(\tau) \sigma_{gs}(0) \rangle$  y  $\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(\tau) \rangle$ . Para la primera de ellas, de acuerdo a la FCR dicha función es la solución a la ecuación  $\frac{d}{d\tau} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle + \mathbf{b}$ , Ec. (3.77), con la condición inicial

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

$\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(0) \sigma_{gs}(0) \rangle = (0, 0, 0, \alpha_{ss})^T$ , Ec. (A.10) con  $j = s$ , (Tabla A.2) esto es

$$\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(\tau) \sigma_{gs}(0) \rangle = \alpha_{ss} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle, \quad (5.39)$$

es decir, estas funciones de correlación son idénticas a las Ecs. (5.32-5.35) veces el factor  $\alpha_{ss}$ , reemplazando  $t$  por  $\tau$ . Para  $\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(\tau) \rangle$  se sigue el procedimiento análogo al de Castro-Beltrán, *et al.* [19, Apéndice A]), con la condición inicial  $\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(0) \rangle = (0, 0, \alpha_{ss}, \alpha_{sg})^T$ , Ec. (A.11) con  $j = s$  y  $\ell, m = s, g$  (ver Tabla A.2).

Las funciones de correlación  $\langle \sigma_{sg}(0) \mathbf{s}(\tau) \rangle$  se emplean a su vez para obtener las funciones de correlación en fluctuaciones  $\langle \Delta \sigma_{sg}(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \rangle$ , donde las componentes del vector columna  $\Delta \mathbf{s}$  se escribe como  $\Delta \sigma_{\ell m} = \sigma_{\ell m} - \alpha_{\ell m}$ , Ec. (3.78), con  $\langle \Delta \sigma_{\ell m} \rangle = 0$ , por lo tanto, para dos de las componentes de  $\Delta \mathbf{s}(\tau)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \Delta \sigma_{sg}(0) \Delta \sigma_{sg}(\tau) \rangle &= \langle [\sigma_{sg}(0) - \alpha_{sg}] [\sigma_{sg}(\tau) - \alpha_{sg}] \rangle \\ &= \langle \sigma_{sg}(0) \sigma_{sg}(\tau) \rangle - \alpha_{sg} \langle \sigma_{sg}(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta \sigma_{sg}(0) \Delta \sigma_{gs}(\tau) \rangle &= \langle [\sigma_{sg}(0) - \alpha_{sg}] [\sigma_{gs}(\tau) - \alpha_{gs}] \rangle \\ &= \langle \sigma_{sg}(0) \sigma_{gs}(\tau) \rangle - \alpha_{sg} \langle \sigma_{gs}(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde se empleó que  $\langle \sigma_{sg}(0) \rangle \equiv \alpha_{sg}$ , Ec. (2.30). Las correlaciones a dos tiempos del lado derecho de las ecuaciones se calculan empleando la FCR, Sec. 3.5, con  $\alpha_{sg}$ , Ec. (5.26), solución a las EBO-EE. Se sustituyen dichas soluciones en las Ecs. (5.40, 5.41) y se obtiene

$$\langle \Delta \sigma_{sg}(0) \Delta \sigma_{sg}(\tau) \rangle = C_1 e^{\lambda_1 \tau} - C_2 e^{\lambda_2 \tau} + C_+ e^{\lambda + \tau} + C_- e^{\lambda - \tau}, \quad (5.42)$$

$$\langle \Delta \sigma_{sg}(0) \Delta \sigma_{gs}(\tau) \rangle = C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau} - C_+ e^{\lambda + \tau} - C_- e^{\lambda - \tau}, \quad (5.43)$$

donde

$$C_1 = \frac{\mathcal{Y}^2/4}{1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2) \mathcal{Y}^2}, \quad (5.44)$$

$$C_2 = \frac{q\mathcal{Y}^2/4}{(1 + \mathcal{Y}^2) [1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2) \mathcal{Y}^2]^2}, \quad (5.45)$$

$$C_{\mp} = \frac{\mathcal{Y}^2 [1 - \mathcal{Y}^2 \pm (1 - 5\mathcal{Y}^2) (\gamma_+/4\epsilon)]}{8(1 + \mathcal{Y}^2) [1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2) \mathcal{Y}^2]}. \quad (5.46)$$

## 5.2. ESPECTRO DE FLUORESCENCIA

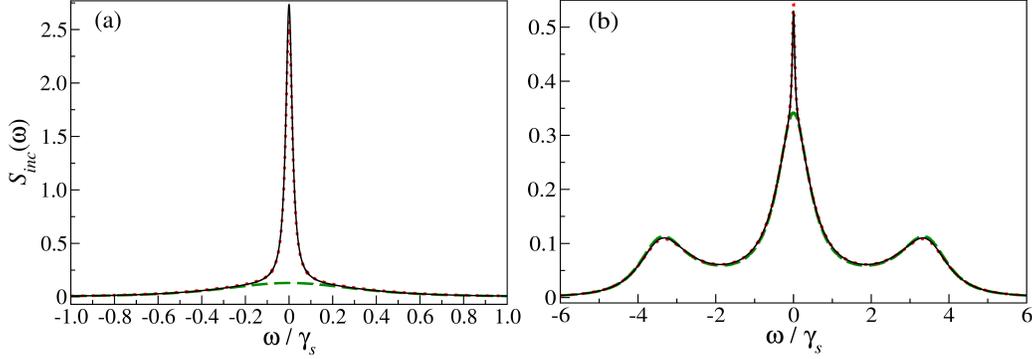


Figura 5.3: Espectro incoherente del A3N-  $\Lambda$ . (a) Para un campo de láser en saturación,  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$ . (b) Para un campo fuerte,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Ambos espectros con  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$  y  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$ . Las curvas continua negra y la punteada roja son los espectros exacto y aproximado, respectivamente, y la curva con guiones verdes es el espectro del A2N.

## 5.2. Espectro de fluorescencia

El espectro  $S(\omega)$  de FR se definió en la Sec. 3.7 y se mostró la forma en cómo se separa en  $S(\omega) = S_{coh}(\omega) + S_{inc}(\omega)$ , Ecs. (3.91-3.93). Para el A3N- $\Lambda$  se sustituye la Ec. (5.43) en la Ec. (3.93), con  $j = s$ , para obtener

$$S_{inc}(\omega) = \frac{1}{\pi\alpha_{ss}} \left[ C_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + C_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - C_1 \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2} - C_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (5.47)$$

En la Fig. 5.3 se compara este espectro, empleando los eigenvalores de la Ec. (5.37), con el espectro exacto y con el espectro del A2N. Se reproduce notablemente bien el espectro exacto. El pico agudo en rojo es ligeramente más pequeño en el caso de saturación que en el exacto en negro, ocurre lo contrario para campo fuerte. En la Ec. (5.47), haciendo  $\gamma_d = 0$  ( $q = 0$ ) y  $s = e$  ( $\Rightarrow \gamma_+ = \gamma_e$ ,  $\lambda_1 = -\gamma_e/2$ ,  $C_2 = 0$ ,  $\lambda_{\pm} = 3\gamma_e/4 \pm \delta$ ), se tiene el espectro del A2N en forma exacta, Mollow [8, Ec. (4.33)].

El espectro coherente del A3N- $\Lambda$  se obtiene sustituyendo  $j = s$  en la Ec. (3.92), donde a su vez se sustituyen  $\alpha_{ss}$ ,  $\alpha_{sg}$  de Ecs. (5.25, 5.26) para obtener

$$S_{coh}(\omega) = \frac{1}{\pi [1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2) \mathcal{Y}^2]} \delta(\omega), \quad (5.48)$$

### 5.3. ESPECTRO DE LUZ COMPRIMIDA

---

el cual es más pequeño que el del A2N (donde  $q = 0$ ).

### 5.3. Espectro de luz comprimida

De acuerdo con Carmichael [31, Ec. (3.26)], el espectro de “luz comprimida” (lc) de una fuente ideal se define como la transformada coseno de Fourier de las fluctuaciones de las cuadraturas en DHB,<sup>3</sup> esto es

$$S_{\phi}^{\text{lc}}(\omega) = 8\gamma_+\eta \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) \langle : \Delta\sigma_{\phi}(0) \Delta\sigma_{\phi}(\tau) : \rangle \quad (5.49)$$

$$= 8\gamma_+\eta \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) \text{Re} [\langle \Delta\sigma_{jg}(0) \Delta\sigma_{\phi}(\tau) \rangle e^{-i\phi}], \quad (5.50)$$

donde la transición atómica es entre el estado base  $|g\rangle$  y el estado excitado  $|j\rangle$ ,  $\eta$  es un coeficiente combinado de eficiencia de detección y de recolección de fotones,  $\Delta\sigma_{\phi}(\tau)$  está dada en la Ec. (3.23) y  $\phi$  es la fase del oscilador local, Fig.3.2, configuración en la que para medir en DHB se bloquea la trayectoria hacia el detector  $\mathcal{I}$ . Este es un espectro incoherente ya que depende de las fluctuaciones del campo,  $\Delta E_{\phi} \propto \Delta\sigma_{\phi}$ .

Aunque los parámetros del A3N- $\Lambda$  y del láser no siempre permiten la presencia de luz comprimida,  $S_{\phi}^{\text{lc}}(\omega) < 0$ , se mantiene este nombre para este espectro para distinguirlo del espectro de ruido de las cuadraturas  $S_{\phi}(\omega) = 4\gamma_j\alpha_{jj} \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) [h_{\phi}^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) - 1]$ , Ec. (4.14), el cual se calcula por DHC más adelante.

En la Ec. (5.50), con  $j = s$ , se sustituye la Ec. (5.43) para obtener, para  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi/2$ , los espectros

$$S_0^{\text{lc}}(\omega) = -8\gamma_+\eta C_1 \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2}, \quad (5.51)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{\text{lc}}(\omega) = 8\gamma_+\eta \left[ C_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + C_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - C_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (5.52)$$

---

<sup>3</sup>El espectro de luz comprimida de una fuente ideal es el que produce la fuente (atómica) sola, despreciando el campo libre. Dado que se supone que este último se encuentra en el estado de vacío, su omisión se justifica sobre la base de utilizar los ordenamientos normal y temporal de los operadores.

5.3. ESPECTRO DE LUZ COMPRIMIDA

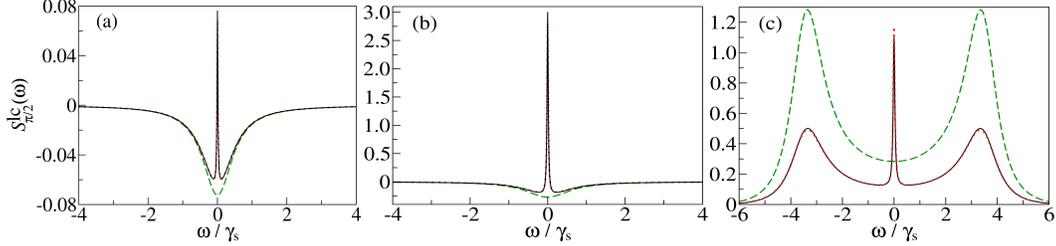


Figura 5.4: Espectros  $S_\phi^{\text{lc}}(\omega)$  del A3N- $\Lambda$  para  $\phi = \pi/2$  con (a)  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ , (b)  $\Omega_s = 0.2625\gamma_s$  y (c)  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Las curvas continua negra y la punteada roja son los espectros exacto y aproximado del A3N- $\Lambda$ , respectivamente, con parámetros  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$ ,  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$  y  $\eta = 1$ . Las curvas con guión verdes son los espectros del A2N.

El espectro para  $\phi = 0$  consiste en una curva lorentziana con amplitud positiva; no hay luz comprimida ( $C_1 > 0$ ) y tiene anchura de  $\gamma_+/2 = -\lambda_1$ . Lo anterior también ocurre para el A2N, pero con anchura  $\gamma_e/2$ . Para  $\phi = \pi/2$  el espectro es más interesante, como se muestra en la Fig. 5.4 para tres intensidades del campo, y se compara con el espectro del A2N. Lo interesante es que  $S_{\pi/2}^{\text{lc}}(\omega)$  presenta un pico angosto debido a la presencia del estado metaestable  $|w\rangle$  y corresponde al último término en la Ec. (5.52). A partir de campo débil y hasta un poco más que saturación, los dos primeros términos de la Ec. (5.52) se suman para formar un único pico negativo, indicando luz comprimida. Rice y Carmichael [29] encontraron que el espectro de campo débil ( $Y^2 \ll 1$ ) en el A2N tiene un ancho de línea menor que  $\gamma_s/2$  debido al valor negativo de las amplitudes de las lorentzianas asociadas a los dos primeros términos de la Ec. (5.52), lo que resulta en una lorentziana al cuadrado, Mollow [8]. En el A3N- $\Lambda$  hay menos luz comprimida, y el pico angosto divide el pico de luz comprimida. Para campos fuertes, Fig. 5.4(c), el espectro consiste en las bandas laterales del triplete de Mollow<sup>4</sup> más el pico extra.

Una manifestación adicional del estado metaestable es la reducción de las bandas laterales de los espectros de cuadratura en comparación con los del A2N. Esto se debe a que el estado  $|w\rangle$ , al aumentar  $\Omega_s$ , ocupa una fracción importante de la población del estado estacionario,  $\alpha_{ww} = q\alpha_{ss}$ , Ec. (5.29).

En la Sec. 2.5 se expuso un enfoque alternativo para estudiar luz comprimida a través de la varianza  $V_\phi = \frac{1}{2}\text{Re}[\alpha_{jj} - |\alpha_{jg}|^2 - \alpha_{jg}^2 e^{-2i\phi}]$ , Ec. (2.64), o ruido en una cuadratura. Sustituyendo  $j = s$  en Ec. (2.64) y a su vez

<sup>4</sup>Triplete de Mollow, véase pág. 4.

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.3. ESPECTRO DE LUZ COMPRIMIDA

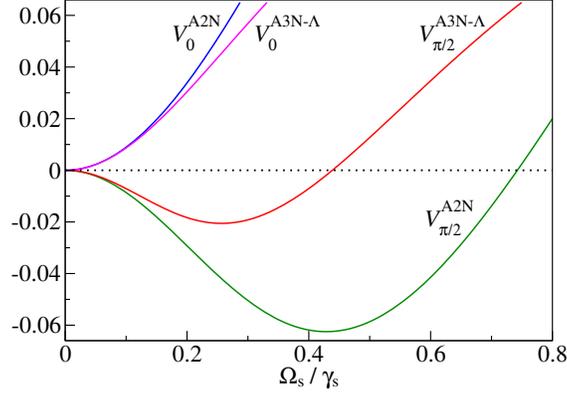


Figura 5.5: Varianza de la fluorescencia resonante para excitaciones de débil a moderadamente fuerte. Para el A2N, Ecs. (2.66, 2.67), y para el A3N- $\Lambda$ , Ecs. (5.53, 5.54). Los parámetros adicionales para el A3N- $\Lambda$  son  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$  y  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$ .

sustituyendo  $\alpha_{ss}$  y  $\alpha_{sg}$  de Ecs. (5.25, 5.26) se obtiene la varianza del A3N- $\Lambda$  para  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi/2$ , esto es

$$V_0 = 2C_1 = \frac{\mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2)\mathcal{Y}^2}, \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} V_{\pi/2} &= 2(C_2 - C_+ - C_-) \\ &= \frac{\mathcal{Y}^2/2}{(1 + \mathcal{Y}^2)[1 + \mathcal{Y}^2 + (q/2)\mathcal{Y}^2]^2} \left[ \mathcal{Y}^4 \left(1 + \frac{q}{2}\right) + \frac{q}{2}\mathcal{Y}^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

La Fig. 5.5 muestra la comparación de las varianzas  $V_0$  y  $V_{\pi/2}$  para el A3N- $\Lambda$  y para el A2N. Ocurre que  $V_0$  es positiva siempre para cualquier intensidad de excitación del láser, esto es, para  $\phi = 0$  no hay luz comprimida, pero el ruido total es más pequeño para el A3N- $\Lambda$ . Para  $V_{\pi/2}$  ocurre que  $|V_{\pi/2}^{A3N-\Lambda}| < |V_{\pi/2}^{A2N}|$  y el intervalo de excitación del láser para obtener luz comprimida, de  $\Omega_e/\gamma_e \in [0, \sim 0.75]$  para el A2N, se reduce notablemente a  $\Omega_s/\gamma_s \in [0, \sim 0.44]$  para el A2N- $\Lambda$ . Esto ocurre, por un lado, debido al acoplamiento del estado  $|s\rangle$  con el estado metaestable  $|w\rangle$  de larga vida media y, por otro lado, se reduce porque la frecuencia de Rabi para la amplitud mínima está cercana al valor de saturación  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$ .

## 5.4. Espectro de ruido de las cuadraturas

La técnica de DHB, Fig. 3.2, depende de la eficiencia cuántica finita  $\eta$  del detector. Este es un obstáculo clave para observar la débil luz comprimida de la FR de un A2N. Las mediciones de DHC son independientes de la eficiencia del detector, como se discutió en la Sec. 3.1. La función de correlación para  $\phi = 0$  del A3N-  $\Lambda$ , de acuerdo con Castro-Beltrán, *et al.* [19, Ec. (33)] es

$$h_0(\tau \geq 0) = 1 + \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_{ss} + E_{\text{off}}^2} e^{-\gamma_+ \tau}, \quad (5.55)$$

donde  $E_{\text{off}}$  está dado en la Ec. (3.37).

La función de correlación para  $\phi = \pi/2$  del A3N-  $\Lambda$  se obtiene sustituyendo  $j = s$  en la Ec (3.33) para obtener  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0) = \text{Re}[-i \langle \sigma_{sg}(\tau) \rangle] / \alpha_{ss} \alpha_{\pi/2}$ , con  $\alpha_{\pi/2} = \text{Re}[-i \alpha_{sg}]$ , Ec. (3.22), expresiones en las que se sustituye  $\alpha_{ss}$  y  $\sigma_{sg}$  de las Ecs. (5.4, 5.5) para obtener

$$h_{\frac{\pi}{2}}(\tau) = 1 + B_2 e^{\lambda_2 \tau} - B_+ e^{\lambda_+ \tau} - B_- e^{\lambda_- \tau}, \quad (5.56)$$

donde

$$B_2 = q \frac{\mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2}, \quad B_{\pm} = \left(1 + q \frac{\mathcal{Y}^2/2}{1 + \mathcal{Y}^2}\right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1 - 2\mathcal{Y}^2}{8\epsilon/\gamma_+}\right). \quad (5.57)$$

El acoplamiento al nivel metaestable  $|w\rangle$  tiene consecuencias visibles tanto para tiempos cortos como grandes, lo que hace que la amplitud de correlación de la CHD sea mayor que en el caso del A2N, a través del factor  $q = \gamma_d/\gamma_w$ . Esta mayor amplitud decae lentamente hacia el valor de uno, lo que señala la no correlación para valores de  $\tau$  grandes, lo que se nota mejor para valores de excitación  $\Omega_s$  grandes.

Para  $\phi = \pi/2$  la función de correlación  $h_{\pi/2}(\tau)$  en la DHC para el A3N- $\Lambda$  escrita en fluctuaciones de los operadores es:  $h_{\pi/2}^{\text{fluc}}(\tau) = 1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau) + h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$ ,<sup>5</sup> Ec. (3.49), donde, con  $j = s$ , se tiene que  $h_{\pi/2}^{(2)}(\tau) = 2\text{Re}[\alpha_{gs} \langle \Delta\sigma_{\phi}(\tau) \rangle] / \alpha_{ss} \alpha_{\pi/2}$  y  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau) = \langle \Delta\sigma_{\phi}(\tau) \rangle / \alpha_{ss} \alpha_{\pi/2}$ , Ecs. (3.50, 3.51), respectivamente; a su vez  $\Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) = \text{Re}[-i \Delta\sigma_{sg}(\tau)]$ , Ec. (3.23), y  $\alpha_{\pi/2} = \text{Re}[-i \alpha_{sg}]$ , Ec. (3.22). Sustituyendo  $\alpha_{ss}$ ,  $\alpha_{sg}$  y  $\alpha_{gs}$ , Ecs. (5.25-5.27), en las expresiones anteriores se obtiene

---

<sup>5</sup>Recuérdese que  $h_{\phi}(\tau) \equiv h_{\phi}^{\text{fluc}}(\tau)$ ; se emplea el superíndice porque los operadores están desarrollados en fluctuaciones, Sec. 3.2.

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.4. ESPECTRO DE RUIDO DE LAS CUADRATURAS

---

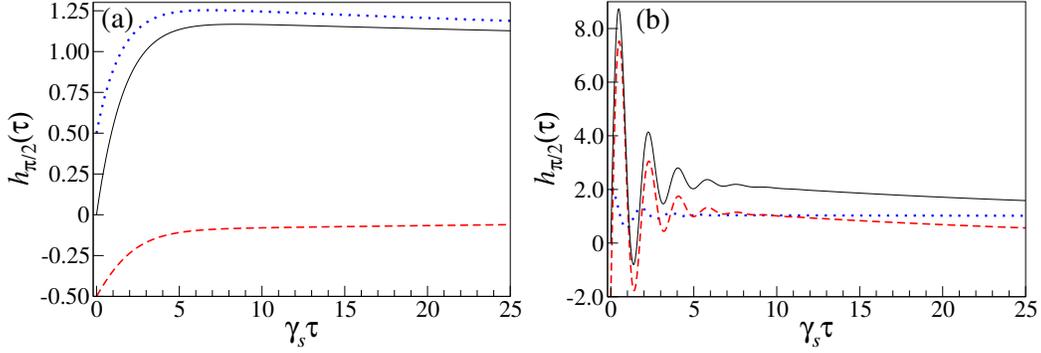


Figura 5.6: Para el A3N- $\Lambda$ , función de correlación amplitud-intensidad  $h_{\pi/2}(\tau)$  (línea continua negra) y sus componentes  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau)$  (línea punteada azul) y  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$  (línea con guiones rojos) para (a) un campo de láser en saturación,  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$  y (b) para un campo fuerte,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Ambos con  $\gamma_d = 0.05\gamma_s$  y  $\gamma_w = 0.015\gamma_s$ . Sólo se grafican los resultados analíticos.

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\tau) = \frac{2}{\alpha_{ss}} [C_2 e^{\lambda_2 \tau} - C_+ e^{\lambda_+ \tau} - C_- e^{\lambda_- \tau}], \quad (5.58)$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\tau) = D_2 e^{\lambda_2 \tau} + D_+ e^{\lambda_+ \tau} + D_- e^{\lambda_- \tau}, \quad (5.59)$$

donde

$$D_2 = B_2 - \frac{2C_2}{\alpha_{ss}}, \quad D_{\pm} = \frac{2C_{\pm}}{\alpha_{ss}} - B_{\pm}. \quad (5.60)$$

En la Fig. 5.6 se presentan los resultados analíticos de  $h_{\pi/2}(\tau)$ , Ec. (5.56), y de sus componentes, Ecs. (5.58, 5.59), las cuales difieren muy poco de los exactos.

En la pág. 54 se estudió el espectro de ruido de las cuadraturas, o también llamado espectro de la correlación intensidad-amplitud,  $S_{\phi}(\omega)$ , Ec. (4.14), el cual se separa en los espectros de segundo y tercer orden,  $S_{\phi}^{(2)}(\omega)$ ,  $S_{\phi}^{(3)}(\omega)$ , Ecs. (4.16, 4.17), respectivamente. Para el A3N- $\Lambda$  el espectro de ruido de las cuadraturas se obtiene sustituyendo  $j = s$  en las Ecs. (4.14). Para  $\phi = 0$  se sustituye  $h_0(\tau) - 1$ , de la Ec. (5.55), en la Ec. (4.14) para obtener

$$S_0(\omega) = -4\gamma_+ \alpha_{ss} \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2}, \quad (5.61)$$

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.4. ESPECTRO DE RUIDO DE LAS CUADRATURAS

---

el cual es independiente del offset  $Ae^{\pm\phi}$ , Ec. (3.37). Este espectro es una simple lorentziana con un ancho de  $\gamma_+/2 = -\lambda_1$ , Ec. (5.37). Para  $\phi = \pi/2$  se sustituye  $h_{\pi/2}(\tau) - 1$ , de la Ec. (5.56), en la Ec. (4.14) y se obtiene

$$S_{\frac{\pi}{2}}(\omega) = 4\gamma_+\alpha_{ss} \left[ B_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + B_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - B_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (5.62)$$

Los espectros de segundo orden  $S_{\phi}^{(2)}(\omega)$  se obtienen sustituyendo  $h_0^{(2)}(\tau)$  y  $h_{\pi/2}^{(2)}(\tau)$  en la Ec. (4.16), esto es

$$S_0^{(2)}(\omega) = S_0(\omega), \quad (5.63)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{(2)}(\omega) = 8\gamma_+ \left[ C_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + C_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - C_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (5.64)$$

Estos son justo los espectros de luz comprimida  $S_0^{\text{lc}}(\omega)$  y  $S_{\pi/2}^{\text{lc}}(\omega)$ , Ecs. (5.51, 5.52), sin el factor de eficiencia cuántica  $\eta$  del detector. Para obtener los espectros de tercer orden  $S_{\phi}^{(3)}(\omega)$  se sustituyen  $h_0^{(3)}(\tau)$  y  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$ , Ecs. (5.59), en la Ec. (4.17) y se obtiene

$$S_{\phi}^{(3)}(\omega) = S_{\phi}(\omega) - S_{\phi}^{(2)}(\omega), \quad (5.65)$$

$$S_0^{(3)}(\omega) = 0, \quad (5.66)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{(3)}(\omega) = -4\gamma_+\alpha_{ss} \left[ D_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} + D_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + D_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} \right]. \quad (5.67)$$

Originalmente, la DHC se concibió para superar el problema de la detección imperfecta,  $\eta < 1$ , y así poder medir luz comprimida de fuentes de luz débiles, Carmichael, *et al.* [11] y Foster, *et al.* [12]. En el límite de campo débil, cuando se pueden despreciar las fluctuaciones de tercer orden, el espectro de la correlación intensidad-amplitud se aproxima al espectro de luz comprimida, esto es

$$S_{\phi}^{\text{lc}}(\omega) = \eta S_{\phi}^{(2)}(\omega) \approx \eta S_{\phi}(\omega). \quad (5.68)$$

Para el espectro de tercer orden, el pico angosto es aproximadamente la mitad del de segundo orden, de tamaño  $\sim \mathcal{Y}^4$ , mientras que los otros términos

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.4. ESPECTRO DE RUIDO DE LAS CUADRATURAS

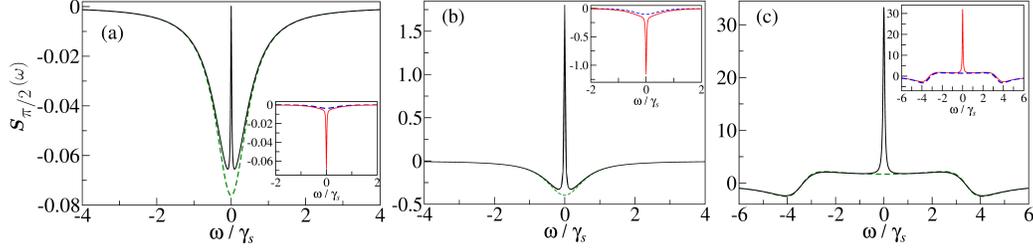


Figura 5.7: Espectros de las cuadraturas para  $\phi = \pi/2$  del A3N- $\Lambda$  (línea continua negra) y del A2N (línea con guiones verdes) para: (a) campo débil  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ , (b) campo moderado  $\Omega_s = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma_s$  y (c) campo fuerte  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . Los recuadros muestran  $S_{\pi/2}^{(3)}(\omega)$  del A3N- $\Lambda$  (línea continua roja), Ec. (5.67), y del A2N (línea con guiones azules), Ec. (4.20). Los espectros  $S_{\pi/2}^{(2)}(\omega)$  son los de la Fig. 5.4. Se presentan solamente los resultados analíticos.

también van como  $\mathcal{Y}^4$  y los otros términos de segundo orden van como  $\mathcal{Y}^2$ . Sin embargo, para campos no tan débiles, se encuentran fuertes firmas de fluctuaciones de tercer orden en los espectros.

La Fig. 5.7 muestra los resultados analíticos de los espectros de las cuadraturas del A2N, Ec.(4.21), y del A3N- $\Lambda$ , Ec. (5.62). La diferencia con los resultados exactos (no se presentan) es muy pequeña. Hay que tener en cuenta que cuando la excitación del láser es débil y en saturación, el pico angosto es más pequeño que en los espectros de luz comprimida (Fig. 5.4). Esto se debe a que el pico angosto de tercer orden es negativo en este régimen de excitación, como se ve en los recuadros. Además, en este régimen de excitación, el espectro completo de tercer orden es negativo, recuadros en Fig. 5.7(a) y (b), que se suma al pico negativo de luz comprimida de esta cuadratura, Castro-Beltrán [15] y Castro-Beltrán, *et al.* [16].

En el régimen de excitación fuerte el espectro de tercer orden conduce a desviaciones llamativas entre los espectros de cuadraturas y de luz comprimida y entre el A2N y el A3N- $\Lambda$ . Por un lado, las bandas laterales se vuelven dispersivas, Castro-Beltrán [15]. Esto ocurre cuando  $\lambda_{\pm}$  se vuelven complejos, es decir, para  $\Omega_s > \gamma_+/4$ , pero sólo para una excitación lo suficientemente fuerte como para dividir las componentes espectrales. Mientras que los picos de segundo orden son lorentzianos, los de tercer orden son dispersivos y de tamaño comparable para el A2N o más grande que para el A3N- $\Lambda$ . Por otro lado, hay grandes desviaciones en el tamaño de los espectros. El espectro de tercer orden es mucho más grande en el A3N- $\Lambda$  que en el A2N. El espec-

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO A

5.4. ESPECTRO DE RUIDO DE LAS CUADRATURAS

---

tro de tercer orden contribuye con la mayor parte del espectro total de las cuadraturas.

Los efectos anteriores se pueden explicar de la siguiente manera. La correlación de tercer orden de la fluctuación de los operadores, por un lado, da una medida de la no linealidad de la interacción átomo-láser, la cual crece al aumentar la intensidad del láser, y por otro lado da una medida de la desviación de las fluctuaciones gaussianas de la fluorescencia. Además, se debe mencionar que las fluctuaciones dipolares de la transición que se excita se refuerzan debido al acoplamiento con el estado de larga vida  $|w\rangle$ , el cual está poblado por el mayor número de eventos de emisión espontánea desde el estado excitado [Ec. (5.29)]. Un reciente estudio de este efecto en una configuración de tres niveles, como la de esta tesis, reportó grandes desviaciones en la estadísticas de fotones respecto a la estadísticas de fotones de un A2N, Merz y Schenzle [32].

Es importante recordar que en DHC no se pueden medir por separado las componentes de segundo y tercer orden,  $h_\phi^{(2)}(\tau)$  y  $h_\phi^{(3)}(\tau)$ , respectivamente; ambas se fusionan en una sola señal medida. CHD va más allá del concepto de luz comprimida cuando se estudian las fluctuaciones dependientes de la fase.

De acuerdo con la Ec. (4.25), el espectro integrado del A3N-A de las cuadraturas de la DHC, para  $\phi = 0$  y para  $\phi = \pi/2$ , está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) d\omega = \pi\gamma_+\alpha_{ss}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_{\frac{\pi}{2}}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma_+\alpha_{ss}. \quad (5.69)$$

Que sus magnitudes sean iguales significa que el ruido total emitido es independiente de  $\phi$ . Esto es posible debido a las fluctuaciones de tercer orden, las cuales no aparecen en los espectros de luz comprimida  $S_0^{lc}(\omega)$  y  $S_{\pi/2}^{lc}(\omega)$ , Ecs. (5.51, 5.52). Este resultado es análogo al cálculo de la emisión incoherente total integrando el espectro incoherente.

Del presente estudio realizado sobre el A3N-A se pueden destacar varios aspectos.

La presencia del estado metaestable  $|w\rangle$  hace que se produzca un pico angosto en el espectro de cuadratura, el cual presenta luz comprimida. Dado que dicho pico es positivo, actúa reduciendo la cantidad de luz comprimida observada en el régimen de excitación de débil a moderada (fuerte). Como la CHD es sensible a las fluctuaciones de tercer orden del dipolo, los espectros

CAPÍTULO 5. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO  $\Lambda$

5.4. ESPECTRO DE RUIDO DE LAS CUADRATURAS

---

de luz comprimida y de cuadratura son muy diferentes para la excitación fuerte. Se obtiene información adicional calculando las varianzas o los espectros integrados de las cuadraturas. En DHB las varianzas son diferentes, mientras que en DHC son iguales, una característica que merece un posterior estudio.

Se consideró sólo el caso de resonancia,  $\Delta_s = 0$ , lo cual permitió obtener una muy buena solución analítica aproximada de las EBO con un método simple, y se empleó para construir expresiones analíticas para las diversas cantidades de interés. Lo anterior permitió presentar las características físicas básicas del A3N- $\Lambda$  de una forma muy directa.

La DHC, con su sensibilidad a las fluctuaciones de campo de tercer orden, abre una nueva puerta para estudiar las fluctuaciones dependientes de la fase más allá del dominio de la luz comprimida para procesos ópticos altamente no lineales y no gaussianos. Por otro lado, los avances en mejorar la eficiencia de la recolección de fotones pueden complementar a la DHC para estudiar la fluorescencia atómica resonante y sus fluctuaciones cuánticas en general de acuerdo con Krivitsky, *et al.* [33].

## Capítulo 6

# DHC de la fluorescencia del átomo de 3 niveles tipo V

En este capítulo se presenta el estudio de la DHC del átomo de 3 niveles tipo V (A3N-V) reportado por Gutiérrez, *et al.* [18]. Este artículo, desarrollado como parte de esta tesis se reproduce en Anexos: Apéndice C, pág. 121.

La Fig. 6.1(a) es el modelo del A3N-V, consiste en un estado base  $|g\rangle$  y dos estados excitados  $|j\rangle$ ,  $j = s, w$ , con razones de decaimiento  $\gamma_j$ . Los estados  $|j\rangle$  están a su vez excitados por láseres de frecuencia angular  $\nu_j$ , con frecuencia angular de Rabi asociada  $\Omega_j$ . Dado que  $\gamma_s > \gamma_w$ , a la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  se le llama “transición fuerte” y “transición débil” a la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$ .

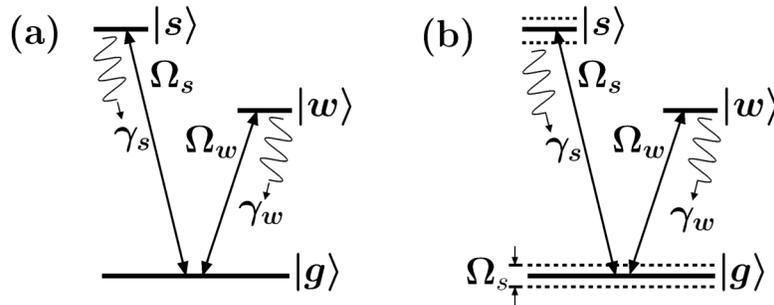


Figura 6.1: (a) El A3N-V excitado bicromáticamente por láseres de frecuencias angulares  $\nu_s$ ,  $\nu_w$ . Dado que  $\gamma_s > \gamma_w$  se llama a  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  ( $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$ ) la transición fuerte (débil). (b) Si  $\Omega_s \gg \gamma_s$  la transición fuerte experimenta un desdoblamiento Stark AC (líneas punteadas).

### 6.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

Si  $\Omega_s \gg \gamma_s$  la transición fuerte experimenta un desdoblamiento Stark AC, líneas punteadas en la Fig. 6.1(b). La Fig. 3.2 muestra el esquema de la DHC, preparado en cuanto al láser (en rojo) y a los detectores (en rojo), para estudiar la fluorescencia proveniente de la transición débil, para lo cual se bloquean el láser y la fluorescencia de la transición fuerte que van hacia los detectores. En la Fig. 3.2 lo análogo se considera para estudiar la transición fuerte.

La importancia del presente estudio es mostrar teóricamente que los campos dispersados por el A3N-V, por un lado, muestran diferencias en las funciones de correlación intensidad-intensidad  $g_j^{(2)}(\tau)$  y, por otro lado, muestran las siguientes características en las funciones de correlación  $h_\phi(\tau)$ : amplitudes con valores grandes y una importante asimetría, ambas características comparadas con las del A2N y del A3N- $\Lambda$ , sistemas para los cuales  $h_\phi(\tau)$  tiene menor amplitud y es simétrica. Estas características en  $h_\phi(\tau)$  para el A3N-V son el resultado de las fluctuaciones de los operadores de amplitud del campo,  $\Delta E_\phi \propto \Delta \sigma_\phi$ , y de la intensidad  $\Delta I \propto \Delta \sigma_{jj}$ , así como de la competencia entre las transiciones. Al descomponer  $h_\phi(\tau)$ , la componente  $h_\phi^{(3)}(\tau)$  presenta grandes fluctuaciones que describen características no clásicas dependientes de la fase del campo emitido, mientras que la componente  $h_\phi^{(2)}(\tau)$  está relacionada también con el efecto no clásico de la luz comprimida. El cálculo de los espectros y de las varianzas de estas correlaciones complementan la información que se tiene sobre el A3N-V.

## 6.1. Ecuaciones de Bloch ópticas

Siguiendo una estrategia parecida a la empleada para el A3N- $\Lambda$ , se obtienen las ecuaciones de Bloch para el A3N-V. El Hamiltoniano en un marco rotante lento<sup>1</sup> para la frecuencia angular del láser  $\nu_j$ , y la ecuación maestra para el operador de densidad  $\rho$ , Ec. (14), están dados por

---

<sup>1</sup>Marco rotante lento, véase pág. 11.

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_{j=s,w} \Delta_j \sigma_{jj} + \hbar \sum_{j=s,w} \frac{\Omega_j}{2} (\sigma_{jg} + \sigma_{gj}), \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i \sum_{j=s,w} \frac{\Omega_j}{2} [\sigma_{jg} + \sigma_{gj}, \rho] - i \sum_{j=s,w} \Delta_j [\sigma_{jj}, \rho] \\ & + \sum_{j=s,w} \frac{\gamma_j}{2} (2\sigma_{gj}\rho\sigma_{jg} - \sigma_{jj}\rho - \rho\sigma_{jj}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde,  $\Delta_j = \omega_j - \nu_j$  es la desintonía átomo-campo,  $\omega_j$  es la frecuencia angular de la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |j\rangle$  y  $\sigma_{jk}$  son los operadores de pseudoespín de Pauli.<sup>2</sup>

Los elementos de matriz<sup>3</sup> de  $\rho$  y sus derivadas temporales se calculan de la definición  $\rho_{jk} \equiv \langle j | \rho | k \rangle$ , Ec. (2.8). Tomando en cuenta esto, se tiene que

$$\dot{\rho}_{ss} = -i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{gs} - \rho_{sg}) - \gamma_s \rho_{ss}, \quad (6.3)$$

$$\dot{\rho}_{sw} = -i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{gw} + i \frac{\Omega_w}{2} \rho_{sg} - i (\Delta_s - \Delta_w) \rho_{sw} - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_w}{2} \right) \rho_{sw}, \quad (6.4)$$

$$\dot{\rho}_{sg} = i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{ss} - \rho_{gg}) + i \frac{\Omega_w}{2} \rho_{sw} - \left( i \Delta_s + \frac{\gamma_s}{2} \right) \rho_{sg}, \quad (6.5)$$

$$\dot{\rho}_{ws} = i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{wg} - i \frac{\Omega_w}{2} \rho_{gs} + i (\Delta_s - \Delta_w) \rho_{ws} - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_w}{2} \right) \rho_{ws}, \quad (6.6)$$

$$\dot{\rho}_{ww} = i \frac{\Omega_w}{2} (\rho_{wg} - \rho_{gw}) - \gamma_w \rho_{ww}, \quad (6.7)$$

$$\dot{\rho}_{wg} = i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{ws} + i \frac{\Omega_w}{2} (\rho_{ww} - \rho_{gg}) - \left( i \Delta_w + \frac{\gamma_w}{2} \right) \rho_{wg}, \quad (6.8)$$

$$\dot{\rho}_{gs} = -i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{ss} - \rho_{gg}) - i \frac{\Omega_w}{2} \rho_{ws} + \left( i \Delta_s - \frac{\gamma_s}{2} \right) \rho_{gs}, \quad (6.9)$$

$$\dot{\rho}_{gw} = -i \frac{\Omega_s}{2} \rho_{sw} - i \frac{\Omega_w}{2} (\rho_{ww} - \rho_{gg}) + \left( i \Delta_w - \frac{\gamma_w}{2} \right) \rho_{gw}, \quad (6.10)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = -i \frac{\Omega_s}{2} (\rho_{sg} - \rho_{gs}) - i \frac{\Omega_w}{2} (\rho_{wg} - \rho_{gw}) + \gamma_s \rho_{ss} + \gamma_w \rho_{ww}. \quad (6.11)$$

Las ecuaciones de Bloch del A3N-V se obtienen sustituyendo en

---

<sup>2</sup>Operadores de pseudoespín de Pauli, véase pie de pág. 10. En el A3N-V no está definido el operador  $\sigma_z$  como en el A2N.

<sup>3</sup>Propiedades de la matriz  $\rho$ , véase pág. 12.

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

las Ecs. (6.3-6.11) tanto  $\langle \sigma_{jk} \rangle = \rho_{kj}$  como  $\langle \dot{\sigma}_{jk} \rangle = \dot{\rho}_{kj}$ , Ecs. (2.20), esto es

$$\langle \dot{\sigma}_{ss} \rangle = -i \frac{\Omega_s}{2} (\langle \sigma_{sg} \rangle - \langle \sigma_{gs} \rangle) - \gamma_s \langle \sigma_{ss} \rangle, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_{sw} \rangle &= i \frac{\Omega_s}{2} \langle \sigma_{gw} \rangle - i \frac{\Omega_w}{2} \langle \sigma_{sg} \rangle + i (\Delta_s - \Delta_w) \langle \sigma_{sw} \rangle \\ &\quad - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_w}{2} \right) \langle \sigma_{sw} \rangle, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{sg} \rangle = -i \frac{\Omega_s}{2} (\langle \sigma_{ss} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle) - i \frac{\Omega_w}{2} \langle \sigma_{sw} \rangle + \left( i \Delta_s - \frac{\gamma_s}{2} \right) \langle \sigma_{sg} \rangle, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_{ws} \rangle &= -i \frac{\Omega_s}{2} \langle \sigma_{wg} \rangle + i \frac{\Omega_w}{2} \langle \sigma_{gs} \rangle - i (\Delta_s - \Delta_w) \langle \sigma_{ws} \rangle \\ &\quad - \left( \frac{\gamma_s}{2} + \frac{\gamma_w}{2} \right) \langle \sigma_{ws} \rangle, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{ww} \rangle = i \frac{\Omega_w}{2} (\langle \sigma_{gw} \rangle - \langle \sigma_{wg} \rangle) - \gamma_w \langle \sigma_{ww} \rangle, \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_{wg} \rangle &= -i \frac{\Omega_s}{2} \langle \sigma_{ws} \rangle - i \frac{\Omega_w}{2} (\langle \sigma_{ww} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle) \\ &\quad + \left( i \Delta_w - \frac{\gamma_w}{2} \right) \langle \sigma_{wg} \rangle, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{gs} \rangle = i \frac{\Omega_s}{2} (\langle \sigma_{ss} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle) + i \frac{\Omega_w}{2} \langle \sigma_{ws} \rangle - \left( i \Delta_s + \frac{\gamma_s}{2} \right) \langle \sigma_{gs} \rangle, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_{gw} \rangle &= i \frac{\Omega_s}{2} \langle \sigma_{sw} \rangle + i \frac{\Omega_w}{2} (\langle \sigma_{ww} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle) - \left( i \Delta_w + \frac{\gamma_w}{2} \right) \langle \sigma_{gw} \rangle, \\ &\quad (6.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}_{gg} \rangle &= -i \frac{\Omega_s}{2} (\langle \sigma_{gs} \rangle - \langle \sigma_{sg} \rangle) - i \frac{\Omega_w}{2} (\langle \sigma_{gw} \rangle - \langle \sigma_{wg} \rangle) \\ &\quad + \gamma_s \langle \sigma_{ss} \rangle + \gamma_w \langle \sigma_{ww} \rangle. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Las Ecs. (6.12-6.20) se escriben de la forma  $\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = \mathbb{M} \langle \mathbf{s}(t) \rangle$ , Ec. (3.64) con  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , donde

$$\mathbf{s} = (\sigma_{ss}, \sigma_{sw}, \sigma_{sg}, \sigma_{ws}, \sigma_{ww}, \sigma_{wg}, \sigma_{gs}, \sigma_{gw}, \sigma_{gg})^T, \quad (6.21)$$

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.1. ECUACIONES DE BLOCH ÓPTICAS

---

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_s & 0 & -i\Omega_s/2 & 0 & 0 \\ 0 & i\Delta_{sw} - \gamma_{sw}/2 & -i\Omega_w/2 & 0 & 0 \\ -i\Omega_s/2 & -i\Omega_w/2 & i\Delta_s - \gamma_s/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\Delta_{sw} - \gamma_{sw}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_s/2 \\ i\Omega_s/2 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_w/2 \\ 0 & i\Omega_s/2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_s & 0 & i\Omega_s/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\Omega_s/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\Omega_s/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_s/2 \\ 0 & -i\Omega_s/2 & i\Omega_w/2 & 0 & 0 \\ -\gamma_w & -i\Omega_w/2 & 0 & i\Omega_w/2 & 0 \\ -i\Omega_w/2 & i\Delta_w - \gamma_w/2 & 0 & 0 & i\Omega_w/2 \\ 0 & 0 & -(i\Delta_s + \gamma_s/2) & 0 & -i\Omega_s/2 \\ i\Omega_w/2 & 0 & 0 & -(i\Delta_w + \gamma_w/2) & -i\Omega_w/2 \\ \gamma_w & i\Omega_w/2 & -i\Omega_s/2 & -i\Omega_w/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

donde  $\Delta_{sw} \equiv \Delta_s - \Delta_w$ ,  $\gamma_{sw} \equiv \gamma_s + \gamma_w$  y la condición inicial es átomo en su estado base  $|g\rangle$ .

En la Subsec.2.2.1 se vio el significado de obtener los valores en estado estacionario de  $\langle \sigma_m(t) \rangle$ , lo cual está expresado en la Ec. (2.30). Las EBO-EE para el A3N-V se obtienen haciendo  $\langle \dot{\mathbf{s}}(t) \rangle = 0$  en la Ec. (3.64). A diferencia de los sistemas de ecuaciones en estado estacionario del A2N y del A3N- $\Lambda$ , en el presente caso el sistema es homogéneo con solución  $\langle \mathbf{s}(t) \rangle = 0$ .

Sustituyendo  $\langle \sigma_{gg} \rangle = 1 - \langle \sigma_{ss} \rangle - \langle \sigma_{ww} \rangle$  en las Ecs. (6.14, 6.17-6.19) y eliminando la ecuación para  $\langle \dot{\sigma}_{gg} \rangle$  el sistema se reduce a ocho ecuaciones, se obtiene una matriz  $\mathbb{M}$  diferente a la de arriba y  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ .

Dada la complejidad de los sistemas de ecuaciones del A3N-V, no se pueden obtener soluciones analíticas ni para las EBO ni para las EBO-EE. En esta tesis, sendas soluciones numéricas se obtuvieron empleando Mathematica.

## 6.2. FLUCTUACIONES CUÁNTICAS

### 6.2. Fluctuaciones cuánticas

Se inicia el estudio de las fluctuaciones cuánticas de la FR de la transición entre el estado base  $|g\rangle$  y el estado excitado  $|j\rangle$ ,  $j = s, w$ ; con un breve análisis de las fluctuaciones de intensidad  $I \propto \sigma_{jg}\sigma_{gj} = \sigma_{jj}$ , estudiadas usualmente vía la correlación de HBT,  $g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle}$ , Ec. (3.13), esto es, estudiando la probabilidad, o función de correlación, normalizada de la detección de dos fotones separados por un tiempo de retraso  $\tau$ .

La Ec. (3.13) para el estado excitado  $|j\rangle$  se denota como  $g_j^{(2)}(\tau)$ , el primer fotón se detecta al tiempo  $t = 0$  y el siguiente fotón se detecta con un retraso  $\tau$ . En el numerador  $I(0) \propto \sigma_{jg}(0)\sigma_{gj}(0)$  e  $I(\tau) \propto \sigma_{jg}(\tau)\sigma_{gj}(\tau) = \sigma_{jj}(\tau)$ . La normalización es el producto de los valores en estado estacionario de  $\langle I(0) \rangle \propto \langle \sigma_{jg}(0)\sigma_{gj}(0) \rangle = \langle \sigma_{jj}(0) \rangle \equiv \alpha_{jj}$  y de  $\langle I(\tau \rightarrow \infty) \rangle \propto \langle \sigma_{jg}(\tau \rightarrow \infty)\sigma_{gj}(\tau \rightarrow \infty) \rangle = \langle \sigma_{jj}(\tau \rightarrow \infty) \rangle \equiv \alpha_{jj}$ .<sup>4</sup> De lo anterior se tiene que

$$g_j^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \sigma_{jg}(0)\sigma_{jj}(\tau)\sigma_{gj}(0) \rangle}{\alpha_{jj}^2}. \quad (6.23)$$

La Fig. 6.2 muestra las correlaciones de intensidad cuando  $\Omega_w$  se fija en un valor superior al de saturación,  $\Omega_w = \gamma_w$ , y la transición fuerte está excitada de forma moderada, Fig. 6.2(a), o fuertemente, Fig. 6.2(b). Por ejemplo, está presente la característica no clásica conocida como anti agrupamiento (antibunching): el átomo no puede emitir dos fotones simultáneamente,  $g_j^{(2)}(0) = 0$  [5, 6]. En el A3N-V se observa esta característica porque las dos transiciones se alimentan desde el estado base  $|g\rangle$  común. Sin embargo, hay diferencias notables en su evolución que no fueron observadas por Pegg, *et al.* [34].

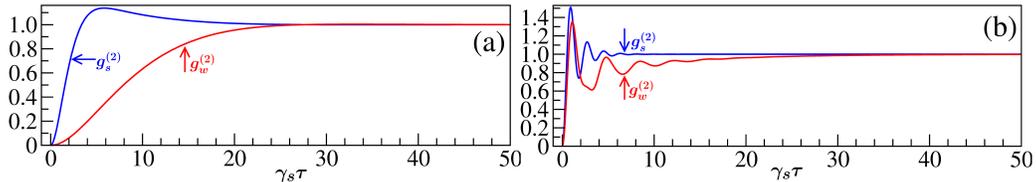


Figura 6.2: Correlaciones intensidad-intensidad  $g_j^{(2)}(\tau)$  del A3N-V con  $\gamma_w = \Omega_w = 0.5\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ . (a)  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$  y (b)  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ .

<sup>4</sup>El concepto de estado estacionario de  $\langle \sigma_m(t) \rangle$  se vio en la Subsec. 2.2.1.

### 6.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

En la Fig. 6.2(a), como  $\Omega_w = \gamma_w$  y  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ , la transición débil es aparentemente más fuerte, pero su razón de emisión neta  $\gamma_w\alpha_{ww}$  es menor que la de la transición fuerte  $\gamma_s\alpha_{ss}$ . En la probabilidad de transición hacia  $|g\rangle$ , la transición fuerte (la que tiene mayor  $\gamma_s$ ) compite ventajosamente con la transición débil; la separación promedio entre los fotones que provienen de  $|s\rangle$  es menor que la separación promedio de los que provienen de  $|w\rangle$ . La menor razón de emisión de fotones desde  $|g\rangle$  explica que  $g_w^{(2)}(\tau \rightarrow \infty) = 1$ , lo cual caracteriza la emisión de fotones independientes.

En la Fig. 6.2(b), como  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$  y  $\Omega_w = \gamma_w$ , el transitorio de la transición fuerte muestra oscilaciones en  $g_s^{(2)}$  con una frecuencia cercana a  $\Omega_s$ , con una curva envolvente que va como  $\sim e^{-3\gamma_s/4}$  tal como ocurre en el A2N de acuerdo con Carmichael y Walls [5] y con Kimble y Mandel [6]. Para la transición débil las oscilaciones en  $g_w^{(2)}$  tienen una frecuencia cercana a  $\Omega_s/2$ , forzadas por el revestimiento de la transición fuerte; ver la Fig. 6.1(b). De forma interesante e inusual, el régimen de oscilación de  $g_w^{(2)}$  se produce principalmente por debajo de uno y termina con un decaimiento prolongado a una razón de decaimiento  $\gamma_w$ . Los campos clásicos obedecen las relaciones  $g_w^{(2)}(\tau) \leq g_w^{(2)}(0)$  y  $g_w^{(2)}(0) \geq 1$ ; estos resultados incluyen la posibilidad de que una distribución clásica de conteo de fotones pueda oscilar por debajo de los valores negativos, pero la violación de estas desigualdades indica la presencia de luz no clásica. En el A3N-V, la persistente violación de estas desigualdades indica la ocurrencia de un estado altamente no clásico, que sin duda exige medidas adicionales sobre un campo no clásico, tales como las fluctuaciones dependientes de la fase.

### 6.3. Función de correlación

La función de correlación  $h_\phi(\tau)$  se mide mediante la técnica de DHC, y como se vio en la Sec. 3.1 es independiente de la eficiencia cuántica del detector. En la Fig. 3.2 se quiere medir solamente la fluorescencia de la transición débil, la cual está excitada por el láser de color rojo; para conseguir la medición se colocan los detectores de color rojo y se bloquea la trayectoria hacia los detectores, del láser azul y de la fluorescencia azul. Si sólo se quiere medir la fluorescencia de la transición fuerte se hace lo análogo.

En la Sec. 3.1 se vio la función de correlación  $h_\phi(\tau)$ , Ecs. (3.16, 3.25), y para el interés de esta tesis, se obtuvieron sus expresiones para  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0)$ , Ec. (3.33), y para  $h_{\pi/2}(|\tau|)$ , Ec. (3.34), cada una con su correspondiente

6.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

---

**interpretación** de medición en la DHC, pág. 36.

Los operadores que definen  $h_\phi(\tau)$  se desarrollaron en fluctuaciones en la Sec. 3.3, y para el interés de esta tesis, se obtuvieron las funciones de correlación en fluctuaciones de los operadores  $h_{\pi/2}^{\text{fluc}}(\tau \geq 0) = 1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau) + h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$ , Ec. (3.54), y  $h_{\pi/2}^{\text{fluc}}(|\tau|) = 1 + h_{\pi/2}^{(2)}(|\tau|)$ , Ec. (3.57). En las págs. 37 y 41 se expone la razón de por qué para  $\tau \leq 0$  se calcula  $h_{\pi/2}(|\tau|)$  y  $h_{\pi/2}^{\text{fluc}}(|\tau|)$ , para posteriormente hacer las gráficas de  $h_{\pi/2}(\tau \leq 0)$  y de  $h_{\pi/2}^{\text{fluc}}(\tau \leq 0)$ , siguiendo un cierto procedimiento matemático que consiste de **cuatro puntos**.

Las Figs. 6.3 y 6.4 muestran  $h_{\pi/2}(\tau)$  para las transiciones débil y fuerte, respectivamente, con el valor de  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ . En la Fig. 6.3 la frecuencia angular de Rabi para la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  es moderadamente fuerte,  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ , y para transición  $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$  es  $\Omega_w = 0.1\gamma_s$  (relativamente fuerte respecto a  $\gamma_w$ ). En la Fig. 6.3(a) es evidente la asimetría. La Fig. 6.3(b) muestra la descomposición de  $h_{\pi/2}(\tau)$  en sus componentes  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau \geq 0)$ , Ec. (3.55), y  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau \geq 0)$ , Ecs. (3.56); mostrando que tienen tamaños similares ambas componentes, lo cual es la firma de una gran desviación de las fluctuaciones gaussianas.

La Fig. 6.4 muestra el efecto sobre la transición fuerte cuando se excita por arriba de saturación,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . En la Fig. 6.4(a) también se aprecia la asimetría, la cual respecto a la Fig. 6.3(a), incrementa su tamaño en aproximadamente un factor de 16 debido a los valores pequeños de  $\alpha_{ww}$  y de  $\alpha_{\pi/2}$  empleados en la normalización; son más pequeños porque el sistema está en el régimen de grandes fluctuaciones cuánticas debido a que el estado base está vestido, lo que produce una desintonía de  $\Omega_s/2$  en el láser de la transición débil, Fig. 6.1(b). Como se aprecia en la correlación de fotones  $g_w^{(2)}$  de la Fig. 6.2(b) y en el espectro de frecuencias de la Fig. 6.6,  $\Omega_s/2$  es la frecuencia dominante de la oscilación en  $h_{\pi/2}(\tau)$  de la transición débil. Hay un decaimiento rápido  $\sim 3\gamma_s/4$  y hay un decaimiento lento debido a  $\gamma_w$ , lo cual sólo se puede ver a grandes intervalos  $\tau$  negativos. La Fig. 6.3(a) muestra que el término de tercer orden es el que predomina,  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau \geq 0) \approx h_{\pi/2}(\tau \geq 0)$ , es una fuerte marca de no linealidad en la transición débil para  $\Omega_w = \gamma_w$ . Se puede ver qué tan bien  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau \geq 0)$  se compara en tamaño con  $h_{\pi/2}(\tau \leq 0)$ , lo cual refleja las fluctuaciones de la población.

La transición fuerte del A3N-V se parece mucho a los casos del A2N [15, Fig. 2] y del A3N- $\Lambda$  en la Fig. 5.6(b) [19, Fig. 6(b)]. Hay una muy leve asimetría que sólo se produce en dos regímenes: justo por encima de saturación,

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

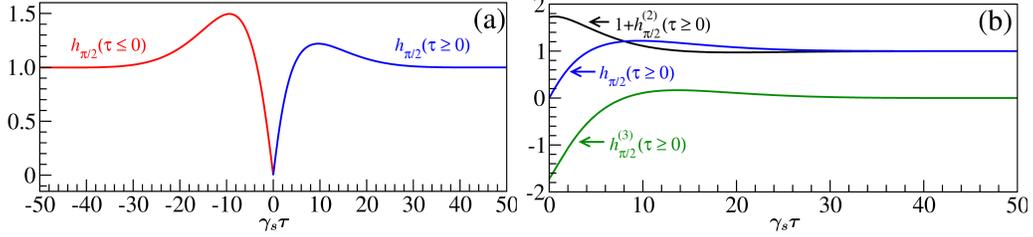


Figura 6.3: (a) Función de correlación asimétrica de la luz proveniente de la transición débil del A3N-V. (b) Descomposición de  $h_{\pi/2}(\geq 0)$  (azul) en  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}$  (negro) y  $h_{\pi/2}^{(3)}$  (verde). Los parámetros empleados son  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ .

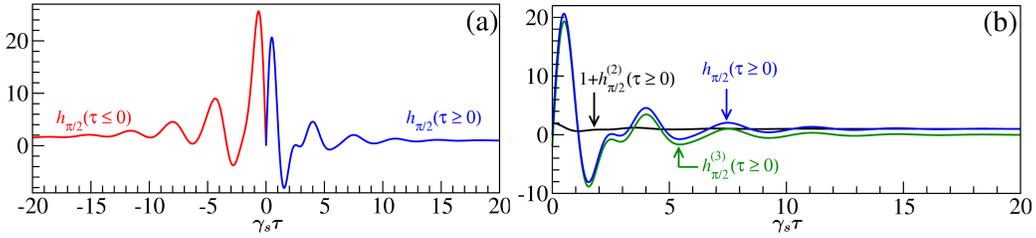


Figura 6.4: Lo mismo que en la Fig. 6.3, excepto en la excitación más fuerte,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ , en la transición fuerte.

$\Omega_s \sim \gamma_s/4$ , y cuando el láser fuerte  $\nu_s$  tiene una desintonía  $\Delta_s \equiv \omega_s - \nu_s$  de unos pocos  $\gamma_s$  de la resonancia  $\omega_s$ . En el primero,  $h_{\pi/2}(\tau)$  parece una versión más simétrica de la Fig. 6.3(a). Este es aproximadamente el caso en la medición de  $h_{\pi/2}(\tau)$  que realizaron Gerber, *et al.* [35] para la transición fuerte del ion  $^{138}\text{Ba}^+$ , el cual se comporta como el A3N- $\Lambda$  pero con  $\gamma_w = 0$ , es decir, en [35] no se considera el decaimiento de  $|w\rangle$  a  $|g\rangle$ . En [35, Fig. 4(b)] la asimetría se observa sólo para intervalos de tiempo de correlación grandes, lo cual también se ve en [14, Fig. 3(b)]. De acuerdo con [35], el ruido de fondo de fotodetección experimental puede ocultar la asimetría.

Las Figs. 6.3 y 6.4 muestran claramente como  $h_{\pi/2}(\tau)$  viola uno o más de los límites de las desigualdades clásicas en la Ec. (4.13). La primera violación a  $0 \leq h_\phi(\tau) - 1 \leq 1$  proviene de  $h_{\pi/2}(0) = 0$ , el análogo a  $g_j^{(2)}$ , que muestra el comportamiento de anti agrupamiento de la luz dispersada; no hay campo emitido cuando el A3N-V está en el estado base  $|g\rangle$ . Por lo tanto, para intervalos de  $\tau$  cortos,  $h_{\pi/2}(\tau)$  no es clásica. La segunda violación se refiere a cuán grande puede ser esta correlación al exceder los límites clásicos, incluso

6.4. ESPECTRO DE RUIDO Y VARIANZA DE LAS CUADRATURAS

---

en órdenes de magnitud, debido a una baja razón de emisión de fotones que coloca al A3N-V en el régimen de grandes fluctuaciones cuánticas.

Sin embargo, en  $|h_\phi(\tau) - 1| \leq |h_\phi(0) - 1| \leq 1$  se debe tener mucho cuidado, ya que se cumple en el límite de fluctuaciones gaussianas, es decir, para contribuciones de tercer orden despreciables o muy pequeñas, desigualdad, para la que además, está clásicamente permitido que sea negativa.

Para que se de una violación significativa en la estadística de Poisson,  $h_{\pi/2}(\tau)$  debe estar fuera de estos límites. Las Figs. 6.3(b) y 6.4(b) muestran claramente que  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$  es responsable de este comportamiento cuando el campo de excitación está en o por encima de saturación. Además, se puede ver que los límites en la segunda desigualdad en la Ec. (4.13) también se violan fuera del límite de las fluctuaciones gaussianas.

## 6.4. Espectro de ruido y varianza de las cuadraturas

La varianza, Ecs. (2.61, 2.64), y el espectro de la luz comprimida, Ec. (4.14, 4.15), son las medidas estándar de las fluctuaciones en cuadratura y son una parte natural del estudio de  $h_{\pi/2}(\tau)$  en el dominio espectral. La asimetría en  $h_{\pi/2}(\tau)$  y la importancia de las fluctuaciones de tercer orden en la FR, hacen claramente las mediciones de correlación de segundo orden para la luz comprimida sólo una parte en la exploración de las características no clásicas del A3N-V y de sistemas cuánticos como el A2N y el A3N- $\Lambda$ , entre otros.

Una firma de la detección de la luz comprimida está representada por los valores negativos de la función espectral de frecuencia. Del mismo modo, los valores negativos en los espectros de  $h_{\pi/2}(\tau)$  indican luz no clásica, más allá de la luz comprimida. Se ha demostrado que el llamado espectro de luz comprimida  $S_\phi^{lc}(\omega)$  y el espectro de segundo orden  $S_\phi^{(2)}(\omega)$  se relacionan como en la Ec. (5.68).

La Fig. 6.5(a) muestra los espectros de ruido de las cuadraturas  $S_{\pi/2}^{\tau \geq 0}(\omega)$  y  $S_{\pi/2}^{\tau \leq 0}(\omega)$ , Ecs. (4.14, 4.15), con  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0)$  y  $h_{\pi/2}^{fluc}(|\tau|)$  dadas en las Ecs. (3.33, 3.57), respectivamente; con la transición fuerte excitada moderadamente. El espectro  $S_{\pi/2}^{\tau \geq 0}(\omega)$  tiene un pico central mayormente negativo que revela las características no clásicas de la luz emitida. Su descomposición, Fig. 6.5(b), muestra que no hay luz comprimida,  $S_{\pi/2}^{(2)}(\omega) \geq 0$ , pero en el espectro de tercer orden está presente una característica bimo-

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.4. ESPECTRO DE RUIDO Y VARIANZA DE LAS CUADRATURAS

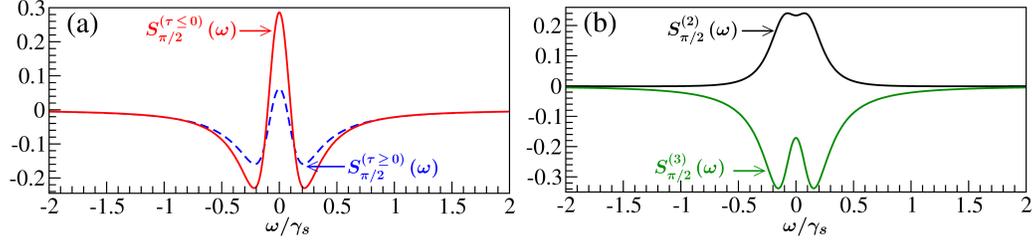


Figura 6.5: (a) Espectros del A3N-V para  $\phi = \pi/2$  de la transición débil, Ecs. (4.14, 4.15), graficados en la Fig. 6.3(a). (b) Descomposición de  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  en sus componentes de segundo y tercer orden, Ecs. (4.16, 4.17). Los parámetros son  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ .

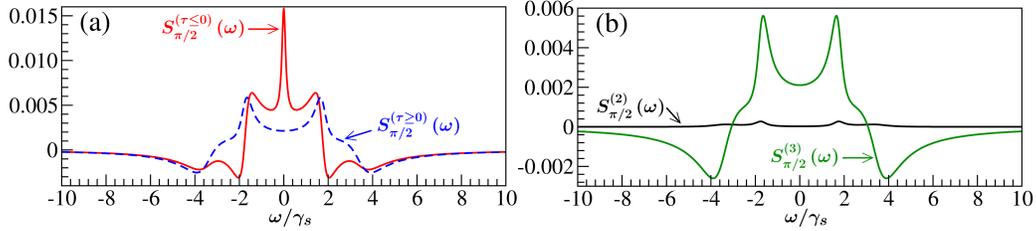


Figura 6.6: (a) Espectros del A3N-V para  $\phi = \pi/2$  de la transición débil, Ecs. (4.14, 4.15), graficados en la Fig. 6.4(a). (b) Descomposición de  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  en sus componentes de segundo y tercer orden, Ecs. (4.16, 4.17). Los parámetros son  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$  y  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ .

dal totalmente no clásica (negativa). Los picos están localizados al rededor de  $\omega = \pm\Omega_s/2 = \pm 0.25\gamma_s$ . El espectro  $S_{\pi/2}^{\tau \leq 0}(\omega)$  tiene un gran pico central, lo cual refleja la gran amplitud de  $h_{\pi/2}^{\text{fluc}}(\tau \leq 0)$ . En ambos casos, el hecho de que los espectros tengan valores negativos refleja la presencia de efectos no clásicos como el anti agrupamiento y las grandes fluctuaciones que dan lugar a la violación de las desigualdades de la Ec. (4.13).

Una excitación más fuerte en la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  hace que sea más fácil extraer información tanto espectral como de la dinámica de la transición. La Fig. 6.6 son los espectros de  $h_{\pi/2}(\tau)$ , la cual se presentó en la Fig. 6.4. Los picos cercanos a  $\pm\Omega_s/2 (\simeq \pm 1.75\gamma_s)$  se deben al vestimiento de la transición fuerte, son reminiscencia del efecto Autler-Townes, con desdoblamiento ligeramente diferentes. En la Fig. 6.6(a) hay un pico central estrecho en  $S_{\pi/2}^{\tau \leq 0}(\omega)$ , una característica sobresaliente, que refleja el lento decaimiento a una razón

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.4. ESPECTRO DE RUIDO Y VARIANZA DE LAS CUADRATURAS

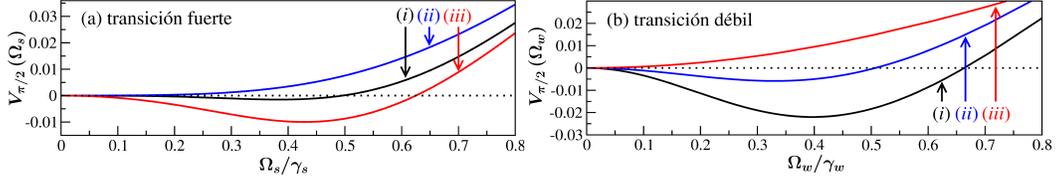


Figura 6.7: A3N-V. (a) Varianza de la fluorescencia de la transición fuerte para  $\phi = \pi/2$ . Los parámetros son: (i)  $\gamma_w = 0.01\gamma_s$ ,  $\Omega_w = 0.05\gamma_s$ ; (ii)  $\gamma_w = 0.01\gamma_s$ ,  $\Omega_w = 0.1\gamma_s$ ; (iii)  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ ,  $\Omega_w = 0.1\gamma_s$ . (b) Varianza de la fluorescencia de la transición débil para  $\phi = \pi/2$ ,  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$  e (i)  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ ; (ii)  $\Omega_s = 0.2\gamma_s$ ; (iii)  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ . Los dos casos con desintonía cero.

de  $\gamma_w$ , de electrones remanentes en el estado metaestable del A3N-V [19]. Tal pico estrecho está ausente en  $S_{\pi/2}^{\tau \geq 0}(\omega)$ , es decir, no hay un decaimiento lento en  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0)$ . Los espectros  $S_{\pi/2}^{\tau \geq 0}(\omega)$  y  $S_{\pi/2}^{\tau \leq 0}(\omega)$  tienen una fuerte componente dispersiva debido a la no linealidad inducida al excitar por encima de la saturación a la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$ . La Fig. 6.6(b) muestra claramente el predominio que tienen las fluctuaciones de tercer orden, Castro-Beltrán [15].

Por otro lado, valores negativos en la varianza son una firma de las fluctuaciones en la luz comprimida. Para la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  la luz comprimida para  $\phi = \pi/2$  es pequeña o nula, Fig. 6.7(a), comparada con el caso del A2N, Rice y Carmichael [29] y Schulte, *et al.* [24], y como se puede apreciar en la Fig. 2.10(b) curva (i); la comparación del A3N-A con el del A2N se da en la Fig. 5.5. La reducción de la luz comprimida se debe a la emisión incoherente añadida en la transición débil. La transición débil también presenta luz comprimida, Fig. 6.7(b), pero no mucho más grande que para la transición fuerte.

Como se hizo con los espectros de ruido de las cuadraturas  $S_{\pi/2}^{\tau \geq 0}(\omega)$  y  $S_{\pi/2}^{\tau \leq 0}(\omega)$ , se debe considerar por separado el ruido que proviene de  $\tau \geq 0$  y de  $\tau \leq 0$  en  $h_{\pi/2}(\tau)$ . Además, no es posible separar experimentalmente los términos de segundo y tercer orden en la parte de  $\tau \geq 0$ . Sin embargo, se considera útil realizar dicha separación para explicar el origen de las características no clásicas en  $h_{\pi/2}(\tau)$ . Una elección natural para medir el ruido es integrar los espectros de las Figs. 6.5 y 6.6, los cuales son proporcionales a los valores iniciales, en  $\tau = |\tau| = 0$ , de las correlaciones no normalizadas en las Ecs. (3.50-3.53). Por lo tanto, se tiene que

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.4. ESPECTRO DE RUIDO Y VARIANZA DE LAS CUADRATURAS

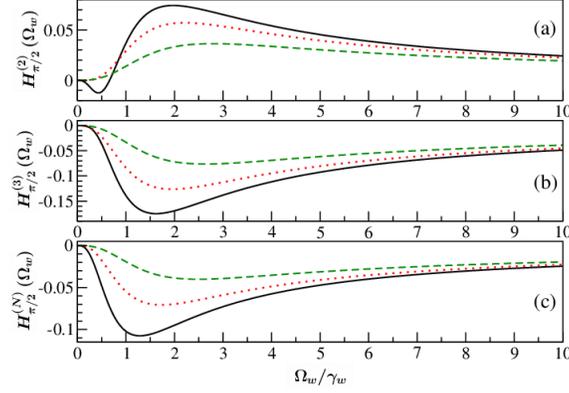


Figura 6.8: Ruido para  $\phi = \pi/2$  proveniente de DHC para la transición débil del A3N-V. (a) Segundo orden, (b) tercer orden, ambos para  $\tau \geq 0$ ; y (c) para  $\tau \leq 0$ . Los parámetros son:  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$  (línea continua en negro),  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$  (curva con puntos rojos) y  $\Omega_s = 0.9\gamma_s$  (curva con guiones verdes). Todas las curvas con  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$  y desintonía cero.

$$H_{\phi}^{(2)}(\tau = 0) = 2\text{Re}[\alpha_{gj} \langle \Delta\sigma_{jg} \Delta\sigma_{\phi} \rangle], \quad H_{\phi}^{(3)}(\tau = 0) = \langle \Delta\sigma_{jg} \Delta\sigma_{\phi} \Delta\sigma_{gj} \rangle, \quad (6.24)$$

$$H_{\phi}^{(2)}(|\tau| = 0) = \text{Re}[e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{jg} \Delta\sigma_{jj} \rangle], \quad (6.25)$$

donde las correlaciones de ruido  $\langle \dots \rangle$  están dadas en general en la Tabla A.4 y en particular para la transición débil en Gutiérrez, *et al.* [18, Ec. (A1)].

En la Fig. 6.8 se muestra la gráfica de las Ecs. (6.24, 6.25) para la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$  con  $\phi = \pi/2$ . Dado que la varianza es proporcional a  $H_{\phi}^{(2)}(\tau = 0)$ , existe un intervalo estrecho de frecuencias de Rabi  $\Omega_w$  donde el ruido es negativo, compárese la curva (i) en la Fig. 6.7(b) con la curva continua en la Fig. 6.8(a). Una excitación más fuerte en ambas transiciones destruye la luz comprimida. El término de tercer orden es visto como no clásico en un intervalo más amplio de frecuencias de Rabi, Fig. 6.8(b), y es el término dominante del ruido total. Dado que estas funciones de ruido se evalúan en  $\tau = 0$ , se obtiene que  $H_{\phi}^{(2)}(\tau = 0, \Omega_w = 0) + H_{\phi}^{(3)}(\tau = 0, \Omega_w = 0) = H_{\phi}^{(2)}(|\tau| = 0, \Omega_w = 0)$ , lo cual se puede ver fácilmente en la Fig. 6.8(c).

En este capítulo se vio cómo empleando principalmente la función de correlación  $h_{\phi}(\tau)$  se estudian las fluctuaciones cuánticas de la luz dispersada proveniente de las dos transiciones del A3N-V, excitadas cada una de

CAPÍTULO 6. DHC DE LA FLUORESCENCIA DEL ÁTOMO DE 3  
NIVELES TIPO V

6.4. ESPECTRO DE RUIDO Y VARIANZA DE LAS CUADRATURAS

---

ellas de forma monocromática. Las diferentes fluctuaciones de los operadores de amplitud e intensidad y la competencia entre las transiciones hacen que la correlación sea asimétrica y grande, más pronunciada para la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$ , la cual tiene fluctuaciones cuánticas más grandes que la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ . La asimetría es una firma de fluctuaciones no clásicas y no gaussianas (y por lo tanto de la ruptura del balance detallado), lo cual se manifiesta como diferentes frecuencias de oscilación y un decaimiento en los espectros (y espectros integrados) asociados con los intervalos de tiempo positivo y negativo de  $h_\phi(\tau)$ . Las fluctuaciones de tercer orden, con su forma espectral dispersiva, son dominantes cuando hay una excitación fuerte en cualquiera de las dos transiciones. También se mostró que la correlación de dos fotones de la transición  $|g\rangle \leftrightarrow |w\rangle$  reforzó el comportamiento no clásico de las fluctuaciones de intensidad. Finalmente, se puede decir que la DHC es una herramienta valiosa para estudiar  $h_\phi(\tau)$  y revelar no solo los estados no clásicos de las fluctuaciones de campo, sino también para explorar la física fuera de equilibrio en los sistemas microscópicos.

# Capítulo 7

## Conclusiones

La fluorescencia resonante, luz emitida espontáneamente cuando al mismo tiempo los átomos están siendo iluminados, es una vieja herramienta espectroscópica y punto de partida para estudios de sistemas emisores más complejos. La fluorescencia de un átomo individual es de notorio carácter cuántico, presentando anti agrupamiento (antibunching) y compresión, y suficientemente simple de estudiar tanto por su aspecto fundamental como por su aplicación en micro láseres y emisores de un fotón a la vez.

En esta tesis se aplicó la teoría de la DHC a la FR de un átomo. La DHC, desarrollada por Carmichael, *et al.* [11], es una técnica de medición de propiedades ondulatorias de la luz que es independiente de la (baja) eficiencia de los detectores, con el fin de detectar luz de una microcavidad con fluctuaciones débilmente comprimidas en una cuadratura por debajo del nivel de ruido de disparo (ruido coherente). Gran parte de esta tesis, sin embargo, lleva a la teoría de la DHC mas allá del concepto de compresión de las fluctuaciones para explorar y observar efectos no lineales debidos a los láseres suficientemente intensos que se requieren, por ejemplo, para tener suficiente fluorescencia de parte del emisor, o para inducir modificaciones a la dinámica del emisor.

En los Caps. 2 y 3 se presentaron la teoría de FR y el análisis de funciones de correlaciones a dos tiempos, base de la teoría de fluctuaciones cuánticas, necesarias para estudiar anti agrupamiento, compresión y espectro de fluorescencia, entre otros. En los Caps. 4 a 6 se trató la DHC para FR de un átomo, en los cuales se resumieron los resultados de las publicaciones realizadas durante los estudios de doctorado [16, 18, 19], publicaciones reproducidas en el Apéndice C: Anexos.

En el Cap. 4 se considera un átomo de dos niveles iluminado por un láser. El enfoque en este caso es desviarse del régimen de excitación débil, en el cual ocurre la compresión, y cuantificar la contribución de tercer orden en las fluctuaciones del campo emitido.

En el Cap. 5 se considera un átomo de tres niveles iluminado por un láser, pero el ocasional acoplamiento a un estado metaestable causa parpadeo en la emisión. Esto se manifiesta en la dinámica con una contribución con decaimiento muy lento que, a su vez, origina un pico incoherente muy angosto en el espectro. Mas aún, en la varianza se observa una reducción significativa de la compresión comparada con la de un A2N. La correlación amplitud-intensidad de la DHC, y sus correspondientes espectros, se ve notoriamente dominada por la contribución de tercer orden, indicando fuerte no linealidad y fluctuaciones no gaussianas.

En el Cap. 6 se estudia un A3N-V iluminado por dos láseres, creando competencia entre las transiciones. Mientras que las diferentes fluctuaciones de amplitud y de intensidad son intrínsecas a la DHC, en este caso se presenta una notable asimetría en la correlación amplitud-intensidad, poco común en óptica cuántica y física estadística en general. El predominio de la correlación de tercer orden en las fluctuaciones del dipolo muestra no linealidad, no gaussianidad y, con ello, dinámica fuera de equilibrio y rompimiento del balance detallado.

Como posible trabajo a futuro está la aplicación de la DHC a sistemas con coherencia atómica que potencialmente presentarían fuertes modificaciones a la compresión de la luz emitida y la no linealidad de la interacción, y que son de gran interés por la habilidad que se tiene para manipularlos con fines de generar procesos de información y computación cuánticos, tales como memorias, transistores, etc. Se mencionan brevemente algunos de ellos.

Considérese un sistema de tres niveles tipo  $\Lambda$  donde dos láseres iluminan las transiciones entre el estado excitado y dos estados inferiores, ignorando el acoplamiento entre los últimos. Si ambos láseres tienen la misma desintonía el sistema alcanza un estado de interferencia destructiva entre los estados inferiores que impide futuras absorciones de fotones de los láseres, haciéndose transparente a ellos, fenómeno conocido como transparencia inducida electromagnéticamente.

Otro ejemplo ocurre cuando los estados excitados de un A3N-V o los estados inferiores de un A3N- $\Lambda$  son cuasi degenerados; en este caso los niveles están acoplados por los mismos modos del vacío electromagnético. Esto lleva a interferencias, constructivas o destructivas, entre los procesos de emisión

espontánea entre las dos transiciones.

Finalmente, se menciona un ejemplo de coherencia de tipo cooperativo. Si dos átomos están separados por menos de una longitud de onda de la frecuencia de transición se presenta la interacción dipolo-dipolo, que provoca tanto aceleración (superradiancia) como retardo (subradiancia) de la emisión espontánea.

# Apéndice A

## Condiciones iniciales

En la Sec. 3.5 y en la Sec. 3.6 se estudió, respectivamente, cómo vía la FCR se resuelven las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{O}_1(0) \mathbf{s}(\tau) \mathcal{O}_2(0) \rangle &= \mathbb{M} \langle \mathcal{O}_1(0) \mathbf{s}(\tau) \mathcal{O}_2(0) \rangle + \mathcal{O}_1(0) \mathbf{b} \mathcal{O}_2(0) \\ &\text{condición inicial } \langle \mathcal{O}_1(0) \mathbf{s}(0) \mathcal{O}_2(0) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle &= \mathbb{M} \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(\tau) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle \\ &\text{condición inicial } \langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(0) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Las condiciones iniciales en las Ecs. (A.1, A.2) se calculan haciendo las siguientes identificaciones para abreviar la notación

$$\langle \mathcal{O}_1(0) \mathbf{s}(0) \mathcal{O}_2(0) \rangle \rightarrow \langle \mathcal{O}_1 \mathbf{s} \mathcal{O}_2 \rangle, \quad (\text{A.3})$$

$$\langle \Delta \mathcal{O}_1(0) \Delta \mathbf{s}(0) \Delta \mathcal{O}_2(0) \rangle \rightarrow \langle \Delta \mathcal{O}_1 \Delta \mathbf{s} \Delta \mathcal{O}_2 \rangle, \quad (\text{A.4})$$

donde las componentes de los vectores columna  $\mathbf{s}$  y  $\Delta \mathbf{s}$  se denotan como  $\sigma_{\ell m}$  y  $\Delta \sigma_{\ell m}$ , respectivamente. Las diferentes expresiones de condiciones iniciales que se requieren calcular en esta tesis se obtienen haciendo en la Ec. (A.3)

$$\mathcal{O}_1 \equiv \sigma_{jg} \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_2 \equiv \sigma_{gj}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{O}_1 \equiv \sigma_{jg} (\mathcal{O}_1 \equiv \mathbb{I}) \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_2 \equiv \mathbb{I} (\mathcal{O}_2 \equiv \sigma_{gj}), \quad (\text{A.6})$$

y en la Ec. (A.4)

$$\Delta\mathcal{O}_1 \equiv \Delta\sigma_{jg} \quad \text{y} \quad \Delta\mathcal{O}_2 \equiv \Delta\sigma_{gj}, \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta\mathcal{O}_1 \equiv \Delta\sigma_{jg} (\Delta\mathcal{O}_1 \equiv \mathbb{I}) \quad \text{y} \quad \Delta\mathcal{O}_2 \equiv \mathbb{I} (\Delta\mathcal{O}_2 \equiv \Delta\sigma_{gj}), \quad (\text{A.8})$$

donde  $\mathbb{I}$  es el operador identidad. En todos los cálculos aparece el producto de los operadores  $\sigma_{jk}$  y  $\sigma_{lm}$ , para los cuales  $\sigma_{jk}\sigma_{lm} = \delta_{kl}\sigma_{jm}$ .

Para las condiciones iniciales  $\langle \mathcal{O}_1 \mathbf{s} \mathcal{O}_2 \rangle$ , Ec. (A.3), y de la Ec. (A.5) se tiene el vector columna<sup>1</sup>

$$\langle \sigma_{jg} \mathbf{s} \sigma_{gj} \rangle, \quad \text{con componentes} \quad \langle \sigma_{jg} \sigma_{lm} \sigma_{gj} \rangle = \delta_{gl} \delta_{mg} \alpha_{jj}, \quad (\text{A.9})$$

donde sólo si  $m = \ell \equiv g$  las componentes en Ec. (A.9) son diferentes de cero, esto es

$$\langle \sigma_{jg} \sigma_{gg} \sigma_{gj} \rangle = \alpha_{jj}. \quad (\text{A.10})$$

Cuando en  $\langle \mathcal{O}_1 \mathbf{s} \mathcal{O}_2 \rangle$ , Ec. (A.3), se emplea la Ec. (A.6) se obtienen los siguientes vectores columna

$$\langle \sigma_{jg} \mathbf{s} \rangle \quad \text{con componentes} \quad \langle \sigma_{jg} \sigma_{lm} \rangle = \delta_{gl} \alpha_{jm}, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle \mathbf{s} \sigma_{gj} \rangle \quad \text{con componentes} \quad \langle \sigma_{lm} \sigma_{gj} \rangle = \delta_{mg} \alpha_{lj}. \quad (\text{A.12})$$

Para las condiciones iniciales  $\langle \Delta\mathcal{O}_1 \Delta \mathbf{s} \Delta\mathcal{O}_2 \rangle$ , Ec. (A.4), y de la Ec. (A.7) se tiene

$$\langle \Delta\sigma_{jg} \Delta \mathbf{s} \Delta\sigma_{gj} \rangle, \quad (\text{A.13})$$

donde el vector columna  $\Delta \mathbf{s}$  y  $\Delta\sigma_{jg}$ ,  $\Delta\sigma_{gj}$  se escriben como

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \quad \text{con componentes} \quad \Delta\sigma_{lm} = \sigma_{lm} - \alpha_{lm}, \quad (\text{A.14})$$

$$\Delta\sigma_{jg} = \sigma_{jg} - \alpha_{jg} \quad \text{y} \quad \Delta\sigma_{gj} = \sigma_{gj} - \alpha_{gj}. \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo las Ecs. (A.14, A.15) en la Ec. (A.13), las componentes del vector columna  $\langle \Delta\sigma_{jg} \Delta \mathbf{s} \Delta\sigma_{gj} \rangle$  están dadas por

$$\begin{aligned} \langle \Delta\sigma_{jg} \Delta \sigma_{lm} \Delta\sigma_{gj} \rangle &= \delta_{gl} \delta_{mg} \alpha_{jj} - \delta_{mg} \alpha_{lj} \alpha_{jg} - \delta_{gl} \alpha_{jm} \alpha_{gj} \\ &\quad + \alpha_{lm} [2\alpha_{jg} \alpha_{gj} - \alpha_{jj}]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

---

<sup>1</sup>Como ejemplo de cálculo:  $\langle (\sigma_{jg} \sigma_{lm}) \sigma_{gj} \rangle = \delta_{gl} \langle \sigma_{jm} \sigma_{gj} \rangle = \delta_{gl} \delta_{mg} \langle \sigma_{jj} \rangle = \delta_{gl} \delta_{mg} \alpha_{jj}$ .

Cuando en  $\langle \Delta \mathcal{O}_1 \Delta \mathbf{s} \Delta \mathcal{O}_2 \rangle$ , Ec. (A.4), se emplea la Ec. (A.8) se obtienen los siguientes vectores columna

$$\langle \Delta \sigma_{jg} \Delta \mathbf{s} \rangle \quad \text{con componentes} \quad \langle \Delta \sigma_{jg} \Delta \sigma_{\ell m} \rangle = \delta_{g\ell} \alpha_{jm} - \alpha_{\ell m} \alpha_{jg}, \quad (\text{A.17})$$

$$\langle \Delta \mathbf{s} \Delta \sigma_{gj} \rangle \quad \text{con componentes} \quad \langle \Delta \sigma_{\ell m} \Delta \sigma_{gj} \rangle = \delta_{mg} \alpha_{\ell j} - \alpha_{\ell m} \alpha_{gj}. \quad (\text{A.18})$$

El A2N es un caso especial en la notación. Para calcular las componentes  $\sigma_z$  y  $\Delta \sigma_z$ , en  $\mathbf{s} = (\sigma_z, \sigma_{eg}, \sigma_{gj})^T$  y  $\Delta \mathbf{s} = (\Delta \sigma_z, \Delta \sigma_{eg}, \Delta \sigma_{gj})^T$ ; en las Ecs. (A.9, A.11, A.12, A.16-A.18) se hacen cuatro cosas. Primero: se sustituye  $j = e$ . Segundo: se hacen los cambios

$$\sigma_{\ell m} \longrightarrow \sigma_z = 2\sigma_{ee} - 1 \quad , \quad \Delta \sigma_{\ell m} \longrightarrow \Delta \sigma_z = 2\Delta \sigma_{ee} - 1 = 2(\sigma_{ee} - \alpha_{ee}) - 1. \quad (\text{A.19})$$

Tercero: se sustituye  $\ell = m \equiv g$ , con lo que las deltas de Kronecker son diferentes de cero. Cuarto: en el lado derecho de dichas ecuaciones se sustituye

$$\alpha_{ee} = \frac{1 + \alpha_z}{2} \quad (\text{A.20})$$

para obtener

$$\langle \sigma_{eg} \sigma_z \sigma_{ge} \rangle = - \left( \frac{1 + \alpha_z}{2} \right), \quad (\text{A.21})$$

$$\langle \sigma_{eg} \sigma_z \rangle = \alpha_{eg}, \quad (\text{A.22})$$

$$\langle \sigma_z \sigma_{ge} \rangle = \alpha_{ge}, \quad (\text{A.23})$$

$$\langle \Delta \sigma_{eg} \Delta \sigma_z \Delta \sigma_{ge} \rangle = \left[ 2|\alpha_{eg}|^2 - \left( \frac{1 + \alpha_z}{2} \right) \right] (1 + \alpha_z), \quad (\text{A.24})$$

$$\langle \Delta \sigma_{eg} \Delta \sigma_z \rangle = -\alpha_{eg} (1 + \alpha_z), \quad (\text{A.25})$$

$$\langle \Delta \sigma_z \Delta \sigma_{ge} \rangle = -\alpha_{ge} (1 + \alpha_z). \quad (\text{A.26})$$

Los valores de  $\alpha_z$ ,  $\alpha_{eg}$  y  $\alpha_{ge}$  están dados en las Ecs. (2.34-2.35). Las demás componentes de  $\mathbf{s}$  y de  $\Delta \mathbf{s}$  se calculan empleando los índices  $\ell, m = e, g$  en  $\sigma_{\ell m}$  en las Ecs. (A.9, A.11, A.12, A.16-A.18). En la Tabla A.1 se dan las condiciones iniciales para el A2N.

Para el átomo de 3 niveles tipo  $\Lambda$  se hace  $j = s$  y  $\ell, m = s, g$  en las Ecs. (A.10-A.12, A.16-A.18). Los resultados que se obtienen se dan en la Tabla A.2.

APÉNDICE A. CONDICIONES INICIALES

---

Átomo de 2 niveles
$\mathbf{s} = (\sigma_z, \sigma_{eg}, \sigma_{ge})^T$
$\langle \sigma_{eg} \mathbf{s} \sigma_{ge} \rangle = (-(1 + \alpha_z)/2, 0, 0)^T$
$\langle \sigma_{eg} \mathbf{s} \rangle = (\alpha_{eg}, 0, (1 + \alpha_z)/2)^T$
$\langle \mathbf{s} \sigma_{ge} \rangle = (\alpha_{ge}, (1 + \alpha_z)/2, 0)^T$
$\Delta \mathbf{s} = (\Delta \sigma_z, \Delta \sigma_{eg}, \Delta \sigma_{ge})^T$
$\langle \Delta \sigma_{eg} \Delta \mathbf{s} \Delta \sigma_{ge} \rangle = \begin{pmatrix} [2 \alpha_{eg} ^2 - \frac{1}{2}(1 + \alpha_z)](1 + \alpha_z) \\ 2\alpha_{eg}^2 \alpha_{ge} - \alpha_{eg}(1 + \alpha_z) \\ 2\alpha_{eg} \alpha_{ge}^2 - \alpha_{ge}(1 + \alpha_z) \end{pmatrix}$
$\langle \Delta \sigma_{eg} \Delta \mathbf{s} \rangle = (-\alpha_{eg}(1 + \alpha_z), -\alpha_{eg}^2, - \alpha_{eg} ^2)^T$
$\langle \Delta \mathbf{s} \Delta \sigma_{ge} \rangle = (-\alpha_{ge}(1 + \alpha_z), \frac{1}{2}(1 + \alpha_z) -  \alpha_{eg} ^2, -\alpha_{ge}^2)^T$

Tabla A.1: Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión para el A2N, Ecs. (3.77, 3.85). donde  $\alpha_{ee} = (1 + \alpha_z)/2$ .

Para el átomo de 3 niveles tipo-V se considera  $j = s$  (transición fuerte) o  $j = w$  (transición débil) y en ambos casos se hace  $\ell, m = s, w, g$  en las Ecs. (A.10-A.12, A.16-A.18). Los resultados que se obtienen se dan en la Tabla A.3 y en la Tabla A.4.

APÉNDICE A. CONDICIONES INICIALES

---

Átomo de 3 niveles tipo $\Lambda$
$\mathbf{s} = (\sigma_{ss}, \sigma_{sg}, \sigma_{gs}, \sigma_{gg})^T$
$\langle \sigma_{sg} \mathbf{s} \sigma_{gs} \rangle = (0, 0, 0, \alpha_{ss})^T$
$\langle \sigma_{sg} \mathbf{s} \rangle = (0, 0, \alpha_{ss}, \alpha_{sg})^T$
$\langle \mathbf{s} \sigma_{gs} \rangle = (0, \alpha_{ss}, 0, \alpha_{gs})^T$
$\Delta \mathbf{s} = (\Delta \sigma_{ss}, \Delta \sigma_{sg}, \Delta \sigma_{gs}, \Delta \sigma_{gg})^T$
$\langle \Delta \sigma_{sg} \Delta \mathbf{s} \Delta \sigma_{gs} \rangle = \begin{pmatrix} -\alpha_{ss} [\alpha_{ss} + 2 \alpha_{sg} ^2] \\ -2\alpha_{sg} [\alpha_{ss} -  \alpha_{sg} ^2] \\ -2\alpha_{gs} [\alpha_{ss} -  \alpha_{sg} ^2] \\ [\alpha_{ss} - 2 \alpha_{sg} ^2] (1 - \alpha_{gg}) \end{pmatrix}$
$\langle \Delta \sigma_{sg} \Delta \mathbf{s} \rangle = (-\alpha_{ss} \alpha_{sg}, -\alpha_{sg}^2, \alpha_{ss} -  \alpha_{sg} ^2, \alpha_{sg} (1 - \alpha_{gg}))^T$
$\langle \Delta \mathbf{s} \Delta \sigma_{gs} \rangle = (-\alpha_{ss} \alpha_{gs}, \alpha_{ss} -  \alpha_{sg} ^2, -\alpha_{gs}^2, \alpha_{gs} (1 - \alpha_{gg}))^T$

Tabla A.2: Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión para el A3N- $\Lambda$ , Ecs. (3.77, 3.85).

Átomo de 3 niveles tipo V
$\mathbf{s} = (\sigma_{ss}, \sigma_{sw}, \sigma_{sg}, \sigma_{ws}, \sigma_{ww}, \sigma_{wg}, \sigma_{gs}, \sigma_{gw}, \sigma_{gg})^T$
$j = s$ (transición fuerte) o $j = w$ (transición débil)
$\langle \sigma_{jg} \mathbf{s} \sigma_{gj} \rangle = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha_{jj})^T$
$\langle \sigma_{jg} \mathbf{s} \rangle = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha_{js}, \alpha_{jw}, \alpha_{jg})^T$
$\langle \mathbf{s} \sigma_{gj} \rangle = (0, 0, \alpha_{sj}, 0, 0, \alpha_{wj}, 0, 0, \alpha_{gj})^T$

Tabla A.3: Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión para el A3N-V, Ec. (3.77).

APÉNDICE A. CONDICIONES INICIALES

---

Átomo de 3 niveles tipo V	
$\Delta \mathbf{s} = (\Delta\sigma_{ss}, \Delta\sigma_{sw}, \Delta\sigma_{sg}, \Delta\sigma_{ws}, \Delta\sigma_{ww}, \Delta\sigma_{wg}, \Delta\sigma_{gs}, \Delta\sigma_{gw}, \Delta\sigma_{gg})^T$	
$j = s$ (transición fuerte) o $j = w$ (transición débil)	
$\langle \Delta\sigma_{jg} \Delta \mathbf{s} \Delta\sigma_{gj} \rangle =$	$\begin{pmatrix} \alpha_{ss} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] \\ \alpha_{sw} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] \\ \alpha_{sg} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] - \alpha_{sj}\alpha_{jg} \\ \alpha_{ws} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] \\ \alpha_{ww} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] \\ \alpha_{wg} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] - \alpha_{wj}\alpha_{jg} \\ \alpha_{gs} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] - \alpha_{js}\alpha_{gj} \\ \alpha_{gw} [2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj}] - \alpha_{jw}\alpha_{gj} \\ (2\alpha_{jg}\alpha_{gj} - \alpha_{jj})(\alpha_{gg} - 1) \end{pmatrix}$
$\langle \Delta\sigma_{jg} \Delta \mathbf{s} \rangle =$	$\begin{pmatrix} -\alpha_{ss}\alpha_{jg} \\ -\alpha_{sw}\alpha_{jg} \\ -\alpha_{sg}\alpha_{jg} \\ -\alpha_{ws}\alpha_{jg} \\ -\alpha_{ww}\alpha_{jg} \\ -\alpha_{wg}\alpha_{jg} \\ \alpha_{js} - \alpha_{gs}\alpha_{jg} \\ \alpha_{jw} - \alpha_{gw}\alpha_{jg} \\ \alpha_{jg}(1 - \alpha_{gg}) \end{pmatrix}$
$\langle \Delta \mathbf{s} \Delta\sigma_{gj} \rangle =$	$\begin{pmatrix} -\alpha_{ss}\alpha_{gj} \\ -\alpha_{sw}\alpha_{gj} \\ \alpha_{sj} - \alpha_{sg}\alpha_{gj} \\ -\alpha_{ws}\alpha_{gj} \\ -\alpha_{ww}\alpha_{gj} \\ \alpha_{wj} - \alpha_{wg}\alpha_{gj} \\ -\alpha_{gs}\alpha_{gj} \\ -\alpha_{gw}\alpha_{gj} \\ \alpha_{gj}(1 - \alpha_{gg}) \end{pmatrix}$

Tabla A.4: Condiciones iniciales en la fórmula cuántica de regresión en fluctuaciones para el A3N-V, Ec. (3.85).

## Apéndice B

### Cálculo de producto de fluctuaciones

En esta sección se obtienen las expresiones de los numeradores de  $h_{\pi/2}^{(2)}$  ( $\tau \geq 0$ ) y de  $h_{\pi/2}^{(3)}$  ( $\tau \geq 0$ ), Ecs. (4.4, 4.6), respectivamente. Para esto, en  $\langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle$  y en  $\langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) \Delta\sigma_{ge}(0) \rangle$  se sustituyen  $\Delta\sigma_{\ell m} = \sigma_{\ell m} - \alpha_{\ell m}$ , Ec. (3.40), y  $\Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) = \sigma_{\pi/2}(\tau) - \alpha_{\pi/2}$ , la cual se obtiene a continuación.

La expresión general para  $\Delta\sigma_{\phi}(\tau)$  se obtiene sustituyendo la Ec. (3.40) en la definición de  $\Delta\sigma_{\phi}(\tau) = \frac{1}{2} (\Delta\sigma_{jg}(\tau)e^{-i\phi} + \Delta\sigma_{gj}(\tau)e^{i\phi})$ , Ec. (3.23), esto es

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{\phi}(\tau) &= \frac{1}{2} ([\sigma_{jg}(\tau) - \alpha_{jg}] e^{-i\phi} + [\sigma_{gj}(\tau) - \alpha_{gj}] e^{i\phi}) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{jg}(\tau)e^{-i\phi} + \sigma_{gj}(\tau)e^{i\phi}) - \frac{1}{2} (\alpha_{jg}e^{-i\phi} + \alpha_{gj}e^{i\phi}) \\ &= \sigma_{\phi}(\tau) - \alpha_{\phi} \end{aligned}$$

donde  $\sigma_{\phi}(\tau)$ ,  $\alpha_{\phi}$  están dadas en las Ecs. (3.17, 3.21), respectivamente.

Para el numerador de la Ec. (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle &= \langle (\sigma_{eg}(0) - \alpha_{eg}) (\sigma_{\pi/2}(\tau) - \alpha_{\pi/2}) \rangle \\ &= \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle - \alpha_{\pi/2} \alpha_{eg} - \alpha_{eg} \langle \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle + \alpha_{eg} \alpha_{\pi/2} \\ &= \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle - \alpha_{eg} \langle \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle \\ \alpha_{ge} \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle &= \alpha_{ge} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle - |\alpha_{eg}|^2 \langle \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

de donde

APÉNDICE B. CÁLCULO DE PRODUCTO DE FLUCTUACIONES

$$\begin{aligned}
 2\text{Re} [\alpha_{ge} \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle] &= 2\text{Re} [\alpha_{ge} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle] - 2|\alpha_{eg}|^2 \text{Re} [\langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle] \\
 &= 2\text{Re} [\alpha_{ge} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle] - 2|\alpha_{eg}|^2 \text{Re} [-i \langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle].
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Para el numerador de la Ec. (4.6) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \Delta\sigma_{ge}(0) \rangle &= \langle (\sigma_{eg}(0) - \alpha_{eg}) (\sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) - \alpha_{\frac{\pi}{2}}) (\sigma_{ge}(0) - \alpha_{ge}) \rangle \\
 &= \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle - \alpha_{ge} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle \\
 &\quad - \alpha_{\frac{\pi}{2}} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{ge}(0) \rangle + \alpha_{\frac{\pi}{2}} \alpha_{ge} \langle \sigma_{eg}(0) \rangle \\
 &\quad - \alpha_{eg} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle + \alpha_{eg} \alpha_{ge} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle \\
 &= \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle - (\alpha_{eg} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle)^* \\
 &\quad - \alpha_{\frac{\pi}{2}} \alpha_{ee} + \alpha_{\frac{\pi}{2}} \alpha_{ge} \alpha_{eg} \\
 &\quad - \alpha_{eg} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle + \alpha_{eg} \alpha_{ge} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle \\
 &= \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle - 2\text{Re} [\alpha_{eg} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle] \\
 &\quad + |\alpha_{eg}|^2 \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \rangle + \alpha_{\frac{\pi}{2}} [|\alpha_{eg}|^2 - \alpha_{ee}] \\
 &= \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle - 2\text{Re} [\alpha_{eg} \langle \sigma_{\frac{\pi}{2}}(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle] \\
 &\quad + |\alpha_{eg}|^2 \text{Re} [-i \langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle] + \text{Re} [-i \alpha_{eg}] [|\alpha_{eg}|^2 - \alpha_{ee}].
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

En las Ecs. (B.2, B.3) se empleó que  $\langle \sigma_{\pi/2}(\tau) \rangle = \text{Re} [-i \langle \sigma_{eg}(\tau) \rangle]$  y que  $\alpha_{\pi/2} = \text{Re} [-i \alpha_{eg}]$ , Ecs. (3.17, 3.21), respectivamente.

En los denominadores de las Ecs. (4.4, 4.6) se tiene que<sup>1</sup>

$$\alpha_{ee} = (1 + \alpha_z) / 2 = Y^2 / 2 (1 + Y^2) \quad , \quad \alpha_{\frac{\pi}{2}} = \text{Re} [-i \alpha_{eg}] = Y / \sqrt{2} (1 + Y^2) , \tag{B.4}$$

$$\alpha_{ee} \alpha_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Y^3}{2\sqrt{2} (1 + Y^2)^2} , \tag{B.5}$$

donde  $Y = \sqrt{2} \Omega_e / \gamma_e$ , Ec. (2.39), se empleó que  $\alpha_z = -1 / (1 + Y^2)$ , Ec. (2.40), y los valores de  $\alpha_{eg}, \alpha_{\pi/2}$  de Ecs. (3.22, 2.41).

---

<sup>1</sup>Se sustituye  $\rho_{ee} = \langle \sigma_{ee} \rangle$  en la Ec. (2.26) y aplicando el concepto de estado estacionario expresado en Ec. (2.30) se obtiene que  $\alpha_{ee} = (1 + \alpha_z) / 2$ .

# Apéndice C

## Anexo: artículos publicados y otros productos académicos

### Artículos publicados durante el doctorado

C1.-) H. M. Castro-Beltrán, L. Gutiérrez, and L. Horvath, “Squeezed versus non-Gaussian fluctuations in resonance fluorescence,” *Appl. Math. Inf. Sci.* **9**, 2849-2857 (2015), pág. 102.

C2.-) H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta, and L. Gutiérrez, “Phase-dependent fluctuations of intermittent resonance fluorescence,” *Phys. Rev. A* **93**, 033801.1-10 (2016), pág. 111.

C3.-) L. Gutiérrez, H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta, and L. Horvath, “Large time-asymmetric quantum fluctuations in amplitude–intensity correlation measurements of V-type three-level atom resonance fluorescence,” *J. Opt. Soc. Am. B* **34**, 2301-2309 (2017), pág. 121.

### Otros productos académicos

C4.-) H. M. Castro-Beltrán, L. Gutiérrez, and E. R. Marquina-Cruz, “Large asymmetric fluctuations in the resonance fluorescence of a three-level atom,” in *Latin America Optics and Photonics, Cancun, Mexico* (Optical Society of America, 2014), paper LM4A.38.

C5.-) L. Gutiérrez, H. M. Castro-Beltrán y E. R. Marquina-Cruz. “Fluctuaciones no clásicas, gigantes y asimétricas en fluorescencia resonante,” Programa y resúmenes del LVII Congreso Nacional de Física, ISSN 0187-4713, p. 254. Mazatlán, Sin. del 6 al 10 de octubre de 2014.

C6.-) R. Román-Ancheyta, H. M. Castro-Beltrán y L. Gutiérrez, “Fluctuaciones dependientes de la fase en fluorescencia resonante intermitente,” VIII Taller de Colisiones Inelásticas en la Materia, p. 52. Playa del Carmen, Quintana Roo del 11 al 14 de diciembre de 2016.

## Squeezed Versus Non-Gaussian Fluctuations in Resonance Fluorescence

Héctor M. Castro-Beltrán<sup>1,\*</sup>, Luis Gutiérrez<sup>1</sup> and Levente Horvath<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Avenida Universidad 1001, 62209 Cuernavaca, Morelos, México

<sup>2</sup> Centre for Quantum Science and Technology, Macquarie University, Sydney, NSW 2109, Australia

Received: 11 Feb. 2015, Revised: 11 Apr. 2015, Accepted: 12 Apr. 2015

Published online: 1 Nov. 2015

**Abstract:** We study theoretically the fluorescence of a two-level atom driven by a laser of weak to moderate intensity, that is, a regime where squeezing would occur. Close to saturation atomic fluctuations dominate and become non-Gaussian, degrading the squeezing. Using Bloch equations and quantum jump trajectories we find that allowing a moderate degree of non-linearity, conditional homodyne detection [G.T. Foster, L.A. Orozco, H.M. Castro-Beltrán, H.J. Carmichael, Phys. Rev. Lett. **85**, pp. 3149-3152, 2000] would actually help in observing the elusive squeezing in the fluorescence by increasing the size of the characteristic negative spectrum.

**Keywords:** Resonance fluorescence, squeezing, non-Gaussian fluctuations

### 1 Introduction

Squeezing is the quantum effect where fluctuations in one quadrature of the electromagnetic field are reduced below those of a coherent state at the expense of increasing fluctuations in the other quadrature. Squeezed light is efficiently produced by nonlinear effects such as four-wave mixing in optical fibers and optical parametric oscillation [1]. However, squeezing of the resonance fluorescence of a laser driven two-level atom [2,3] is yet to be observed. It would occur in the linear regime, with low laser intensity so that the fluorescence, which itself swamps the squeezing, would be very weak, but the low collection solid angle and non-unit quantum efficiency of detection worsen the prospects for observation. There are proposals to improve the collection efficiency [4] or to enhance the squeezing signal using cavities [5] or feedback [6]. Two experiments succeeded in observing squeezing but in modified conditions: In [7] a long-lived transition is used, little affected by spontaneous emission, and in [8] the atom is strongly coupled to a cavity, where the modal structure surrounding the atom is notably altered.

A different strategy seeks to cancel the effects of detection efficiency [9,10,11,12]. The method of conditional homodyne detection (CHD) has allowed

observation of the weakly squeezed light of a cavity QED system [10,11], resulting from single photon fluctuations separated by long time intervals [13]. CHD consists of balanced homodyne measurement of one quadrature conditioned on the detection of a photon from the source, making the measurement free of detector efficiencies. Formally, it is a two-time amplitude-intensity correlation of the source field, giving an expression of *third* order in the field amplitude, thus introducing third order fluctuations. To relate this measurement to squeezing, however, the latter must vanish (if the fluctuations are Gaussian or symmetric about the mean) or must be very small [10,14].

The two-level atom resonance fluorescence has non-Gaussian fluctuations [15]; it is highly non-linear, thus it cannot be described by a quasi-probability distribution. Also, the fourth order moment of the dipole cannot be written in terms of a second order moment, as Gaussians do: the former vanish while the latter is the intensity. Third order fluctuations of resonance fluorescence have already been studied [9,16], but only indirectly, buried in a fourth order (intensity-intensity) correlation.

In this paper we find advantageous to use CHD to reveal non-Gaussianity of fluctuations in resonance fluorescence. Indeed, we find useful to bypass the

\* Corresponding author e-mail: [hcastro@uaem.mx](mailto:hcastro@uaem.mx)

restriction to the low driving regime by using the non-negligible third order fluctuations to obtain a picture of the difficulty of dealing with the fragile squeezing alone, and a means to obtain a more measurable spectrum: the extra noise, below saturation, also has a single-peaked negative spectrum. Further, analytical tractability of resonance fluorescence helps to illustrate squeezed and non-Gaussian fluctuations in a manner cavity QED cannot do [10,11,13,17]. A Bloch equations approach allows a separation of the correlation into terms of second and third order in the dipole noise operators [18]. We also apply quantum jump theory [19] to simulate the CHD correlation, even though the proper method would combine quantum jumps and quantum diffusion [10,19,20]. This allows for the analytical calculation for the probability that no photon (or one, or two) is emitted in a suitable observation time. In the weak field limit, where clean squeezing is present, the no-photon history approaches very accurately the exact result.

This paper is organized as follows. First, we briefly review two methods of study of resonance fluorescence. Then, we calculate the amplitude-intensity correlation of CHD, followed by the calculation of the fluctuations spectra. Finally, we discuss the results and give conclusions.

## 2 Theoretical Model

We consider a single two-level atom interacting with a monochromatic laser field. The Hamiltonian in the interaction picture is

$$\mathcal{H} = \hbar\Delta\sigma_+\sigma_- + \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-), \quad (1)$$

where  $\Delta$  is the detuning of the laser from the atomic transition frequency,  $\Omega$  is the Rabi frequency describing the coupling strength between atom and laser, and  $\sigma_{\pm}$  are Pauli pseudospin operators. The atom is also coupled to a reservoir of harmonic oscillators at zero temperature which causes spontaneous emission jumps at the rate  $\gamma$ . For concreteness, in this paper we take  $\Delta = 0$ , which allows to obtain analytical results, though a comment on finite detuning effects is given at the end of Section 4. We briefly review two approaches to study the atomic dynamics.

### 2.1 Bloch Equations

The Bloch equations describing the atomic dynamics in a slowly rotating frame are [19]

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{\sigma}_{\mp}\rangle = \mp i\frac{\Omega}{2}\langle\sigma_z\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle\tilde{\sigma}_{\mp}\rangle, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_z\rangle = i\Omega\langle\tilde{\sigma}_+\rangle - i\Omega\langle\tilde{\sigma}_-\rangle - \gamma(\langle\sigma_z\rangle + 1), \quad (3)$$

where  $\tilde{\sigma}_{\mp}(t) = \sigma_{\mp}e^{\pm i\omega t}$  and  $\omega$  is the laser frequency. The steady state solutions are

$$\langle\tilde{\sigma}_{\mp}\rangle_s = \pm \frac{iY}{\sqrt{2}(1+Y^2)}, \quad (4)$$

$$\langle\sigma_z\rangle_s = -\frac{1}{1+Y^2}, \quad (5)$$

$$\langle\sigma_+\sigma_-\rangle_s = \frac{1}{2}(1 + \langle\sigma_z\rangle_s) = \frac{Y^2}{2(1+Y^2)}, \quad (6)$$

where  $Y = \sqrt{2}\Omega/\gamma$ . Throughout this paper steady state values are denoted with the subindex  $s$ . For later reference, we replace the atomic operators by its mean plus noise,

$$\sigma_m(t) = \langle\sigma_m\rangle_s + \Delta\sigma_m(t), \quad (7)$$

where  $m = -, +, z$ , leading to the equations

$$\frac{d}{dt}\langle\Delta\tilde{\sigma}_{\mp}\rangle = \mp i\frac{\Omega}{2}\langle\Delta\sigma_z\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle\Delta\tilde{\sigma}_{\mp}\rangle, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\Delta\sigma_z\rangle = i\Omega\langle\Delta\tilde{\sigma}_+\rangle - i\Omega\langle\Delta\tilde{\sigma}_-\rangle - \gamma\langle\Delta\sigma_z\rangle. \quad (9)$$

### 2.2 Quantum Jump Method

Alternatively, we can study the quantum dissipative evolution solving stochastic Schrödinger equations, some of which simulate actual measurement strategies [19]. A quantum trajectory is a record of a possible history of the wave function. A large ensemble of histories reproduce the density operator. As sketched in the Introduction, we only consider the direct detection of the emitted photons. Due to dissipation the Schrödinger equation  $d|\Psi_c(t)\rangle/dt = -(i/\hbar)\mathcal{H}_{\text{eff}}|\Psi_c(t)\rangle$  describes the non-unitary stochastic evolution of the wave function, with periods of coherent evolution interrupted by spontaneous emissions, governed by the effective non-hermitian Hamiltonian

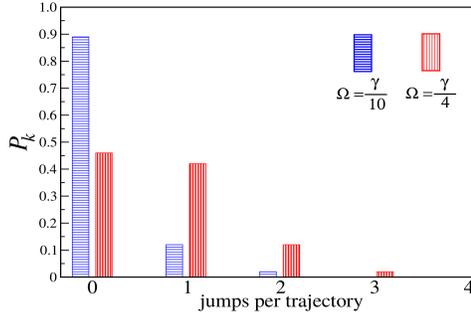
$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H} - i\hbar\frac{\gamma}{2}\sigma_+\sigma_-. \quad (10)$$

The wave function  $|\tilde{\Psi}_c(t)\rangle = \tilde{c}_g(t)|g\rangle + \tilde{c}_e(t)|e\rangle$  is non-normalized and conditioned on its previous evolution. The solutions for the amplitudes from jump to jump, when the initial conditions  $\tilde{c}_g(0) = 1$  and  $\tilde{c}_e(0) = 0$  are repeated, are (with  $\Delta = 0$ )

$$\begin{aligned} \tilde{c}_g(t) &= e^{-(\gamma/4)t} \left[ \cosh \kappa t + \frac{\gamma}{4\kappa} \sinh \kappa t \right], \\ \tilde{c}_e(t) &= -i\frac{\Omega}{2\kappa} e^{-(\gamma/4)t} \sinh \kappa t, \end{aligned} \quad (11)$$

where  $2\kappa = \sqrt{(\gamma/2)^2 - \Omega^2}$ . The emission of a photon is described by the action of the jump operator  $\sqrt{\gamma}\sigma_-$ , that resets the wave-function to the ground state, at time  $t_c$ ,

$$|\tilde{\Psi}_c(t_c)\rangle \rightarrow \sqrt{\gamma}\sigma_-|\tilde{\Psi}_c(t_c)\rangle = \sqrt{\gamma}\tilde{c}_e(t_c)|g\rangle, \quad (12)$$



**Fig. 1:** (Color online) Distribution of the number of jumps per trajectory for an ensemble of  $10^5$  realizations of length  $\gamma T = 15$  and  $\Delta = 0$ . For weak fields,  $\Omega = \gamma/10$ ,  $\bar{k} = 0.12$ ; at saturation,  $\Omega = \gamma/4$ ,  $\bar{k} = 0.68$ .

with probability  $p_c(t) = \gamma dt \langle \Psi_c | \sigma_+ \sigma_- | \Psi_c \rangle$  in the interval  $[t, t + dt]$ , where  $|\Psi_c(t)\rangle = |\tilde{\Psi}_c(t)\rangle / [(\langle \tilde{\Psi}_c(t) | \tilde{\Psi}_c(t) \rangle)]^{1/2}$  is the normalized wave function.

Quantum jump trajectories allow to retrieve the photon statistics on the fly [19, 21]. Assuming ergodicity, the mean number of photons emitted in the interval  $t = [0, T]$  is  $\bar{k} = \gamma \int_0^T \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle(t) dt$ , where  $T$  is chosen long enough for the atom-field interaction to have reached the steady state in the ensemble average sense. Figure 1 shows calculations of the probability  $P_k(T)$  to have  $k$  photons in a trajectory of length  $T$ .

Also, one can calculate the average time between two consecutive photons [22],

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\gamma \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st}} = \frac{\gamma^2 + 2\Omega^2}{\gamma \Omega^2}, \quad (13)$$

where we used Eq. (6). For a propagation time  $\gamma T = 15$  we find that for weak driving,  $\Omega = \gamma/10$ , we have  $\gamma \bar{\tau} = 102$ , and for moderate driving,  $\Omega = \gamma/4$ , we have  $\gamma \bar{\tau} = 18$ . For  $\Omega < \gamma/10$ , trajectories with  $k \geq 2$  events are very rare so, for weak excitation, the weight of one photon events might be obtained approximately by subtracting the zero-jump trajectories to the ensemble.

### 3 Conditional Homodyne Detection

The CHD measures the delayed evolution of a quadrature of the field  $E_\phi \propto \sigma_\phi = (1/2)(\sigma_- e^{i\phi} + \sigma_+ e^{-i\phi})$  by balanced homodyne detection, where  $\phi$  is the phase between the strong local oscillator and the driving field, conditioned on the direct measurement of the intensity  $I \propto \sigma_+ \sigma_-$  at time  $\tau = 0$  in the other detector, that is,  $\langle I(0) E_\phi(\tau) \rangle$ . The normalized third-order correlation in

the field amplitude [10, 11] is

$$h_\phi(\tau) = \frac{\langle : \sigma_+(0) \sigma_-(0) \sigma_\phi(\tau) : \rangle}{\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st} \langle \sigma_\phi \rangle_{st}}, \quad (14)$$

where the dots  $::$  stand for time and normal operator ordering. To calculate  $h_\phi(\tau)$  the Bloch equations are solved first and then the quantum regression formula is used [19].

Since  $h_\phi(\tau)$  is of odd order in the field amplitude, we expect the CHD to be very sensitive to fluctuations. Indeed, for  $\tau \geq 0$  it is the quadrature amplitude of the field that is measured on the cue of a photon count, while for  $\tau \leq 0$  it is the intensity that is conditioned on the amplitude measurement. The phase dependence of  $h_\phi(\tau)$  makes it non-trivial to relate quadrature amplitude and intensity. For the two-level atom the correlation is given by Eq. (20) below, obtained with a different method in [23, 24], which happens to be time-symmetric due to low dimensionality.

To reveal the effects of fluctuations we use Eq. (7) in Eq. (14), thus splitting the amplitude-intensity correlation into correlations of second and third order in the dipole noise operators [18],

$$h_\phi(\tau) = 1 + h_\phi^{(2)}(\tau) + h_\phi^{(3)}(\tau), \quad (15)$$

where

$$h_\phi^{(2)}(\tau) = \frac{2 \langle : \text{Re}[\langle \tilde{\sigma}_- \rangle_{st} \Delta \tilde{\sigma}_+(0) \Delta \tilde{\sigma}_\phi(\tau) : \rangle]}{\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st} \langle \tilde{\sigma}_\phi \rangle_{st}}, \quad (16)$$

$$h_\phi^{(3)}(\tau) = \frac{\langle : \Delta \tilde{\sigma}_+(0) \Delta \tilde{\sigma}_-(0) \Delta \tilde{\sigma}_\phi(\tau) : \rangle}{\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st} \langle \tilde{\sigma}_\phi \rangle_{st}}. \quad (17)$$

Note that the numerator of Eq. (16) is the autocorrelation of the quadrature fluctuations  $\langle : \Delta \tilde{\sigma}_\phi(0) \Delta \tilde{\sigma}_\phi(\tau) : \rangle$ , usual in studies of squeezing. Solutions of the two-time correlations are sketched in the Appendix.

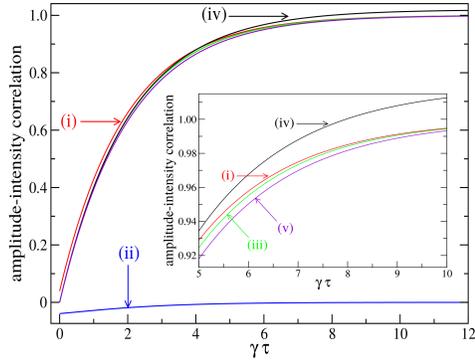
The quadrature with  $\phi = \pi/2$  is the one that features squeezing, thus most of our results are restricted to this case. The normalization is given by the product of Eq. (6) and  $\langle \tilde{\sigma}_{\pi/2} \rangle_{st} = -Y[\sqrt{2}(1+Y^2)]^{-1}$ . The CHD correlation for this quadrature is

$$h_{\pi/2}^{(2)}(\tau) = -\frac{1}{1+Y^2} e^{-(3\gamma/4)\tau} \times \left[ (1-Y^2) \cosh \delta \tau + \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma} \sinh \delta \tau \right], \quad (18)$$

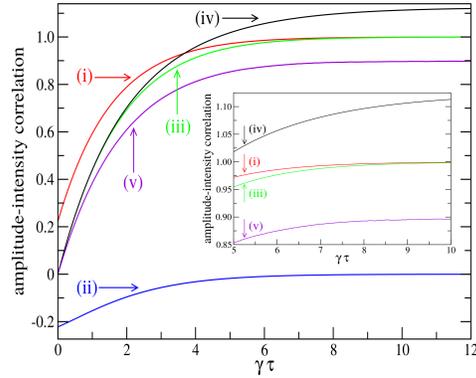
$$h_{\pi/2}^{(3)}(\tau) = -\frac{2Y^2}{1+Y^2} e^{-(3\gamma/4)\tau} \times \left[ \cosh \delta \tau + \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma} \sinh \delta \tau \right], \quad (19)$$

where  $\delta = (\gamma/4)\sqrt{1-8Y^2}$ , and the total correlation is

$$h_{\pi/2}(\tau) = 1 - e^{-(3\gamma/4)\tau} \left[ \cosh \delta \tau + \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma} \sinh \delta \tau \right], \quad (20)$$



**Fig. 2:** (Color online) Amplitude-intensity correlation for  $\phi = \pi/2$  for weak driving,  $\Omega = \gamma/10$ . Shown are: (i)  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}$ , (ii)  $h_{\pi/2}^{(3)}$ , (iii) total (exact), (iv) single zero-photon trajectory, and (v) the weak field formula. A large ensemble (not shown) approaches the exact formula.



**Fig. 3:** (Color online) Amplitude-intensity correlation for  $\phi = \pi/2$  for driving on saturation,  $\Omega = \gamma/4$ . Shown are: (i)  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}$ , (ii)  $h_{\pi/2}^{(3)}$ , (iii) total (exact), (iv) single zero-photon trajectory, and (v) a sub-ensemble of zero- and one-photon trajectories. The full ensemble (not shown) contains  $10^5$  realizations.

with initial values given by

$$h_{\pi/2}^{(2)}(0) = \frac{Y^2 - 1}{1 + Y^2},$$

$$h_{\pi/2}^{(3)}(0) = -\frac{2Y^2}{1 + Y^2} = -4\langle\sigma_+\sigma_-\rangle_{st},$$

resulting, from Eq. (15), in  $h_{\pi/2}(0) = 0$ . For strong driving,  $Y^2 \gg 1$ ,  $h_{\pi/2}^{(3)}(0) \rightarrow -2$ , which implies a large deviation from Gaussian fluctuations.

Special cases are those of the weak field limit,  $Y^2 \ll 1$ ,

$$h_{\pi/2}^{weak}(\tau) = 1 - e^{-(3\gamma/4)\tau} [\cosh(\gamma\tau/4) + \sinh(\gamma\tau/4)], \quad (21)$$

and at saturation,  $\Omega = \gamma/4$  (or  $Y^2 = 1/8$ ),

$$h_{\pi/2}^{sat}(\tau) = 1 - e^{-(3\gamma/4)\tau} \left(1 + \frac{3}{16}\gamma\tau\right). \quad (22)$$

The in-phase quadrature,  $\phi = 0$ , plays a minor role in this paper. For instance,  $\langle\sigma_{\phi=0}\rangle = 0$ . Hence, in order to measure a finite signal a coherent offset of amplitude  $E_{off}$  has to be added to the source field, modifying Eq. (14) (see [10, 18]). This gives

$$h_0(\tau) = 1 + \frac{\langle\sigma_+\sigma_-\rangle_{st}}{\langle\sigma_+\sigma_-\rangle_{st} + E_{off}^2} e^{-\gamma\tau/2}$$

$$= 1 + \left[1 + \frac{(E_{off}Y)^2}{2(1+Y^2)}\right]^{-1} e^{-\gamma\tau/2}. \quad (23)$$

Here  $h_0(0) > 1$  and  $h_0^{(3)}(\tau)$  is zero at all times.

CHD requires a strong local oscillator field to be mixed with the source's output. The balanced homodyne detection (BHD) arm of the CHD setup thus detects far more photons from the local oscillator than of the source so, strictly, a simulation of the detection process should be of the quantum state diffusion type that, however, keeps a record of the start photons [10]. Our aim, though, is to study the photon emission dynamics and fluctuations near the squeezing conditions. Thus we only use the simpler quantum jump approach to calculate the wave function and, with it, the relevant observables.

It is not possible to split the correlation into terms of second and third order fluctuations when we use quantum trajectory methods. However, with quantum jumps, we may split the correlation into contributions of histories with  $k$  photons emitted in a given time interval  $T$ ,

$$h_\phi(\tau) = \sum_k P_k(T) h_\phi(\tau, k). \quad (24)$$

At  $\tau = 0$  we have the *start* photon of the correlation and then count the number of photons  $k$  at the *stop* detector in the period  $T$ . With each photon emission the atom returns to its ground state.

The  $k = 0$  term can be obtained analytically exactly using the solutions (11), which give the evolution of the wave function between two consecutive jumps. Equation

(14) is reduced to  $h_\phi(\tau) = \langle \tilde{\sigma}_\phi(\tau) \rangle / \langle \tilde{\sigma}_\phi \rangle_{st}$ , where

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}_\phi(\tau) \rangle &= \text{Im}(\tilde{c}_e \tilde{c}_g^*) / (|\tilde{c}_g|^2 + |\tilde{c}_e|^2) \\ &= \frac{(\Omega/2\kappa) \sinh \kappa\tau [\cosh \kappa\tau + (\gamma/4\kappa) \sinh \kappa\tau]}{\cosh^2 \kappa\tau + \sinh^2 \kappa\tau + (\gamma/2\kappa) \cosh \kappa\tau \sinh \kappa\tau} \end{aligned} \quad (25)$$

and  $\langle \tilde{\sigma}_{\pi/2} \rangle_{st} = -Y[\sqrt{2}(1+Y^2)]^{-1}$ . Note that a zero-photon trajectory does not have a steady state but the correlation is normalized with the ensemble value.

Figure 2 shows comparisons of the exact (ensemble), the zero photon ( $k=0$ ) trajectory, the weak field formula, and the second and third order formulas. Figure 3 shows the saturation case, noting that  $h_{\pi/2}(\tau)$  needs the  $k=0$  and  $k=1$  sub-ensembles to approach accurately the exact result (or full ensemble).

It is very important to stress that it is not possible to associate the splittings of Eqs. (15) and (24), on a one to one basis. Even for weak excitation, the no-photon sub-ensemble does not mean that third order fluctuations are absent, or that the one-photon sub-ensemble deviate fluctuations from Gaussian. Even one photon can destroy squeezing.

#### 4 Spectra of Squeezed and other Fluctuations

In most experimental schemes, squeezing is studied in the frequency domain. In CHD the measurement is made in the time domain. This allows to assess the non-classicality of the quadratures, squeezed or not, by the violation of two classical inequalities [18]. The noise spectra of the quadratures are obtained from the Fourier cosine transform of the CHD correlations [10, 18]. The spectrum can be split as

$$S_\phi^{(2)}(\omega) = 4\gamma \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) [h_\phi^{(2)}(\tau) - 1], \quad (26)$$

$$S_\phi^{(3)}(\omega) = 4\gamma \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) h_\phi^{(3)}(\tau). \quad (27)$$

Eq. (26) is a variant of the so-called *spectrum of squeezing*,  $S_\phi^{(2)}(\omega) = 2\gamma \int_0^\infty d\tau \cos \omega\tau (\Delta \tilde{\sigma}_\phi(0) \Delta \tilde{\sigma}_\phi(\tau) :)$ . However, as we will see, the moniker is inaccurate. From Eqs. (18–20,23), we obtain

$$S_0(\omega) = S_0^{(2)}(\omega) = \frac{-2\gamma Y^2}{1+Y^2} \frac{\lambda_0}{\omega^2 + \lambda_0^2}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} S_{\pi/2}^{(2)}(\omega) &= \frac{\gamma Y^2}{(1+Y^2)^2} \left[ \left( 1 - Y^2 + \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma} \right) \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - Y^2 - \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma} \right) \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_{\pi/2}^{(3)}(\omega) &= \frac{2\gamma Y^4}{(1+Y^2)^2} \left[ \left( 1 + \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma} \right) \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma} \right) \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

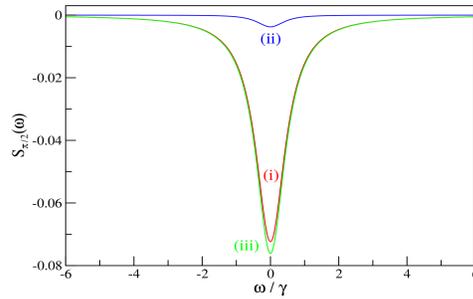


Fig. 4: (Color online) Spectra of fluctuations for  $\phi = \pi/2$  for weak driving,  $\Omega = \gamma/10$ . Shown are the second order (i), third order (ii), and the total spectrum (iii).

where  $\lambda_0 = -\gamma/2$  and  $\lambda_\pm = -(3/4)\gamma \pm \delta$  [see Eq. (43)]. The total spectrum,  $S_{\pi/2}^{(2)}(\omega) + S_{\pi/2}^{(3)}(\omega)$ , for  $\phi = \pi/2$  is

$$\begin{aligned} S_{\pi/2}(\omega) &= \frac{\gamma Y^2}{1+Y^2} \left[ \left( 1 + \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma} \right) \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma} \right) \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Let's recall Eqs. (28–31) are all exact.

$S_0(\omega)$  is a positive Lorentzian of width  $\gamma$ , meaning there is no squeezing for  $\phi = 0$ , even though  $h_0(\tau)$  is non-classical [18]. Moreover, the third order term is zero.

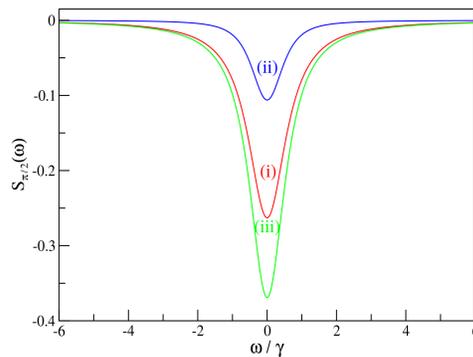


Fig. 5: (Color online) Spectra of fluctuations for  $\phi = \pi/2$  for driving on saturation,  $\Omega = \gamma/4$ . Shown are the second order (i), third order (ii), and the total spectrum (iii).

For the  $\phi = \pi/2$  quadrature we emphasize, again, the weak and moderate driving regime. Figures 4 and 5 show

their respective spectra calculated from the exact Eqs. (29-31). The second order term, usually called the spectrum of squeezing, is negative, which indicates that the fluctuations are indeed squeezed. But the third order spectrum is also negative, increasing with the strength of the driving field.

For weak fields, keeping a single  $Y$ -dependent correction in Eq. (31) we have

$$S_{\pi/2}^{weak}(\omega) \approx -\gamma^2 Y^2 \left[ \frac{1}{\omega^2 + (\gamma/2)^2(1 + 4Y^2)} + \frac{3\gamma^2 Y^2/2}{[\omega^2 + (\gamma/2)^2(1 + Y^2)]^2} \right]. \quad (32)$$

The width of the leading peak is  $\gamma(1 + 2Y^2)$ , slightly increased by the presence of the second peak. Disregarding all corrections we find that  $S_{\pi/2}^{weak}(\omega) \rightarrow -S_0(\omega)$ .

Interestingly, Rice and Carmichael [25] found that squeezing reduces the weak field linewidth of the incoherent spectrum of resonance fluorescence, a narrow squared Lorentzian, due to the subtraction of two Lorentzians. One of them is slightly smaller but carries the squeezed fluctuations. In the present case, however, the extra noise is correlated to increase the size and width of the spectrum of squeezing.

For saturation intensity,  $\Omega = \gamma/4$ , we evaluate Eq. (31) at  $Y^2 = 1/8$ , giving

$$S_{\pi/2}^{sat}(\omega) = -\frac{\gamma^2}{24} \left[ \frac{5(3\gamma/4)^2 + 3\omega^2}{[\omega^2 + (3\gamma/4)^2]^2} \right], \quad (33)$$

a squared Lorentzian plus a frequency-dependent term, with linewidth  $\Delta\omega = 0.82(3\gamma/2)$ . Above saturation the eigenfrequency  $\delta = (\gamma/4)\sqrt{1 - 8Y^2}$  becomes imaginary and sidebands appear.

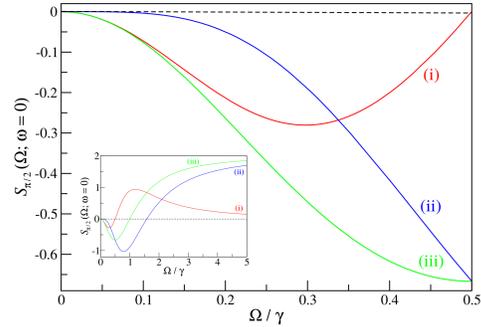
However, the spectrum remains a single negative peak up to  $\Omega \sim \gamma/2$ , above which the peak splits. It seems practical then to look at squeezing via the size of the spectrum at the frequency  $\omega = 0$ ,

$$S_{\pi/2}^{(2)}(\omega = 0) = \frac{4Y^2(2Y^2 - 1)}{(1 + Y^2)^3}, \quad (34)$$

$$S_{\pi/2}^{(3)}(\omega = 0) = \frac{2Y^4(Y^2 - 5)}{(1 + Y^2)^3}, \quad (35)$$

$$S_{\pi/2}(\omega = 0) = \frac{2Y^2(Y^2 - 2)}{(1 + Y^2)^2}, \quad (36)$$

shown in Fig.6. These are negative for  $\Omega < \gamma/2$ ,  $\Omega < \gamma\sqrt{5}/2$ , and  $\Omega < \gamma$ , respectively. The minimum of the 2nd order spectrum (maximum squeezing) is seen at  $\Omega = 0.3\gamma$ . This means that maximal is not optimal, a point observed previously [3,9]. In our case, it means that near and above saturation squeezing might be large but is contaminated by the third order fluctuations. Cleaner squeezing (small third order fluctuations) is limited to  $\Omega < 0.1\gamma$ .



**Fig. 6:** (Color online) Size of the spectrum at  $\omega = 0$  for second order (i), third order(ii), and total (iii) spectrum. For  $\Omega > \gamma/2$  (see the inset for an extended range) the total spectrum is no longer a single peak, and for  $\Omega > 0.7\gamma$  takes on positive values.

#### 4.1 Integrated Spectra and Variances

The integrated spectrum represents the total power emitted by the atom. Likewise, the integrated phase-dependent spectrum represents the size of the noise in a quadrature: in the standard treatment of squeezing it is expressed in terms of the variance,  $(4\pi\gamma)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\phi}^{(2)}(\omega) d\omega = \langle \Delta \tilde{\sigma}_{\phi}(0) \Delta \tilde{\sigma}_{\phi}(\tau) \rangle = V_{\phi}$  [3]. Integrating Eq. (28) we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) d\omega = 4\pi\gamma \frac{Y^2}{2(1 + Y^2)} = 4\pi\gamma V_0. \quad (37)$$

This is the mean intensity emitted in the full solid angle  $4\pi$ . Similarly, integrating Eqs. (29) and (30) we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\pi/2}^{(2)}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma \frac{Y^2(1 - Y^2)}{2(1 + Y^2)^2} = 4\pi\gamma V_{\pi/2}, \quad (38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\pi/2}^{(3)}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma \frac{Y^4}{(1 + Y^2)^2}. \quad (39)$$

The former is a well-known result [3], where the variance is negative (i.e., there is squeezing) for  $Y^2 < 1$ , while the latter is new, negative for all  $Y$ , required to match the total noise of the in-phase quadrature,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\pi/2}(\omega) d\omega = -4\pi\gamma V_0. \quad (40)$$

This is further proof of the non-Gaussianity of resonance fluorescence fluctuations.

#### 4.2 Effect of Finite Detuning

Here we briefly discuss the effect of finite atom-laser frequency detuning on the CHD correlation and spectra.

One should begin with the scattering rate,  $\gamma\langle\sigma_+\sigma_-\rangle_{st} = \gamma\Omega^2[2\Omega^2 + \gamma^2 + 4\Delta^2]^{-1}$ . The photon rate is reduced with increasing detuning and, hence, the nonlinearity responsible for the third order correlation and spectra. However, the increased generalized Rabi frequency induces oscillations in  $h_\phi^{(2)}(\tau)$  at smaller driving intensities, thus the spectrum develops sidebands like those in the strong driving case, with a positive component at  $\omega = 0$  [13, 18].

### 5 Discussion and Conclusions

In this paper we have investigated conditions for non-Gaussian fluctuations to manifest in two-level atom resonance fluorescence. Clean squeezing occurs when the atom is very weakly driven, when the average time interval between two consecutive photons is much longer than the regression time to the (ensemble) steady state. In CHD, which is only weakly sensitive to detection inefficiencies, third order fluctuations can be studied naturally. We found it convenient, however, to deviate from the ideal squeezing conditions by considering more moderate laser intensity.

A density operator calculation of the amplitude-intensity correlation allows to split the fluctuations into terms of second and third order in the dipole noise operator. Second order noise is called squeezed if its spectrum is negative. The third order noise increases with the driving intensity in the interval where squeezing occurs, contaminating the latter. Fortunately, for moderately weak driving, both the second and third order fluctuations have coincident negative spectra. This signature of third order fluctuations are more convenient to observe experimentally than looking for clean squeezing in second order correlation measurements.

The quantum jump method makes a decomposition of the CHD correlation in terms of the number of excitations in a measurement time. One has to note, however, that it is not possible, even in the weak field regime, to associate the  $k$ -th contribution to either the second or the third order dipole fluctuations. One photon is enough to imprint nonlinearity and non-Gaussianity on these fluctuations. The combined analysis, in the framework of conditional homodyne detection, has helped to illustrate the physical processes that lead to the emergence and the degradation of the elusive squeezing in resonance fluorescence.

Finally, the total noise emitted must be independent of the quadrature observed. CHD has permitted us to find the integrated spectrum of the third order fluctuations in the out-of-phase quadrature. The third-order spectrum can be used as a complement to second order spectrum of squeezing to accurately identify and observe the squeezing in the light field emitted by an atom.

### Acknowledgement

HMCB thanks Prof. H. J. Carmichael for useful comments and encouragement, and the PIDE program at UAEM for support.

### Appendix

We sketch here the analytical solutions of the two-time correlation functions, the numerators of Eqs. (16) and (17), for the dipole fluctuation operators. We start with the Bloch equations for the atomic fluctuations, Eqs. (8) and (9), written compactly as  $d\langle\Delta s\rangle/d\tau = \mathbf{M}\langle\Delta s\rangle$ , where

$$\Delta s \equiv \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\sigma}_- \\ \Delta\tilde{\sigma}_+ \\ \Delta\sigma_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} -\gamma/2 & 0 & -i\Omega/2 \\ 0 & -\gamma/2 & i\Omega/2 \\ -i\Omega & i\Omega & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Using the quantum regression formula [15], two sets of equations for the correlations of the dipole fluctuation operators, for the second and third order, are then obtained. Both have the structure

$$\frac{d}{d\tau}\langle\Delta\tilde{\sigma}_+(0)\Delta s(\tau)\Delta A(0)\rangle = \mathbf{M}\langle\Delta\tilde{\sigma}_+(0)\Delta s(\tau)\Delta A(0)\rangle, \quad (41)$$

with formal solution given by

$$\langle\Delta\tilde{\sigma}_+(0)\Delta s(\tau)\Delta A(0)\rangle = R^{-1}e^{\lambda\tau}R\langle\Delta\tilde{\sigma}_+\Delta s\Delta A\rangle, \quad (42)$$

where  $R$  is a matrix that diagonalizes  $\mathbf{M}$ , and  $\lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_+, \lambda_-)$  is the diagonal matrix of eigenvalues of  $\mathbf{M}$  given by

$$\lambda_0 = -\gamma/2, \quad \lambda_{\pm} = -(3/4)\gamma \pm \delta. \quad (43)$$

For the second-order correlations, Eq. (16), substitute  $\Delta A = \mathbf{1}$  in Eq. (41) with the initial conditions ( $\tau = 0$ )

$$\begin{aligned} \langle\Delta\tilde{\sigma}_+\Delta s\rangle &= \begin{pmatrix} \langle\sigma_+\sigma_-\rangle_{st} - |\langle\tilde{\sigma}_+\rangle_{st}|^2 \\ -\langle\tilde{\sigma}_+\rangle_{st}^2 \\ -2\langle\tilde{\sigma}_+\rangle_{st}\langle\sigma_+\sigma_-\rangle_{st} \end{pmatrix} \\ &= \frac{Y^2/2}{(1+Y^2)^2} \begin{pmatrix} Y^2 \\ 1 \\ i\sqrt{2}Y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (44)$$

leading to the full time-dependent solutions

$$\begin{aligned} \langle\Delta\tilde{\sigma}_+(0)\Delta\tilde{\sigma}_+(\tau)\rangle &= \frac{Y^2/4}{1+Y^2}e^{\lambda_0\tau} \mp \frac{Y^2/8}{(1+Y^2)^2} \\ &\times \left[ \left(1 - Y^2 + \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma}\right)e^{\lambda_+\tau} \right. \\ &\left. + \left(1 - Y^2 - \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma}\right)e^{\lambda_-\tau} \right], \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \langle\Delta\tilde{\sigma}_+(0)\Delta\sigma_z(\tau)\rangle &= i\frac{\sqrt{2}Y^3/4}{(1+Y^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma}\right)e^{\lambda_+\tau} \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{1-2Y^2}{4\delta/\gamma}\right)e^{\lambda_-\tau} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

## APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

2856



H. M. Castro-Beltrán et al. : Squeezed Versus Non-Gaussian Fluctuations...

For the third-order correlations, Eq. (17), substitute  $\Delta A = \Delta \tilde{\sigma}_-$  in Eq. (41) with the initial conditions

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{\sigma}_+ \Delta s \Delta \tilde{\sigma}_- \rangle &= \begin{pmatrix} 2\langle \tilde{\sigma}_- \rangle_{st} (|\langle \tilde{\sigma}_+ \rangle_{st}|^2 - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st}) \\ 2\langle \tilde{\sigma}_+ \rangle_{st} (|\langle \tilde{\sigma}_+ \rangle_{st}|^2 - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st}) \\ 2\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st} (2|\langle \tilde{\sigma}_+ \rangle_{st}|^2 - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{st}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{Y^4/2}{(1+Y^2)^3} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}Y \\ i\sqrt{2}Y \\ 1-Y^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (47)$$

obtaining the time-dependent solutions

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{\sigma}_+(0) \Delta \tilde{\sigma}_\mp(\tau) \Delta \tilde{\sigma}_-(0) \rangle &= \\ &\mp \frac{iY^5/\sqrt{8}}{(1+Y^2)^3} \left[ \left( 1 + \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma} \right) e^{\lambda+\tau} \right. \\ &\left. + \left( 1 - \frac{2-Y^2}{4\delta/\gamma} \right) e^{\lambda-\tau} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{\sigma}_+(0) \Delta \sigma_z(\tau) \Delta \tilde{\sigma}_-(0) \rangle &= \\ &-\frac{Y^4/4}{(1+Y^2)^3} \left[ \left( \frac{1+7Y^2}{4\delta/\gamma} - (1-Y^2) \right) e^{\lambda+\tau} \right. \\ &\left. - \left( \frac{1+7Y^2}{4\delta/\gamma} + (1-Y^2) \right) e^{\lambda-\tau} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

### References

[1] H. J. Kimble and D. F. Walls, eds., *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1450–1741 (1987); R. Loudon and P. L. Knight, eds., *J. Mod. Opt.* **34**, 709–1020 (1987).  
 [2] D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 709–711 (1981).  
 [3] M. J. Collett, D. F. Walls, P. Zoller, *Opt. Commun.* **52**, 145–149 (1984).  
 [4] M. Stobińska, M. Sondermann, and G. Leuchs, *Opt. Commun.* **283**, 737–740 (2010).  
 [5] P. Grünwald and W. Vogel, *Phys. Rev. A* **88**, 023837 (2013).  
 [6] A. Barchielli, M. Gregoratti, and M. Licciardo, *EPL* **85**, 14006.1–6 (2009).  
 [7] Z. H. Lu, S. Bali, and J. E. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3635–3638 (1998).  
 [8] A. Ourjoumtsev, A. Kubanek, M. Koch, C. Sames, P. W. H. Pinsky, G. Rempe, and K. Murr, *Nature* **474**, 623 (2011).  
 [9] W. Vogel, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2450–2452 (1991); *Phys. Rev. A* **51**, 4160–4171 (1995).  
 [10] H. J. Carmichael, H. M. Castro-Beltrán, G. T. Foster, and L. A. Orozco, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1855–1858 (2000).  
 [11] G. T. Foster, L. A. Orozco, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3149–3152 (2000).  
 [12] S. Gerber, D. Rotter, L. Slodička, J. Eschner, H. J. Carmichael, and R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 183601.1–4 (2009).  
 [13] J. E. Reiner, W. P. Smith, L. A. Orozco, H. J. Carmichael, and P. R. Rice, *J. Opt. Soc. Am. B* **18**, 1911–1921 (2001).  
 [14] J. Vines, R. Vyas, and S. Singh, *Phys. Rev. A* **74**, 023817 (2006).  
 [15] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[16] H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2790–2793 (1985).  
 [17] A. Denisov, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 243601.1–4 (2002).  
 [18] H. M. Castro-Beltrán, *Opt. Commun.* **283**, 4680–4684 (2010).  
 [19] H. J. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.  
 [20] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **47**, 1652–1666 (1993).  
 [21] H. M. Castro-Beltrán, E. R. Marquina-Cruz, G. Arroyo-Correa, and A. Denisov, *Laser Phys.* **18**, 149–156 (2008).  
 [22] H. J. Carmichael, S. Singh, R. Vyas, and P. R. Rice, *Phys. Rev. A* **39**, 1200–1218 (1989).  
 [23] E. R. Marquina-Cruz and H. M. Castro-Beltrán, *Laser Phys.* **18**, 157–164 (2008).  
 [24] A. Denisov, PhD Thesis (University of Oregon, 2004).  
 [25] P. R. Rice and H. J. Carmichael, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1661–1668 (1988).  
 [26] W. Vogel, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013605.1–4 (2008).



**Héctor M. Castro-Beltrán** received a Dr. Sc. degree in physics from Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Mexico, in 1996, where he spent two more years as researcher. From 1998 to 2000 he was Research Associate at University of Oregon, USA. His research interests include quantum optics, cavity QED, laser spectroscopy, open quantum systems, non-stationary optical systems, and quantum information.



**Luis Gutiérrez** received a Master of Science degree in physics from Universidad Nacional Autónoma de México with a thesis on Wannier-Stark ladders in elastic systems. He is currently working towards a Dr. Sc. degree with Dr. H. M. Castro-Beltrán as advisor.

His research interests include quantum optics, laser spectroscopy, and quantum physics analogies in elasticity.

## APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

---



### **Levente Horvath**

received a B.Sc. (Hons.) degree and a Ph.D. degree in physics from Macquarie University, Sydney, New South Wales, Australia, in 1996 and 2002, respectively. From 2003 to 2004, he was a Research Associate at Macquarie University

working on microwave antennas and waveguides in photonic crystals. He was a Research Fellow at the University of Auckland, Auckland, New Zealand, and the University of Queensland, Brisbane, Queensland, Australia for many years. He is currently a lecturer in Electronic Engineering in Sydney Institute of Business and Technology at Macquarie University. His research interests include quantum optics, cavity QED, quantum information, photonic crystal antennas, stochastic methods, and computational methods for many body problems.

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

### Phase-dependent fluctuations of intermittent resonance fluorescence

Héctor M. Castro-Beltrán,<sup>1,2,\*</sup> Ricardo Román-Ancheyta,<sup>2,†</sup> and Luis Gutiérrez<sup>1,‡</sup>

<sup>1</sup>*Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Avenida Universidad 1001, 62209 Cuernavaca, Morelos, México*

<sup>2</sup>*Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 48-3, 62251 Cuernavaca, Morelos, México*

(Received 26 November 2015; published 1 March 2016)

Electron shelving gives rise to bright and dark periods in the resonance fluorescence of a three-level atom. The spectral signature of such blinking is a very narrow inelastic peak on top of the two-level atom spectrum. Here, we investigate theoretically phase-dependent fluctuations (e.g., squeezing) of intermittent resonance fluorescence in the frameworks of balanced and conditional homodyne detection (BHD and CHD, respectively). In BHD, the squeezing is reduced significantly in size and Rabi frequency range compared to that for a two-level atom. The sharp peak is found only in the spectrum of the squeezed quadrature, splitting the negative broader squeezing peak for weak fields. CHD correlates the BHD signal with the detection of emitted photons. It is thus sensitive to third-order fluctuations of the field, produced by the atom-laser nonlinearity, that cause noticeable deviations from the second-order BHD results. For weak driving, the third-order spectrum is negative, enlarging the squeezing peak but also reducing the sharp peak. For strong driving, the spectrum is dominated by third-order fluctuations, with a large sharp peak and the sidebands becoming dispersive. Finally, the addition of third-order fluctuations makes the integrated spectra of both quadratures equal in magnitude in CHD, in contrast to those by BHD. A simple mathematical approach allows us to obtain very accurate analytical results in the shelving regime.

DOI: [10.1103/PhysRevA.93.033801](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.033801)

#### I. INTRODUCTION

A photon emitter with peculiar fluctuations is a single three-level atom with a laser-driven strong transition competing with a coherently or incoherently driven weak transition. The occasional population of a long-lived state, an effect called electron shelving, produces intermittence (blinking) in the resonance fluorescence of the strong transition. Photon statistics of the fluorescence have been thoroughly studied for three-level atomic systems [1], in which case the process is ergodic, i.e., when the mean bright and dark periods are finite. For a single quantum dot or molecule the statistics are more complicated if the process is not ergodic [2]. In the spectral domain, ergodic shelving manifests in the appearance of a very narrow inelastic peak on top of the central peak of the two-level-like spectrum. This has been well studied analytically and numerically [3–5] and observed experimentally [6]. In the latter, heterodyne detection was used, which allows for very high spectral resolution [7]. In their paper [6], Bühner and Tamm suggest performing complementary phase-dependent measurements of the fluorescence; so far, there are no reports yet, perhaps due to experimental restrictions.

Squeezing, the reduction of fluctuations below those of a coherent state in a quadrature at the expense of increasing fluctuations in the other quadrature, is weak in resonance fluorescence [8,9]. The low collection and imperfect quantum efficiency of photodetectors have been the main barriers for the observation of squeezing, although recent experimental progress tackles these issues. On the one hand, there is the increased solid angle of emission captured with minimal disturbance of the photon density of states surrounding the

atom [10]. On the other hand, there is the development of conditional detection schemes based on homodyne detection that cancel the finite quantum efficiency issue [11–18]. We discuss two of them.

Homodyne correlation measurement (HCM), proposed by Vogel [11,12] (see also [19]), consists of intensity correlations of the previously mixed source and weak local oscillator fields, thus canceling the detector efficiency factors. The output contains several terms, including the variance and an amplitude-intensity correlation. Very recently, HCM was used to observe squeezing in the resonance fluorescence of a single two-level quantum dot [20] in conditions close to those for free-space atomic resonance fluorescence. In fact, in the first demonstration of HCM the amplitude-intensity correlation of the fluorescence of a single three-level ion in the  $\Lambda$  configuration was observed [21], although not yet in the squeezing regime.

Conditional homodyne detection (CHD) was proposed and demonstrated by Carmichael, Orozco, and coworkers [13,14]. This consists of balanced homodyne detection (BHD) of a quadrature conditioned on an intensity measurement of part of the emitted field; it gives the amplitude-intensity correlation of HCM but measured directly, without the other terms. As in the intensity correlations, the conditioning cancels the dependence on detector efficiency. The intensity detection channel has nontrivial effects on the quadrature signals. The amplitude-intensity correlation is of third order in the field amplitude; hence it allows for third-order fluctuations. Initially, CHD was devised for weak light emitters, neglecting the third-order fluctuations. This allowed the identification of the Fourier transform of the correlation as the spectrum of squeezing [13,14]. However, recent work on CHD of two-level atom resonance fluorescence has shown important deviations from the spectrum of squeezing due to increasing nonlinearity in the atom-laser interaction [22,23]. An additional display of these non-Gaussian fluctuations is found in the asymmetry

\*hcastro@uaem.mx

†ancheyta6@gmail.com

‡luis.gutierrez@uaem.mx

# APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

HÉCTOR M. CASTRO-BELTRÁN *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

of the correlation in cavity QED [24] and in the resonance fluorescence of a V-type three-level atom [25–27] and of two blockading Rydberg atoms [28].

In this paper we investigate theoretically ensemble-averaged phase-dependent fluctuations of the intermittent (ergodic) resonance fluorescence of a single three-level atom (3LA). Besides numerical solutions for the one- and two-time expectation values, we obtain approximate analytical solutions which are very accurate in the limit when the decay rate of the strong transition is much larger than those of the weak transitions. Our solutions are simple and reflect clearly the time and spectral scales. Thus we begin by writing the expression for the coherent and phase-independent incoherent spectra of the 3LA, studied numerically at length in Ref. [5].

We compare the spectra and variances of an ideal BHD approach, which could also be obtained from HCM, with those of the CHD method. They have in common that the sharp extra peak [3–6], on atom-laser resonance, is a feature *only* of the quadrature that features squeezing; in the other quadrature the spectrum is a simple broad positive Lorentzian. In the weak-field limit, while both methods give similar negative spectra for a two-level atom (2LA), the sharp peak is positive, reducing the squeezing in BHD and enhancing the negative peak in CHD. For a strong laser field the third-order fluctuations of CHD distort the positive Lorentzian sidebands of the Mollow triplet and turn them dispersive for both 2LA and 3LA. However, for the 3LA, both the sharp peak and the dispersive sidebands are much larger than the second-order spectrum.

Interestingly, in CHD, the addition of third-order fluctuations make the integrated spectra of both quadratures equal in magnitude, in contrast to the case of the spectrum by BHD [23]. This feature of CHD may be a bonus over other modern variations of the standard homodyne detection scheme.

This paper is organized as follows: In Sec. II we introduce the atom-laser model and obtain approximate analytic solutions in the shelving regime. In Sec. III we calculate the phase-independent spectrum, and in Sec. IV we calculate the phase-dependent spectra and variances. Sections V and VI are devoted to the amplitude-intensity correlation by CHD and its spectrum, respectively. Finally, conclusions are given in Sec. VII. Two appendices summarize the analytic and numerical methods employed.

## II. ATOM-LASER MODEL AND SOLUTIONS

We consider a single three-level atom where a laser of Rabi frequency  $\Omega$  drives a transition between the ground state  $|g\rangle$  and an excited state  $|e\rangle$ . The excited state has two spontaneous emission channels: one directly to the ground state with rate  $\gamma$  for the driven transition and one via a long-lived shelving state  $|a\rangle$  with rate  $\gamma_d$ , which in turn decays to the ground state with rate  $\gamma_a$  (see Fig. 1). In the limit

$$\gamma \gg \gamma_d, \gamma_a \quad (1)$$

the fluorescence of the driven transition features well-defined bright and dark periods of average lengths,

$$T_B = \frac{2\Omega^2 + \gamma^2}{\gamma_a\Omega^2}, \quad T_D = \gamma_a^{-1}, \quad (2)$$

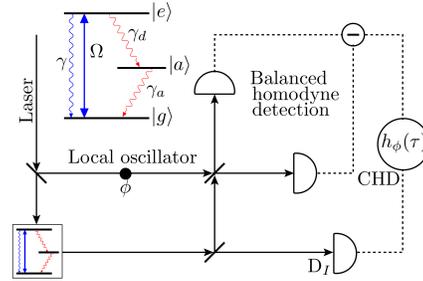


FIG. 1. Scheme of conditional homodyne detection. Blocking the path to the lower detector,  $D_I$ , realizes the standard balanced homodyne detection. The inset shows the three-level atom-laser interaction and spontaneous decays.

respectively, as calculated in Ref. [5] using a random telegraph model.

Throughout this paper we assume zero atom-laser detuning. This serves two purposes: first, we limit the discussion to the essentials of the main topics; second, with further assumptions discussed later, we obtain close approximate analytical solutions. The master equation for the atomic density operator, in the frame rotating at the laser frequency, can be written as

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -i\frac{\Omega}{2}[\sigma_{eg} + \sigma_{ge}, \rho] + \frac{\gamma}{2}(2\sigma_{ge}\rho\sigma_{eg} - \sigma_{ee}\rho - \rho\sigma_{ee}) \\ & + \frac{\gamma_d}{2}(2\sigma_{ae}\rho\sigma_{ea} - \sigma_{ee}\rho - \rho\sigma_{ee}) \\ & + \frac{\gamma_a}{2}(2\sigma_{ga}\rho\sigma_{ag} - \sigma_{aa}\rho - \rho\sigma_{aa}), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\sigma_{jk} = |j\rangle\langle k|$  are atomic transition operators which obey the inner product prescription  $\langle j|k\rangle = \delta_{jk}$ .

We obtain two sets of equations. The first one is

$$\dot{\rho} = \mathbf{M}\rho + \mathbf{b}, \quad (4a)$$

where  $\rho = (\rho_{eg}, \rho_{ge}, \rho_{ee}, \rho_{gg})^T$ ,  $\mathbf{b} = (0, 0, 0, \gamma_a)^T$ , and

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_+/2 & 0 & i\Omega/2 & -i\Omega/2 \\ 0 & -\gamma_+/2 & -i\Omega/2 & i\Omega/2 \\ i\Omega/2 & -i\Omega/2 & -\gamma_+ & 0 \\ -i\Omega/2 & i\Omega/2 & \gamma_- & -\gamma_a \end{pmatrix}, \quad (4b)$$

where

$$\gamma_+ = \gamma + \gamma_d, \quad \gamma_- = \gamma - \gamma_a. \quad (5)$$

Here, we have eliminated the population  $\rho_{aa}$  due to conservation of probability,  $\rho_{gg} + \rho_{ee} + \rho_{aa} = 1$ .

The second set of equations involves the coherences linking states  $|e\rangle$  and  $|g\rangle$  to state  $|a\rangle$ , i.e.,  $(\rho_{ga}, \rho_{ag}, \rho_{ea}, \rho_{ae})^T$ . They evolve with damped oscillations with zero mean. The two sets are decoupled, and only the first one is relevant for the purposes of this work.

We obtain first the steady state of the density operator (labeled with the abbreviation  $st$ ). For a more compact notation we define  $\alpha_- = \rho_{eg}^{st} = \langle \sigma_- \rangle_{st}$ ,  $\alpha_+ = \alpha_-^*$ , and  $\alpha_{jj} = \rho_{jj}^{st} =$

# APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

PHASE-DEPENDENT FLUCTUATIONS OF INTERMITTENT ...

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

$\langle \sigma_{jj} \rangle_{st}$ . We have

$$\alpha_{\mp} = \mp i \frac{Y/\sqrt{2}}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}, \quad (6a)$$

$$\alpha_{ee} = \frac{Y^2/2}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}, \quad (6b)$$

$$\alpha_{gg} = \frac{1 + Y^2/2}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}, \quad (6c)$$

$$\alpha_{aa} = q\alpha_{ee}, \quad (6d)$$

where

$$q = \gamma_d/\gamma_a, \quad Y = \sqrt{2}\Omega/\gamma_+. \quad (7)$$

For  $\gamma_d = 0$  ( $q = 0$ ) we recover the results of the 2LA.

Equation (4a) is still too complicated to solve analytically in the general case. However, in the limit (1), very good approximate solutions are obtained (see Appendix A for more details). We use a Laplace transform approach to obtain approximate expectation values of the atomic vector,  $\mathbf{s} = (\sigma_-, \sigma_+, \sigma_{ee}, \sigma_{gg})^T$ , and two-time correlations. With the atom initially in its ground state,  $\langle \mathbf{s}(0) \rangle = (0, 0, 0, 1)^T$ , the expectation values of the atomic operators are

$$\langle \sigma_{\mp}(t) \rangle = \mp i \frac{Y/\sqrt{2}}{1 + Y^2} f(t) \mp i \frac{\sqrt{2}\gamma_+ Y}{8\delta} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) + \alpha_{\mp}(1 - e^{\lambda_+ t}), \quad (8a)$$

$$\langle \sigma_{ee}(t) \rangle = \frac{Y^2/2}{1 + Y^2} f(t) + \alpha_{ee}(1 - e^{\lambda_+ t}), \quad (8b)$$

$$\langle \sigma_{gg}(t) \rangle = e^{\lambda_+ t} - \frac{Y^2/2}{1 + Y^2} f(t) + \alpha_{gg}(1 - e^{\lambda_+ t}), \quad (8c)$$

where

$$f(t) = e^{\lambda_+ t} - \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{3\gamma_+}{4\delta} \right) e^{\lambda_+ t} + \left( 1 - \frac{3\gamma_+}{4\delta} \right) e^{\lambda_- t} \right], \quad (9)$$

$$\lambda_1 = -\gamma_+/2, \quad (10a)$$

$$\lambda_2 = -\gamma_a \left( 1 + q \frac{\Omega^2}{2\Omega^2 + \gamma^2} \right), \quad (10b)$$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{3\gamma_+}{4} \pm \delta, \quad (10c)$$

and

$$\delta = (\gamma_+/4)\sqrt{1 - 8Y^2}. \quad (11)$$

This approach allows us to identify Eq. (10) as the eigenvalues of the matrix (4b) of the master equation. This is much more convenient than attempting to write the exact ones in compact form. The eigenvalues contain the kernel of the atomic evolution, that is, the scales of decay and coherent evolution, as well as the corresponding widths and positions of the spectral components.

The first eigenvalue,  $\lambda_1$ , is exact and gives half the total decay rate from the excited state. Although absent in Eq. (8), it occurs in the second-order correlations (see below). Then,  $\lambda_2$  represents the slow decay rate due to shelving. This causes

the steady state to be reached after a long time,  $t \sim \gamma_d^{-1}$ . Borrowing from the random telegraph model [5], the slow decay rate is given by  $\lambda_2 = -(T_D^{-1} + T_B^{-1})$ . The two remaining eigenvalues represent the damped coherent evolution; they are real if  $8Y^2 \leq 1$  and complex if  $8Y^2 > 1$ . Eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_{\pm}$  contain the two-level-like evolution towards a quasisteady state (with the decay rate  $\gamma$  of the two-level case replaced by  $\gamma_+$  for the 3LA) that is followed by the slow decay.

The two-time correlations  $\langle \sigma_+(0)\mathbf{s}(\tau)\sigma_-(0) \rangle_{st}$ , which have initial conditions  $(0, 0, 0, \alpha_{ee})^T$ , are approached like those for  $\langle \mathbf{s}(t) \rangle$ . Using the quantum regression formula (see, e.g., [29]) and  $\mathbf{s}(0) = (0, 0, 0, 1)^T$ , we have

$$\langle \sigma_+(0)\mathbf{s}(\tau)\sigma_-(0) \rangle_{st} = \alpha_{ee} \langle \mathbf{s}(\tau) \rangle_{s(0)}; \quad (12)$$

that is, these correlations are identical to Eqs. (8) times the factor  $\alpha_{ee}$ , with  $t$  replaced by  $\tau$ .

The approximate analytic solutions to the correlations  $\langle \sigma_+(0)\mathbf{s}(\tau) \rangle_{st}$ , which have initial conditions  $(\alpha_{ee}, 0, 0, \alpha_+)^T$ , can be similarly obtained (see Appendix A). We use them, however, to obtain the solutions for correlations of fluctuations,  $\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\mathbf{s}(\tau) \rangle_{st}$ , where

$$\Delta\sigma_{jk}(t) = \sigma_{jk}(t) - \langle \sigma_{jk} \rangle_{st}, \quad \langle \Delta\sigma_{jk}(t) \rangle = 0. \quad (13)$$

Hence

$$\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_{\mp}(\tau) \rangle_{st} = \langle \sigma_+(0)\sigma_{\mp}(\tau) \rangle_{st} - \langle \sigma_+ \rangle_{st} \langle \sigma_{\mp} \rangle_{st}, \quad (14)$$

yielding

$$\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_{\mp}(\tau) \rangle_{st} = C_1 e^{\lambda_1 \tau} \pm C_2 e^{\lambda_2 \tau} \mp C_+ e^{\lambda_+ \tau} \mp C_- e^{\lambda_- \tau}, \quad (15)$$

where

$$C_1 = \frac{Y^2/4}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}, \quad (16a)$$

$$C_2 = \frac{qY^4/4}{(1 + Y^2)[1 + Y^2 + (q/2)Y^2]^2}, \quad (16b)$$

$$C_{\mp} = \frac{Y^2[1 - Y^2 \pm (1 - 5Y^2)(\gamma_+/4\delta)]}{8(1 + Y^2)[1 + Y^2 + (q/2)Y^2]}. \quad (16c)$$

### III. STATIONARY POWER SPECTRUM

The stationary (Wiener-Khinchine) power spectrum is given by the Fourier transform of the dipole field autocorrelation function,

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi\alpha_{ee}} \text{Re} \int_0^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \sigma_+(0)\sigma_-(\tau) \rangle_{st}. \quad (17)$$

The factor  $(\pi\alpha_{ee})^{-1}$  normalizes the integral of  $S(\omega)$  over all frequencies to unity. Equation (14) separates the spectrum in two parts:

$$S(\omega) = S_{\text{coh}}(\omega) + S_{\text{inc}}(\omega), \quad (18)$$

where

$$S_{\text{coh}}(\omega) = \frac{|\alpha_+|^2}{\pi\alpha_{ee}} \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{|\alpha_+|^2}{\pi\alpha_{ee}} \delta(\omega) \quad (19)$$

# APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

HÉCTOR M. CASTRO-BELTRÁN *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

and

$$S_{\text{inc}}(\omega) = \frac{1}{\pi\alpha_{ee}} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_-(\tau) \rangle_{st} \quad (20)$$

are, respectively, the coherent spectrum due to elastic scattering and the incoherent (inelastic) spectrum due to atomic fluctuations.

The main features of the spectrum of the atom-laser system of the previous section were studied in [5]. The incoherent spectrum consists of a two-level-like structure that becomes a triplet for strong excitation [30], plus a sharp peak, associated with the eigenvalue  $\lambda_2$ , due to the shelving of the electronic population in the long-lived state. This three-level system contains the essential physics of the more complex atomic system used for the experimental observation of the sharp peak [6] by heterodyne detection, able to resolve hertz or subhertz features [7]. The sharp peak had been predicted for the V-type and  $\Lambda$ -type 3LAs [3,4], which also feature electron shelving.

Our Laplace transform approach allowed us to obtain a very good analytic approximation to the full spectrum, split into its various components, with their widths and amplitudes readily spotted. Substituting Eq. (15) into Eq. (20), the incoherent

spectrum is

$$S_{\text{inc}}(\omega) = \frac{1}{\pi\alpha_{ee}} \left[ C_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + C_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - C_1 \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2} - C_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (21)$$

In Fig. 2 we plot this spectrum with eigenvalues (10) along the exact and 2LA spectra. It reproduces remarkably well the exact spectrum, with the sharp peak being slightly smaller (bigger) in the saturating (strong) case than the exact one. Also, making  $\gamma_d = 0$ , the formula is exact for the 2LA spectrum [30]. The intensity (integral over all frequencies) of the sharp peak is

$$I_{ep} = \frac{qY^2/2}{(1+Y^2)[1+Y^2+(q/2)Y^2]}.$$

It is small for both weak and strong driving (proportional to  $Y^2$  and  $Y^{-2}$ , respectively) and largest for  $\Omega \approx 3\gamma/4$ .

The coherent spectrum of the 3LA is

$$S_{\text{coh}}(\omega) = \frac{1}{\pi[1+Y^2+(q/2)Y^2]} \delta(\omega), \quad (22)$$

smaller than that of the 2LA (where  $q = 0$ ) [5]. The difference in intensity is precisely given by  $I_{ep}$ .

The choice of values  $\gamma_d = 0.05\gamma$  and  $\gamma_a = 0.015\gamma$ , small enough to fulfill the limit (1), is such that the relation  $\gamma_d = 3.3\gamma_a$  closely optimizes the intensity of the sharp extra peak for any given Rabi frequency [5]. For simplicity, we use these values for all the remaining 3LA plots in this work.

## IV. THE SPECTRUM OF SQUEEZING

Now we turn to the phase-dependent spectrum of the fluorescence of the three-level atom and compare it to the well-known case of the two-level atom [9,31]. Following Carmichael [32], we define the *ideal source field* spectrum of squeezing as the Fourier transform of photocurrent fluctuations of the quadratures in homodyne detection,

$$\begin{aligned} S_\phi(\omega) &= 8\gamma_+\eta \int_0^\infty d\tau \cos \omega\tau \langle : \Delta\sigma_\phi(0)\Delta\sigma_\phi(\tau) : \rangle_{st} \\ &= 8\gamma_+\eta \int_0^\infty d\tau \cos \omega\tau \text{Re}[e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_\phi(\tau) \rangle_{st}], \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$\Delta\sigma_\phi = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_- e^{i\phi} + \Delta\sigma_+ e^{-i\phi}), \quad (24)$$

$\phi$  is the phase of the local oscillator in a BHD setup (that is, blocking the path to detector  $D_j$  in Fig. 1),  $\eta$  is a combined collection and detection efficiency, and the dots  $: :$  indicate that the operators must follow time and normal orderings. This is an incoherent spectrum as it depends on the field fluctuations. In fact, the phase-dependent and the phase-independent spectra are related as [31]

$$S_{\text{inc}}(\omega) = \frac{1}{8\pi\alpha_{ee}\gamma_+\eta} [S_\phi(\omega) + S_{\phi+\pi/2}(\omega)]. \quad (25)$$

Adding the spectra for  $\phi = 0$  and  $\pi/2$ , Eq. (20) is recovered.

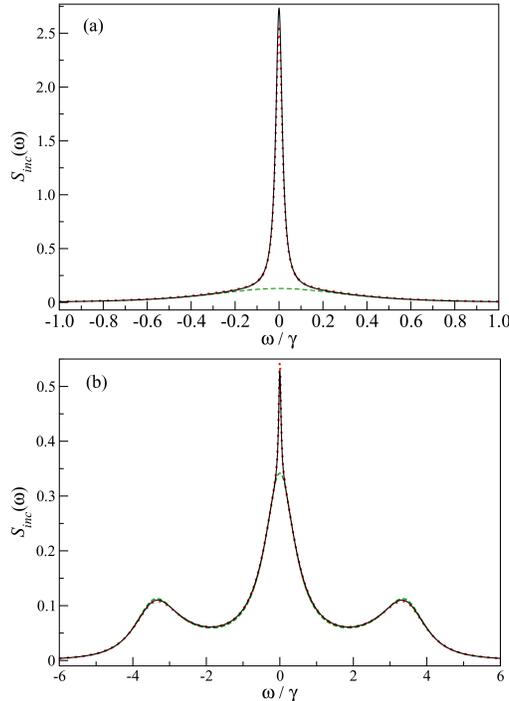


FIG. 2. Incoherent spectrum for (a) a saturating laser field,  $\Omega = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma$ , and (b) a strong field,  $\Omega = 3.5\gamma$ , with  $\gamma_d = 0.05\gamma$  and  $\gamma_a = 0.015\gamma$ . The solid black and dotted red curves are, respectively, the exact and approximate spectra, and the dashed green curve is the 2LA spectrum.

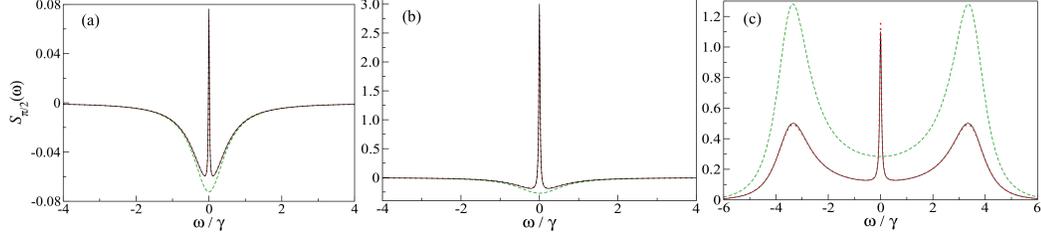


FIG. 3. Spectra of the  $\phi = \pi/2$  quadrature for (a)  $\Omega = 0.1\gamma$ , (b)  $\Omega = 0.2625\gamma$ , and (c)  $\Omega = 3.5\gamma$ . The other parameters are  $\gamma_d = 0.05\gamma$ ,  $\gamma_a = 0.015\gamma$ , and  $\eta = 1$ . The solid black and dotted red lines correspond to the exact and approximate 3LA spectra, respectively, and the dashed green lines are the 2LA spectra.

Although the atom and laser parameters do not always allow for squeezing (negative values in the spectrum), we keep the moniker of spectrum of squeezing in order to distinguish this from the spectrum of Sec. VI.

Substituting Eq. (15) in Eq. (23), the approximate spectra for the quadratures are

$$S_0(\omega) = -8\gamma_+ \eta C_1 \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2}, \quad (26)$$

$$S_{\pi/2}(\omega) = 8\gamma_+ \eta \left[ C_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + C_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - C_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (27)$$

For  $\phi = 0$  the spectrum is only a single, positive (no squeezing) Lorentzian, just like for the 2LA, now with a width of  $\gamma_+/2$ . For  $\phi = \pi/2$  the spectrum is more interesting, as shown in Fig. 3 for several field strengths. For instance, it has a sharp peak [last term in Eq. (27)], with its maximum near  $\Omega \approx 0.9\gamma$ . From weak to little more than saturating fields the first two terms of Eq. (27) (with factors  $C_{\pm}|\lambda_{\pm}|$ ) add to form a single negative peak, indicating squeezing. Rice and Carmichael [31] found that the weak-field spectrum ( $Y^2 \ll 1$ ) in the 2LA has a linewidth smaller than  $\gamma/2$  due to the negative value of the Lorentzians with amplitudes  $C_{\pm}|\lambda_{\pm}|$  in Eq. (21), resulting in a squared Lorentzian [30]. In the 3LA there is less squeezing, and the sharp peak splits the squeezing peak. For strong fields, the spectrum consists of the sidebands of the Mollow triplet plus the extra peak.

An additional manifestation of shelving is the shrinking of the sidebands of the quadrature spectra compared to those of the 2LA. This is because state  $|a\rangle$  takes up an important fraction of the steady-state population (actually,  $\alpha_{aa} = q\alpha_{ee}$ ) for increasing Rabi frequency.

To further illustrate the difference among the spectra of quadratures, we plot in Fig. 4 the spectra of the correlations  $\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_-(\tau) \rangle_{st}$ . For  $S_0(\omega)$  the integrals are added, while for  $S_{\pi/2}(\omega)$  they are subtracted. Thus, the sharp peak appears only in the latter. The addition or subtraction cancels spectral components. The spectrum (20) contains only one of the integrals.

#### Variations and integrated spectra

An alternative approach to squeezing is the study of the variance or noise in a quadrature,

$$V_\phi = \langle (\Delta\sigma_\phi)^2 \rangle_{st} = \text{Re}[e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_+ \Delta\sigma_\phi \rangle_{st}], \quad (28)$$

or, equivalently, the integrated spectrum, related as  $\int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(\omega) d\omega = 4\pi\gamma_+ \eta V_\phi$ . A negative variance is a signature of squeezing in a quadrature. We have

$$V_0 = 2C_1 = \frac{Y^2/2}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}, \quad (29a)$$

$$V_{\pi/2} = 2(C_2 - C_+ - C_-) = \frac{Y^2/2}{(1 + Y^2)[1 + Y^2 + (q/2)Y^2]^2} \times \left[ Y^4 \left( 1 + \frac{q}{2} \right) + \frac{q}{2} Y^2 - 1 \right]. \quad (29b)$$

We plot the variances in Fig. 5.  $V_0$  is positive for any laser strength; there is no squeezing for  $\phi = 0$ , but the total noise is smaller for the 3LA. For  $V_{\pi/2}$  both the interval of the laser strength and amplitude for squeezing are notably reduced by the coupling to the long-lived state, and the Rabi frequency for the largest negative value is now very close to the saturating value,  $\Omega = \gamma_+/4$ , which we use for several spectra.

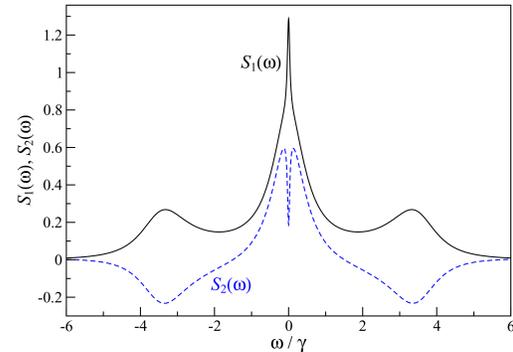


FIG. 4. Spectra of the noise correlation  $\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_-(\tau) \rangle_{st}$  [ $S_1(\omega)$ , solid line] and  $\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_+(\tau) \rangle_{st}$  [ $S_2(\omega)$ , dashed line] for  $\Omega = 3.5\gamma$ ,  $\gamma_d = 0.05\gamma$ ,  $\gamma_a = 0.015\gamma$ , and  $\eta = 1$ .

# APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

HÉCTOR M. CASTRO-BELTRÁN *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

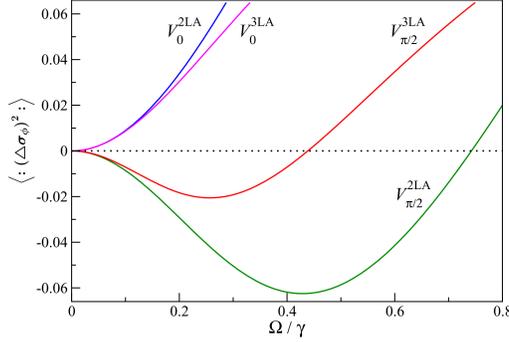


FIG. 5. Variance of two- and three-level atom resonance fluorescence for weak to moderately strong excitation, using Eqs. (29). Additional parameters for the 3LA are  $\gamma_d = 0.05\gamma$ ,  $\gamma_a = 0.015\gamma$ , and  $\eta = 1$ .

The standard BHD technique depends on the finite detector efficiency  $\eta$ . This is a key obstacle to observe the weak squeezing of single-atom resonance fluorescence. Only very recently has the squeezing in the fluorescence of a single two-level quantum dot been observed [20] with homodyne correlation measurements [11,12], which are independent of the detector efficiency. However, the measured variance had to be extracted from complementary measurements with different phases.

There is a subtle issue that also has to be addressed: Why is it that the quadrature variances are different? It seems natural to think that one features squeezing and the other does not. But, from the viewpoint of integrated spectra, one could expect this to be independent of the local oscillator phase. Thus, we reformulate the question: What spectrum could be integrated that gives the same value for both quadratures?

Conditional homodyne detection also solves the issue of finite detector efficiency, measuring an amplitude-intensity correlation, in this case without the need to extract the desired correlation from complementary measurements. CHD has been used to detect squeezing of a cavity QED source [14]. Additionally, CHD gives an answer to the missing term in the integrated spectra. We devote the next two sections to a summary of CHD theory and its application to 3LA resonance fluorescence.

## V. CONDITIONAL HOMODYNE DETECTION

Figure 1 illustrates the setup for amplitude-intensity correlation by CHD. Its theory was first presented in [13]; its application to resonance fluorescence of a 2LA was given in [22,23], and its application to that of a V-type three-level atom was presented in [25–27]. Hence, here, we show only its basic features. A quadrature of the field  $E_\phi$  is measured in balanced homodyne detection conditioned on the direct detection of a photon (intensity  $I$ ) at detector  $D_I$ , i.e.,  $\langle I(0)E_\phi(\tau) \rangle_{st}$ . Here,  $E_\phi \propto \sqrt{\eta}\sigma_\phi$  and  $I \propto \eta\sigma_+\sigma_-$ . Upon normalization, the dependence of the correlation on the

detector efficiency  $\eta$  is canceled. Then

$$h_\phi(\tau) = \frac{\langle \sigma_+(0)\sigma_-(0)\sigma_\phi(\tau) \rangle_{st}}{\langle \sigma_+\sigma_- \rangle_{st} \langle \sigma_\phi \rangle_{st}}, \quad (30)$$

where it is assumed that the system is stationary,

$$\sigma_\phi = \frac{1}{2}(\sigma_-e^{i\phi} + \sigma_+e^{-i\phi}) \quad (31)$$

is the dipole quadrature operator,  $\phi$  is the phase between the strong local oscillator and the driving field, and we recall that  $\langle \cdot \rangle_{st}$  indicates time and normal operator orderings. These orderings lead to different formulas for positive and negative time intervals, and in general, the correlations are asymmetric [13,14,24–28]. However, in the present case the correlation is symmetric; thus we only use the expression for positive intervals:

$$h_\phi(\tau) = \frac{\langle \sigma_+(0)\sigma_\phi(\tau)\sigma_-(0) \rangle_{st}}{\langle \sigma_+\sigma_- \rangle_{st} \langle \sigma_\phi \rangle_{st}}. \quad (32)$$

When the laser excites the atom on resonance, as is the case in this paper, the in-phase quadrature  $\langle \sigma_{\phi=0}(t) \rangle$  vanishes at all times, and likewise,  $\langle \sigma_+(0)\sigma_0(\tau)\sigma_-(0) \rangle_{st} = 0$ . So, to obtain a finite measurement of this quadrature, it is necessary to add a coherent offset of amplitude  $E_{\text{off}}$  and phase  $\phi = 0$  to the dipole field before reaching the beam splitter [22]. This procedure, however, hides the nonclassical character of the fluorescence, showing a monotonously decaying correlation:

$$h_0(\tau) = 1 + \frac{\alpha_{ee}}{\alpha_{ee} + E_{\text{off}}^2} e^{-\gamma_+ \tau/2}. \quad (33)$$

The  $\phi = \pi/2$  quadrature is more interesting. Substituting Eqs. (8a), (12), and (6b) into Eq. (32), we obtain

$$h_{\pi/2}(\tau) = 1 + B_2 e^{\lambda_2 \tau} - B_+ e^{\lambda_+ \tau} - B_- e^{\lambda_- \tau}, \quad (34)$$

where

$$B_2 = q \frac{Y^2/2}{1 + Y^2}, \quad (35a)$$

$$B_\pm = \left(1 + q \frac{Y^2/2}{1 + Y^2}\right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1 - 2Y^2}{8\delta/\gamma_+}\right). \quad (35b)$$

The coupling to the metastable level  $|a\rangle$  has visible consequences for both short and long times, making the CHD correlation amplitude larger than is the case for a 2LA, through the factor  $q = \gamma_d/\gamma_a$ . This excess amplitude decays slowly towards the unit value, which signals the decorrelation for long  $\tau$ , best noticed for large  $\Omega$ .

The CHD correlation can be written in terms of correlations of fluctuation operators, as is the case with the full incoherent and squeezing spectra. Splitting the dipole operators into a mean plus fluctuations, Eq. (13),  $h_\phi(\tau)$  is decomposed into a constant term plus two two-time correlations, one of second order and one of third order in the dipole fluctuation operators,

$$h_\phi(\tau) = 1 + h_\phi^{(2)}(\tau) + h_\phi^{(3)}(\tau), \quad (36a)$$

where

$$h_\phi^{(2)}(\tau) = \frac{2\text{Re}[\langle \sigma_- \rangle_{st} \langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_\phi(\tau) \rangle_{st}]}{\langle \sigma_\phi \rangle_{st} \langle \sigma_+\sigma_- \rangle_{st}}, \quad (36b)$$

$$h_\phi^{(3)}(\tau) = \frac{\langle \Delta\sigma_+(0)\Delta\sigma_\phi(\tau)\Delta\sigma_-(0) \rangle_{st}}{\langle \sigma_\phi \rangle_{st} \langle \sigma_+\sigma_- \rangle_{st}}. \quad (36c)$$

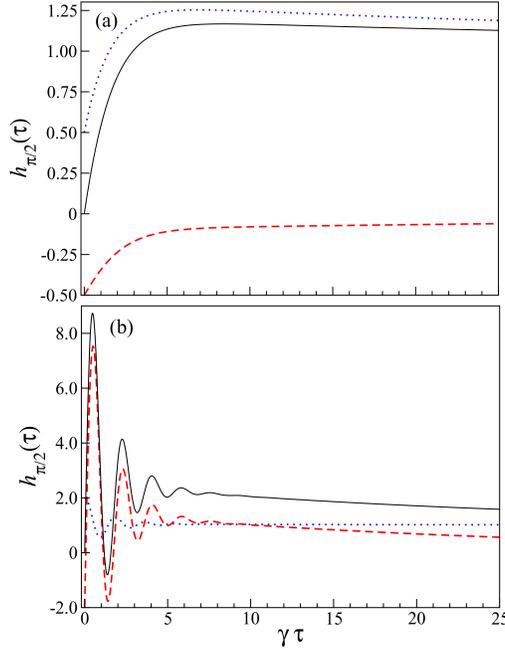


FIG. 6. Amplitude-intensity correlation  $h_{\pi/2}(\tau)$  (solid black line) and its parts  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau)$  (dotted blue line) and  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$  (dashed red line) for (a)  $\Omega = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma$  and (b)  $\Omega = 3.5\gamma$ . The other parameters are  $\gamma_d = 0.05\gamma$  and  $\gamma_o = 0.015\gamma$ . Only the analytical results are plotted.

The splitting is not done by the measurement scheme, but it can be calculated to provide valuable information about the system's fluctuations.

For  $\phi = 0$ , due to the need to add an offset, we are left with Eq. (33). For  $\phi = \pi/2$  we obtain the approximate expression:

$$h_{\pi/2}^{(2)}(\tau) = \frac{2}{\alpha_{ee}} [C_2 e^{\lambda_2 \tau} - C_+ e^{\lambda_+ \tau} - C_- e^{\lambda_- \tau}], \quad (37a)$$

$$h_{\pi/2}^{(3)}(\tau) = D_2 e^{\lambda_2 \tau} + D_+ e^{\lambda_+ \tau} + D_- e^{\lambda_- \tau}, \quad (37b)$$

where

$$D_{\pm} = B_{\pm} - \frac{2C_{\pm}}{\alpha_{ee}}, \quad D_{\pm} = \frac{2C_{\pm}}{\alpha_{ee}} - B_{\pm}, \quad (37c)$$

which are too cumbersome to be reproduced in full here. In Fig. 6 we plot the analytical results, Eq. (34) and its partial results  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau)$  and  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau)$ , which differ very little from the exact ones.

The vanishing of Eq. (36a) at  $\tau = 0$  has the same origin as the antibunching in the intensity correlations: when the atom is in the ground state upon a photon emission, both the dipole field and the intensity are zero, and they build up again when the atom reabsorbs light. For  $\phi = 0$  the effect is not seen due

to the additional offset. So

$$\begin{aligned} h_{\pi/2}^{(2)}(0) &= \frac{\alpha_{ee} - 2|\alpha_+|^2}{\alpha_{ee}} \\ &= \frac{Y^2 + (q/2)Y^2 - 1}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}, \end{aligned} \quad (38a)$$

and

$$\begin{aligned} h_{\pi/2}^{(3)}(0) &= \frac{2(|\alpha_+|^2 - \alpha_{ee})}{\alpha_{ee}} = -2(2+q)\alpha_{ee} \\ &= -\frac{(2+q)Y^2}{1 + Y^2 + (q/2)Y^2}; \end{aligned} \quad (38b)$$

that is, the initial size of the correlation is proportional to the mean population in the excited state. For  $\Omega \gg \gamma$ , the third-order correlation has its largest (negative) initial value  $h_{\pi/2}^{(3)}(0) \rightarrow -2$ .

The third-order term signals the deviation from Gaussian fluctuations as a consequence of the nonlinearity of the resonance fluorescence process for increasing laser intensity [22,23]. As perhaps best noticed in the spectral domain, it is the enhanced sensitivity to nonlinearity that makes CHD stand out over BHD and the spectrum of squeezing. We illustrate this in the next section.

## VI. QUADRATURE SPECTRA FROM CHD

The spectrum measured from the amplitude-intensity correlation is given by

$$\mathcal{S}_{\phi}(\omega) = 4\gamma_+ \alpha_{ee} \int_0^{\infty} d\tau \cos \omega\tau [h_{\phi}(\tau) - 1]. \quad (39)$$

The factor  $4\gamma_+ \alpha_{ee}$  is the photon flux into the CHD setup. For  $\phi = 0$  we replace it by  $4\gamma_+ (\alpha_{ee} + E_{\text{off}}^2)$ . Following the splitting of  $h_{\phi}(\tau)$ , Eq. (36a), the spectra of second- and third-order dipole fluctuations are, respectively,

$$\mathcal{S}_{\phi}^{(2)}(\omega) = 4\gamma_+ \alpha_{ee} \int_0^{\infty} d\tau \cos \omega\tau h_{\phi}^{(2)}(\tau), \quad (40a)$$

$$\mathcal{S}_{\phi}^{(3)}(\omega) = 4\gamma_+ \alpha_{ee} \int_0^{\infty} d\tau \cos \omega\tau h_{\phi}^{(3)}(\tau). \quad (40b)$$

Using Eqs. (33) and (34), we obtain the approximate analytical spectra. For  $\phi = 0$ , we have

$$\mathcal{S}_0(\omega) = -4\gamma_+ \alpha_{ee} \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2}, \quad (41)$$

which is independent of the offset. The spectrum of this quadrature is a simple Lorentzian of width  $\gamma_+/2$ . For  $\phi = \pi/2$  we have

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\pi/2}(\omega) &= 4\gamma_+ \alpha_{ee} \left[ B_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + B_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} \right. \\ &\quad \left. - B_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

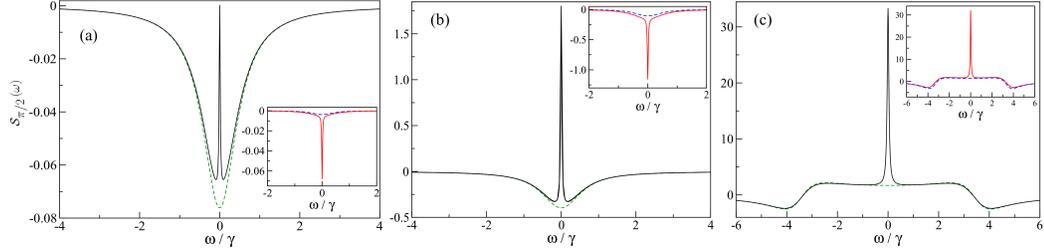


FIG. 7. Spectra of the amplitude-intensity correlation for  $\phi = \pi/2$  of the three-level atom (solid black line) and two-level atom (dashed green line): (a) weak field  $\Omega = 0.1\gamma$ , (b) moderate field  $\Omega = \gamma_+/4 = 0.2625\gamma$ , and (c) strong field  $\Omega = 3.5\gamma$ . The insets show the third-order spectra of the 3LA (solid red line) and 2LA (dashed blue line). The second-order spectra are those of the spectrum of squeezing (Fig. 3). Only the analytical results are plotted.

The second-order spectra are

$$S_0^{(2)}(\omega) = S_0(\omega), \quad (43a)$$

$$S_{\pi/2}^{(2)}(\omega) = 8\gamma_+ \left[ C_+ \frac{\lambda_+}{\omega^2 + \lambda_+^2} + C_- \frac{\lambda_-}{\omega^2 + \lambda_-^2} - C_2 \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right]. \quad (43b)$$

These are just the spectra of squeezing, Eqs. (26) and (27), without the detector efficiency factor. The third-order spectra are

$$S_\phi^{(3)}(\omega) = S_\phi(\omega) - S_\phi^{(2)}(\omega), \quad (44a)$$

$$S_0^{(3)}(\omega) = 0, \quad (44b)$$

$$S_{\pi/2}^{(3)}(\omega) = -4\gamma_+ \alpha_{ee} \sum_{k=2,+,-} D_k \frac{\lambda_k}{\omega^2 + \lambda_k^2}, \quad (44c)$$

where  $D_k$  are given by Eq. (37c) and  $\lambda_k$  are the eigenvalues [Eq. (10)].

Originally, CHD was conceived to overcome the issue of imperfect detection and thus be able to measure squeezing of weak light sources [13,14]. In the weak-field limit the spectrum of the amplitude-intensity correlation approaches the spectrum of squeezing if third-order fluctuations can be neglected, i.e.,

$$S_\phi(\omega) = \eta S_\phi^{(2)}(\omega) \approx \eta S_\phi(\omega). \quad (45)$$

For the third-order spectrum, the sharp peak is about half the second-order one, of size  $\sim Y^4$ , while the other terms go also as  $Y^4$ , and the other second-order terms go as  $Y^2$ . However, for not-so-weak fields, we find strong signatures of third-order fluctuations in the spectra.

In Fig. 7 we plot the analytical results of the spectra of the amplitude-intensity correlation of the two- and three-level atoms [Eq. (42)]. The difference from the (omitted) exact results is very small. Note that for weak and saturating lasers the sharp peak is smaller than in the spectra of squeezing (Fig. 3). This is because the third-order sharp peak is negative in this excitation regime, as seen in the insets. Moreover, in this excitation regime, the full third-order spectrum is negative

[insets of Figs. 7(b) and 7(c)], which adds to the negative squeezing peak of this quadrature [22,23].

In the strong-excitation regime the third-order spectrum leads to striking deviations between the CHD and squeezing spectra and between the 2LA and the 3LA. On the one hand, the sidebands become dispersive [22]. This comes out when  $\lambda_\pm$  become complex, that is, for  $\Omega > \gamma_+/4$ , but it is only for strong enough excitation that the spectral components split. While the second-order peaks are Lorentzians, the third-order ones are dispersive and of comparable size for the 2LA [22] or bigger for the 3LA. On the other hand, there are large deviations in the size of the spectra. The third-order spectrum is much bigger in the 3LA than in the 2LA, not only for the sharp peak. The third-order spectrum contributes most of the total CHD spectrum.

The above effects can be explained as follows. The third-order correlation of fluctuation operators gives a measure of the atom-laser nonlinearity, which grows with increasing laser intensity, and the deviation from Gaussian fluctuations of the fluorescence. Also, it should be mentioned that the dipole fluctuations of the driven transition are enhanced due to the coupling to the long-lived state  $|a\rangle$ , which is populated by the increased number of spontaneous emission events from the excited state [Eq. (6d)]. An early study of this effect in the three-level configuration of this paper reported large deviations in the photon statistics from those of a 2LA [33].

We recall that in CHD the second- and third-order components cannot be measured separately; both are merged in a single measured signal. CHD goes beyond the concept of squeezing when studying phase-dependent fluctuations.

#### Integrated spectra

Finally, we calculate the integrated spectra of the CHD quadratures:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) d\omega = 4\pi \gamma_+ \alpha_{ee}, \quad (46a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\pi/2}(\omega) d\omega = -4\pi \gamma_+ \alpha_{ee}. \quad (46b)$$

That the magnitudes are equal means that the total emitted noise is independent of the quadrature. This is made possible

# APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

PHASE-DEPENDENT FLUCTUATIONS OF INTERMITTENT ...

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

by the third-order fluctuations, absent in the spectrum of squeezing (Sec. IV). This result is analogous to calculating the total incoherent emission by integrating the incoherent spectrum.

## VII. CONCLUSIONS

We investigated ensemble-averaged phase-dependent fluctuations of the intermittent resonance fluorescence of a single three-level atom. We focused mainly on the spectrum of squeezing by balanced homodyne detection and on the spectrum of the amplitude-intensity correlation of conditional homodyne detection. The shelving effect produces a sharp peak in the spectrum of the quadrature that features squeezing. Since this peak is positive, it acts to reduce the amount of squeezing observed in the weak- to moderate- (strong-) excitation regime. Since CHD is sensitive to third-order dipole fluctuations that grow with atom-laser nonlinearity, the spectra of BHD and CHD are very different for strong excitation. Additional insight is obtained by calculating the variances or integrated spectra of quadratures. In BHD the variances are different, while in CHD they are equal, a feature that deserves further study.

We considered only the case of exact atom-laser resonance. This allowed us to obtain a very good approximate analytical solution of the master equation with a simple method, which

we then used to construct analytical expressions for the various quantities of interest. Further insight into the incoherent spectrum and its link to the phase-dependent fluctuations could be established. Also, the on-resonance case allowed us to present the basic physical features in the most straightforward manner.

Conditional homodyne detection, with its sensitivity to third-order field fluctuations, opens a new gate to study phase-dependent fluctuations beyond the realm of squeezing for highly nonlinear and non-Gaussian optical processes. On the other hand, the impressive advances in photon collection efficiencies by parabolic mirrors [10,34] could complement CHD for atomic resonance fluorescence, its squeezing, and its quantum fluctuations in general.

## ACKNOWLEDGMENTS

H.M.C.-B. thanks Prof. J. Récamier for hospitality at ICF-UNAM. R.R.-A. thanks CONACYT, Mexico, for Scholarship No. 379732 and DGAPA-UNAM, Mexico, for support under Project No. IN108413.

## APPENDIX A: APPROXIMATE SOLUTIONS

The approximate expectation values of the atomic operators are

$$\langle \sigma_{\mp}(t) \rangle = \mp i \frac{Y/\sqrt{2}}{1+Y^2} \left[ e^{\lambda_2 t} - e^{-3\gamma_+ t/4} \left( \cosh \delta t + \frac{3\gamma_+}{4\delta} \sinh \delta t \right) \right] \mp i \sqrt{2} Y \frac{\gamma_+}{4\delta} e^{-3\gamma_+ t/4} \sinh \delta t + \alpha_{\mp} (1 - e^{\lambda_2 t}), \quad (\text{A1a})$$

$$\langle \sigma_{ee}(t) \rangle = \frac{Y^2/2}{1+Y^2} \left[ e^{\lambda_2 t} - e^{-3\gamma_+ t/4} \left( \cosh \delta t + \frac{3\gamma_+}{4\delta} \sinh \delta t \right) \right] + \frac{Y^2/2}{1+Y^2 + (q/2)Y^2} (1 - e^{\lambda_2 t}), \quad (\text{A1b})$$

$$\langle \sigma_{gg}(t) \rangle = e^{\lambda_2 t} - \frac{Y^2/2}{1+Y^2} \left[ e^{\lambda_2 t} - e^{-3\gamma_+ t/4} \left( \cosh \delta t + \frac{3\gamma_+}{4\delta} \sinh \delta t \right) \right] + \frac{1 + (Y^2/2)}{1+Y^2 + (q/2)Y^2} (1 - e^{\lambda_2 t}). \quad (\text{A1c})$$

We make several assumptions to give our results simple, albeit long, expressions: First, we neglect the term  $\gamma_d \Omega^2/2$  in the solutions in the Laplace space that reduce the problem to one similar to the 2LA case, with  $\gamma$  replaced by  $\gamma_+$ . Eigenvalues  $\lambda_{\pm}$  are thus identified. They give rise to the terms with the hyperbolic functions. Second, a constant term is multiplied by a factor  $e^{\lambda_2 t}$ . Finally, we add a term  $\langle \sigma_{jk} \rangle_{st} (1 - e^{\lambda_2 t})$ . Recall that for the case of a 2LA  $\lambda_2 = 0$  and  $\langle \sigma_{ee}(t) \rangle + \langle \sigma_{gg}(t) \rangle = 1$ . These *ad hoc* assumptions make the approximate solutions very close to the exact ones, as long as  $\gamma_d$  and  $\gamma_a$  are at least one order smaller than  $\gamma$ .

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{+}(0) \sigma_{\mp}(\tau) \rangle_{st} = & \pm \frac{1}{2} \frac{Y^2}{[1+Y^2 + (q/2)Y^2]^2} + \frac{1}{4} \frac{Y^2}{1+Y^2 + (q/2)Y^2} e^{\lambda_1 \tau} \pm \frac{q}{4} \frac{Y^4}{(1+Y^2)[1+Y^2 + (q/2)Y^2]^2} e^{\lambda_2 \tau} \\ & \mp \frac{1}{4} \frac{Y^2}{(1+Y^2)[1+Y^2 + (q/2)Y^2]} e^{-3\gamma_+ \tau/4} \left[ (1-Y^2) \cosh \delta \tau \mp \frac{1-5Y^2}{4\delta/\gamma_+} \sinh \delta \tau \right]. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

## APPENDIX B: EQUATIONS OF MOTION

We solve sets of linear equations of motion for the expectation values of the atomic operators and for two-time correlations. The equations and the formal solutions can be written as

$$\frac{d}{dt} g(t) = \mathbf{M} g(t), \quad (\text{B1})$$

$$g(t) = e^{\mathbf{M}t} g(0), \quad (\text{B2})$$

where  $\mathbf{M}$  is the matrix (4b). In general, we solve these equations numerically. The initial conditions, however, are obtained exactly analytically, even off resonance. For instance, defining  $\Delta \mathbf{s} \equiv (\Delta \sigma_{-}, \Delta \sigma_{+}, \Delta \sigma_{ee}, \Delta \sigma_{gg})^T$ , where  $\Delta \sigma_{jk} = \sigma_{jk} - \alpha_{jk}$  and  $\alpha_{jk} = \rho_{jk}^{st}$ ,  $\alpha_{+} = \rho_{ge}^{st}$ ,  $\alpha_{-} = \rho_{eg}^{st}$ , the initial conditions of the second- and third-order correlations of the fluctuation

## APÉNDICE C. ANEXO: ARTÍCULOS PUBLICADOS Y OTROS PRODUCTOS ACADÉMICOS

HÉCTOR M. CASTRO-BELTRÁN *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **93**, 033801 (2016)

operators are

$$\langle \Delta\sigma_+ \Delta\mathbf{s} \rangle_{st} = \begin{pmatrix} \alpha_{ee} - \alpha_+ \alpha_- \\ -\alpha_+^2 \\ -\alpha_+ \alpha_{ee} \\ \alpha_+ (1 - \alpha_{gg}) \end{pmatrix} = \frac{\Omega^2}{N^2} \begin{pmatrix} (2+q)\Omega^2 \\ \gamma_+^2 \\ -i\gamma_+ \Omega \\ i(1+q)\gamma_+ \Omega \end{pmatrix}, \quad (\text{B3})$$

$$\langle \Delta\sigma_+ \Delta\mathbf{s} \Delta\sigma_- \rangle_{st} = \begin{pmatrix} 2\alpha_- (\alpha_+ \alpha_- - \alpha_{ee}) \\ 2\alpha_+ (\alpha_+ \alpha_- - \alpha_{ee}) \\ \alpha_{ee} (2\alpha_+ \alpha_- - \alpha_{ee}) \\ (\alpha_{gg} - 1)(2\alpha_+ \alpha_- - \alpha_{ee}) \end{pmatrix} = \frac{\Omega^4}{N^3} \begin{pmatrix} i2(2+q)\gamma_+ \Omega \\ -i2(2+q)\gamma_+ \Omega \\ \gamma_+^2 - (2+q)\Omega^2 \\ (1+q)[\gamma_+^2 - (2+q)\Omega^2] \end{pmatrix}, \quad (\text{B4})$$

respectively, where we used the steady-state values  $\alpha_{jk}$  of Eqs. (6) and  $N = (2+q)\Omega^2 + \gamma_+^2$ .

The numerical calculations of the spectra are more efficiently implemented using the formal solution of the correlations,  $g(\tau) = e^{\mathbf{M}\tau} g(0)$ , so the Fourier integral is formally solved as  $(i\omega\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}g(0)$ , where  $\mathbf{1}$  is the  $4 \times 4$  identity matrix. One is saved from potentially troublesome integrals where the upper limit is a long time of the order  $\gamma_d^{-1}$ .

- 
- [1] For a review see, e.g., M. B. Plenio and P. L. Knight, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101 (1997).
- [2] F. D. Stefani, J. P. Hoogenboom, and E. Barkai, *Phys. Today* **62**(2), 34 (2009).
- [3] G. C. Hegerfeldt and M. B. Plenio, *Phys. Rev. A* **52**, 3333 (1995).
- [4] B. M. Garraway, M. S. Kim, and P. L. Knight, *Opt. Commun.* **117**, 560 (1995).
- [5] J. Evers and Ch. H. Keitel, *Phys. Rev. A* **65**, 033813 (2002).
- [6] V. Bühner and Chr. Tamm, *Phys. Rev. A* **61**, 061801 (2000).
- [7] J. T. Höffges, H. W. Baldauf, W. Lange, and H. Walther, *J. Mod. Opt.* **44**, 1999 (1997).
- [8] D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 709 (1981).
- [9] M. J. Collett, D. F. Walls, and P. Zoller, *Opt. Commun.* **52**, 145 (1984).
- [10] M. Sonderman and G. Leuchs, in *Engineering the Atom-Photon Interaction*, edited by A. Predojevic and M. W. Mitchell (Springer, Heidelberg, 2015).
- [11] W. Vogel, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2450 (1991).
- [12] W. Vogel, *Phys. Rev. A* **51**, 4160 (1995).
- [13] H. J. Carmichael, H. M. Castro-Beltrán, G. T. Foster, and L. A. Orozco, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1855 (2000).
- [14] G. T. Foster, L. A. Orozco, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3149 (2000).
- [15] H.-G. Hong, W. Seo, M. Lee, W. Choi, J.-H. Lee, and K. An, *Opt. Lett.* **31**, 3182 (2006).
- [16] N. B. Grosse, Th. Symul, M. Stobińska, T. C. Ralph, and P. K. Lam, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 153603 (2007).
- [17] L. A. Krivitsky, U. L. Andersen, R. Dong, A. Huck, C. Wittmann, and G. Leuchs, *Phys. Rev. A* **79**, 033828 (2009).
- [18] B. Kühn and W. Vogel, arXiv:1511.01723.
- [19] H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2790 (1985).
- [20] C. H. H. Schulte, J. Hansom, A. E. Jones, C. Matthiesen, C. Le Gall, and M. Atatüre, *Nature (London)* **525**, 222 (2015).
- [21] S. Gerber, D. Rotter, L. Slodička, J. Eschner, H. J. Carmichael, and R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 183601 (2009).
- [22] H. M. Castro-Beltrán, *Opt. Commun.* **283**, 4680 (2010).
- [23] H. M. Castro-Beltrán, L. Gutiérrez, and L. Horvath, *Appl. Math. Inf. Sci.* **9**, 2849 (2015).
- [24] A. Denisov, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 243601 (2002).
- [25] E. R. Marquina-Cruz and H. M. Castro-Beltrán, *Laser Phys.* **18**, 157 (2008).
- [26] H. M. Castro-Beltrán, L. Gutiérrez, and E. R. Marquina-Cruz, in *Latin America Optics and Photonics, Cancun, Mexico, 2014*, OSA Technical Digest (Optical Society of America, Washington, D.C., 2014), paper LM4A.38.
- [27] Q. Xu, E. Greplova, B. Julsgaard, and K. Mølmer, *Phys. Scr.* **90**, 128004 (2015).
- [28] Q. Xu and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **92**, 033830 (2015).
- [29] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations* (Springer, Berlin, 2002).
- [30] B. R. Mollow, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
- [31] P. R. Rice and H. J. Carmichael, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1661 (1988).
- [32] H. J. Carmichael, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1588 (1987). The ideal source field spectrum of squeezing is the one produced by the (atomic) source alone, neglecting the free field. Since the latter is assumed to be in the vacuum state, its omission is justified on the basis of using normal and time operator orderings.
- [33] M. Merz and A. Schenzle, *Appl. Phys. B* **50**, 115 (1990).
- [34] M. Stobińska, M. Sonderman, and G. Leuchs, *Opt. Commun.* **283**, 737 (2010).

# Large time-asymmetric quantum fluctuations in amplitude–intensity correlation measurements of V-type three-level atom resonance fluorescence

L. GUTIÉRREZ,<sup>1</sup> H. M. CASTRO-BELTRÁN,<sup>1,\*</sup> R. ROMÁN-ANCHEYTA,<sup>2</sup> AND L. HORVATH<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Avenida Universidad 1001, 62209 Cuernavaca, Morelos, Mexico

<sup>2</sup>Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 48-3, 62251 Cuernavaca, Morelos, Mexico

<sup>3</sup>Department of Physics and Astronomy, Macquarie University, North Ryde, NSW 2109, Sydney, Australia

\*Corresponding author: hcastro@uaem.mx

Received 1 September 2017; accepted 13 September 2017; posted 14 September 2017 (Doc. ID 306298); published 6 October 2017

**In this paper, we show theoretically that the fields scattered by a bichromatically driven V-type three-level atom exhibit large and asymmetric amplitude–intensity correlations. These features result from the different fluctuations of the amplitude and intensity field operators and the competition among transitions. The amplitude–intensity correlations of resonance fluorescence, with its large third-order fluctuations, describe phase-dependent nonclassical features of the emitted field in addition to the second-order measure related to squeezing. We also calculate spectra and variances of these correlations and intensity–intensity correlations, which provide a wealth of supporting information.** © 2017 Optical Society of America

**OCIS codes:** (270.5290) Photon statistics; (270.6570) Squeezed states; (270.2500) Fluctuations, relaxations, and noise.

<https://doi.org/10.1364/JOSAB.34.002301>

## 1. INTRODUCTION

The correlation among the intensity  $I$  and a delayed quadrature amplitude  $E_\phi$  of a quantum field,  $\langle I(0)E_\phi(\tau) \rangle$ , has been recently established as a genuine and powerful tool to study, observe, and identify quantum fluctuations of light. Given the conditional nature of this measurement, it greatly reduces the issues of low quantum and collection efficiencies of detectors, which affect the detection of squeezing for weak-squeezed light emitters, such as cavity QED and resonance fluorescence. There are two main approaches to the amplitude–intensity correlation (AIC), both being variants of the Hanbury–Brown–Twiss setup of intensity–intensity correlations [1]: one is conditional homodyne detection (CHD) [2–4], where the stop detector is replaced by a balanced homodyne detection setup; here, the AIC is explicitly and directly measured. In the other approach, homodyne correlation measurement (HCM) [5–7], the input field to the Hanbury–Brown–Twiss setup consists of the source field mixed with a phase-selected reference field. In HCM, the AIC is one measured term and the variance is another; addition and subtraction of measurements for several phases, however, are necessary to extract the desired quadrature amplitude.

Since the field's amplitude and intensity operators do not commute and have distinct noise properties, time-asymmetric correlations, and hence non-Gaussian fluctuations (nonzero

odd-order correlations) of the field, can be naturally expected and they can be detected by the AIC measurement scheme [8–13]. Indeed, asymmetric amplitude–intensity correlations were initially spotted in CHD simulations [2,8] and experiments [3] in cavity QED. Due to the relatively weak driving, the asymmetry observed in the correlation was small, meaning that the light fluctuations were approximately Gaussian. However, notoriously asymmetric and giant correlations have been predicted for the light scattered from the often-ignored weak transition in a bichromatically driven V-type three-level atom (V3LA) [9–11]. For the strong transition, there is little deviation from the symmetry of the CHD correlation of a two-level atom [14,15] or a single-laser-driven 3LA with electron shelving [16], where the small Hilbert space inhibits the asymmetry. Large asymmetric correlations have also been predicted for a 3LA in the ladder configuration [11] for a pair of Rydberg atoms with the blockade effect [12] and for a superconducting artificial atom [13].

Mølmer and coworkers have approached the asymmetry from the viewpoint of quantum measurement theory [11,17]. They have demonstrated the value of working out the past state of a quantum system based on a photodetection event in the present. In particular, they have described the properties of forward and backward time evolutions surrounding a photodetection event and computed the amplitude correlation function for a resonantly driven V3LA. It was clear from this work that the

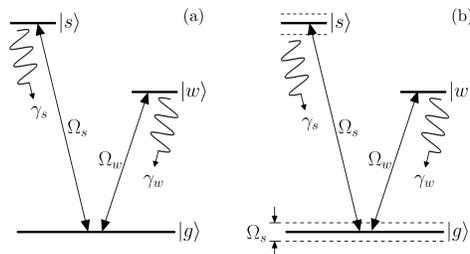
initial state of forward and backward time evolutions are very different because of the distinct initial conditions and because of the different steady states obtained from the forward and backward time evolution dynamics. Mølmer and coworkers explained why the past quantum state is a better predictor of a photon counting event than the density matrix of the system alone.

In this paper, we investigate how the different fluctuations of the amplitude and intensity of the emitted field manifest in the asymmetry of the AIC. In particular, we employ this method within the CHD theory to study the role of the atomic level configuration and driving field conditions in a bichromatically driven single V3LA. We focus on the weak transition, which displays asymmetry in a more striking way than the strong transition [9]. To access the signature of non-Gaussian fluctuations, we decompose the dipole field into average and noise terms to distill the third-order noise operator from the AIC. From this we explore the connection between the AIC and more typical measures of fluctuations, such as spectra and variances. We use the third-order noise operator as a new tool to explore squeezing (or, more precisely, its deviation from it), the lack of detailed balance [18], and non-Gaussian atom-field fluctuations.

We organize this paper as follows. We outline the atom-laser system in Section 2. In Section 3, we consider intensity correlations of two photons from a single transition in a V3LA. In Section 4, we study the AIC by CHD and deal with the asymmetry and second- and third-order fluctuations. In Section 5, we consider measures of noise, such as quadrature spectra and variance. Section 6 is devoted to discussions regarding assumptions made in previous sections. Finally, conclusions are given in Section 7, and Appendix A contains additional analytical results.

## 2. ATOM-LASER INTERACTION

We consider a single V3LA with one ground state  $|g\rangle$  coupled to two excited states  $|s\rangle$  and  $|w\rangle$  by monochromatic lasers with Rabi frequencies  $\Omega_s$  and  $\Omega_w$ , respectively; see Fig. 1(a). We assume that the transition frequencies are very different so that each laser couples two levels only. Hence, the transitions are coupled to independent reservoirs, leading to decay rates  $\gamma_s$  and  $\gamma_w$ , thus neglecting effects of coherence among the excited states, and nonoverlapping broad-bandwidth detectors suffice to distinguish light from the separate transitions. Two-time



**Fig. 1.** (a) V-type three-level atom driven bichromatically (see main text for details). Since  $\gamma_s > \gamma_w$ , we call  $|g\rangle - |s\rangle$  ( $|g\rangle - |w\rangle$ ) the strong (weak) transition. (b) If  $\Omega_s \gg \gamma_s$ , the strong transition experiences AC Stark splittings (dashed lines).

correlations for each of these decay channels have been calculated separately in this paper.

The V3LA system is prototypical in studies of electron shelving [19], where only the light emitted in the strong dipole transition  $|g\rangle - |s\rangle$  is detected; the light from the dipole-forbidden  $|g\rangle - |w\rangle$  transition is so dilute that it would be buried in photodetection noise. In this paper, by contrast, we are interested in the light from an electric dipole transition  $|g\rangle - |w\rangle$  weaker than the  $|g\rangle - |s\rangle$  transition, where  $\gamma_w$  is smaller than  $\gamma_s$  by only one or two orders of magnitude and excited above saturation to allow for a measurable fluorescence rate. For the strong transition, we consider two excitation regimes: it is excited either (i) moderately,  $\Omega_s = \gamma_s/2$ , or (ii) strongly,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . We consider a Rabi frequency of the weak transition,  $\Omega_w \sim \gamma_w$ , that is strong enough to compete with the strong transition in case (i) but acts as a probe in case (ii). In case (ii), the  $|g\rangle - |s\rangle$  transition experiences an AC Stark splitting; see Fig. 1(b), where the detuning from the weak transition  $|g\rangle - |w\rangle$  takes the system into the Autler-Townes regime [20,21].

Due to the complexity of the parameter space, we refrain from trying analytical solutions, but it is not particularly difficult to extract conclusions from the observations. For our numerical work, we use the master equation in a frame rotating at the laser frequencies given by

$$\dot{\rho} = -i \sum_{e=s,w} \frac{\Omega_e}{2} [\sigma_{eg} + \sigma_{ge}, \rho] - i \sum_{e=s,w} \Delta_e [\sigma_{ee}, \rho] + \sum_{e=s,w} \frac{\gamma_e}{2} (2\sigma_{ge}\rho\sigma_{eg} - \sigma_{ee}\rho - \rho\sigma_{ee}), \quad (1)$$

where  $\sigma_{jk} = |j\rangle\langle k|$  are Pauli pseudospin operators. For the two-time correlations investigated in the following, the quantum regression formula is applied [22]. For later reference, we define the steady-state values of the atomic operators as  $\alpha_{jk} = \langle \sigma_{jk} \rangle_{\text{st}}$ .  $\Delta_e$  are the laser detunings (which we set equal to zero through the rest of the paper).

Coherence among levels induced by the lasers is a requirement to measure the amplitude-intensity correlation, which is proportional to the density matrix element  $\rho_{eg}$ . The induced coherence itself then prevents detailed balance to develop in this nonequilibrium, stationary system [18]. The fact that we have two competing transitions will make evident consequences of the breakdown of detailed balance absent in the case of a driven two-level atom in free space.

## 3. INTENSITY-INTENSITY CORRELATION

We begin our investigation of the quantum fluctuations of the V3LA resonance fluorescence with a brief analysis of the intensity fluctuations, usually studied via the Hanbury-Brown-Twiss correlation, that is, the normalized probability of detection of two photons separated by a time delay  $\tau$  [23,24]. We have

$$g_{ee}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \sigma_{eg}(0)\sigma_{eg}(\tau)\sigma_{ge}(\tau)\sigma_{ge}(0) \rangle}{\alpha_{ee}^2}. \quad (2)$$

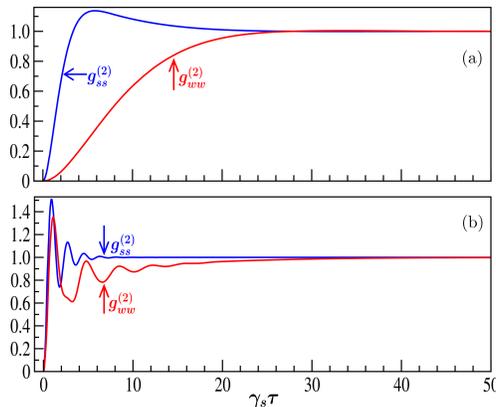
For simplicity, we only consider the case where both photons come from the same transition. Thus, this correlation is intrinsically time symmetric [8]. For the V3LA with electron

shelving, this correlation has been considered in Ref. [25]. As mentioned in the previous section, we consider a less stringent situation for the weak transition.

Figure 2 shows intensity correlations when the Rabi frequency of the weak transition is fixed at a value above saturation,  $\Omega_w = \gamma_w$ , and the strong transition is driven either moderately, Fig. 2(a), or strongly, Fig. 2(b). For instance, there is the well-known nonclassical feature of antibunching: the atom cannot emit two photons simultaneously,  $g^{(2)}(0) = 0$  [23,24]. For the V3LA, we observe this feature because the two transitions feed from the common ground state. However, there are notable differences in their evolution not observed in Ref. [25].

In Fig. 2(a),  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$  and  $\Omega_w = \gamma_w$ , that is, the weak transition is apparently more strongly driven but its net emission rate  $\gamma_w\alpha_{ww}$  is smaller than that of the strong transition  $\gamma_s\alpha_{ss}$ . The strong transition (the one with larger  $\gamma_s$ ) competes advantageously for transition probability with the weak transition; the average separation among photons from the strong transition is shorter than that for the weak transition. The smaller photon rate from the weak transition explains the longer approach toward the value  $g_{ww}^{(2)}(\tau \rightarrow \infty) = 1$ , which characterizes independent photon emissions.

In Fig. 2(b), we have  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$  and  $\Omega_w = \gamma_w$ . For the strong transition, the transient period of  $g_{ss}^{(2)}$  shows oscillations at a frequency near  $\Omega_s$ , damped at the approximate rate  $3\gamma_s/4$ , just as it occurs for a two-level atom [23,24]. For the weak transition, the oscillations have frequency near  $\Omega_s/2$ , forced by the dressing of the strong transition; see Fig. 1(b). Interestingly and unusually, the oscillation regime of  $g_{ww}^{(2)}$  occurs mostly below unity, ending with a long decay at the rate  $\gamma_w$ . Classical fields obey the relationships  $g_{ww}^{(2)}(\tau) \leq g_{ww}^{(2)}(0)$  and  $g_{ww}^{(2)}(0) \geq 1$ ; these results include the possibility that a classical photon counting distribution can oscillate below negative values, but violation of these inequalities indicates the presence of nonclassical light. In our case, the persistence of the violation of these inequalities indicates the occurrence of a highly nonclassical state, which



**Fig. 2.** Intensity-intensity correlations  $g_{ss}^{(2)}(\tau)$  and  $g_{ww}^{(2)}(\tau)$ . The parameters used are  $\gamma_w = \Omega_w = 0.1\gamma_s$ ,  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ , and (a)  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ , (b)  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ .

certainly calls for further measures of field nonclassicality, such as its phase-dependent fluctuations.

#### 4. AMPLITUDE-INTENSITY CORRELATION

We study the AIC via conditional homodyne detection; see Fig. 3. In this method, the amplitude of a quadrature of the emitted field,  $E_\phi \propto \sigma_\phi = (\sigma_{eg}e^{-i\phi} + \sigma_{ge}e^{i\phi})/2$  (the dipole quadrature operator), for the local oscillator (LO) phase  $\phi$ , is measured by balanced homodyne detection (BHD) on the condition that the fluorescence intensity  $I \propto \sigma_{ee}$  is measured at the detector  $D_I$ . Since  $I$  and  $E_\phi$  are quantum operators, the AIC is given by  $\langle :I(0)E_\phi(\tau): \rangle$ , where the dots  $:$  indicate normal and time operator ordering. Assuming stationary dynamics, the normalized AIC function takes the following form:

$$h_\phi(\tau) = \frac{\langle : \sigma_{eg}(0) \sigma_{ge}(\tau) \sigma_\phi(\tau) : \rangle}{\alpha_{ee} \alpha_\phi}, \quad (3)$$

where the steady-state values of the intensity and the dipole quadrature amplitude are  $\alpha_{ee}$  and  $\alpha_\phi = \langle \sigma_\phi \rangle_{st}$ , respectively. For positive and negative time intervals, we respectively have

$$h_\phi(\tau \geq 0) = \frac{\langle \sigma_{eg}(0) \sigma_\phi(\tau) \sigma_{ge}(0) \rangle}{\alpha_{ee} \alpha_\phi}, \quad (4a)$$

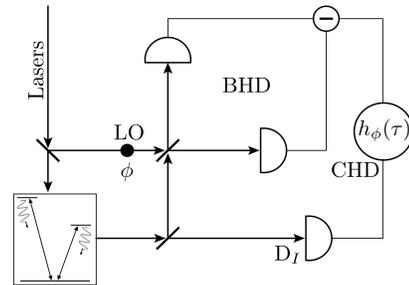
$$h_\phi(\tau \leq 0) = \frac{\text{Re}[e^{-i\phi} \langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{ee}(-\tau) \rangle]}{\alpha_{ee} \alpha_\phi}. \quad (4b)$$

For  $\tau \geq 0$ , a photon is detected at  $\tau = 0$ , triggering the detection of a quadrature by balanced homodyne detection. For  $\tau \leq 0$ , on the other hand, it is the photon detection that follows the quadrature detection. Since the light's amplitude and intensity have different fluctuation properties, there is no guarantee for symmetry to hold, that is, in general,  $h_\phi(-\tau) \neq h_\phi(\tau)$ .

We address this issue by analyzing noise properties of the fluorescence. We split the atomic operator dynamics into its mean plus fluctuations,  $\sigma_{jk} = \alpha_{jk} + \Delta\sigma_{jk}$ , where  $\langle \Delta\sigma_{jk} \rangle = 0$ . The AIC function in Eq. (3) is split as [14]

$$h_\phi(\tau) = 1 + h_\phi^{(2)}(\tau) + h_\phi^{(3)}(\tau), \quad (5)$$

where  $h_\phi^{(2)}(\tau)$  and  $h_\phi^{(3)}(\tau)$  are terms of second- and third-order dipole fluctuations  $\Delta\sigma_{jk}$ , respectively. For positive time intervals between photon and quadrature detection, we have



**Fig. 3.** Sketch of a conditional homodyne detection setup. See the main text for details. The excitation is bichromatic, but the local oscillator's frequency is only that of the observed transition.

$$h_{\phi}^{(2)}(\tau \geq 0) = \frac{2 \operatorname{Re}[\alpha_{ge} \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\phi}(\tau) \rangle]}{\alpha_{ee} \alpha_{\phi}}, \quad (6a)$$

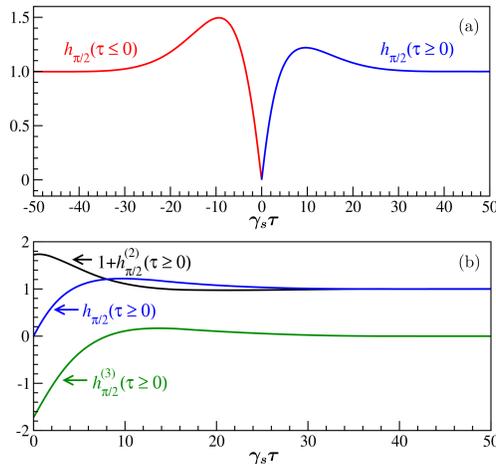
$$h_{\phi}^{(3)}(\tau \geq 0) = \frac{\langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{\phi}(\tau) \Delta\sigma_{ge}(0) \rangle}{\alpha_{ee} \alpha_{\phi}}, \quad (6b)$$

where  $\Delta\sigma_{\phi} = (\Delta\sigma_{eg}e^{-i\phi} + \Delta\sigma_{ge}e^{i\phi})/2$  is the dipole quadrature fluctuation operator. For negative intervals, for which we reinforce notation with the superscript  $(N)$ , we have

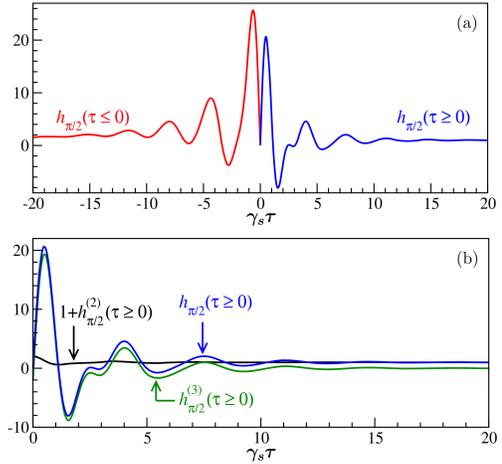
$$h_{\phi}^{(N)}(\tau \leq 0) = 1 + \frac{\operatorname{Re}[e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{eg}(0) \Delta\sigma_{ee}(-\tau) \rangle]}{\alpha_{ee} \alpha_{\phi}}. \quad (7)$$

We could have written the correlation within Eq. (4b) as  $\langle \sigma_{eg}(0) \sigma_{eg}(-\tau) \sigma_{ge}(-\tau) \rangle$ , leading to terms of second and third order. However, it is straightforward to find that  $h_{\phi}^{(N)}(\tau \leq 0)$  is reduced to Eq. (7), a correlation of only second order in the atomic fluctuation operators. This differs from Eq. (6a), however, by the presence of the population noise operator  $\Delta\sigma_{ee}$  instead of another dipole noise operator  $\Delta\sigma_{eg}$  or  $\Delta\sigma_{ge}$ . The asymmetry in the fluctuations is necessary for the asymmetry of  $h_{\phi}(\tau)$ . For a two-level atom, however, the AIC is symmetric due to the small Hilbert space. Thus, competing transitions are an additional requirement for an asymmetric AIC, making visible the breakdown of detailed balance [8].

Figures 4 and 5 show the AIC of the  $\phi = \pi/2$  quadrature of the light from the weak transition for  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ . In Fig. 4 the Rabi frequency for the fast-decaying transition is moderately strong,  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ , and the Rabi frequency for the weak transition is  $\Omega_w = 0.1\gamma_s$  (strong relative to  $\gamma_w$ ). In Fig. 4(a), the time asymmetry is evident. Figure 4(b) shows the AIC decomposition for  $\tau \geq 0$ , Eq. (6), where the second- and third-order terms have similar size; this is a signature of a large deviation from Gaussian fluctuations.



**Fig. 4.** (a) Time-asymmetric AIC of light from the weak transition for  $\phi = \pi/2$ . (b) Decomposition of  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0)$  (blue) into  $1 + h_{\pi/2}^{(2)}(\tau \geq 0)$  (black) and  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau \geq 0)$  (green). The parameters used are  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$ , and  $\Delta_i = \Delta_w = 0$ .



**Fig. 5.** Same as in Fig. 4 except for the stronger driving of the strong transition, with  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ .

Figure 5 shows the effect of the strong transition driven high above saturation,  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ . In Fig. 5(a) the asymmetry is also very clear and its size is increased compared to Fig. 4 due to the smaller values of  $\alpha_{ww}$  and  $\alpha_{\pi/2}$  used for normalization; they are smaller because the system is in the regime of large quantum fluctuations due to the dressing of the ground state, which detunes the weak transition laser by  $\Omega_s/2$ . As seen in the  $g_{ww}^{(2)}$  photon correlation of Fig. 2(b), and in the frequency spectrum of Fig. 7,  $\Omega_s/2$  is the dominant frequency of oscillation of  $h_{\pi/2}(\tau)$  of the weak transition. There is a fast decay at  $\sim 3\gamma_s/4$ , and there is a slow decay due to  $\gamma_w$ , which can be seen only for long negative intervals. Figure 5(b) shows the dominance of the third-order term,  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0) \approx h_{\pi/2}^{(3)}(\tau \geq 0)$ , that gives a strong signature of nonlinearity in the weak transition for  $\Omega_w = \gamma_w$ . It can be seen how well  $h_{\pi/2}^{(3)}(\tau \geq 0)$  compares in size to  $h_{\pi/2}^{(N)}(\tau \leq 0)$ , which reflect population fluctuations.

A comment regarding the AIC for the strong transition is in order, but it is not essential to show graphics here. It strongly resembles the cases of the two-level atom [14] and of a different 3LA system [16]. There is asymmetry, but very slight, and occurs in two regimes only: (1) just above saturation,  $\Omega_s \sim \gamma_s/4$ , and (2) when the strong laser is detuned a few  $\gamma_s$  from resonance. In the former, the correlation looks like a more symmetric version of Fig. 4. This is approximately the case in the AIC measurement of Ref. [26] for the strong transition of a  $\Lambda$ -type 3LA. In the latter, the asymmetry is noticed only for long correlation time intervals, where the oscillations have nearly faded away, as seen in Fig. 3(b) of Ref. [9]. In this case, experimental background photodetection noise may hide the asymmetry.

The AIC provides a strong assessment of the quantum nature of the emitted field through the violation of the classical inequalities [2–4]:

$$0 \leq h_{\phi}(\tau) - 1 \leq 1, \quad (8a)$$

$$|h_\phi(\tau) - 1| \leq |h_\phi(0) - 1| \leq 1. \quad (8b)$$

These classical bounds are stronger criteria for nonclassicality of the emitted field than squeezed light measurements—the more familiar standard for probing phase-dependent fluctuations. A detailed hierarchy of nonclassicality measures for higher-order correlation functions is presented in Refs. [27,28].

Clearly, the AIC shown in Figs. 4 and 5 break several of these inequalities [9,14,15]. The first comes from  $h_{\pi/2}(0) = 0$ , the analog of  $g^{(2)}(0) = 0$ , which shows the scattered light's antibunching behavior; there is no field emitted when the atom is in the ground state. Thus, for short  $\tau$  intervals, the AIC is nonclassical. The second is concerned with how large this correlation may be by exceeding the classical bounds, even by orders of magnitude, due to a low photon emission rate that place the system in the regime of large quantum fluctuations.

Great care must be taken, however, because the inequality in Eq. (8b) was obtained in the limit of Gaussian fluctuations, that is, for negligible or very small third-order contributions, which, moreover, are allowed classically to be negative. In Section 6, we obtain an inequality that considers the full  $h_\phi(\tau)$  by calculating the AIC for a field in a coherent state,

$$-1 \leq h_\phi(\tau) \leq 1. \quad (9)$$

For a meaningful violation of Poisson statistics,  $h_\phi(\tau)$  must be outside these bounds. Clearly, as Figs. 4(b) and 5(b) show,  $h_\phi^{(3)}(\tau)$  is responsible for this behavior when the driving field is on or above saturation. Moreover, it can be seen that the inequalities in Eq. (8b) are also violated outside the limit of Gaussian fluctuations.

We close this section with a discussion on the AIC for the  $\phi = 0$  quadrature. For nonzero detuning ( $\Delta_w \neq 0$ ), the results are qualitatively similar to those of Figs. 4 and 5 but with a smaller amplitude and higher frequency. However, if  $\Delta_w = 0$ , the mean dipole quadrature  $\langle \sigma_0 \rangle_{st} = \alpha_0$  becomes zero for all times and so is the AIC (via the quantum regression formula). Thus, in order to have a nonzero signal, the dipole field must be mixed with a coherent offset before entering the detection setup [2]. The resulting correlation has, however, a classical character, where features such as antibunching and the violation of classical inequalities, Eq. (8), are absent.

## 5. SPECTRA AND VARIANCES OF QUADRATURES

In this section, we analyze noise properties in a quadrature of the emitted light field. The variance and the spectrum of squeezing had been the standard measures of quadrature fluctuations. Hence, it is convenient to include them in our analysis. More precisely, they are a natural part of the study of the AIC in the spectral domain [2,3,14–16]. The AIC asymmetry and the large role of third-order fluctuations in resonance fluorescence clearly make the second-order correlation measurements for squeezing only a part in the exploration of nonclassical features of this and other quantum systems.

### A. Spectral Fluctuations

The spectral representation of fluctuations in the AIC provides complementary system information, such as oscillation frequencies and decay rates, and allows direct comparisons with

measures of squeezed light. We follow Refs. [2,3,29] to define the AIC spectrum as the Fourier transform of the photocurrent fluctuations of a quadrature in homodyne detection conditioned on the separate detection of a photon.

Because the AIC carries different information for positive and negative time intervals  $\tau$ , spectra should be obtained separately by the Fourier cosine transform. We have

$$S_\phi^{(\tau \leq 0)}(\omega) = 4\gamma_e \alpha_{ee} \int_0^\infty [h_\phi(|\tau|) - 1] \cos \omega \tau d\tau, \quad (10a)$$

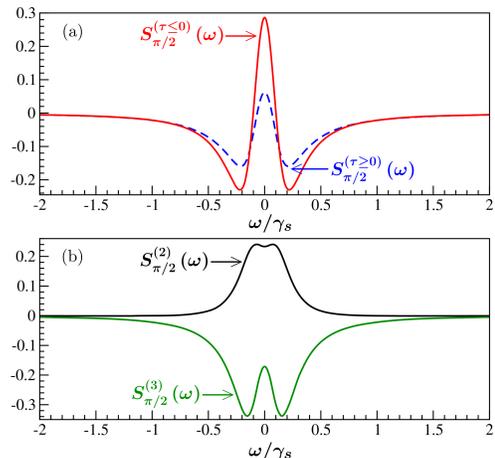
$$S_\phi^{(\tau \geq 0)}(\omega) = 4\gamma_e \alpha_{ee} \int_0^\infty [h_\phi(\tau \geq 0) - 1] \cos \omega \tau d\tau, \quad (10b)$$

$$= S_\phi^{(2)}(\omega) + S_\phi^{(3)}(\omega), \quad (10c)$$

where we took into account the splitting of  $h_\phi(\tau \geq 0)$  into its second- and third-order terms, Eq. (6). The asymmetry of  $h_\phi(\tau)$  would suggest the use of the Fourier exponential transform,  $\int_{-\infty}^\infty [h_\phi(\tau) - 1] e^{i\omega\tau} d\tau$ . However, this transform would only average the spectra of both sides of  $h_\phi(\tau)$ , giving incorrect information.

A signature of squeezed light is represented by the negative values of the frequency spectral function. Likewise, negative values in the AIC spectra indicate nonclassical light, beyond squeezing. It has been shown that the so-called *spectrum of squeezing* [30,31] and the second-order spectrum are related as  $S_\phi^{sq}(\omega) = \eta S_\phi^{(2)}(\omega)$  [2,3], where  $\eta$  is a combined collection and detection efficiency. The AIC, due to its conditional detection nature, is independent of this  $\eta$  factor.

Figure 6 shows the spectra of the AIC of Fig. 4, with the strong transition excited moderately. The spectrum  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}(\omega)$  has a large central peak over a broad negative feature that reveals nonclassical features of the emitted light. Its decomposition, Fig. 6(b), shows that there is no squeezing,  $S_{\pi/2}^{(2)}(\omega) \geq 0$ ,



**Fig. 6.** (a) Spectra, Eqs. (10a) and (10b), for  $\phi = \pi/2$  of the AIC of the weak transition plotted in Fig. 4(a). (b) Decomposition of  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  into its terms of second and third order, Eq. (10c). The parameters are  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$ , and  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ .

but a fully nonclassical (negative) bimodal feature is present in the third-order spectrum. The peaks are located around  $\omega = \pm\Omega_s/2 = \pm 0.25\gamma_s$ . The spectrum  $S_{\pi/2}^{(\tau \leq 0)}$  has a larger central peak, which reflects the larger amplitude of  $h_{\pi/2}(\tau \leq 0)$ . In both cases, the fact that the spectra have negative values reflects the presence of nonclassical effects such as antibunching and large fluctuations that lead to the violation of the inequalities in Eqs. (8) and (9).

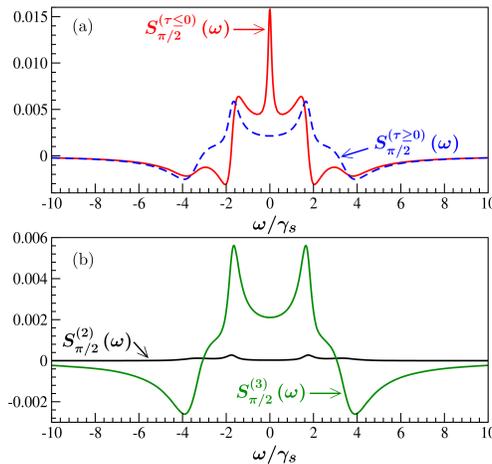
A stronger excitation of the  $|g\rangle - |s\rangle$  transition makes it easier to extract spectral and transition dynamic information. Figure 7 gives the spectra of the AIC presented in Fig. 5. The peaks near  $\pm\Omega_s/2 (\approx \pm 1.75\gamma_s)$ , due to the dressing of the strong transition, are reminiscent of the Autler–Townes effect, with slightly different splittings. For  $S_{\pi/2}^{(\tau \leq 0)}$  in Fig. 7(a), there is the outstanding feature of a narrow central peak, which reflects the slow decay at the rate  $\gamma_w$ , a remnant of electron shelving in the system [16]. Such narrow peak is absent in  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$ , that is, there is no slow decay of  $h_{\pi/2}(\tau \geq 0)$ . The spectra  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  and  $S_{\pi/2}^{(\tau \leq 0)}$  have a strong dispersive component because of the nonlinearity induced by driving the transition  $|g\rangle - |w\rangle$  high above saturation. Figure 7(b) clearly shows the dominance of the third-order fluctuations [14].

### B. Variance and Total Quadrature Noise

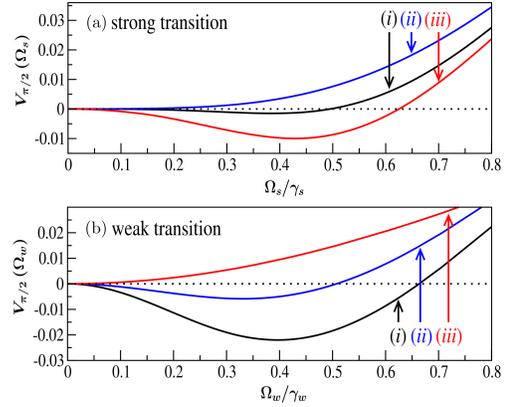
The noise in a quadrature is usually given by the variance

$$V_\phi = \langle (\Delta\sigma_\phi)^2 \rangle = \text{Re}[e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{eg} \Delta\sigma_\phi \rangle], \quad (11)$$

which is the unnormalized second-order amplitude–intensity correlation. The variance is related to the integrated spectrum of squeezing as  $\int_{-\infty}^{\infty} S_\phi^{(2)}(\omega) d\omega = 4\pi\gamma_s \eta V_\phi$ . Negative values of the variance are a signature of squeezed fluctuations. For the strong transition, the squeezing for  $\phi = \pi/2$  is small or null,



**Fig. 7.** (a) Spectra, Eqs. (10a) and (10b), for  $\phi = \pi/2$  of the AIC of the weak transition plotted in Fig. 5(a). (b) Decomposition of  $S_{\pi/2}^{(\tau \geq 0)}$  into its terms of second and third order, Eq. (10c). The parameters are  $\Omega_s = 3.5\gamma_s$ ,  $\Omega_w = \gamma_w = 0.1\gamma_s$ , and  $\Delta_s = \Delta_w = 0$ .



**Fig. 8.** (a) Variance of fluorescence of the strong transition for  $\phi = \pi/2$ . The parameters used are (i)  $\gamma_w = 0.01\gamma_s$ ,  $\Omega_w = 0.05\gamma_s$ ; (ii)  $\gamma_w = 0.01\gamma_s$ ,  $\Omega_w = 0.1\gamma_s$ ; (iii)  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ ,  $\Omega_w = 0.1\gamma_s$ . (b) Variance of fluorescence of the weak transition for  $\phi = \pi/2$ ,  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ , and (i)  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$ , (ii)  $\Omega_s = 0.2\gamma_s$ , (iii)  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$ . For all cases, detunings are zero.

Fig. 8(a), compared to the case of a two-level atom [16,31,32]. The reduction of squeezing is due to the added incoherent emission in the weak transition. The weak transition also features squeezing, Fig. 8(b), but not much larger than for the strong transition.

As we did for the spectrum of the AIC, we should consider the noise from the positive and the negative time interval parts of the correlation separately. In addition, it is not possible to separate experimentally the second- and third-order terms in the  $\tau \geq 0$  part. We have, however, found it useful to perform such separation in order to explain the origin of nonclassical features of the AIC function. A natural choice to measure the noise is to integrate the spectra of Figs. 6 and 7, which are proportional to the initial values of the unnormalized correlations in Eqs. (6) and (7). We have

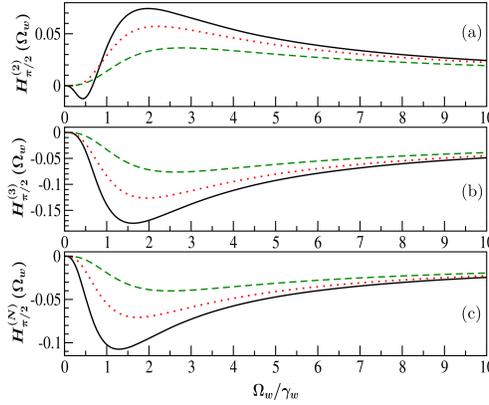
$$H_\phi^{(2)} = 2 \text{Re}[\alpha_{ge} \langle \Delta\sigma_{eg} \Delta\sigma_\phi \rangle], \quad (12a)$$

$$H_\phi^{(3)} = \langle \Delta\sigma_{eg} \Delta\sigma_\phi \Delta\sigma_{ge} \rangle, \quad (12b)$$

$$H_\phi^{(N)} = \text{Re}[e^{-i\phi} \langle \Delta\sigma_{eg} \Delta\sigma_{ee} \rangle], \quad (12c)$$

where the noise correlations  $\langle \dots \rangle$  are given in Eq. (A1).

In Fig. 9, we plot such noise functions of the  $\phi = \pi/2$  quadrature of the weak transition. Since the variance is proportional to  $H_\phi^{(2)}$ , there is a narrow range of Rabi frequencies  $\Omega_w$  where the noise is negative [compare line (i) in Fig. 8(b) and the solid line in Fig. 9(a)]. Stronger driving in both transitions destroys squeezing. The third-order term is seen to be nonclassical for a wider range of Rabi frequencies, Fig. 9(b), and it is the dominant term of the total noise. Since these noise functions are evaluated at  $\tau = 0$ , we obtain  $H_\phi^{(N)}(0) = H_\phi^{(2)}(0) + H_\phi^{(3)}(0)$ , which can be readily seen in Fig. 9(c).



**Fig. 9.** Noise for  $\phi = \pi/2$  from CHD of the weak transition in (a) second order, (b) third order for  $\tau \geq 0$ , and (c) for  $\tau \leq 0$ . Parameters are  $\gamma_w = 0.1\gamma_s$ ,  $\Omega_s = 0.1\gamma_s$  (solid-black line),  $\Omega_s = 0.5\gamma_s$  (dotted-red line), and  $\Omega_s = 0.9\gamma_s$  (dashed-green line). For all curves detunings are zero.

## 6. DISCUSSION

In this section, we consider several key points to clarify our theoretical work in this paper and help to resolve the corresponding experimental challenges.

### A. Feasibility of the Experiment

Originally, the introduction of CHD and HCM addressed the issue of imperfect detection efficiency that strongly affects the observation of squeezing in cavity QED and resonance fluorescence systems. The latter suffers additionally of low collection efficiency. However, the recent experiments of Gerber *et al.* [26] on the AIC on the fluorescence of the strong transition of a  $\Lambda$ -type 3LA and of Schulte *et al.* [32] on the variance of the fluorescence of a two-level quantum dot, both on homodyne correlation measurement, hint at the successful realization of the AIC proposed in this paper [33]. Our choice of CHD over HCM in this paper is that in the former, the AIC is directly defined, Eq. (3), allowing the reader a straight analysis of its features.

On a related front, great advances in fluorescence collection efficiency have been achieved by Leuchs and coworkers [34], especially in the regime of weak excitation necessary for the observation of squeezing.

To avoid coherence effects among excited states that occur at similar frequencies, it is necessary to drive corresponding transitions with independent reservoirs, which do not share vacuum modes. Indeed, this leads to interesting physics [35], but outside the scope of this paper, focused on fluctuations of a weak transition competing with a stronger one. The two dipolar transitions can be found in alkali-metal-like ions. The strong transition can be  $nS_{1/2} \rightarrow nP_{1/2,3/2}$  and the weaker one  $nS_{1/2} \rightarrow (n+1)P_{1/2,3/2}$ , where  $n$  is the principal quantum number of the ion's electronic ground state, with decay rates and dipole moments close to the conditions assumed in this

paper. The extent of the spectra, in length of a few  $\gamma_s$ , is several orders of magnitude smaller than the difference of (optical) transition frequencies, thereby allowing us to fulfill the independent reservoir assumption and use broadband detectors.

### B. Violation of Classical Bounds

Here, we establish inequalities that quantum fields must violate in the full amplitude–intensity correlation, that is, without neglecting third-order fluctuations. To such an effect we consider a more general optical system consisting of a cavity emitting a field with mode  $\sqrt{2\kappa}a$ , where  $a$  and  $a^\dagger$  are the destruction and creation operators of the field, and  $2\kappa$  is the cavity loss rate. The output at the beam splitter, with reflectivity  $r$ , has a fraction  $r$  going to balanced homodyne detection and  $1-r$  going to photon counting.

The amplitude–intensity correlation function is [4]

$$H_{\phi}(\tau) = \frac{\langle : \hat{S}(t) \hat{D}(t+\tau) : \rangle}{\langle \hat{S}(t) \rangle_{st}},$$

where  $\hat{D} = 2\sqrt{r2\kappa}a_{\phi}$ , with  $a_{\phi} = \frac{1}{2}(ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi})$ , and  $\hat{S} = (1-r)2\kappa a^\dagger a$ . Developing the above correlation

$$\begin{aligned} H_{\phi}(\tau) &= \sqrt{r2\kappa} \frac{\langle : a^\dagger(t)a(t)(a(t+\tau)e^{i\phi} + a^\dagger(t+\tau)e^{-i\phi}) : \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle_{st}} \\ &= \sqrt{r2\kappa} \left[ \frac{\langle : a^\dagger(t)a(t)a(t+\tau)e^{i\phi} : \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle_{st}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle : a^\dagger(t)a(t)a^\dagger(t+\tau)e^{-i\phi} : \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle_{st}} \right] \\ &= \sqrt{r2\kappa} \left[ \frac{\langle a^\dagger(t)a(t+\tau)a(t)e^{i\phi} \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle_{st}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau)a(t)e^{-i\phi} \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle_{st}} \right]. \end{aligned}$$

Taking the classical limit between sub-Poissonian and super-Poissonian photon distributions, i.e., at the coherent state limit, we can derive the following relationships. For a detected field, which is in the coherent state and stays in the coherent state  $|\alpha\rangle$ , we can write the evolution as  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{i\omega t}$ . Hence,

$$\begin{aligned} H_{\phi}(\tau) &= \sqrt{r2\kappa} \left[ \frac{\langle \alpha | \alpha_0^* e^{-i\omega t} \alpha_0 e^{i\omega(t+\tau)} \alpha_0 e^{i\omega t} e^{i\phi} | \alpha \rangle}{|\alpha_0|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \alpha | \alpha_0^* e^{-i\omega t} \alpha_0^* e^{-i\omega(t+\tau)} \alpha_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi} | \alpha \rangle}{|\alpha_0|^2} \right] \\ &= \sqrt{r2\kappa} \left[ \frac{|\alpha_0|^2 \alpha_0 e^{i\omega(t+\tau)} e^{i\phi}}{|\alpha_0|^2} + \frac{\alpha_0^* e^{-i\omega(t+\tau)} |\alpha_0|^2 e^{-i\phi}}{|\alpha_0|^2} \right] \\ &= \sqrt{r2\kappa} \times 2\text{Re}(\alpha_0 e^{i(\omega(t+\tau)+i\phi)}). \end{aligned}$$

After normalizing with respect to  $2\sqrt{r2\kappa}|\alpha_0|$ , we get

$$h_{\phi}(\tau) = \frac{\text{Re}(\alpha_0 e^{i(\omega(t+\tau)+i\phi)})}{|\alpha_0|},$$

which is independent of the fraction of light flux sent to either BHD or photon counting. Clearly, for a coherent state (Poissonian photon statistics) this function oscillates between 1 and -1:

$$-1 \leq h_\phi(\tau) \leq 1. \quad (13)$$

Notice that this function is independent of the mean photon number. To have a meaningful violation of Poisson statistics, the range of  $h_\phi(\tau)$  must be outside these bounds.

### C. Definition of Spectrum

We used the definition of spectrum given by [29] in which the spectrum of squeezing is given by the Fourier transform of photocurrent fluctuations in homodyne detection. We have calculated the spectrum on two basic but valid assumptions: stationarity and high spectral resolution.

Stationarity of our system is reached in a longer time limit than most open quantum systems, including a driven two-level atom. This assumption is within reach: the resonance fluorescence spectrum of a multilevel ion involving a metastable state (having a very delayed steady state due to electron shelving) has been measured by heterodyne detection [36]. This method was chosen for its superior frequency resolution because the goal was to observe (and it did, successfully) a very narrow incoherent peak (at the 1 Hz level) attributed to the very slow decay of the metastable state. The other assumption is based precisely on the need for high spectral resolution to observe the narrow central peak of  $S_{\pi/2}^{(\tau \leq 0)}$ , of similar origin as shelving, or even the Autler–Townes doublet and the other features in Fig. 7.

There are other definitions of spectra, which are based on photon counting of fields filtered by Fabry–Perot or similar devices. One is the time-dependent physical spectrum of Eberly and Wódkiewicz [37]. However, for stationary systems, it is permissible to assume arbitrarily narrow filter bandwidth, which reduces the spectrum to the Wiener–Khinchine (WK) spectrum. In addition, in the theory of spectral filtering of quantum light [38], the light that enters the correlator is pre-filtered by a passive device that lacks the resolution of homodyne detection. For our system, these methods would add unnecessary complications. Therefore, in this paper we have used the WK spectrum.

## 7. CONCLUSIONS

We have investigated quantum fluctuations of the scattered light from two monochromatically driven transitions of a V-type 3LA, mainly using phase-dependent amplitude–intensity correlations. The different fluctuations of amplitude and intensity operators and the competition among transitions make the correlation asymmetric and large, more pronounced for the weak transition, which has larger quantum fluctuations than the strong one. The asymmetry is a signature of nonclassical and non-Gaussian fluctuations (and hence the breakdown of detailed balance), which manifest as different oscillation frequencies and decays in the spectra (and integrated spectra) associated with the positive and negative time intervals of the amplitude–intensity correlations. Third-order fluctuations, with their dispersive spectral shape, are dominant for strong excitation of a transition. We also showed that the correlation of two photons from the weak transition has enhanced nonclassical behavior of intensity fluctuations. Even for strong excitation, the correlation evolves most of the time below the level of a coherent state. CHD is a valuable tool to study the AIC to

reveal not only nonclassical states of the field fluctuations but also to explore nonequilibrium physics in microscopic systems.

## APPENDIX A

To calculate correlations, spectra, variances, and noise, we evaluate the zero-interval, steady-state correlations:

$$\langle \Delta\sigma_{eg}\Delta\sigma_{ge} \rangle = \alpha_{ee} - |\alpha_{eg}|^2, \quad (A1a)$$

$$\langle \Delta\sigma_{eg}\Delta\sigma_{eg} \rangle = -\alpha_{eg}^2, \quad (A1b)$$

$$\langle \Delta\sigma_{eg}\Delta\sigma_{ee} \rangle = -\alpha_{eg}\alpha_{ee}, \quad (A1c)$$

$$\langle \Delta\sigma_{eg}\Delta\sigma_{ge}\Delta\sigma_{ge} \rangle = 2\alpha_{ge}(|\alpha_{eg}|^2 - \alpha_{ee}), \quad (A1d)$$

$$\langle \Delta\sigma_{eg}\Delta\sigma_{eg}\Delta\sigma_{ge} \rangle = 2\alpha_{eg}(|\alpha_{eg}|^2 - \alpha_{ee}), \quad (A1e)$$

where  $\Delta\sigma_{jk} = \sigma_{jk} - \alpha_{jk}$ .

Additionally, we observe that  $h_\phi(0) = 0$  (as for antibunching, given the fermionic character of the dipole operators). From Eqs. (6) and (A1), we can calculate the third-order correlation for  $\tau = 0$  as

$$h_\phi^{(3)}(0) = -[1 + h_\phi^{(2)}(0)] = \frac{2(|\alpha_{eg}|^2 - \alpha_{ee})}{\alpha_{ee}}. \quad (A2)$$

For strong driving,  $h_\phi^{(3)}(0) \rightarrow -2$ , whether it is the strong transition or the weak one. In this regime, the stationary excited state population is bound as  $\alpha_{ee} < 0.5$ , while the coherence is very small,  $|\alpha_{eg}|^2 \sim \Omega_c^{-2} \rightarrow 0$ .

**Funding.** Dirección General de Asuntos del Personal Académico, Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA, UNAM) (IN113016); Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) (379732, FOMIX 225447).

**Acknowledgment.** H. M. C. B. thanks Dalia Ornelas for useful conversations. R. R. A. thanks CONACyT, Mexico for scholarship 379732.

## REFERENCES AND NOTES

1. R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, "Correlation between photons in two coherent beams of light," *Nature* **177**, 27–29 (1956).
2. H. J. Carmichael, H. M. Castro-Beltrán, G. T. Foster, and L. A. Orozco, "Giant violations of classical inequalities through conditional homodyne detection of the quadrature amplitudes of light," *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1855–1858 (2000).
3. G. T. Foster, L. A. Orozco, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, "Quantum state reduction and conditional time evolution of wave-particle correlations in cavity QED," *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3149–3152 (2000).
4. For a review on CHD, see H. J. Carmichael, G. T. Foster, L. A. Orozco, J. E. Reiner, and P. R. Rice, "Intensity–field correlations of nonclassical light," in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (Elsevier, 2004), Vol. **46**.
5. W. Vogel, "Squeezing and anomalous moments in resonance fluorescence," *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2450–2452 (1991).
6. W. Vogel, "Homodyne correlation measurements with weak local oscillators," *Phys. Rev. A* **51**, 4160–4171 (1995).
7. B. Kühn, W. Vogel, M. Mraz, S. Köhnke, and B. Hage, "Anomalous quantum correlations of squeezed light," *Phys. Rev. Lett.* **118**, 153601 (2017).



# Bibliografía

- [1] R. J. Glauber, “Nobel Lecture: One hundred years of light quanta,” *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1267-1278 (2006).
- [2] F. T. Arecchi, “Measurement of the statistical distribution of Gaussian and laser sources,” *Phys. Rev. Lett.* **15**, 912-916 (1965).
- [3] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, “A new type of interferometer for use in radio astronomy,” *Phil. Mag.* **45**, 663-682 (1954).
- [4] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, “Correlation between photons in two coherent beams of light,” *Nature* **177**, 27–29 (1956).
- [5] H. J. Carmichael and D. F. Walls, “A quantum-mechanical master equation treatment of the dynamical Stark effect,” *J. Phys. B* **9**, 1199-1219 (1976).
- [6] H. J. Kimble and L. Mandel, “Theory of resonance fluorescence,” *Phys. Rev. A* **13**, 2123-2144 (1976).
- [7] R. Loudon, “Non-classical effects in the statistical properties of light,” *Rep. Prog. Phys.* **43**, 913-949 (1980).
- [8] B. R. Mollow, “Power spectrum of light scattered by two-level systems,” *Phys. Rev.* **188**, 1969-1975 (1969).
- [9] D. F. Walls and P. Zoller, “Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence,” *Phys. Rev. Lett.* **47**, 709-711 (1981).
- [10] U. L. Andersen, T. Gehring, C. Marquardt, and G. Leuchs, “30 years of squeezed light generation,” *Phys. Scr.* **91**, 053001.1-11 (2016).

- 
- [11] H. J. Carmichael, H. M. Castro-Beltrán, G. T. Foster, and L. A. Orozco, “Giant violations of classical inequalities through conditional homodyne detection of the quadrature amplitudes of light,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1855-1858 (2000).
- [12] G. T. Foster, L. A. Orozco, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, “Quantum state reduction and conditional time evolution of wave-particle correlations in cavity QED,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3149-3152 (2000).
- [13] A. Denisov, H. M. Castro-Beltrán, and H. J. Carmichael, “Time-asymmetric fluctuations of light and the breakdown of detailed balance,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 243601.1-4 (2002).
- [14] E. R. Marquina-Cruz and H. M. Castro-Beltrán, “Nonclassicality of resonance fluorescence via amplitude-intensity correlations,” *Laser Phys.* **18**, 157-164 (2008).
- [15] H. M. Castro-Beltrán, “Phase-dependent fluctuations of resonance fluorescence beyond the squeezing regime,” *Opt. Commun.* **283**, 4680-4684 (2010).
- [16] H. M. Castro-Beltrán, L. Gutiérrez, and L. Horvath, “Squeezed versus non-Gaussian fluctuations in resonance fluorescence,” *Appl. Math. Inf. Sci.* **9**, 2849-2857 (2015).
- [17] H. M. Castro-Beltrán, L. Gutiérrez, and E. R. Marquina-Cruz, “Large asymmetric fluctuations in the resonance fluorescence of a three-level atom,” in *Latin America Optics and Photonics, Cancun, Mexico (Optical Society of America, 2014)*, paper LM4A.38.
- [18] L. Gutiérrez, H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta, and L. Horvath, “Large time-asymmetric quantum fluctuations in amplitude-intensity correlation measurements of V-type three-level atom resonance fluorescence,” *J. Opt. Soc. Am. B* **34**, 2301-2309 (2017).
- [19] H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta, and L. Gutiérrez, “Phase-dependent fluctuations of intermittent resonance fluorescence,” *Phys. Rev. A* **93**, 033801.1-10 (2016).

- 
- [20] H. J. Carmichael, *An open systems approach to quantum optics* (Springer, Berlin, 1993).
- [21] P. Meystre, and M. Sargent III, *Elements of quantum optics*, 4th Edition (Springer, Berlin, 2007).
- [22] H. J. Carmichael, *Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and Fokker-Plank equations* (Springer, Berlin, 1999).
- [23] M. Fox, *Quantum optics: An introduction* (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [24] C. H. H. Schulte, J. Hansom, A. E. Jones, C. Matthiesen, C. Le Gall & M. Atatüre, “Quadrature squeezed photons from a two-level system,” *Nature* **525**, 222-225 (2015).
- [25] M. J. Collett, D. F. Walls, and P. Zoller, “Spectrum of squeezing in resonance fluorescence,” *Opt. Commun.* **52**, 145-149 (1984).
- [26] [https://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2005/glauber-photo.html](https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2005/glauber-photo.html)
- [27] M. Lax, “Formal theory of quantum fluctuations from a driven state,” *Phys. Rev. Lett.* **129**, 2342-2348 (1963).
- [28] J. Evers and Ch. H. Keitel, “Narrow spectral feature in resonance fluorescence with a single monochromatic laser field,” *Phys. Rev. A* **65**, 033813.1-14 (2002).
- [29] P. R. Rice and H. J. Carmichael, “Nonclassical effects in optical spectra,” *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1661-1668 (1988).
- [30] V. Bühner and Chr. Tamm, “Resonance fluorescence spectrum of a trapped ion undergoing quantum jumps,” *Phys. Rev. A* **61**, 061801.1-4 (2000).
- [31] H. J. Carmichael, “Spectrum of squeezing and photocurrent shot noise: a normally ordered treatment,” *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1588-1603 (1987).
- [32] M. Merz and A. Schenzle, “Photon statistics of fluorescence from a single three-level atom,” *Appl. Phys. B* **50**, 115-124 (1990).

- [33] L. A. Krivitsky, U. L. Andersen, R. Dong, A. Huck, C. Wittmann, and G. Leuchs, “Correlation measurement of squeezed light,” *Phys. Rev. A* **79**, 033828.1-6 (2009).
- [34] D. T. Pegg, R. Loudon, and P. L. Knight, “Correlations in light emitted by three-level atoms,” *Phys. Rev. A* **33**, 4085-4091 (1986).
- [35] S. Gerber, D. Rotter, L. Slodička, J. Eschner, H. J. Carmichael, and R. Blatt, “Intensity-field correlation of single-atom resonance fluorescence,” *Phys. Rev. Lett.* **102**, 183601.1-4 (2009).

# Índice alfabético

- $q_e$  carga del electrón, 11
- A2N (Átomo de 2 niveles), 9, 51
- A3N- $\Lambda$  (Átomo de 3 niveles tipo  $\Lambda$ ), 58
- A3N-V (Átomo de 3 niveles tipo V), 76
- Agrupamiento de fotones (bunching), 3
- Anexos
  - artículos del autor de la tesis, 101
- Anti agrupamiento de fotones (antibunching), 3, 81, 84, 90
- Aproximación de Onda Rotante, 11
- Coefficiente  $A$  de Einstein, 9
- Coherencias
  - A2N, 18, 20
- Coherencias  $\langle\sigma_{eg}\rangle$ ,  $\langle\sigma_{ge}\rangle$ , 15
- Conclusiones, 90
- Condiciones iniciales, 93
  - A2N, 96
  - A3N-V, 97, 98
  - A3N- $\Lambda$ , 97
  - para  $\langle\mathcal{O}_1\mathbf{s}\mathcal{O}_2\rangle$ , 94
  - para  $\langle\Delta\mathcal{O}_1\Delta\mathbf{s}\Delta\mathcal{O}_2\rangle$ , 94
- Correlaciones de operadores, 35
  - en fluctuaciones, 41, 47
- Cuadraturas
  - $X_1$ ,  $X_2$ , 24
- Desigualdades clásicas en FR, 53
- Desintonía átomo-campo
  - $\Delta_j \equiv \omega_j - \nu_j$ , 6, 11, 60, 78
- DHB (Detección homodina balanceada), 4, 34, 67
- DHC (Detección homodina condicionada), 5, 30, 51, 58, 76
- EBO (Ecuaciones de Bloch ópticas), 14
  - A2N, 15
  - A3N- $\Lambda$ , 61
  - A3N-V, 79, 80
  - forma matricial, 44
- EBO-EE (EBO en estado estacionario), 15, 39, 40, 47
  - A2N, 16
  - A3N- $\Lambda$ , 61
  - A3N-V, 80
  - forma matricial, 45
  - soluciones A2N, 16, 17
  - soluciones A3N- $\Lambda$ , 61
- Ecuación de Schrödinger, 11
- Ecuación maestra  $\dot{\rho}$ , 13
  - A2N, 13
  - A3N- $\Lambda$ , 59
  - A3N-V, 77
- Ecuaciones de los elementos  $\rho_{jk}$ 
  - A2N, 13
  - A3N- $\Lambda$ , 60, 61

- A3N-V, 78
- EdeM (Ecuaciones de movimiento), 46
- EdeM-F (Ecuaciones de movimiento en fluctuaciones), 47, 48
- Eficiencia
- cuántica, 5, 28, 82
  - de recolección, 5, 67, 75
- Elementos de matriz
- del dipolo atómico, 15
  - $\rho_{jk}$ , definición, 11
- EM (Campo electromagnético), 1, 23, 31
- Emisión
- espontánea, 1, 9, 74
  - su origen, 12
  - estimulada, 1, 9, 12
- Espectro
- de fluorescencia, 30
- Espectro de luz comprimida, 4
- A3N- $\Lambda$ , 67
- Espectro de ruido
- de las cuadraturas, 54
  - del A2N, 54
  - del A3N- $\Lambda$ , 71
- Espectro integrado, 56
- A2N, 56
  - A3N- $\Lambda$ , 74
- Espectro  $S(\omega)$
- en fluorescencia resonante, 49
- Espectros  $S_{coh}(\omega)$ ,  $S_{inc}(\omega)$
- en fluorescencia resonante, 49
  - A3N- $\Lambda$ , 66
- Estado coherente, 23
- Estados
- comprimidos, 25
  - de cuadratura comprimida, 25
- Excitación
- crítica, A2N, 17
  - débil, A2N, 17
  - en saturación, A2N, 22
  - fuerte, A2N, 17
- FCR (Fórmula cuántica de regresión), 39, 45
- en  $\mathcal{O}_1(0)\mathbf{s}(\tau)\mathcal{O}_2(0)$ , 46
  - en  $\Delta\mathcal{O}_1(0)\Delta\mathbf{s}(\tau)\Delta\mathcal{O}_2(0)$ , 47
- Fluctuaciones
- cuánticas reducidas, 25
  - del operador  $\sigma_{\ell m}(t)$ , 39, 47, 49
- FR (Fluorescencia resonante), 1, 28, 49, 53, 85
- A2N, 17, 51, 70
  - A3N- $\Lambda$ , 58
  - desigualdades clásicas, 53
- Frecuencia angular
- de Rabi, 3, 58, 76
  - definición, 9
- Función de correlación
- $h_0^{fluc}(\tau \geq 0)$ ,  $h_0^{fluc}(\tau \leq 0)$
  - sin offset, 43
  - $h_0(\tau \geq 0)$ ,  $h_0(\tau \leq 0)$ , 39
  - $h_{\frac{\pi}{2}}^{fluc}(\tau \geq 0)$ , 43
  - $h_{\frac{\pi}{2}}(\tau \geq 0)$ ,  $h_{\frac{\pi}{2}}(\tau \leq 0)$ , 38
  - $h_{\phi}(\tau)$ , 35
  - $h_{\phi}^{fluc}(\tau \geq 0)$ , 42
  - $h_{\phi}(\tau \geq 0)$ ,  $h_{\phi}(\tau \leq 0)$ , 38
  - $h_{\phi}(\tau)$  en fluctuaciones sin offset, 40
- Glauber, Roy J., 1, 23
- H. M. Castro-Beltrán, *et al.*
- Appl. Math. Inf. Sci. **9**, 2849-2857 (2015), 102
  - Phys. Rev. A **93**, 033801.1-10 (2016), 111

- Hamiltoniano  
 A2N, 11  
 en un marco lento  
 A3N- $\Lambda$ , 59  
 A3N-V, 77
- HBT (Hanbury-Brown  
 y Twiss), 2, 5, 30, 33, 81
- Intensidad  
 coherente, 22  
 A2N, 22, 28  
 de la luz dispersada, 21  
 A2N, 22  
 incoherente, 22  
 A2N, 22
- Interacción átomo-láser, 8
- Interferómetro  
 de intensidad, 2, 33  
 de Michelson, 2
- Inversión de población, 14
- L. Gutiérrez, *et al.*  
 J. Opt. Soc. Am. B **34**,  
 2301-2309 (2017), 121
- Láser como un campo  
 perfectamente coherente, 8
- Luz  
 agrupada (bunched), 33  
 no agrupada (antibunched), 33
- Marco rotante lento, 11, 59
- Momento dipolar, 3, 9, 11, 12  
 operador de, 15
- Offset  $E_{\text{off}} = Ae^{\pm\phi}$ , 39, 44
- Operador  
 atómico de  
 ascenso/descenso, 10  
 $\sigma_z = \sigma_{ee} - \sigma_{gg}$ , 10
- Operador de cuadratura del  
 dipolo:  $\sigma_\phi(\tau)$ , 35
- Operador de fluctuación de cuadratura  
 del dipolo:  $\Delta\sigma_\phi(\tau)$ , 26, 36
- Operadores de  
 pseudoespín de Pauli, 10, 60, 78  
 transición  $\sigma_+ \equiv \sigma_{eg}$ ,  $\sigma_- \equiv \sigma_{ge}$ , 10
- Ordenamiento normal y temporal de  
 los operadores,  
 pie de págs., 35, 37
- Parámetro  
 de saturación, 23  
 A2N, 23  
 geométrico, 21
- Poblaciones  
 A2N, 14
- Poblaciones  $\langle\sigma_{ee}\rangle$ ,  $\langle\sigma_{gg}\rangle$ , 15
- Polarización atómica promedio, 14
- Probabilidades de ocupación de  
 niveles  $\langle\sigma_{ee}\rangle$ ,  $\langle\sigma_{gg}\rangle$ , 15
- QED (Electrodinámica cuántica), 5
- QED (Quantum electrodynamics), 5
- Razón de decaimiento, 4, 58, 76  
 definición, 12
- Resonancia:  $\Delta_j \equiv \omega_j - \nu_j = 0$ , 16
- Súper operador  
 de la forma de Lindblad, 13  
 A2N, 13  
 A3N- $\Lambda$ , 59  
 A3N-V, 77  
 Liouvilliano, 13
- Sistema  
 $R$ , causa la emisión  
 espontánea, 9  
 $S$ , átomo excitado y láseres, 9

- TCCO (Teoría cuántica de  
la coherencia óptica), 1, 23
- Triplete de Mollow, 4, 68
  
- Varianza  $V_\phi$ 
  - del estado comprimido, 26, 56
  - A2N, 27
  - A3N- $\Lambda$ , 69
  - A3N-V, 87



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS**

Jefatura de Posgrado en Ingeniería y Ciencias Aplicadas



Cuernavaca, Morelos, a 07 de septiembre de 2018.

**DR. ROSENBERG JAVIER ROMERO DOMÍNGUEZ**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS**  
**P R E S E N T E**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS "Detección Homodina Condicionada de Fluorescencia Resonante" que presenta el alumno **LUIS GUTIÉRREZ**, para obtener el título de **DOCTORADO EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS** con opción terminal en **TECNOLOGÍA ELÉCTRICA**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
DR. DARWIN MAYORGA CRUZ	Aprobado	
DR. GILBERTO ANZUETO SÁNCHEZ	Aprobado	
DRA. VIVECHANA AGARWAL	Aprobado	
DR. ADALBERTO ALEJO MOLINA	Aprobado	
DR. OUTMANE OUBRAM	Aprobado	
DR. ALEJANDRO AMAYA TAPIA	Aprobado	
DR. HÉCTOR MANUEL CASTRO BELTRÁN	Aprobado	

**PLAZO PARA LA REVISIÓN 20 DÍAS HÁBILES (A PARTIR DE LA FECHA DE RECEPCIÓN DEL DOCUMENTO)**

**NOTA. POR CUESTION DE REGLAMENTACIÓN LE SOLICITAMOS NO EXCEDER EL PLAZO SEÑALADO, DE LO CONTRARIO LE AGRADECEMOS SU ATENCIÓN Y NUESTRA INVITACIÓN SERÁ CANCELADA.**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS



**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS**

Jefatura de Posgrado en Ingeniería y Ciencias Aplicadas



ASUNTO: APROBACIÓN DE TESIS

Cuernavaca, Morelos, 07 de septiembre de 2018

**LUIS GUTIÉRREZ  
PRESENTE**

Por este conducto le notifico que su tesis de Doctorado titulada "Detección Homodina Condicionada de Fluorescencia Resonante"

Fue aprobada en su totalidad por el jurado revisor y examinador integrado por los ciudadanosos

NOMBRE	FIRMA
DR. DARWIN MAYORGA CRUZ	
DR. GILBERTO ANZUETO SÁNCHEZ	
DRA. VIVECHANA AGARWAL	
DR. ADALBERTO ALEJO MOLINA	
DR. OUTMANE OUBRAM	
DR. ALEJANDRO AMAYA TAPIA	
DR. HÉCTOR MANUEL CASTRO BELTRÁN	

Por consiguiente, se autoriza a editar la presentación definitiva de su trabajo de investigación para culminar en la defensa oral del mismo.

Sin otro particular aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente  
*Por una humanidad culta*  
*Una universidad de excelencia*

**DR. ROSENBERG JAVIER ROMERO DOMÍNGUEZ**  
COORDINADOR DEL POSGRADO  
EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS



RJRD\*RSU/nmc