



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**Relaciones de dispersión para ondas SH en
estructuras magneto-electro-elásticas con interfaces
imperfectas**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

MARCO ANTONIO REYES GUZMÁN

DIRECTORES DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO OTERO HERNÁNDEZ

DR. ROLANDO PÉREZ ÁLVAREZ

CUERNAVACA, MORELOS.

MAYO, 2019

Jurado

Presidente: Dr. Wolf Luis Mochán Backal (IFC-UNAM)

Secretario: Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos (CINC-UEAM)

Vocal: Dr. Guillermo Monsiváis Galindo (UNAM)

Vocal: Dr. Raúl Esquivel Sirvent (UNAM)

Vocal: Dr. Alejandro Morales Mori (UNAM)

Suplente: Dr. José Antonio Otero Hernández (ITESM)

Suplente: Dr. Rolando Pérez Álvarez (CINC-UAEM)

Publicaciones

ARTÍCULO: ITERFACIAL WAVES IN A A/B/A PIEZOELECTRIC STRUCTURE WITH ELECTRO-MECHANICAL IMPERFECT INTERFACES.

REVISTA: JOURNAL OF MECHANICS OF MATERIALS AND STRUCTURES.

PUBLICACIÓN: AÑO 2017 VOL. 12 PP. 457-470.

ISSN :1559-3959.

EDITORIAL: MATHEMATICAL SCIENCES PUBLISHERS.

ARTÍCULO: INTERFACIAL WAVES IN A PIEZOELECTRIC/PIEZOMAGNETIC/PIEZOELECTRIC STRUCTURE WITH MAGNETO-ELECTRO-MECHANICAL IMPERFECT INTERFACES

REVISTA: PHILOSOPHICAL MAGAZINE.

PUBLICACIÓN: EN REVISIÓN

Resumen

Se estudió la propagación de ondas de cizalladura horizontales (SH) en las interfaces de estructuras del tipo (Piezoeléctrico(A)/Piezoeléctrico(B)/ Piezoeléctrico(A) y Piezoeléctrico/Piezomagnético/Piezoeléctrico) con contacto imperfecto (electro-macánico y magneto-electro-mecánico), respectivamente. Dichos contactos imperfectos fueron modelados por medio de un resorte (imperfección mecánica), un capacitor (imperfección eléctrica) y un inductor (imperfección magnética). Se muestra en forma explícita la relación de dispersión y algunos casos límite son analizados en detalle. En algunos de esos casos límite, nuevas expresiones, no reportadas previamente en la literatura, son presentadas y analizadas, las cuales predicen la existencia de ondas interfaciales. Basado en algunos cálculos numéricos, se muestra que las imperfecciones electro-macánicas y magneto-electro-mecánicas en los contactos tienen una gran influencia en las curvas de dispersión.

Abstract

We study the propagation of shear horizontal (SH) waves in the interfaces of a Piezoelectric(A)/ Piezoelectric(B)/ Piezoelectric(A) and Piezoelectric/ Piezomagnetic/ Piezoelectric structures with an electro-mechanical and magneto-electro-mechanical imperfect contact, respectively. Those imperfect contacts being modeled by means of an inductor (magnetical imperfection), capacitor (electrical imperfection) and a spring (mechanical imperfection). An expression for the dispersion relation is given in an explicit form and some limit cases are analyzed in detail. In some of these limit cases, new expressions, not reported previously in the literature, are presented and analyzed, which predict the existence of interfacial waves. Based on numerical calculations, it can be shown that the magnetical, electrical and mechanical imperfections at interfaces influence the dispersion curves.

*Esta tesis es dedicada a
mi madre, mi abuelo Roberto y,
a mis tíos: José Antonio y Ofelia,
por ser quienes siempre creyeron en mí,
los amo.*

Índice general

1. Introducción	12
1.1. Estructuras inteligentes	12
1.2. Investigaciones previas	17
1.3. Objetivos de la tesis	20
1.3.1. Piezoeléctricos con contacto imperfecto electro-mecánico	20
1.3.2. Piezoeléctricos y piezomagnético con contacto imperfecto magneto- electro-mecánico	21
2. Ecuaciones fundamentales para materiales homogéneos magneto-electro- elásticos	23
2.1. Ecuaciones constitutivas	23
2.2. Aproximación cuasi-estática y potenciales escalares.	25
2.3. Ecuaciones de campo	26
2.4. Caso particular: Simetría 6mm.	28
3. Condiciones de contacto imperfecto en una interface	33

3.1. Relaciones para T, D y E	36
4. Ondas interfaciales en una estructura Piezoeléctrico(A)/ Piezoeléctrico(B)/Piezoeléctrico(A) con interfaces imperfectas electro-mecánicas	42
4.1. Relaciones de dispersión	44
4.1.1. Modos simétricos	44
4.1.2. Modos antisimétricos	46
4.2. Casos límite	47
4.2.1. Modos simétricos	48
4.2.2. Modos antisimétricos	49
4.3. Cálculos numéricos	50
4.3.1. Modos simétricos	51
4.3.2. Modos antisimétricos	54
5. Ondas interfaciales en una estructura Piezoeléctrico/ Piezomagnético/Piezoeléctrico con interfaces imperfectas magneto-electro-mecánicas	59
5.1. Relaciones de dispersión	60
5.1.1. Modos simétricos	61
5.1.2. Modos antisimétricos	63
5.2. Casos límite	66
5.2.1. Modos simétricos	66
5.2.2. Modos antisimétricos	68

5.3. Cálculos numéricos	71
5.3.1. Modos simétricos	71
5.3.2. Modos antisimétricos	75
6. Conclusiones y trabajos a futuro	80
6.1. Piezoeléctrico/Piezoeléctrico/Piezoeléctrico	80
6.2. Piezoeléctrico/Piezomagnético/Piezoeléctrico	81
6.3. Perspectivas a futuro	83
Bibliografía	84

Capítulo 1

Introducción

*“One thing I have learned in a long life:
that all our science, measured against reality,
is primitive and childlike—and yet is the most
precious thing we have.
(ALBERT EINSTEIN)*

1.1. Estructuras inteligentes

Debido a la revolución electrónica, los materiales eléctricos y magnéticos han permeado cada aspecto de la tecnología moderna. La tendencia a la miniaturización de los dispositivos han llevado a la combinación de propiedades electrónicas y magnéticas en materiales multifuncionales [Spaldin NA et al. 2005] y [Eerenstein W et al. 2006]. Combinar la ferroelectricidad y el ferromagnetismo en una misma fase es verdaderamente

difícil, pero esas dificultades se han superado produciendo composites multiferroicos de dos fases compuestos de materiales ferromagnéticos y ferroeléctricos. Estos componentes abren nuevos caminos para ajustar la respuesta magnetoeléctrica (ME) a través de la elección de la razón y microestructura de los componentes. Placas de materiales piezoeléctricos (PiezoE) y piezomagnéticos (PiezoM) son típicamente composites multiféricos, los cuales son capaces de facilitar la conversión de energía entre los campos magnético y eléctrico.

Debido a esta característica, los materiales ME pueden ser explotados y usados como base para la fabricación de novedosos sensores, actuadores, transductores, detectores de daños, dispositivos de ondas acústicas, etc, en estructuras inteligentes multifuncionales de sistemas micro-electromecánico [C.W. Nan et al. 2008]. La distribución del esfuerzo bajo carga mecánica y eléctrica fue investigado a través de su ancho y largo usando un PiezoE de tipo de cizalladura [Benjeddou A et al. 1997]. Dispositivos piezoeléctricos fueron además usados para diseñar actuadores torsionales generando desplazamiento angular [Glazounov A et al. 1998], donde el elemento torsional consiste de diferentes segmentos y, los segmentos vecinos son de polaridad opuesta. La aplicación de un actuador torsional fue ampliado en el último estudio de [Centolanza L R et al. 2002] para controlar el aspa de un rotor.

En materiales multiferroicos, la interacción de acoplamiento entre arreglos ferromagnéticos y ferroeléctricos puede producir algunos nuevos efectos, tales como ME o efectos magnetodieléctricos [Hur N et al. 2004]. La respuesta ME, caracterizada por la aparición de una polarización eléctrica en la aplicación de un campo magnético y/o

una magnetización en la aplicación de un campo eléctrico, ha sido considerado como un efecto intrínseco en algunos materiales de fase simple [Lottermoser T et al. 2004] y [Wang J et al. 2003]. Mucho esfuerzo se ha dedicado a la predicción y determinación del efecto ME de los composites PiezoE/PiezoM en años recientes [C.W. Nan 1994], [M. Fiebig 2005], [J. Du et al. 2009] y [A.K. Soh et al. 2009].

Se encontró recientemente que los composites multiferróicos creados al combinar sustancias ferroeléctricas y ferromagnéticas, tales como ceramicas PiezoE (e.g. BaTiO₃ y (PZT)) y ferritas, exhiben efectos ME intrínsecos a temperatura ambiente [Dong S X et al. 2003a], [Dong S X et al. 2003b], [Srinivasan G et al. 2002] y [Dong S X et al. 2004], lo cual fue una nueva propiedad de tales composites que los componentes individuales no exhiben [Suchtelen J V 1972]. Este efecto ME puede ser definido como un acoplamiento del comportamiento magnetoelástico (MEE). Los materiales inteligentes son sensibles a influencias que provienen del ambiente externo, exhibiendo la capacidad de ajustar su tamaño y forma para adaptarse a los cambio del ambiente. La clase de materiales inteligentes multicampo que está recibiendo una gran atención es el material compuesto MEE multicampo que exhibe un acoplamiento inherente entre la mecánica y los campos eléctrico y magnético [Suchtelen J V 1972], [Li Y J et al. 1998], [Eerenstein W et al. 2006] y [C.W. Nan et al. 2008].

En los materiales composites se combinan PiezoE y PiezoM en tal forma que se obtenga el acoplamiento electromecánico y magnetomecánico. Este acoplamiento electromagnético se obtiene de la interacción elástica entre ambas fases, ofreciendo nuevas posibilidades a las aplicaciones en control automatizado. Hay además materiales MEE en

la naturaleza, pero los coeficientes de acoplamiento EM observados en composites MEE pueden ser cien veces mayores. El entendimiento y la apropiada modelación de fallas en mecanismos de esos materiales es crucial para el avance de los modernos sistemas inteligentes, ya que defectos tales como grietas inevitablemente aparecerán en el material durante la manufactura o en servicio. La existencia de tales defectos llevará no solo a la disminución en la rigidez estructural del componente y su vida de servicio, sino también a una modificación en la transferencia entre las energías macánica y no mecánica, así que acciones de un control inadecuado puede ser adoptado en el hecho de la medida de los potenciales electrico/magnético.

La investigación en magnetoelectricidad está enfocada primordialmente en aumentar el coeficiente de voltage ME α_v ($\alpha_v = \frac{dV}{dH}$, donde H es el campo magnético), el cual es el factor clave. Mientras el efecto ME fue primero observado en un material de una fase, tal como Cr_2O_2 , la inherente disminución del acoplamiento ME impide la viabilidad de aplicación de los materiales [Yuan G L et al. 2006].

No obstante que los composites del tipo magnetorestrictivo-PiezoE tienen coeficiente ME más grande a temperatura ambiente, la reacción y la difusión química entre fases dificulta el proceso de polarización, degradando las propiedades ME, restringiendo sus aplicaciones [Li Y J et al. 2006]. Para unir una gran sección de un material magnetorestrictivo y una fase PiezoE con un adhesivo, se utiliza un epóxico de plata conductivo. Composites laminados multifase han atraído especial atención debido a su fuerte efecto ME a temperatura ambiente, caracterizado por un valor muy grande de α_v comparado con materiales de una fase y mezcla de composites. Para las placas de composites ME

unidos con adhesivos, el coeficiente ME está determinado por dos factores claves: las propiedades inherentes de las fases magnetostrictivas y PiezoE y, el acoplamiento interfacial. El efecto ME en placas de composites laminados es una propiedad del producto derivado del acoplamiento mecánico entre el efecto reverso del PiezoM y del PiezoE. La mayoría de las placas compositas ME están acopladas a través de esfuerzos cortantes interfaciales, los cuales pueden ser responsables por un coeficiente ME más bajo del que predice la teoría, debido al débil acoplamiento mecánico interfacial [Cai N et al. 2003], [Wan J G et al. 2003] y [Dong S X et al. 2004].

En el desarrollo de estructuras inteligentes, los actuadores y los sensores han sido identificados como componentes críticos tecnológicamente hablando [Crawley 1994]. [Wada et. al. 1989] identifica las estructuras inteligentes como un subcampo de todos los otros tipos de estructuras, colocando a estas en el más alto nivel de complejidad y funcionalidad en un sistema. [Adimendun 2005] parafrasea a Gordon G. Wallace, quien da una de las definiciones que mejor delimita la naturaleza y características de los materiales inteligentes, los cuales conforman una estructura inteligente: “un material inteligente es aquel capaz de reconocer adecuadamente un estímulo de su entorno y responder de forma adecuada y en tiempo real”. O sea, es un material hecho por el hombre que mimetiza la habilidad de la naturaleza para reaccionar ante estímulos externos.

La clasificación de estos materiales inteligentes, es variada y depende de su fundamento físico, químico, de funcionamiento, etc. Ejemplo: termoeléctrico, piezoeléctrico, piezomagnético (magnetostrictivo), magneto-óptico, fotoconductor, etc. Con respecto a los materiales piezomagnéticos, actualmente las mejoras van dirigidas hacia el aumento

de las constantes piezomagnéticas, por lo que se trabaja en síntesis y diseño de composites magnetopoliméricos con gran magnetoelasticidad (constante piezomagnética) como: nanopartículas de Niquel-matriz elásticas. La piezoelectricidad es una propiedad muy demandada por los diseñadores de sensores y actuadores, especialmente si están fabricados de materiales plásticos debido a las ventajas que estos pueden aportar como: facilidad de transformación, ligereza, resistencia a medios agresivos, entre otras. Es por eso que caracterizar y estudiar materiales inteligentes, los cuales son usados para desarrollar estructuras inteligentes como lo son los piezoeléctricos y los piezomagnéticos, al igual que los materiales que se usan para unir estos (interfaces), es de suma importancia.

1.2. Investigaciones previas

[Bleustein 1968] estudió la propagación de ondas de cizalladura guiadas por la superficie de un cristal piezoeléctrico; pero no fue hasta 1971 donde [Maerfeld 1971] mostró que una interface en un contacto perfecto entre dos medios semi-infinitos puede guiar ese tipo de ondas si al menos uno de estos medios es un piezoeléctrico. [Yang and Yang 2009] estudió la propagación de ondas piezoeléctricas de cizalladura horizontal a lo largo de la interface entre dos espacios semi-infinitos, mostrando mediante cálculos numéricos que dichas ondas interfaciales llegan a ser dispersivas cuando el gradiente del campo eléctrico es tomado en cuenta. Realizando la misma investigación que [Yang and Yang 2009] ya había hecho, [Nan et al. 2010] mostró que las velocidades de la onda son sensibles a la variación de las propiedades de los materiales .

[Soh and Liu 2006] estudió la propagación de una onda de cizalladura interfacial entre dos medios semi-infinitos, un piezoeléctrico y un piezomagnético con una interface imperfecta (desacoplada mecánicamente, potenciales eléctricos y/o magnéticos no continuos), obteniendo las relaciones de dispersión y presentando las condiciones para la existencia de las ondas SH interfaciales. Fue en [Fan et al. 2006] donde la imperfección en las interfaces son consideradas por medio de una discontinuidad en el desplazamiento, siendo éste modelado por un resorte, concluyendo que la interface imperfecta provoca dispersión en general. [Melkumyan and Mai 2008] estudiaron la influencia en uniones imperfectas elásticas sobre ondas superficiales guiadas por compositos piezoeléctricos/piezomagnéticos, probando así que la imperfección de uniones interfaciales tienen una influencia significativa sobre la existencia de ondas interfaciales y sus velocidades de propagación. Además, [Huang et al. 2009] estudió compositos piezoeléctrico/piezomagnético con contactos imperfectos, concluyendo que las ondas de cizalladura interfacial no existen para interfaces perfectas y existen sólo para interfaces imperfectas.

Relaciones de dispersión generales son presentadas en [Otero et al. 2011] para ondas SH en heteroestructuras magneto-electro-elásticas con interfaces imperfectas, donde la imperfección mecánica es modelada por medio de un resorte y considerando dos tipos de imperfección electromagnética: permeable y absorbente.

En [Otero et al. 2012], imperfecciones mecánicas y eléctricas son modeladas por medio de un capacitor y un resorte, respectivamente, para estudiar la propagación de ondas SH entre la interface de dos materiales piezoeléctricos con contacto imperfecto electro-mecánico. Expresiones para las relaciones de dispersión son mostradas de forma explícita

y varios casos límite son analizados.

La propagación de ondas SH entre la interface de semi-espacios piezoeléctrico y piezomagnético con contacto imperfecto magneto-electro-mecánico ha sido estudiado en [Otero et al. 2013], mostrando la influencia de estos contactos imperfectos en las curvas de dispersión mediante algunos cálculos numéricos. Una serie de trabajos han sido presentados con el fin de estudiar los efectos de los contactos interfaciales sobre la generación de ondas acústicas en cuerpos elásticos usando transductores piezoeléctricos alimentados eléctricamente como en [Li et al. 2013]. [Otero et al. 2014] estudió la propagación de ondas SH entre la interface de dos materiales magneto-electro-elásticos con contacto imperfecto magneto-electro-mecánico, donde la imperfección magnética es modelada por medio de un inductor y su influencia es mostrada en algunos resultados numéricos.

Las ondas SH guiadas por la interface imperfecta elástica entre dos materiales magneto-electro-elásticos fue presentada por [Huang and Li 2010], sus resultados confirman que la velocidad de la onda SH interfacial es fuertemente afectada por las imperfecciones en la interface. [Li et al. 2015a] propuso un modelo de acoplamiento para caracterizar una interface imperfecta en un cilindro multiferrico de doble capa, mientras [Li et al. 2016] realizó la misma caracterización para un composito de doble capa.

Un nuevo modelo para describir la región interfacial imperfecta magneto-electro-mecánica en un composito multiferrico es introducido en [Li et al. 2015b], el cual es usado para caracterizar un sistema que consiste de una placa ferroeléctrica y otra ferromagnética. Con el afán de generalizar el modelo del resorte en una interface con imperfección mecánica, [Li et al. 2015c] incluyó efectos de acoplamiento interno.

Estos interesantes trabajos motivaron la investigación que en esta tesis se presenta, generalizando algunos de los trabajos anteriormente mencionados. Los resultados de estas investigaciones dieron como fruto los artículos: Interfacial waves in an A/B/A Piezoelectric structure with electro-mechanical imperfect interfaces [Reyes et al. 2017] y Interfacial waves in a piezoelectric/piezomagnetic/piezoelectric structure with magneto-electro-mechanical imperfect interfaces, los cuales se resumen en capítulos posteriores.

1.3. Objetivos de la tesis

Esta tesis tiene como propósito el estudio de las ondas (SH) en las interfaces de estructuras heterogéneas con contacto imperfecto, generalizando algunos resultados de trabajos precedentes. Este trabajo se ha dividido en dos secciones, en función del tipo de materiales e imperfecciones del contacto.

1.3.1. Piezoeléctricos con contacto imperfecto electro-mecánico

Objetivo General

Estudiar las ondas SH en una estructura del tipo Piezoeléctrico(A)/ Piezoeléctrico(B)/ Piezoeléctrico(A) con contacto imperfecto electro-mecánico, modelando éste por medio de un resorte (imperfección mecánica) y un capacitor (imperfección eléctrica).

Objetivos específicos

1. Obtener una expresión general para la relación de dispersión de las ondas SH en la interface.
2. Analizar los casos límite de la relación de dispersión para contactos perfectos y desacoplados mecánica y eléctricamente.
3. Mostrar algunas curvas de dispersión.

1.3.2. Piezoeléctricos y piezomagnético con contacto imperfecto magneto-electro-mecánico

Objetivo General

Estudiar las ondas SH en una estructura del tipo Piezoeléctrico/ Piezomagnético/ Piezoeléctrico con contacto imperfecto magneto-electro-mecánico, modelando éste por medio de un resorte (imperfección mecánica), un capacitor (imperfección eléctrica) y un inductor (imperfección magnética).

Objetivos específicos

1. Obtener una expresión general para la relación de dispersión de las ondas SH en la interface.
2. Analizar los casos límite de la relación de dispersión para contactos perfectos y desacoplados mecánica, magnética y eléctricamente.

3. Mostrar algunas curvas de dispersión.

En el capítulo 2 se revisan las relaciones constitutivas piezoeléctricas y piezomagnéticas, la aproximación cuasi-estática y la segunda ley de Newton para medios continuos, así como la deducción de las ecuaciones que describen las ondas SH en materiales magneto-electro-elásticos.

En el capítulo 3 se presentan las condiciones de contacto imperfecto en una interface y la restricción para una onda evanescente.

En el capítulo 4 se presenta la relación de dispersión para la estructura de piezo-eléctricos y las gráficas de esta relación para diferentes ordenes de imperfección (eléctrica y mecánica) en la interface.

En el capítulo 5 se presenta la relación de dispersión para la estructura de piezo-eléctricos y piezomagnético y las gráficas de esta relación para diferentes ordenes de imperfección (eléctrica, mecánica y magnética) en la interface.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de ambos trabajos (capítulos 4 y 5) y trabajos a futuro.

Capítulo 2

Ecuaciones fundamentales para materiales homogéneos magneto-electro-elásticos

“If I have seen further than others,

it is by standing upon

the shoulders of giants.

(Sir Isaac Newton)

2.1. Ecuaciones constitutivas

Los materiales piezoeléctricos (piezomagnéticos) son aquellos que en presencia de un campo eléctrico (campo magnético), estos tienden a deformarse y, cuando se les aplica

un esfuerzo mecánico, una polarización eléctrica (magnética) es generada en el material. Ambos materiales responden linealmente a cambios en los campos eléctrico, magnético, desplazamiento eléctrico, densidad de flujo magnético y el esfuerzo mecánico [Royer 1996]. El comportamiento de los medios piezoeléctrico y piezomagnético es descrito por las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas y piezomagnéticas, las cuales correlacionan al tensor de esfuerzos (T_{ij}), al tensor de deformación (S_{kl}), el campo eléctrico (E_k), el desplazamiento eléctrico (D_i), el campo magnético (H_k) y las densidades de flujo magnético (B_i) como sigue:

$$T_{ij} = C_{ijkl}S_{kl} - e_{kij}E_k - f_{kij}H_k, \quad (2.1)$$

$$D_i = e_{ikl}S_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k + g_{ik}H_k, \quad (2.2)$$

$$B_i = f_{ikl}S_{kl} + g_{ik}E_k + \mu_{ik}H_k, \quad (2.3)$$

donde C_{ijkl} es el tensor de elasticidad de rango cuatro, ε_{ik} es el tensor de permitividad dieléctrica de rango dos, μ_{ik} es el tensor de permeabilidad magnética de rango dos, e_{kij} es el tensor de constantes piezoeléctricas de rango tres, f_{kij} es el tensor de constantes piezomagnéticas de rango tres y g_{ij} es el tensor magneto-eléctrico de rango dos, con ($i, j = 1, 2, \dots, 6; k, l = 1, 2, 3$). El conjunto de ecuaciones (2.1)-(2.3) se puede reescribir usando notación matricial, de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} T \\ D \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -e^t & -f^t \\ e^t & \varepsilon & g \\ f^t & g & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ E \\ H \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

donde t denota matriz transpuesta.

2.2. Aproximación cuasi-estática y potenciales escalares.

Una característica básica de las ecuaciones de Maxwell para los campos electromagnéticos es la existencia de soluciones de onda viajera, las cuales son las encargadas de transportar la energía de un punto a otro. Las más simples y fundamentales de las ondas electromagnéticas son las ondas planas transversales. En la ausencia de fuentes, las ecuaciones de Maxwell en un medio infinito son

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Donde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Asumiendo soluciones con dependencia temporal armónica $e^{-i\omega t}$, de las cuales se puede construir una solución arbitraria por medio de una superposición de Fourier, las ecuaciones para las amplitudes $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$, etc. serán [Jackson 1998]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{2.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega \mathbf{D} = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

En la práctica, ya que los campos elásticos involucran desplazamientos del material, la velocidad con la cual una deformación se propaga es mucho menor que la de un campo

eléctrico. Como es sabido, la velocidad de propagación de las ondas elásticas es 10^4 a 10^5 veces más pequeña que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. Consecuentemente, el campo magnético asociado con vibraciones mecánicas influye débilmente; por ejemplo, la energía magnética producida por una deformación es despreciable en comparación con la energía eléctrica. Lo cual implica que el campo electromagnético asociado con un campo elástico es quasi-estático (el campo eléctrico y el campo magnético no están dinámicamente acoplados), así que en las ecuaciones (2.7) y (2.8) el segundo término se puede despreciar. Bajo esta aproximación cuasi-estática, los campos eléctrico y magnético pueden ser expresados como el gradiente de dos funciones potenciales escalares, es decir, la función potencial eléctrico $\varphi(x, y, z, t)$ y la función potencial magnético $\psi(x, y, z, t)$,

$$E_1 = -\partial_x\varphi, \quad E_2 = -\partial_y\varphi, \quad E_3 = -\partial_z\varphi, \quad (2.9)$$

$$H_1 = -\partial_x\psi, \quad H_2 = -\partial_y\psi, \quad H_3 = -\partial_z\psi. \quad (2.10)$$

2.3. Ecuaciones de campo

Si se asume que todos los puntos de un sólido deformado permanecen en reposo, el desplazamiento u_i de cada punto material es una función sólo de sus coordenadas iniciales. No obstante, si una perturbación viaja a través del medio, allí habrá movimientos locales, así que el desplazamiento será además función del tiempo. En este caso, la ecuación de movimiento puede ser obtenida usando la segunda ley de Newton. Se escribe entonces que, para un sólido con esfuerzos internos T_{ij} , la fuerza por unidad de volumen debe ser

igual a la densidad de masa ρ multiplicada por la aceleración, la cual tiene componentes $\partial_{tt}u_i$, o sea

$$\partial_{x_k} T_{ik} + f_i = \rho \partial_{tt}u_i, \quad (2.11)$$

donde f_i es la densidad de fuerzas internas por unidad de volumen y T_{ik} es el tensor de esfuerzo de rango dos. La ecuación (2.11) es la ecuación fundamental de la elastodinámica de movimiento para un medio sólido continuo. El tensor T_{ik} es simétrico ($T_{ik} = T_{ki}$), así que el número de sus componentes independientes se reduce a seis, estos son:

a) T_{11}, T_{22}, T_{33} : esfuerzos normales a las caras, corresponden a tensiones o compresiones;

b) T_{12}, T_{13}, T_{23} : esfuerzos tangenciales, corresponden a fuerzas de cizalladura, como se muestra en 2.1.

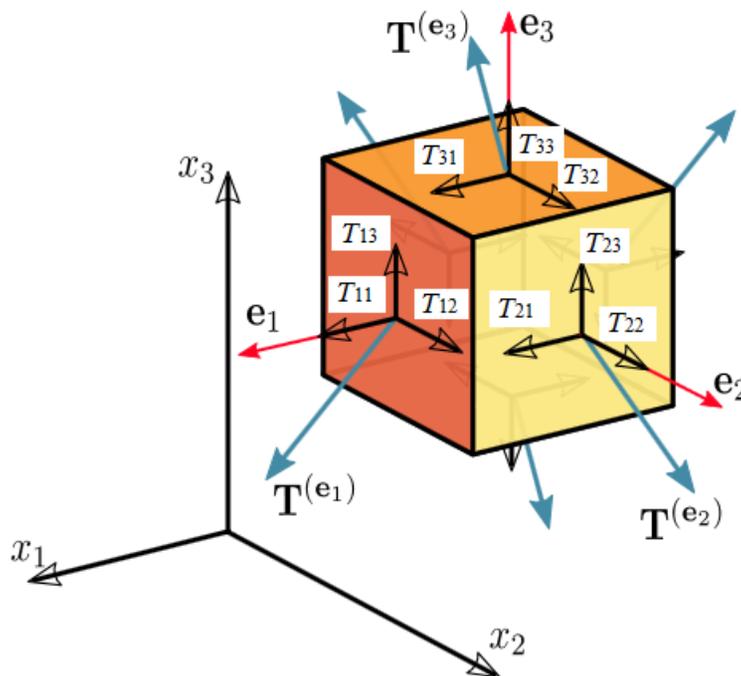


Figura 2.1: Esquema de los componentes del tensor de esfuerzos.

El caso donde el tensor de esfuerzos no es simétrico se encuentra, en la práctica, cuando un cristal polar está sujeto a un campo eléctrico, por ejemplo, cuando éste está localizado entre electrodos para formar un transductor. No obstante, ya que el torque es débil, el tensor puede aún así ser considerado simétrico para propósitos prácticos [Royer 1996].

2.4. Caso particular: Simetría 6mm.

Ahora exploremos con una simetría específica. Considérese dos materiales, los cuales exhiben propiedades magneto-electro-elásticas (donde los coeficientes del tensor magneto-eléctrico son cero) con simetría 6mm y, polarización y magnetización en la dirección del eje z (de un sistema de coordenadas cartesianas xyz). Las ecuaciones constitutivas pueden ser expresadas en forma matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 & 0 & -f_{31} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 & 0 & -f_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} & 0 & 0 & -f_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 & 0 & -f_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 & -f_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{11} & 0 \\ f_{31} & f_{31} & f_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donde $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$, T_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) son los componentes del tensor de esfuerzos

de rango dos y S_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) son los componentes del tensor de deformación de segundo orden, ambos escritos en notación reducida. En notación reducida, el par de índices no ordenados (i, j) puede dar sólo seis valores independientes. Estos son numerados del 1 al 6 como sigue:

$$(1, 1) \leftrightarrow 1 \quad (2, 2) \leftrightarrow 2 \quad (3, 3) \leftrightarrow 3$$

$$(2, 3) = (3, 2) \leftrightarrow 4 \quad (3, 1) = (1, 3) \leftrightarrow 5 \quad (1, 2) = (2, 1) \leftrightarrow 6.$$

Aquí, D_k , E_k , B_k y H_k ($k = 1, 2, 3$) son los componentes del desplazamiento eléctrico, campo eléctrico, inducción magnética y campo magnético, respectivamente.

Las ecuaciones que relacionan el tensor de deformación de segundo orden y los desplazamientos elásticos para esta simetría y, dirección de polarización y magnetización, son:

$$\begin{aligned} S_1 &= \partial_x u_x, & S_2 &= \partial_y u_y, \\ S_3 &= \partial_z u_z, & S_4 &= \frac{\partial_z u_y + \partial_y u_z}{2}, \\ S_5 &= \frac{\partial_z u_x + \partial_x u_z}{2}, & S_6 &= \frac{\partial_y u_x + \partial_x u_y}{2}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde u_x , u_y y u_z son los componentes del desplazamiento elástico.

Asumiendo que no hay fuerzas internas ($f_i = 0$), la ecuación (2.11) puede ser escrita como:

$$\partial_x T_1 + \partial_y T_6 + \partial_z T_5 = \rho \partial_{tt} u_x, \tag{2.14}$$

$$\partial_x T_6 + \partial_y T_2 + \partial_z T_4 = \rho \partial_{tt} u_y, \tag{2.15}$$

$$\partial_x T_5 + \partial_y T_4 + \partial_z T_3 = \rho \partial_{tt} u_z. \tag{2.16}$$

Asumiendo que no actúan ni cargas libres ni densidades de flujo de corriente en el interior del material estudiado, las leyes de Gauss magnética y eléctrica pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\partial_x D_1 + \partial_y D_2 + \partial_z D_3 = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3 = 0. \quad (2.18)$$

Combinando las ecuaciones (2.14)-(2.18), el sistema de ecuaciones diferenciales para el fenómeno dinámico en un material homogéneo magneto-electro-elástico puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} c_{11} \partial_{xx} u_x + c_{66} \partial_{yy} u_x + c_{44} \partial_{zz} u_x + (c_{12} + c_{66}) \partial_{xy} u_y + (c_{13} + c_{44}) \partial_{zx} u_z \\ + (e_{31} + e_{15}) \partial_{zx} \varphi + (f_{31} + f_{15}) \partial_{zx} \psi = \rho \partial_{tt} u_x, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} c_{66} \partial_{xx} u_y + c_{11} \partial_{yy} u_y + c_{44} \partial_{zz} u_y + (c_{66} + c_{12}) \partial_{yx} u_x + (c_{13} + c_{44}) \partial_{yz} u_z \\ + (e_{31} + e_{15}) \partial_{yz} \varphi + (f_{31} + f_{15}) \partial_{yz} \psi = \rho \partial_{tt} u_y, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} c_{44} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) u_z + c_{33} \partial_{zz} u_z + (c_{44} + c_{13}) (\partial_{zx} u_x + \partial_{zy} u_y) \\ + e_{15} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \varphi + e_{33} \partial_{zz} \varphi + f_{15} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \psi + f_{33} \partial_{zz} \psi = \rho \partial_{tt} u_z, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} e_{15} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) u_z + c_{33} \partial_{zz} u_z + (e_{15} + e_{31}) (\partial_{zx} u_x + \partial_{zy} u_y) \\ - \varepsilon_{11} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \varphi - \varepsilon_{33} \partial_{zz} \varphi = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} f_{15} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) u_z + f_{33} \partial_{zz} u_z + (f_{15} + f_{31}) (\partial_{zx} u_x + \partial_{zy} u_y) \\ - \mu_{11} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \psi - \mu_{33} \partial_{zz} \psi = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

El sistema de ecuaciones (2.19)-(2.23) consiste en cinco ecuaciones diferenciales parciales acopladas con cinco funciones desconocidas u_x, u_y, u_z, φ y ψ [H. Calas et al. 2008].

Asumiendo que u_x y u_y son iguales a cero y, u_z, φ y ψ dependen solamente de (x, y, t) ; la ecuación (2.21) se escribe como:

$$c_{44}\nabla^2 u_z + e_{15}\nabla^2 \varphi + f_{15}\nabla^2 \psi = \rho \partial_{tt} u_z, \quad (2.24)$$

la ecuación (2.22) se escribe como:

$$e_{15}\nabla^2 u_z - \varepsilon_{11}\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.25)$$

y la ecuación (2.23) se escribe como:

$$f_{15}\nabla^2 u_z - \mu_{11}\nabla^2 \psi = 0, \quad (2.26)$$

donde $\nabla^2 \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Las ecuaciones (2.24)-(2.26) describen las ondas SH en materiales magneto-electro-elásticos.

Para facilitar la solución del sistema de ecuaciones (2.24)-(2.26), usaremos las funciones potenciales auxiliares ϕ y $\bar{\psi}$ definidas por:

$$\phi = \varphi - \frac{e}{\varepsilon} u, \quad (2.27)$$

$$\bar{\psi} = \psi - \frac{f}{\mu} u, \quad (2.28)$$

lo que nos permite escribir, las ecuaciones que gobiernan las ondas SH pueden ser escritas como:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_{tt} \right) u = 0, \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} = 0, \quad (2.31)$$

donde $\bar{v} = \sqrt{\bar{c}/\rho}$ es la velocidad de la onda de cizalladura en el material y $\bar{c} = c + f^2/\mu + e^2/\varepsilon$ es la constante magneto-electro-elástica de rigidez.

Capítulo 3

Condiciones de contacto imperfecto en una interface

Para las placas de compositos ME unidos con adhesivos, el coeficiente ME está determinado por dos factores claves: las propiedades inherentes de las fases magnetorestrictivas y PiezoE y el acoplamiento interfacial.

Considérese una estructura formada por dos materiales homogéneos con simetría hexagonal 6mm y polarización en la dirección del eje z (de un sistema de coordenadas cartesianas xyz) y sea el plano xy un plano isotrópico como se muestra en la figura 3.1.

Los planos $y = \pm \frac{1}{2}d$ son las interfaces. Los espacios $y < -\frac{1}{2}d$ y $y > \frac{1}{2}d$ son ocupados por un material homogéneo, el cual es denotado por **A** y la región encerrada en el intervalo $[-\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}d]$ por un segundo material homogéneo, el cual es denotado por **B**.

Para describir la propagación de ondas SH a lo largo del eje x positivo, las cuales satisfacen las ecuaciones (2.29)-(2.31) en cada interface de la estructura, se requiere que

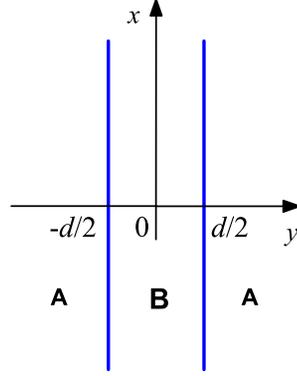


Figura 3.1: Esquema de una estructura heterogénea **A/B/A**.

u , $\bar{\psi}$ y ϕ tiendan a cero mientras y tienda a $\pm\infty$; lo cual implica que buscamos soluciones de las ecuaciones (2.29)-(2.31) de la forma

$$u_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_A e^{\eta_A y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_B \cos(\eta_B y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ U_A e^{-\eta_A y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\phi_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Phi_A e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Phi_B \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Phi_A e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\bar{\psi}_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \bar{\Psi}_A e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \bar{\Psi}_B \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \bar{\Psi}_A e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.3)$$

para los modos simétricos en y , y

$$u_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_{A1} \mathbf{e}^{\eta_A y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_{B1} \sin(\eta_B y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -U_{A1} \mathbf{e}^{-\eta_A y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\phi_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Phi_{A1} \mathbf{e}^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Phi_{B1} \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Phi_{A1} \mathbf{e}^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\bar{\psi}_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \bar{\Psi}_{A1} \mathbf{e}^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \bar{\Psi}_{B1} \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\bar{\Psi}_{A1} \mathbf{e}^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.6)$$

para los modos antisimétricos en y , donde $U_A, U_B, U_{A1}, U_{B1}, \Phi_A, \Phi_B, \Phi_{A1}, \Phi_{B1}, \bar{\Psi}_A, \bar{\Psi}_B, \bar{\Psi}_{A1}$ y $\bar{\Psi}_{B1}$ son constantes indeterminadas. Aquí, ω , ξ y η son la frecuencia angular, la componente x del vector de onda y la componente y del vector de onda, respectivamente, siendo esta última definida para cada material como

$$\eta_A = \xi \sqrt{(1 - v^2/\bar{v}_A^2)} > 0, \quad |y| \geq \frac{1}{2}d, \quad (3.7)$$

$$\eta_B = \xi \sqrt{(v^2/\bar{v}_B^2 - 1)} > 0, \quad |y| \leq \frac{1}{2}d,$$

donde $v_A = \sqrt{\bar{c}_A/\rho_A}$ ($v_B = \sqrt{\bar{c}_B/\rho_B}$) es la velocidad de la onda de cizalladura en el medio(A) (medio (B)) y $v = \omega/\xi$ es la velocidad de fase.

3.1. Relaciones para T, D y E

Ahora, la componente del tensor de esfuerzos $T \equiv T_{zy}$, la inducción magnética $B \equiv B_y$ y el desplazamiento eléctrico $D \equiv D_y$ están relacionadas a u , $\bar{\psi}$ y ϕ por

$$\begin{aligned} T &= \bar{c} \partial_y u + e \partial_y \phi + f \partial_y \bar{\psi}, \\ D &= -\varepsilon \partial_y \phi, \\ B &= -\mu \partial_y \bar{\psi}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1)-(3.3) en la ecuación (3.8) para los modos simétricos, se obtiene

$$T_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_A \bar{c}_A \eta_A \mathbf{e}^{\eta_A y} + \Phi_A \xi \mathbf{e}^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ -U_B \bar{c}_B \eta_B \sin(\eta_B y) + \Psi_B f_B \xi \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -U_A \bar{c}_A \eta_A \mathbf{e}^{-\eta_A y} - \Phi_A e_A \xi \mathbf{e}^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$D_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} -\Phi_A \varepsilon_A \xi \mathbf{e}^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ -\Phi_B \varepsilon_B \xi \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Phi_A \varepsilon_A \xi \mathbf{e}^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$B_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} -\Psi_A \mu_A \xi \mathbf{e}^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ -\Psi_B \mu_B \xi \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Psi_A \mu_A \xi \mathbf{e}^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d. \end{cases} \tag{3.11}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.4)-(3.6) en la ecuación (3.8) para los modos antisimétricos, se obtiene

$$T_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_{A1} \bar{c}_A \eta_A e^{\eta_A y} + \Phi_{A1} \xi e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_{B1} \bar{c}_B \eta_B \cos(\eta_B y) + \Psi_{B1} f_B \xi \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ U_{A1} \bar{c}_A \eta_A e^{-\eta_A y} + \Phi_{A1} e_A \xi e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$D_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} -\Phi_{A1} \varepsilon_A \xi e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ -\Phi_{B1} \varepsilon_B \xi \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Phi_{A1} \varepsilon_A \xi e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$B_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} -\Psi_{A1} \mu_A \xi e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ -\Psi_{B1} \mu_B \xi \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Psi_{A1} \mu_A \xi e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d. \end{cases} \quad (3.14)$$

Las condiciones para el contacto imperfecto magneto-electro-mecánico en la unión de los materiales **A/B** son:

1. Contacto imperfecto elástico (Modelo de resorte)

$$T_A = k_u (u_A - u_B), \quad (3.15)$$

$$T_B = k_u (u_A - u_B), \quad (3.16)$$

estas ecuaciones describen la interface elástica con un parámetro de resorte k_u [Fan et al. 2006], es decir, la interface puede deformarse y el desplazamiento en

ésta puede ser discontinua. En este modelo, se supone que las intercaras de los materiales están unidos por resortes en toda la superficie de las mismas. Este simple modelo ayuda a relacionar el valor de la constante k_u con cantidades físicamente medibles, como lo es en este caso la constante elástica c del material. Comparando la ecuación (3.15) con la expresión para el modelo de Young

$$E(\text{Módulo de Young}) = \frac{T(\text{Esfuerzo})}{\frac{\Delta L}{l_0}(\text{Deformación unitaria})},$$

tenemos que

$$k_u = \frac{c}{l_0}. \quad (3.17)$$

Hay dos casos límites que son dignos de mencionarse:

- Cuando $k_u \rightarrow \infty$.

Las dos superficies están completamente acopladas, el desplazamiento es nulo.

- Cuando $k_u \rightarrow 0$.

El sistema está completamente desacoplado.

2. Contacto imperfecto eléctrico (Modelo de capacitor)

$$D_A = k_\varphi (\varphi_A - \varphi_B), \quad (3.18)$$

$$D_B = k_\varphi (\varphi_A - \varphi_B), \quad (3.19)$$

estas ecuaciones describen la interface eléctrica con un parámetro de capacitor k_φ , es decir, el potencial eléctrico en la interface es discontinuo. En este modelo, se supone que las dos entrecaras de los materiales están formadas por muchos capacitores de

placas paralelas a éstas. Con este simple modelo se puede relacionar el valor de la constante k_φ con cantidades físicamente medibles, como lo es en este caso la permitividad del material ε . Comparando la ecuación (3.18) con

$$D = \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{l_0},$$

tenemos que

$$k_\varphi = \frac{\varepsilon}{l_0}. \quad (3.20)$$

Analicemos los siguientes casos límites:

- Cuando $k_\varphi \rightarrow \infty$.

El potencial eléctrico es continuo.

- Cuando $k_\varphi \rightarrow 0$.

Se genera una barrera eléctrica.

Si se toma a k_φ como una medida de la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, los dos resultados anteriores se podrían analizar de la siguiente forma. Cuando se introduce un dieléctrico y el valor de su permitividad es incrementada, la capacitancia también incrementa y por lo tanto diferencia de potencial tiende a cero. En cambio, si se genera una especie de vacío entre las dos placas, disminuyendo la permitividad, se producirá una barrera eléctrica en el medio.

3. Contacto imperfecto magnético (Modelo de inductor)

$$B_A = k_\psi (\psi_A - \psi_B), \quad (3.21)$$

$$B_B = k_\psi (\psi_A - \psi_B). \quad (3.22)$$

Estas ecuaciones describen la interface magnética con parámetro de inductor k_ψ , es decir, el potencial magnético en la interface es discontinuo. En este modelo, se supone que las dos intercaras de los materiales están formados por inductores (pequeños solenoides) en toda la superficie de las mismas. Con este modelo se puede relacionar el valor de la constante k_ψ con cantidades físicamente medibles, como lo es en este caso la permeabilidad del medio μ . Comparando la ecuación (3.21) con

$$B = \mu \frac{\Delta\psi}{l_0},$$

tenemos que

$$k_\psi = \frac{\mu}{l_0}. \quad (3.23)$$

Al hacerse los cálculos numéricos y graficar las curvas de dispersión, se tuvo que normalizar el parámetro k_ψ e incluir el grosor d del material que se encuentra en el centro de la heteroestructura. Este parámetro adimensional se escribe como

$$k_{\psi AD} = \frac{d}{l_0}. \quad (3.24)$$

Nuevamente analizemos los dos casos límites:

- Cuando $k_\psi \rightarrow \infty$.

El potencial magnético es continuo.

- Cuando $k_\psi \rightarrow 0$.

Se genera una barrera magnética.

Si se toma a k_ψ como una medida de la inductancia de un inductor (solenoides cuya sección transversal es paralela a las entrecaras), se pueden analizar los resultados

anteriores de la siguiente forma. Cuando se introduce un material ferromagnético y el valor de su permitividad es incrementada, la inductancia también incrementa y por lo tanto el flujo magnético crece. En cambio, si se genera una especie de vacío entre las dos placas, disminuyendo la permitividad, se producirá una barrera magnética en el medio.

Capítulo 4

Ondas interfaciales en una estructura Piezoeléctrico(A)/ Piezoeléctrico(B)/Piezoeléctrico(A) con interfaces imperfectas electro-mecánicas

En este capítulo se expone la primera parte del trabajo.

Supongamos una estructura formada por un arreglo de piezoeléctricos: piezoE(A)/piezoE(B)/piezoE(A). Para describir la propagación de ondas SH a lo largo del eje x positivo, las cuales satisfacen las ecuaciones (3.15)-(3.16) en cada interface de la estructura, se requiere que u , ψ y ϕ tiendan a cero mientras y tienda a $\pm\infty$; las soluciones son de la

forma

$$u_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_A e^{\eta_A y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_B \cos(\eta_B y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ U_A e^{-\eta_A y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\phi_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Phi_A e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Phi_B \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Phi_A e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\psi_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Psi_A e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Psi_B \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Psi_A e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (4.3)$$

para los modos simétricos en y , y

$$u_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_{A1} e^{\eta_A y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_{B1} \sin(\eta_B y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -U_{A1} e^{-\eta_A y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\phi_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Phi_{A1} e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Phi_{B1} \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Phi_{A1} e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\psi_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Psi_{A1} e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Psi_{B1} \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Psi_{A1} e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (4.6)$$

para los modos antisimétricos en y , donde $U_A, U_B, U_{A1}, U_{B1}, \Phi_A, \Phi_B, \Phi_{A1}, \Phi_{B1}, \Psi_A, \Psi_B, \Psi_{A1}$ y Ψ_{B1} son constantes indeterminadas. Aquí, ω , ξ y η son la frecuencia angular, la componente x del vector de onda y la componente y del vector de onda, respectivamente, siendo esta última definida para cada material como

$$\begin{aligned} \eta_A &= \xi \sqrt{(1 - v^2/\bar{v}_A^2)} > 0, \quad |y| \geq \frac{1}{2}d, \\ \eta_B &= \xi \sqrt{(v^2/\bar{v}_B^2 - 1)} > 0, \quad |y| \leq \frac{1}{2}d, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $v_A = \sqrt{\bar{c}_A/\rho_A}$ ($v_B = \sqrt{\bar{c}_B/\rho_B}$) es la velocidad de la onda de cizalladura en el piezoeléctrico(A) (piezoeléctrico(B)) y $v = \omega/\xi$ es la velocidad de fase.

4.1. Relaciones de dispersión

4.1.1. Modos simétricos

Se construirán las ecuaciones que satisfacen las condiciones de contacto imperfecto en $y = -\frac{d}{2}$ para los modos simétricos. Usando las expresiones (3.1) y (3.9) en la ecuación (3.15), tenemos

$$U_A (\bar{c}_A \eta_A - k_u) e^{-\frac{d\eta_A}{2}} + \Phi_A e_A \xi e^{-\frac{d\xi}{2}} + U_B k_u \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) = 0, \quad (4.8)$$

usando las expresiones (3.1) y (3.9) en la ecuación (3.16), tenemos

$$-U_A k_u e^{-\frac{d\eta_A}{2}} + U_B \left(\bar{c}_B \eta_B \sin\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + k_u \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) \right) - \Phi_B e_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0. \quad (4.9)$$

usando las expresiones (3.1), (3.2) y (3.10) en la ecuación (3.18), tenemos,

$$-\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_A k_\varphi e^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_A (\varepsilon_A \xi + k_\varphi) e^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{e_B}{\varepsilon_B} U_B k_\varphi \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \Phi_B k_\varphi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0. \quad (4.10)$$

usando las expresiones (3.1), (3.2) y (3.10) en la ecuación (3.19), tenemos,

$$-\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_A k_\varphi e^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_A k_\varphi e^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{e_B}{\varepsilon_B} U_B k_\varphi \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \Phi_B \left(\varepsilon_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\varphi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right) = 0. \quad (4.11)$$

El conjunto de ecuaciones (4.8)-(4.11) es un sistema de ecuaciones algebraico para U_A , U_B , Φ_A y Φ_B . Para obtener las soluciones no triviales, el determinante de la matriz formada por éste debe ser cero y puede ser simplificado a

$$\begin{vmatrix} e_A \xi & 0 & \bar{c}_A \eta_A - k_u & k_u \\ 0 & -e_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) & -k_u & \bar{c}_B \eta_B \tan\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + k_u \\ -\varepsilon_A \xi - k_\varphi & k_\varphi & -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & \frac{e_B}{\varepsilon_B} k_\varphi \\ -k_\varphi & \varepsilon_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\varphi & -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & \frac{e_B}{\varepsilon_B} k_\varphi \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

Haciendo trabajo algebraico con el determinante, llegamos a las relaciones de dispersión para los modos simétricos:

$$P_A P_B - Q^2 + k_u (P_A + P_B + 2Q) = 0, \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned}
P_A &= -\bar{c}_A \left(\eta_A - \xi \gamma_\varphi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} \right), & P_B &= \bar{c}_B \left(\eta_B \tan \left(\frac{d\eta_B}{2} \right) + \xi \gamma_\varphi \frac{M_B^2}{\varepsilon_B} \right), \\
Q &= -\xi \gamma_\varphi \left(\frac{e_A e_B}{\varepsilon_A \varepsilon_B} \right), & \gamma_\varphi &= \frac{k_\varphi}{\xi + k_\varphi \left(\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} \coth \left(\frac{d\xi}{2} \right) \right)}, \\
M_A^2 &= \frac{e_A^2}{\bar{c}_A \varepsilon_A}, & M_B^2 &= \frac{e_B^2}{\bar{c}_B \varepsilon_B}.
\end{aligned}$$

4.1.2. Modos antisimétricos

Ahora se construirán las ecuaciones que satisfacen las condiciones de contacto imperfecto en $y = -\frac{d}{2}$ para los modos antisimétricos, usando las expresiones (3.4) y (3.9) en la ecuación (3.15), tenemos

$$U_{A1} (\bar{c}_A \eta_A - k_u) \mathbf{e}^{-\frac{d\eta_A}{2}} + \Phi_{A1} e_A \xi \mathbf{e}^{-\frac{d\xi}{2}} - U_{B1} k_u \sin \left(\frac{d\eta_B}{2} \right) = 0, \quad (4.14)$$

usando las expresiones (3.4) y (3.9) en la ecuación (3.16), tenemos

$$\begin{aligned}
- U_{A1} k_u \mathbf{e}^{-\frac{d\eta_A}{2}} + U_{B1} \left(\bar{c}_B \eta_B \cos \left(\frac{d\eta_B}{2} \right) - k_u \sin \left(\frac{d\eta_B}{2} \right) \right) \\
+ \Phi_{B1} e_B \xi \cosh \left(\frac{d\xi}{2} \right) = 0, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

usando las expresiones (3.4), (3.5) y (3.10) en la ecuación (3.18), tenemos

$$\begin{aligned}
- \frac{e_A}{\varepsilon_A} U_{A1} k_\varphi \mathbf{e}^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_{A1} (\varepsilon_A \xi + k_\varphi) \mathbf{e}^{-\frac{d\xi}{2}} - \frac{e_B}{\varepsilon_B} U_{B1} k_\varphi \sin \left(\frac{d\eta_B}{2} \right) \\
- \Phi_{B1} k_\varphi \sinh \left(\frac{d\xi}{2} \right) = 0, \quad (4.16)
\end{aligned}$$

usando las expresiones (3.4), (3.5) y (3.10) en la ecuación (3.19), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_{A1} k_\varphi \mathbf{e}^{-\frac{d\eta_A}{2}} \Phi_{A1} k_\varphi \mathbf{e}^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{e_B}{\varepsilon_B} U_{B1} k_\varphi \sin \left(\frac{d\eta_B}{2} \right) \\
+ \Phi_{B1} \left(\varepsilon_B \xi \cosh \left(\frac{d\xi}{2} \right) + k_\varphi \sinh \left(\frac{d\xi}{2} \right) \right) = 0. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones (4.14)-(4.17) es un sistema de ecuaciones algebraico para U_A , U_B , Φ_A y Φ_B . Para obtener las soluciones no triviales, el determinante de la matriz formada por éste debe ser cero y puede ser simplificado a

$$\begin{vmatrix} e_A \xi & 0 & \bar{c}_A \eta_A - k_u & -k_u \\ 0 & e_B \xi \coth\left(\frac{d\xi}{2}\right) & -k_u & \bar{c}_B \eta_B \cot\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) - k_u \\ -\varepsilon_A \xi - k_\varphi & -k_\varphi & -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & -\frac{e_B}{\varepsilon_B} k_\varphi \\ -k_\varphi & -\varepsilon_B \xi \coth\left(\frac{d\xi}{2}\right) - k_\varphi & -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & -\frac{e_B}{\varepsilon_B} k_\varphi \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

Haciendo trabajo algebraico con el determinante, llegamos a las relaciones de dispersión para los modos antisimétricos:

$$P_A P_B - Q^2 + k_u (P_A + P_B + 2Q) = 0, \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} P_A &= -\bar{c}_A \left(\eta_A - \xi A \gamma_\phi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} \right), & P_B &= \bar{c}_B \left(-\eta_B \cot\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \xi A \gamma_\phi \frac{M_B^2}{\varepsilon_B} \right), \\ Q &= -\xi A \gamma_\phi \left(\frac{e_A e_B}{\varepsilon_A \varepsilon_B} \right), & A \gamma_\phi &= \frac{k_\varphi}{\xi + k_\varphi \left(\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right)}, \\ M_A^2 &= \frac{e_A^2}{\bar{c}_A \varepsilon_A}, & M_B^2 &= \frac{e_B^2}{\bar{c}_B \varepsilon_B}. \end{aligned}$$

Las expresiones (4.13) y (4.19) determinan la velocidad de fase v , donde ésta cambia con la frecuencia y, por lo tanto, dando lugar a ondas dispersivas. Nótese que k_u/\bar{c} y k_φ/ε tienen dimensiones de número de onda.

4.2. Casos límite

Se consideran los siguientes casos límite:

4.2.1. Modos simétricos

1. La interface no tiene interacción mecánica e interacción eléctrica parcial,

$k_u \rightarrow 0$, $0 < k_\varphi < \infty$. La ecuación (4.13) se reduce a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) + \gamma_\phi \frac{M_B^2}{\varepsilon_B} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \\ - \gamma_\phi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = 0, \end{aligned}$$

2. La interface tiene interacción perfecta eléctrica y no interacción mecánica,

$k_u \rightarrow 0$, $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (4.13) se reduce a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) + \frac{M_B^2}{\varepsilon_B + \coth \left(\frac{d\xi}{2} \right)} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \\ - \frac{M_A^2}{1 + \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} \coth \left(\frac{d\xi}{2} \right)} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = 0, \end{aligned}$$

3. La interface no tiene ni interacción eléctrica ni mecánica,

$k_u \rightarrow 0$, $k_\varphi \rightarrow 0$. La ecuación (4.13) se reduce a

$$\frac{d^2 \xi^2}{4} \left(\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1 \right) = n^2 \pi^2; \quad n \in \mathbb{Z},$$

4. La interface tiene interacción mecánica perfecta e interacción eléctrica parcial,

$k_u \rightarrow \infty$, $0 < k_\varphi < \infty$. La ecuación (4.13) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \gamma_\phi \left(\frac{e_A}{\varepsilon_A} - \frac{e_B}{\varepsilon_B} \right)^2,$$

5. La interface tiene ambas interacciones, mecánica y eléctrica perfectas,

$k_u \rightarrow \infty$, $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (4.13) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \frac{\left(\frac{e_A}{\varepsilon_A} - \frac{e_B}{\varepsilon_B} \right)^2}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} \coth \left(\frac{d\xi}{2} \right)},$$

6. La interface tiene interacción mecánica perfecta y no interacción eléctrica,

$k_u \rightarrow \infty$, $k_\varphi \rightarrow 0$. La ecuación (4.13) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = 0.$$

4.2.2. Modos antisimétricos

1. La interface no tiene interacción mecánica e interacción eléctrica parcial,

$k_u \rightarrow 0$, $0 < k_\varphi < \infty$. La ecuación (4.19) se reduce a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) - A\gamma_\phi \frac{M_B^2}{\varepsilon_B} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \\ - A\gamma_\phi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = 0, \end{aligned}$$

2. La interface tiene interacción eléctrica perfecta y no interacción mecánica,

$k_u \rightarrow 0$, $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (4.19) se reduce a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) - \frac{M_B^2}{\varepsilon_B + \coth \left(\frac{d\xi}{2} \right)} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \\ - \frac{M_A^2}{1 + \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} \tanh \left(\frac{d\xi}{2} \right)} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = 0, \end{aligned}$$

3. La interface no tiene ni interacción eléctrica ni mecánica,

$k_u \rightarrow 0$, $k_\varphi \rightarrow 0$. La ecuación (4.19) se reduce a

$$d^2 \xi^2 \left(\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1 \right) = (2n + 1)^2 \pi^2; \quad n \in \mathbb{Z},$$

4. La interface tiene interacción mecánica perfecta e interacción eléctrica parcial,

$k_u \rightarrow \infty$, $0 < k_\varphi < \infty$. La ecuación (4.19) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} + \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = A\gamma_\phi \left(\frac{e_A}{\varepsilon_A} - \frac{e_B}{\varepsilon_B} \right)^2,$$

5. La interface tiene ambas interacciones, mecánica y eléctrica perfectas,

$k_u \rightarrow \infty$, $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (4.19) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \frac{\left(\frac{e_A}{\varepsilon_A} - \frac{e_B}{\varepsilon_B} \right)^2}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} \tanh \left(\frac{d\xi}{2} \right)},$$

6. La interface tiene interacción mecánica perfecta y no interacción eléctrica,

$k_u \rightarrow \infty$, $k_\varphi \rightarrow 0$. La ecuación (4.19) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\xi}{2} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = 0.$$

4.3. Cálculos numéricos

Para mostrar los efectos de las imperfecciones en las interfaces, se presentan algunas curvas de dispersión. Se usan las propiedades de dos materiales piezoeléctricos, BaTiO₃ como el piezoeléctrico **A** y, PZT4 como el piezoeléctrico **B**. Las propiedades de ambos materiales se resumen en el cuadro 4.1.

Properties	BaTiO ₃	PZT4
c (GPa)	43	26
e (C/m ²)	11.6	10.5
ε (10 ⁻⁹ C ² /Nm ²)	11.2	7.124
ρ (10 ³ kg/m ³)	5	7.5
\bar{v} (10 ³ m/s)	3.07981	2.35162

Cuadro 4.1: Propiedades de BaTiO₃ y PZT4

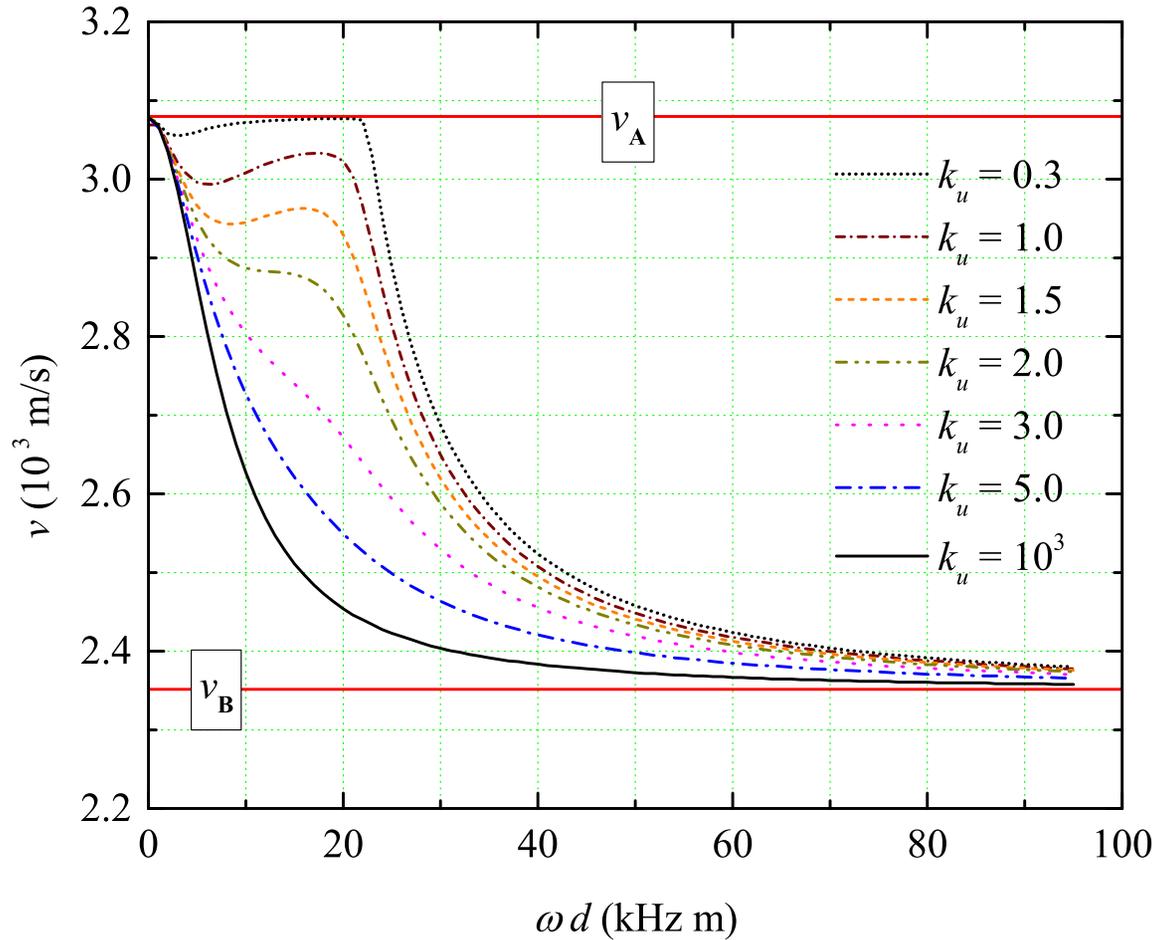


Figura 4.1: $k_\varphi = 0 \text{ F/m}^2$

Analizemos algunas gráficas de las curvas de dispersión generadas usando procesos numéricos.

4.3.1. Modos simétricos

Las curvas de dispersión para un parámetro de imperfección fijo y diferentes valores para el segundo parámetro de imperfección, se muestran. Figura 4.1; $k_\varphi = 0 \text{ F/m}^2$ y varios valores de k_u (GPa/m). Las curvas son no monótonas para valores pequeños de k_u

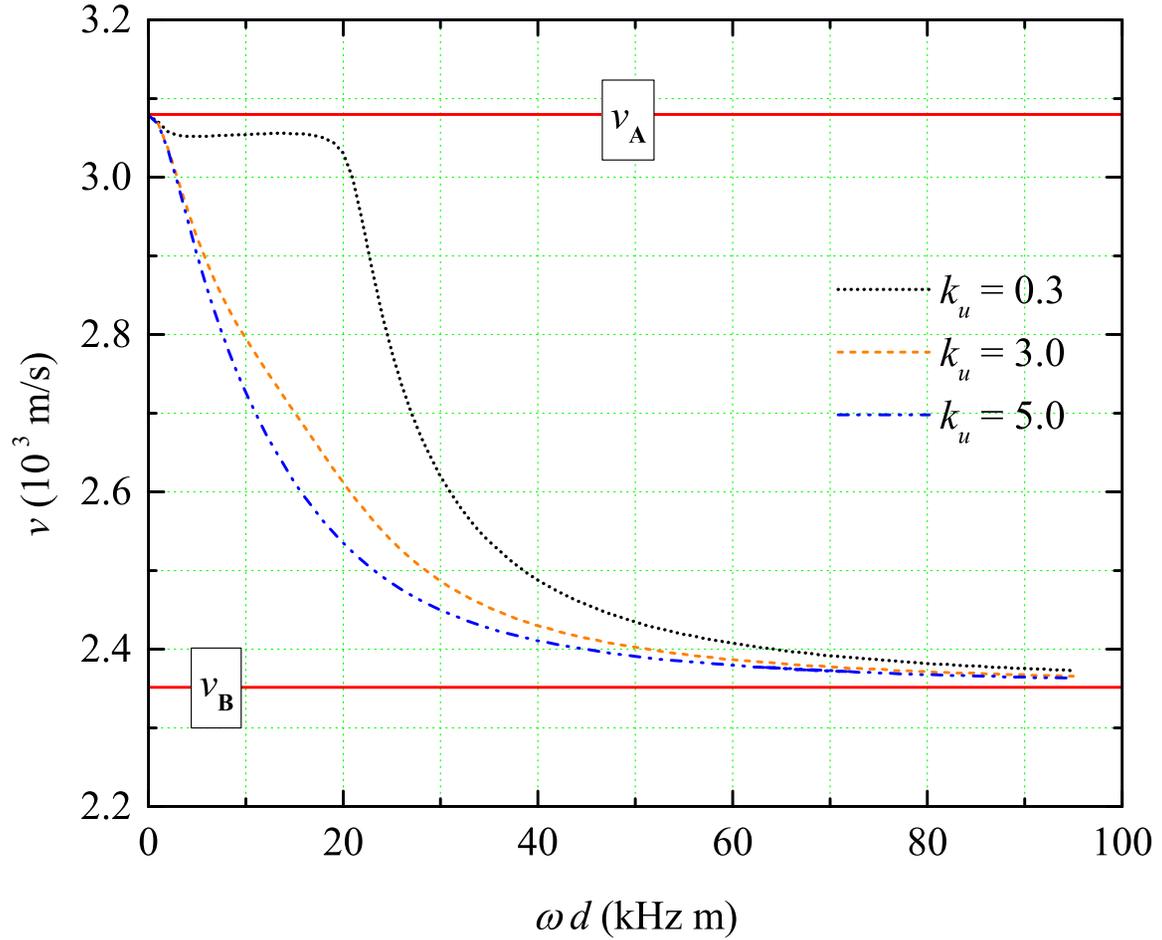


Figura 4.2: $k_\varphi = 5 \text{ F/m}^2$

y, estrictamente convexas y decrecientes para grandes valores de k_u . Como se puede ver, las curvas de dispersión son desplazadas hacia la derecha al incrementarse los valores de k_u . Este comportamiento fue mostrado en por [Otero et al. 2011], en las figuras 2(a) y 2(b). Siendo el parámetro k_u una fuerte influencia en las curvas de dispersión. Todas las velocidades de onda tienden a la velocidad de onda en la fase **B** conforme ωd tiende a infinito. No obstante, para altas frecuencias, la velocidad de fase de la onda siempre tiende a la velocidad v_B sin importar el grado de imperfección en la interface. Las velocidades

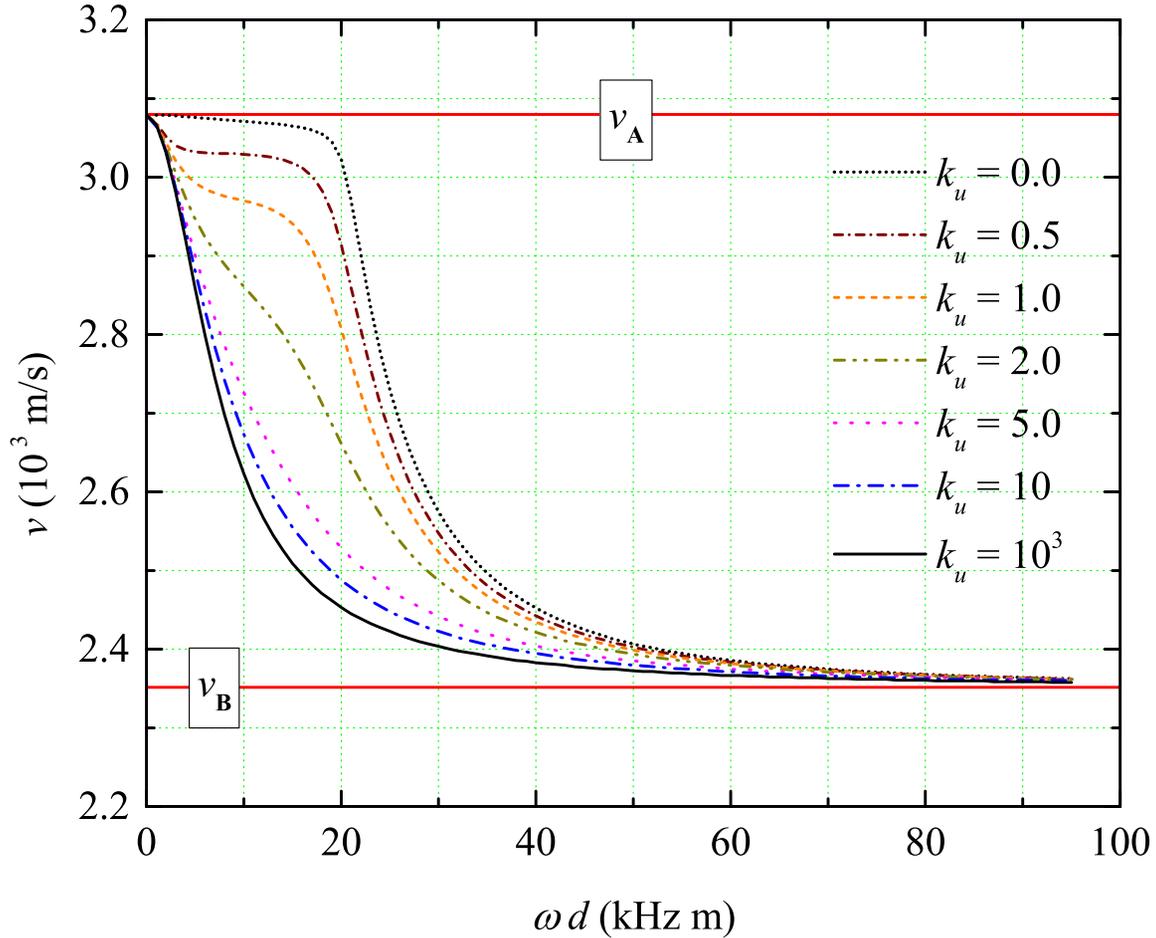


Figura 4.3: $k_\varphi = 10^7 \text{ F/m}^2$

de onda se encuentran entre v_A y v_B . Figura 4.2; $k_\varphi = 5 \text{ F/m}^2$ y varios valores de k_u (GPa/m). Figura 4.3; $k_\varphi = 10^7 \text{ F/m}^2$ y varios valores de k_u .

El comportamiento en ambas, figura 4.2 y 4.3 son similares a el caso $k_\varphi = 0 \text{ F/m}^2$, aunque hay una ligera diferencia, la cual se muestra en la figura 4.4 si se compara las curvas de dispersión para $k_u = 0,3 \text{ GPa/m}$ en todos los casos. Como se puede observar en la figura 4.4, hay un notable desplazamiento en ambos, ejes de frecuencia y velocidad. Si k_φ es incrementado, las curvas de dispersión son desplazadas a la izquierda y la velocidad

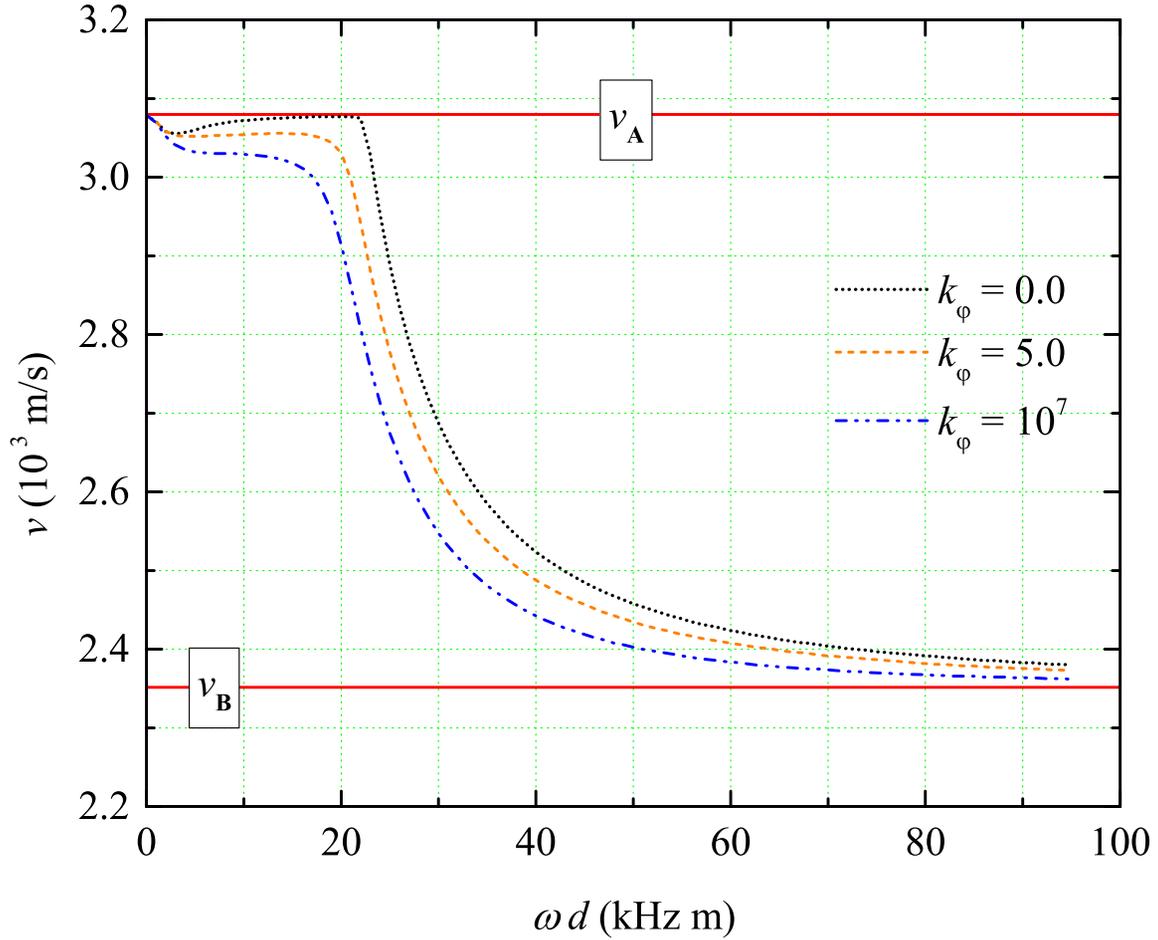


Figura 4.4: $k_u = 0,3$ GPa/m

de la onda disminuida. Ésto es realmente importante ya que las curvas de dispersión son fuertemente dependientes del parámetro de imperfección mecánico k_u y débilmente dependiente del parámetro de imperfección eléctrico k_ϕ .

4.3.2. Modos antisimétricos

Figura 4.5; $k_\phi = 10$ F/m² y varios valores de k_u (GPa/m). Estas curvas son extrínsecamente convexas y tienen el mismo comportamiento no monótono tanto para pequeños

como grandes valores de k_u , similar al de las curvas de dispersión de los modos simétricos. La diferencia visual entre las curvas de los modos simétricos y los antisimétricos, es que estos últimos son desplazados a la derecha. Este comportamiento se muestra en [Otero et al. 2011], en las figuras 8(a) y 8(b). El parámetro k_u tiene una fuerte influencia en las curvas de dispersión y todas las velocidades de onda se aproximan a la velocidad de onda en la fase **B**, conforme ωd tiende a infinito. No obstante, para altas frecuencia, la propagación de la onda no es afectada. Las velocidades de la onda están entre v_A y v_B . Figura 4.6; $k_\varphi = 10^7$ F/m² y varios valores de k_u (GPa/m). El comportamiento en las figuras 4.5 y 4.6 son muy similares, pero hay una pequeña diferencia que se muestra en la figura 4.7 si comparamos las curvas de dispersión para $k_u = 0,5$ GPa/m en ambos casos. Como se puede observar en la figura 4.7, hay un notable desplazamiento en ambos, el eje de frecuencia y de velocidad de onda, como en los modos simétricos.

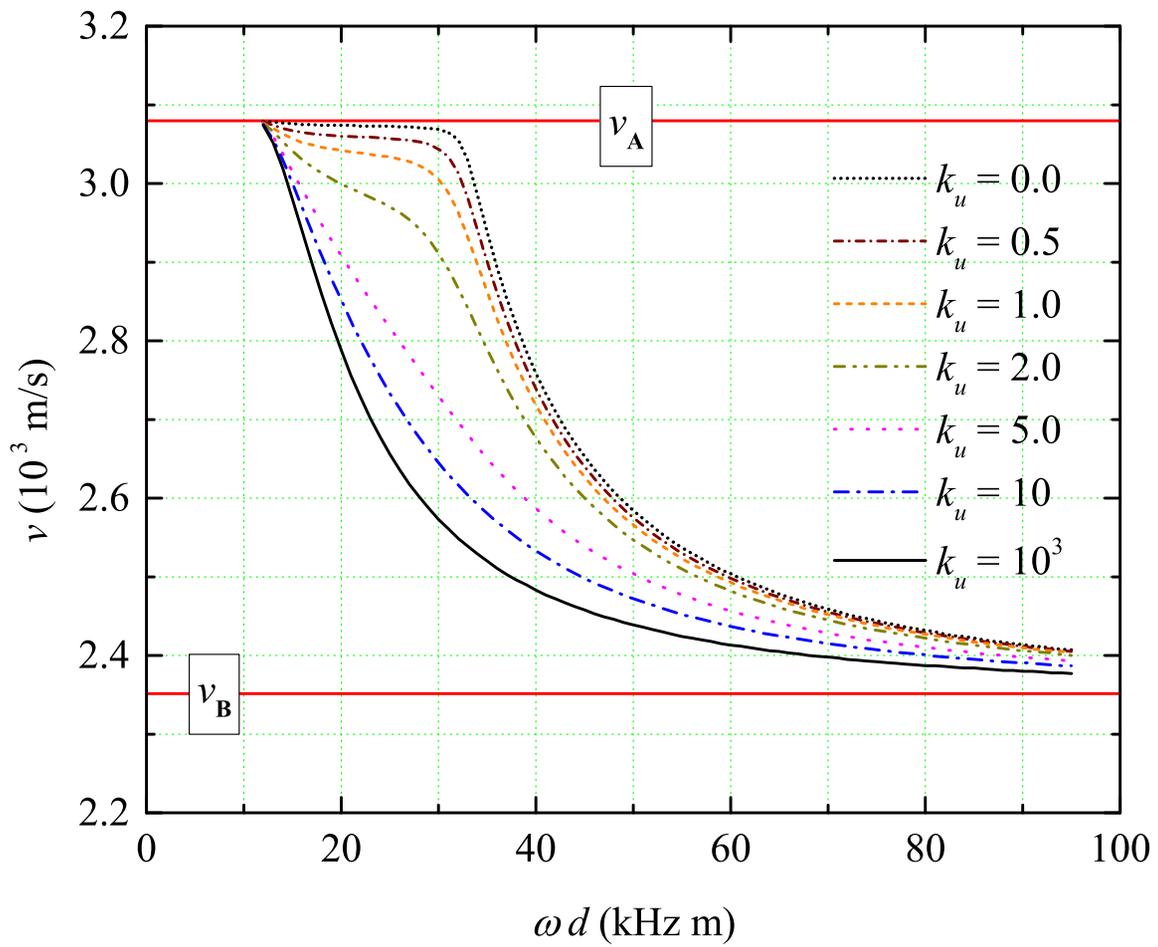


Figura 4.5: $k_\varphi = 0$ F/m²

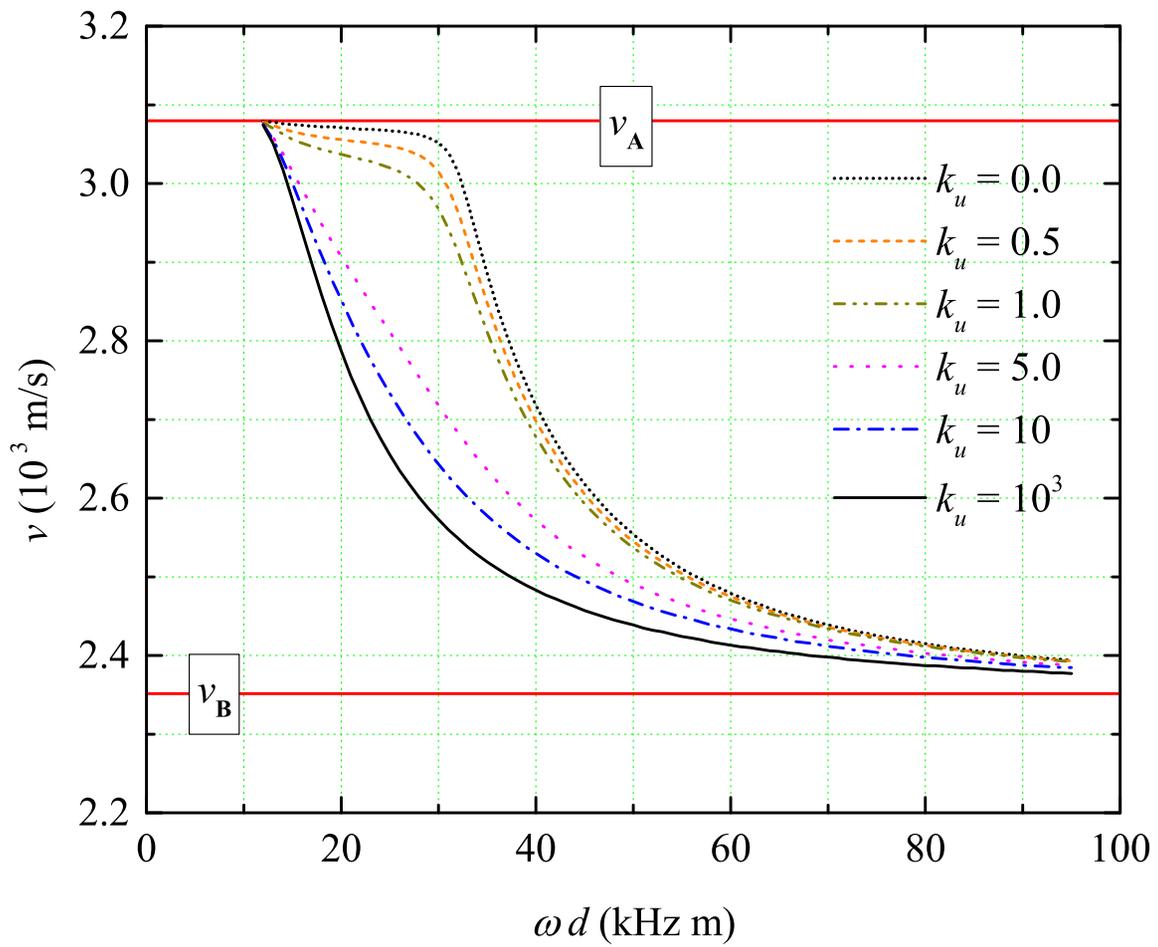


Figura 4.6: $k_\varphi = 5 \text{ F/m}^2$

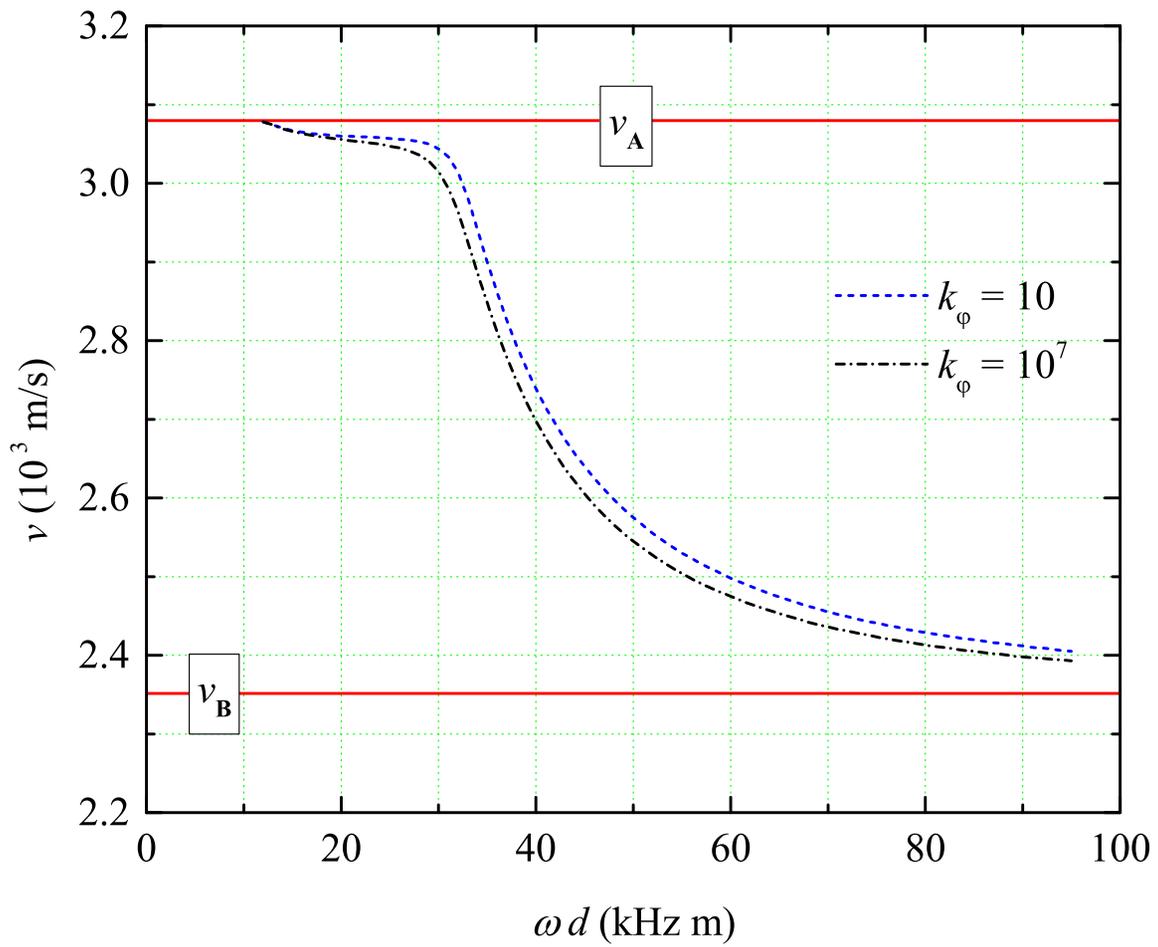


Figura 4.7: $k_\phi = 5 \text{ F/m}^2$

Capítulo 5

Ondas interfaciales en una estructura Piezoeléctrico/

Piezomagnético/Piezoeléctrico con interfaces imperfectas

magneto-electro-mecánicas

Este capítulo es dedicado a la segunda parte del trabajo; se trata un caso más general al problema planteado en el capítulo anterior, o sea, se usarán materiales piezoeléctricos y piezomagnéticos con interfaces imperfectas magneto-electro-mecánicas.

5.1. Relaciones de dispersión

Supongamos una estructura formada por el siguiente arreglo: piezoE/piezoM/ piezoE.

Para describir la propagación de ondas SH a lo largo del eje x positivo, las cuales satisfacen

las ecuaciones (2.29)-(2.31) en cada interface de la estructura, se requiere que u , $\bar{\psi}$ y ϕ

tiendan a cero mientras y tienda a $\pm\infty$; las soluciones son de la forma

$$u_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_A e^{\eta_A y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_B \cos(\eta_B y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ U_A e^{-\eta_A y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\phi_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Phi_A e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Phi_B \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Phi_A e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\psi_s = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Psi_A e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Psi_B \cosh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ \Psi_A e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (5.3)$$

para los modos simétricos en y , y

$$u_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} U_{A1} e^{\eta_A y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ U_{B1} \sin(\eta_B y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -U_{A1} e^{-\eta_A y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\phi_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Phi_{A1} e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Phi_{B1} \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Phi_{A1} e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\psi_{as} = e^{i(\xi x - \omega t)} \begin{cases} \Psi_{A1} e^{\xi y} & \text{si } y < -\frac{1}{2}d, \\ \Psi_{B1} \sinh(\xi y) & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2}d, \\ -\Psi_{A1} e^{-\xi y} & \text{si } y > \frac{1}{2}d, \end{cases} \quad (5.6)$$

para los modos antisimétricos en y , donde $U_A, U_B, U_{A1}, U_{B1}, \Phi_A, \Phi_B, \Phi_{A1}, \Phi_{B1}, \Psi_A, \Psi_B, \Psi_{A1}$ y Ψ_{B1} son constantes indeterminadas. Aquí, ω , ξ y η son la frecuencia angular, la componente x del vector de onda y la componente y del vector de onda, respectivamente, siendo esta última definida para cada material como

$$\eta_A = \xi \sqrt{(1 - v^2/\bar{v}_A^2)} > 0, \quad |y| \geq \frac{1}{2}d, \quad (5.7)$$

$$\eta_B = \xi \sqrt{(v^2/\bar{v}_B^2 - 1)} > 0, \quad |y| \leq \frac{1}{2}d,$$

donde $v_A = \sqrt{\bar{c}_A/\rho_A}$ ($v_B = \sqrt{\bar{c}_B/\rho_B}$) es la velocidad de la onda de cizalladura en el piezoeléctrico(A) (piezoeléctrico(B)) y $v = \omega/\xi$ es la velocidad de fase.

5.1.1. Modos simétricos

Usando las expresiones (3.1) y (3.9) en la ecuación (3.15), tenemos

$$U_A (\bar{c}_A \eta_A - k_u) e^{-\frac{d\eta_A}{2}} + \Phi_A e_A \xi e^{-\frac{d\xi}{2}} + U_B k_u \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) = 0, \quad (5.8)$$

usando las expresiones (3.1) y (3.9) en la ecuación (3.16), tenemos

$$-U_A k_u e^{-\frac{d\eta_A}{2}} + U_B \left(\bar{c}_B \eta_B \sin\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + k_u \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) \right) - \Psi_B f_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0, \quad (5.9)$$

usando las expresiones (3.1), (3.2) y (3.10) en la ecuación (3.18), tenemos,

$$-\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_A k_\varphi e^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_A (\varepsilon_A \xi + k_\varphi) e^{-\frac{d\xi}{2}} + \Phi_B k_\varphi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0, \quad (5.10)$$

usando las expresiones (3.1), (3.2) y (3.10) en la ecuación (3.19), tenemos,

$$-\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_A k_\varphi e^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_A k_\varphi e^{-\frac{d\xi}{2}} + \Phi_B \left(\varepsilon_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\varphi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right) = 0, \quad (5.11)$$

usando las expresiones (3.1), (3.3) y (3.11) en la ecuación (3.21), tenemos,

$$-\Psi_A (\mu_A \xi + k_\psi) e^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{f_B}{\mu_B} U_B k_\psi \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \Psi_B k_\psi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0, \quad (5.12)$$

usando las expresiones (3.1), (3.3) y (3.11) en la ecuación (3.22), tenemos,

$$-\Psi_A k_\psi e^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{f_B}{\mu_B} U_B k_\psi \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \Psi_B \left(\mu_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\psi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right) = 0. \quad (5.13)$$

El conjunto de ecuaciones (5.8)-(5.13) es un sistema de ecuaciones algebraico para $U_A, U_B, \Phi_A, \Phi_B, \Psi_A$ y Ψ_B . Para obtener las soluciones no triviales, el determinante de la matriz

formada por éste debe ser cero y puede ser simplificado a

$$\begin{vmatrix}
 \bar{c}_A \eta_A - k_u & k_u & e_A \xi & 0 & 0 & 0 \\
 -k_u & \bar{c}_B \eta_B \tan\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + k_u & 0 & 0 & 0 & -f_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \\
 -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & 0 & -\varepsilon_A \xi - k_\varphi & k_\varphi & 0 & 0 \\
 -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & 0 & -k_\varphi & \varepsilon_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\varphi & 0 & 0 \\
 0 & \frac{f_B}{\mu_B} k_\psi & 0 & 0 & -k_\psi - \xi \mu_A & k_\psi \\
 0 & \frac{f_B}{\mu_B} k_\psi & 0 & 0 & -k_\psi & \mu_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\psi
 \end{vmatrix}
 \quad (5.14)$$

Haciendo trabajo algebraico con el determinante, llegamos a las relaciones de dispersión para los modos simétricos:

$$P_A P_B + k_u (P_A + P_B) = 0, \quad (5.15)$$

donde

$$P_A = \bar{c}_A \left(\eta_A - \xi \gamma_\varphi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} \right), \quad P_B = -\bar{c}_B \left(\eta_B \tan\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \xi \gamma_\psi \frac{M_B^2}{\mu_B} \right),$$

$$\gamma_\varphi = \frac{k_\varphi}{\xi + k_\varphi \left(\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} \coth\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right)}, \quad \gamma_\psi = \frac{k_\psi}{\xi + k_\psi \left(\frac{1}{\mu_A} + \frac{1}{\mu_B} \coth\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right)},$$

$$M_A^2 = \frac{e_A^2}{\bar{c}_A \varepsilon_A},$$

$$M_B^2 = \frac{f_B^2}{\bar{c}_B \mu_B}.$$

5.1.2. Modos antisimétricos

Usando las expresiones (3.4) y (3.12) en la ecuación (3.15), tenemos

$$U_A (\bar{c}_A \eta_A - k_u) e^{-\frac{d\eta_A}{2}} + \Phi_A e_A \xi e^{-\frac{d\xi}{2}} + U_B k_u \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) = 0, \quad (5.16)$$

usando las expresiones (3.4) y (3.12) en la ecuación (3.16), tenemos

$$-U_A k_u e^{-\frac{d\eta_A}{2}} + U_B \left(\bar{c}_B \eta_B \sin\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + k_u \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) \right) - \Psi_B f_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0, \quad (5.17)$$

usando las expresiones (3.4), (3.5) y (3.13) en la ecuación (3.18), tenemos,

$$-\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_A k_\varphi e^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_A (\varepsilon_A \xi + k_\varphi) e^{-\frac{d\xi}{2}} + \Phi_B k_\varphi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0, \quad (5.18)$$

usando las expresiones (3.4), (3.5) y (3.13) en la ecuación (3.19), tenemos,

$$-\frac{e_A}{\varepsilon_A} U_A k_\varphi e^{-\frac{d\eta_A}{2}} - \Phi_A k_\varphi e^{-\frac{d\xi}{2}} + \Phi_B \left(\varepsilon_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\varphi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right) = 0, \quad (5.19)$$

usando las expresiones (3.4), (3.6) y (3.14) en la ecuación (3.21), tenemos,

$$-\Psi_A (\mu_A \xi + k_\psi) e^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{f_B}{\mu_B} U_B k_\psi \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \Psi_B k_\psi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) = 0, \quad (5.20)$$

usando las expresiones (3.4), (3.6) y (3.14) en la ecuación (3.22), tenemos,

$$-\Psi_A k_\psi e^{-\frac{d\xi}{2}} + \frac{f_B}{\mu_B} U_B k_\psi \cos\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \Psi_B \left(\mu_B \xi \sinh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\psi \cosh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right) = 0. \quad (5.21)$$

El conjunto de ecuaciones (5.16)-(5.21) es un sistema de ecuaciones algebraico para $U_A, U_B, \Phi_A, \Phi_B, \Psi_A$ y Ψ_B . Para obtener las soluciones no triviales, el determinante de

la matriz formada por éste debe ser cero y puede ser simplificado a

$$\begin{vmatrix}
 \bar{c}_A \eta_A - k_u & k_u & e_A \xi & 0 & 0 & 0 \\
 -k_u & \bar{c}_B \eta_B \tan\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + k_u & 0 & 0 & 0 & -f_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \\
 -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & 0 & -\varepsilon_A \xi - k_\varphi & k_\varphi & 0 & 0 \\
 -\frac{e_A}{\varepsilon_A} k_\varphi & 0 & -k_\varphi & \varepsilon_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\varphi & 0 & 0 \\
 0 & \frac{f_B}{\mu_B} k_\psi & 0 & 0 & -k_\psi - \xi \mu_A & k_\psi \\
 0 & \frac{f_B}{\mu_B} k_\psi & 0 & 0 & -k_\psi & \mu_B \xi \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) + k_\psi
 \end{vmatrix} \quad (5.22)$$

Haciendo trabajo algebraico con el determinante, llegamos a las relaciones de dispersión para los modos antisimétricos:

$$P_A P_B + k_u (P_A + P_B) = 0, \quad (5.23)$$

donde

$$P_A = \bar{c}_A \left(\eta_A - \xi A \gamma_\varphi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} \right), \quad P_B = \bar{c}_B \left(\eta_B \cot\left(\frac{d\eta_B}{2}\right) + \xi A \gamma_\psi \frac{M_B^2}{\mu_B} \right),$$

$$A \gamma_\varphi = \frac{k_\varphi}{\xi + k_\varphi \left(\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right)}, \quad A \gamma_\psi = \frac{k_\psi}{\xi + k_\psi \left(\frac{1}{\mu_A} - \frac{1}{\mu_B} \tanh\left(\frac{d\xi}{2}\right) \right)},$$

$$M_A^2 = \frac{e_A^2}{\bar{c}_A \varepsilon_A}, \quad M_B^2 = \frac{f_B^2}{\bar{c}_B \mu_B}.$$

Las expresiones (5.15) y (5.23) determinan la velocidad de fase v , donde ésta cambia con la frecuencia y, por lo tanto, dando lugar a ondas dispersivas. Nótese que k_u/\bar{c} , k_φ/ε y k_ψ/μ tienen dimensiones de número de onda.

5.2. Casos límite

5.2.1. Modos simétricos

Se consideran los siguientes casos límite:

1. La interface tiene interacciones eléctricas y magnéticas perfectas e, interacción macánica parcial, $0 < k_u < \infty$, $k_\varphi \rightarrow \infty$ y $k_\psi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.15) se reduce a

$$-\bar{c}_A \bar{c}_B (\lambda_A - R_A) \left(\lambda_B \tan \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) + R_B \right) + k_u \left[\bar{c}_A (\lambda_A - R_A) - \bar{c}_B \left(\lambda_B \tan \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) + R_B \right) \right] = 0, \quad (5.24)$$

donde

$$\lambda_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}}, \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1},$$

$$R_A = \frac{\varepsilon_B M_A^2}{\varepsilon_B + \varepsilon_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right)} \quad \text{y} \quad R_B = \frac{\mu_B M_B^2}{\mu_B + \mu_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right)}.$$

2. La interface tiene interacciones eléctricas y magnéticas parciales pero, sin interacción mecánica, $k_u \rightarrow 0$, $0 < k_\varphi$, $k_\psi < \infty$. Las raíces de (5.15) son

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \gamma_\varphi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} = 0, \quad (5.25)$$

$$\sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) + \gamma_\psi \frac{M_B^2}{\mu_B} = 0. \quad (5.26)$$

3. La interface tiene interacción eléctrica perfecta pero, sin interacción macánica (desacoplamiento mecánico), $k_u \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.25) se reduce a

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \left[\varepsilon_B + \varepsilon_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right) \right] - M_A^2 \varepsilon_B = 0. \quad (5.27)$$

4. La interface no tiene interacción mecánica ni magnética, $k_u \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow 0$. La única solución para v es $v = v_A$, la cual no es una onda evanescente.

5. La interface tiene interacción magnética perfecta pero, sin interacción mecánica, $k_u \rightarrow 0$ y $k_\psi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.26) se reduce a

$$\sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \left[\mu_B + \mu_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right) \right] \tan \left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) + M_B^2 \mu_A = 0. \quad (5.28)$$

6. La interface no tiene interacciones magnéticas ni eléctricas, $k_u \rightarrow 0$ y $k_\psi \rightarrow 0$. La ecuación (5.26) se reduce a

$$v = \bar{v}_B \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{2n\pi}{d\omega} \right)^2 \bar{v}_B^2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.29)$$

7. La interface tiene interacción mecánica e, interacción magnética y eléctrica parcial, $k_u \rightarrow \infty$, $0 < k_\psi, k_\varphi < \infty$. La ecuación (5.15) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \frac{e_A^2}{\varepsilon_A^2} \gamma_\varphi + \frac{f_B^2}{\mu_B^2} \gamma_\psi. \quad (5.30)$$

8. La interface tiene interacciones eléctrica y magnética perfectas e interacción mecánica parcial, $k_\psi \rightarrow \infty$, $k_\varphi \rightarrow \infty$ y $k_u < \infty$. La ecuación (5.15) se reduce a

$$\bar{c}_A \lambda_A - \bar{c}_B \lambda_B \tan \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) = \bar{c}_A R_A + \bar{c}_B R_B \quad (5.31)$$

donde

$$\lambda_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}}, \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1},$$

$$R_A = \frac{\varepsilon_B M_A^2}{\varepsilon_B + \varepsilon_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right)} \quad \text{y} \quad R_B = \frac{\mu_B M_B^2}{\mu_B + \mu_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right)}.$$

9. La interface tiene interacción mecánica perfecta pero, sin interacciones magnética ni eléctrica, $k_u \rightarrow \infty$, $k_\psi \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow 0$. En este caso, $v = v_A$, y $v = v_B$.

10. La interface tiene interacciones mecánica y eléctrica perfectas pero, sin interacción magnética, $k_u \rightarrow \infty$, $k_\psi \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.15) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \tan \left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \frac{1}{\varepsilon_A \varepsilon_B + \varepsilon_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right)} \frac{\varepsilon_B e_A^2}{\varepsilon_A}. \quad (5.32)$$

11. La interface tiene interacciones mecánica y magnética perfectas pero, sin interacción eléctrica, $k_u \rightarrow \infty$, $k_\psi \rightarrow \infty$ y $k_\varphi \rightarrow 0$. La ecuación (5.15) se reduce a

$$\bar{c}_A \lambda_A - \bar{c}_B \lambda_B \tan \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) = \frac{f_B^2}{\mu_B \mu_B + \mu_A \coth \left(\frac{d\omega}{2v} \right)} \frac{\mu_A}{\mu_B}, \quad (5.33)$$

donde

$$\lambda_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \quad \text{y} \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1}.$$

5.2.2. Modos antisimétricos

Se consideran los siguientes casos límite:

1. La interface tiene interacciones eléctricas y magnéticas perfectas e, interacción macánica parcial, $0 < k_u < \infty$, $k_\varphi \rightarrow \infty$ y $k_\psi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.23) se reduce a

$$\begin{aligned} & \bar{c}_A \bar{c}_B (\lambda_A - R_A) \left(\lambda_B \cot \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) + R_B \right) + \\ & k_u \left[\bar{c}_A (\lambda_A - R_A) + \bar{c}_B \left(\lambda_B \cot \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) + R_B \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde

$$\lambda_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}}, \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1},$$

$$R_A = \frac{\varepsilon_B M_A^2}{\varepsilon_B + \varepsilon_A \tanh\left(\frac{d\omega}{2v}\right)} \quad \text{y} \quad R_B = \frac{\mu_B M_B^2}{\mu_B + \mu_A \tanh\left(\frac{d\omega}{2v}\right)}.$$

2. La interface tiene interacciones eléctricas y magnéticas parciales pero, sin interacción mecánica, $k_u \rightarrow 0$, $0 < k_\varphi$, $k_\psi < \infty$. Las raíces de (5.23) son

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} - A\gamma_\varphi \frac{M_A^2}{\varepsilon_A} = 0, \quad (5.35)$$

$$\sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot\left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1}\right) + A\gamma_\psi \frac{M_B^2}{\mu_B} = 0. \quad (5.36)$$

3. La interface tiene interacción eléctrica perfecta pero, sin interacción mecánica (desacoplamiento mecánico), $k_u \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.35) se reduce a

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \left[\varepsilon_B + \varepsilon_A \tanh\left(\frac{d\omega}{2v}\right) \right] - M_A^2 \varepsilon_B = 0. \quad (5.37)$$

4. La interface no tiene interacción mecánica ni magnética, $k_u \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow 0$. La única solución para v es $v = v_A$, la cual no es una onda evanescente.

5. La interface tiene interacción magnética perfecta pero, sin interacción mecánica, $k_u \rightarrow 0$ y $k_\psi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.36) se reduce a

$$\sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \left[\mu_B - \mu_A \tanh\left(\frac{d\omega}{2v}\right) \right] \cot\left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1}\right) + M_B^2 \mu_A = 0. \quad (5.38)$$

6. La interface no tiene interacciones magnéticas ni eléctricas, $k_u \rightarrow 0$ y $k_\psi \rightarrow 0$. La ecuación (5.36) se reduce a

$$v = \bar{v}_B \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{(2n-1)\pi}{d\omega}\right)^2 \bar{v}_B^2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.39)$$

7. La interface tiene interacción mecánica e interacción magnética y, eléctrica parcial,

$k_u \rightarrow \infty$, $0 < k_\psi$, $k_\varphi < \infty$. La ecuación (5.23) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} + \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \frac{e_A^2}{\varepsilon_A} A \gamma_\varphi - \frac{f_B^2}{\mu_B^2} A \gamma_\psi. \quad (5.40)$$

8. La interface tiene interacciones eléctrica y magnética perfectas e interacción mecánica

parcial, $k_\psi \rightarrow \infty$, $k_\varphi \rightarrow \infty$ y $k_u < \infty$. La ecuación (5.23) se reduce a

$$\bar{c}_A \lambda_A + \bar{c}_B \lambda_B \cot \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) = \bar{c}_A R_A - \bar{c}_B R_B \quad (5.41)$$

donde

$$\lambda_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}}, \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1},$$

$$R_A = \frac{\varepsilon_B M_A^2}{\varepsilon_B + \varepsilon_A \tanh \left(\frac{d\omega}{2v} \right)} \quad \text{y} \quad R_B = \frac{\mu_B M_B^2}{\mu_B - \mu_A \tanh \left(\frac{d\omega}{2v} \right)}.$$

9. La interface tiene interacción mecánica perfecta pero, sin interacciones magnética ni

eléctrica, $k_u \rightarrow \infty$, $k_\psi \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow 0$. En este caso, $v = v_A$, y $v = v_B$.

10. La interface tiene interacciones mecánica y eléctrica perfectas pero, sin interacción

magnética, $k_u \rightarrow \infty$, $k_\psi \rightarrow 0$ y $k_\varphi \rightarrow \infty$. La ecuación (5.23) se reduce a

$$\bar{c}_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} + \bar{c}_B \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \cot \left(\frac{d\omega}{2v} \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1} \right) = \frac{1}{\varepsilon_A \varepsilon_B + \varepsilon_A \tanh \left(\frac{d\omega}{2v} \right)}. \quad (5.42)$$

11. La interface tiene interacciones mecánica y magnética perfectas pero, sin interacción

eléctrica, $k_u \rightarrow \infty$, $k_\psi \rightarrow \infty$ y $k_\varphi \rightarrow 0$. La ecuación (5.23) se reduce a

$$\bar{c}_A \lambda_A + \bar{c}_B \lambda_B \cot \left(\frac{d\omega}{2} \frac{\lambda_B}{v} \right) = -\frac{f_B^2}{\mu_B \mu_B + \mu_A \tanh \left(\frac{d\omega}{2v} \right)}, \quad (5.43)$$

donde

$$\lambda_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\bar{v}_A^2}} \quad \text{y} \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{v^2}{\bar{v}_B^2} - 1}.$$

5.3. Cálculos numéricos

Para mostrar los efectos de las imperfecciones en las interfaces, se presentan algunas curvas de dispersión. Se tomaron como referencia para los cálculos numéricos las propiedades de los siguientes materiales: BaTiO₃ (piezoeléctrico) y CoFe₂O₄ (piezomagnético), cuyas propiedades son enlistadas en el cuadro 5.1 [Otero et al. 2013].

Properties	BaTiO ₃	CoFe ₂ O ₄
c (GPa)	43.9	45.3
e (C/m ²)	11.4	0
f (N/Am)	0	550
ε (10 ⁻¹¹ C ² /Nm ²)	9.82	8
μ (10 ⁻⁶ N/A ²)	5	157
ρ (10 ³ kg/m ³)	5.7	5.3
\bar{v} (10 ³ m/s)	3.165998	2.985081

Cuadro 5.1: Propiedades de BaTiO₃ y CoFe₂O₄

5.3.1. Modos simétricos

En las primeras tres figuras, analizamos las curvas de dispersión para los modos simétricos.

En la figura 5.1, las curvas de dispersión $v = f(\omega d)$ para para parámetros de imperfección eléctrico y magnético fijos $k_\varphi = 0,1$ F/m² y $k_\psi = 0,2$ H/m², y diferentes valores de

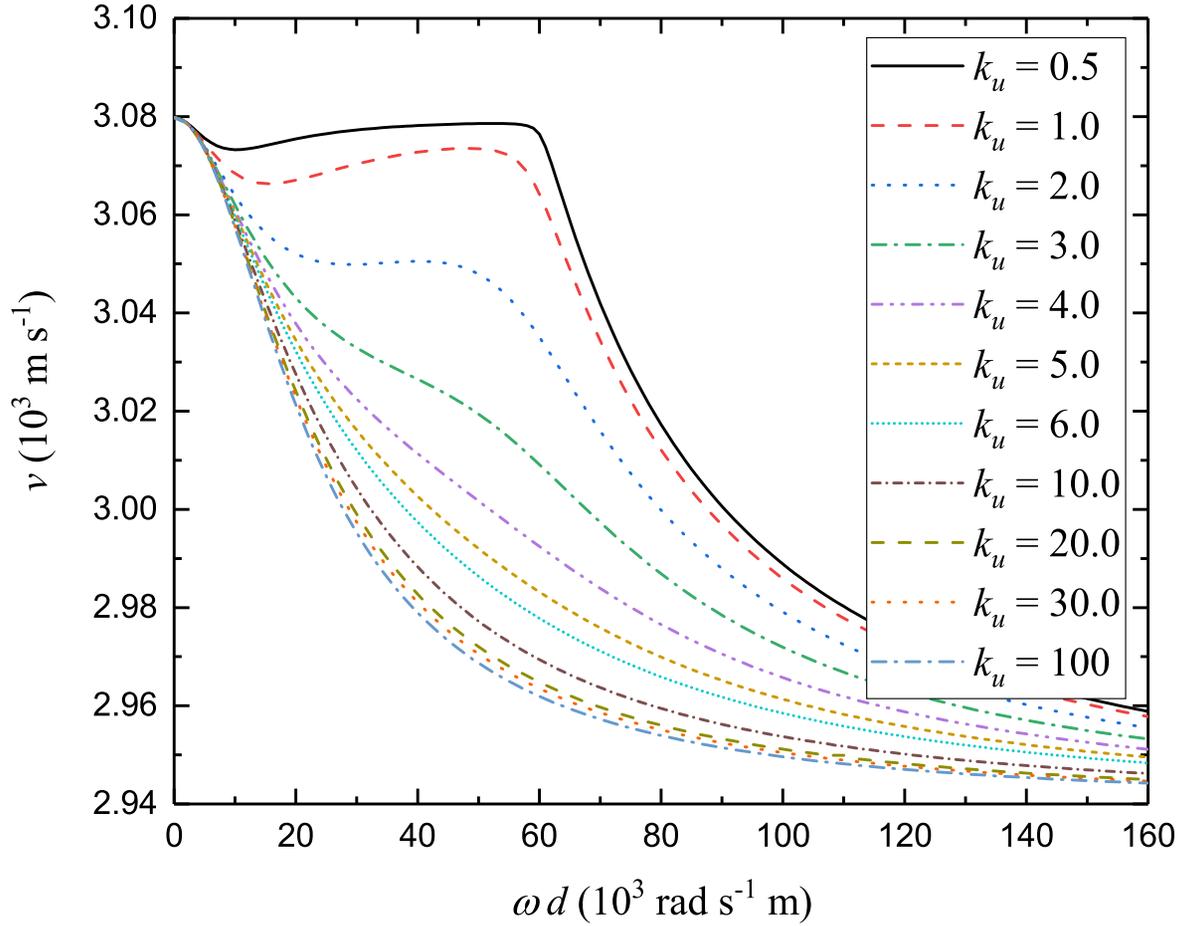


Figura 5.1: $k_\varphi = 0,1 \text{ F/m}^2$, $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$

los parámetros de imperfección mecánica k_u son mostrados. Como podemos ver, algunos gráficos consisten de tres partes, la primer parte es cóncava, la segunda es convexa y la última cóncava nuevamente, pero mientras los valores de k_u incrementan, el resto de la gráfica se vuelve cóncava. Para algunos valores de k_u , las curvas de dispersión tienen un mínimo, el cual está desplazado hacia la derecha y finalmente desaparece mientras k_u es incrementado. Cada curva se encuentra en el rango de velocidades físicamente aceptable para ser una onda dispersiva y todas las velocidades de onda tienden v_B mientras ωd

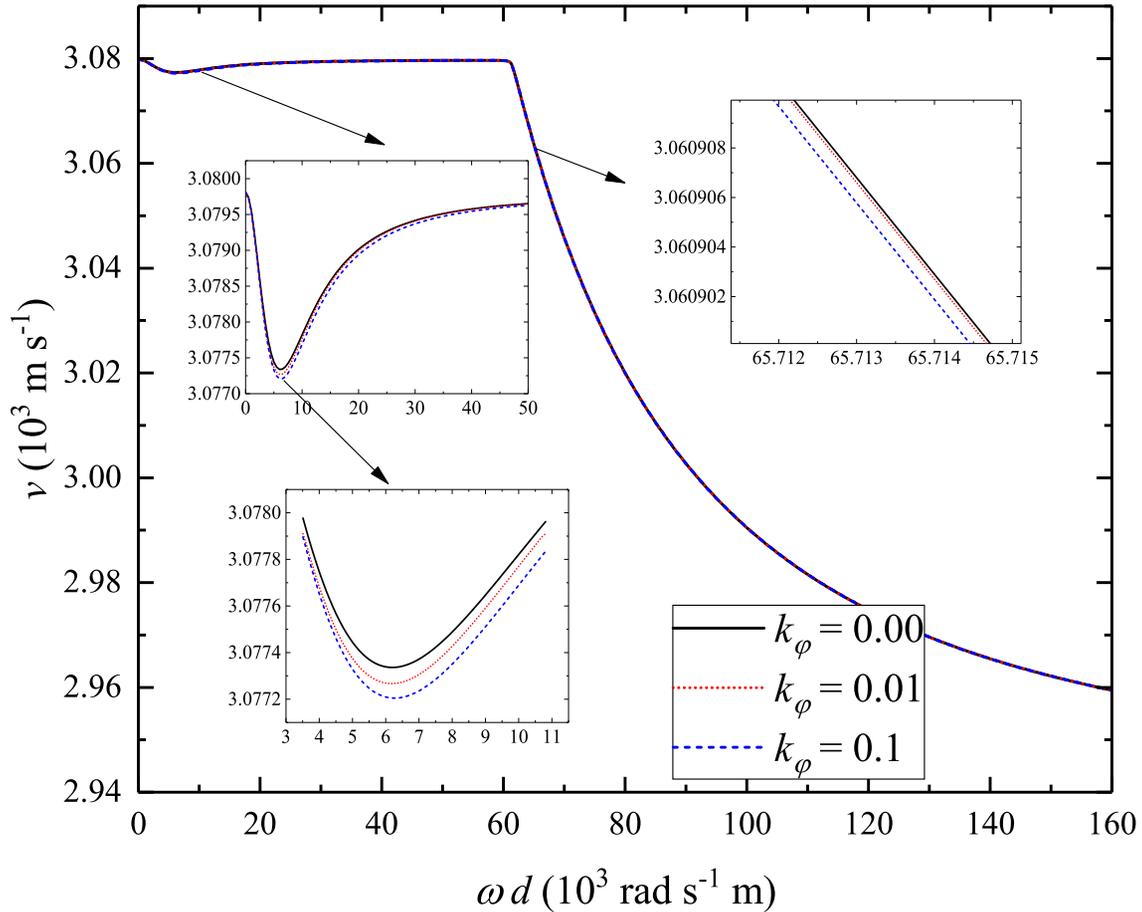


Figura 5.2: $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$, $k_u = 0,2 \text{ Pa/m}$

crece indefinidamente. Una de las importantes conclusiones que se puede extraer de esta gráfica es, que esas curvas son desplazadas a la derecha con el incremento de los valores de k_u , por lo tanto, estos tienen una gran influencia sobre las curvas de dispersión.

En la figura 5.2, las curvas de dispersión $v = f(\omega d)$ para los parámetros de imperfección magnética y mecánica fijos $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$, $k_u = 0,2 \text{ Pa/m}$ y diferentes valores del parámetro de imperfección eléctrico k_ϕ se muestran. Todas las gráficas se encuentran en el rango de velocidades físicamente aceptables para ser ondas dispersivas. Cada curva

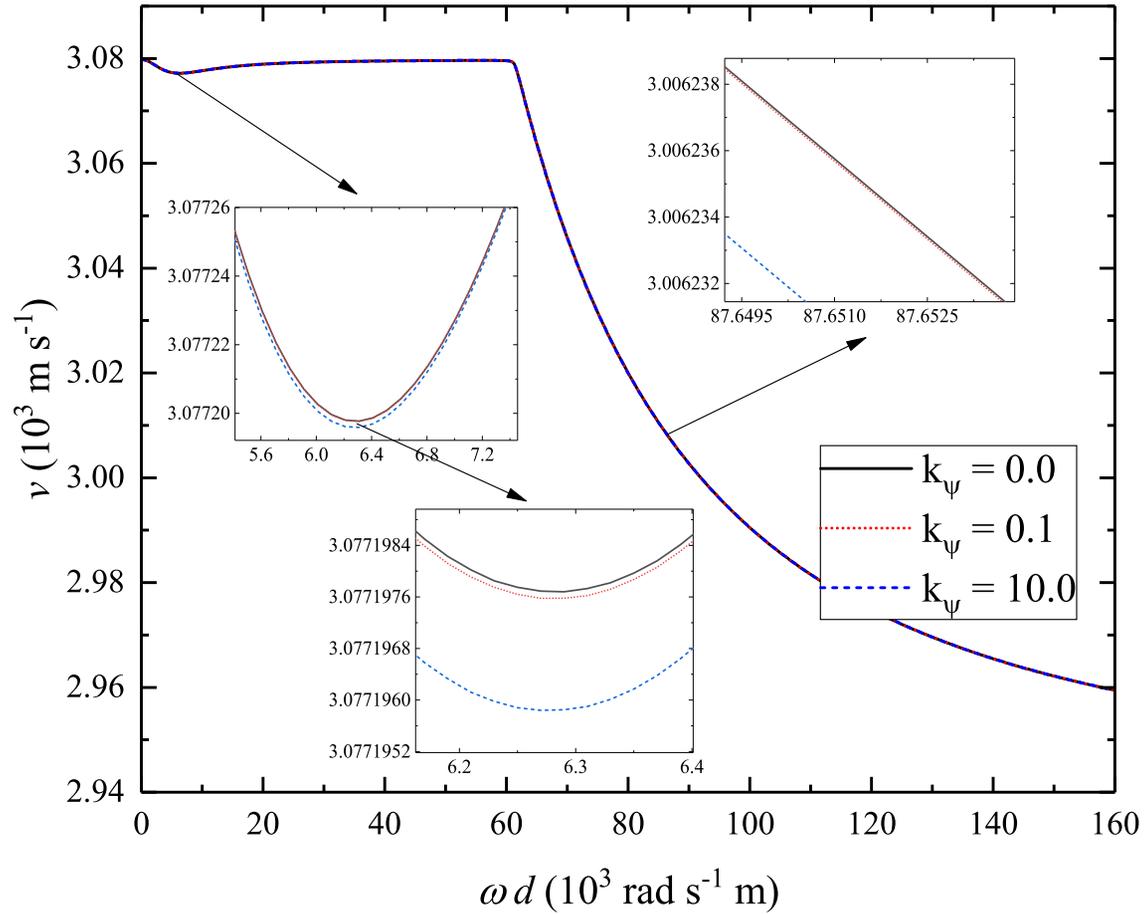


Figura 5.3: $k_\varphi = 0,2 \text{ F/m}^2$, $k_u = 0,2 \text{ Pa/m}$

tiene un valor mínimo relativo, el cual es fijo, ocurre en el mismo valor de ωd y tiene un ligero desplazamiento vertical hacia velocidades menores cuando el valor k_φ se incrementa. Las tres curvas son mostradas en un rango completo de ωd , el cual es fragmentado en tres partes, esto para poder exhibir la diferencia entre estos. Las curvas se muestran en los intervalos:

i) $0 \leq \omega d \leq 50000 \text{ rad s}^{-1} \text{ m}$, las curvas tienen un mínimo pero no es claro a las vista la diferencia entre curvas,

ii) $3000 \leq \omega d \leq 11000 \text{ rad s}^{-1} \text{ m}$, cambiando el rango podemos observar la separación de estas claramente,

iii) $65712 \leq \omega d \leq 65715 \text{ rad s}^{-1} \text{ m}$, en esta sección se tuvo que ir hasta la quinta posición decimal para poder observar la separación de estas. Esas tres curvas siguen el mismo patrón que las gráficas de $k_u = 0,5$ en la figura 5.1. Los valores de k_φ tienen una pequeña influencia sobre las curvas de dispersión.

En la figura 5.3, las curvas de dispersión para $k_\varphi = 0,2 \text{ F/m}^2$, $k_u = 0,2 \text{ Pa/m}$ y diferentes valores del parámetro de imperfección magnética k_ψ se muestran. Las curvas de dispersión en la figura 5.2 y la figura 5.3 son parecidas, es por lo que ésta se muestra en tres fragmentos también, pero en este caso, debemos ir hasta la sexta o séptima posición decimal para poder ver la separación de las curvas. Todas las gráficas se encuentran en el rango de velocidades físicamente aceptables para ser ondas dispersivas. La influencia de k_ψ sobre las curvas dispersivas es realmente pequeña, pero existe.

5.3.2. Modos antisimétricos

Ahora, se analizan las curvas de dispersión para los modos antisimétricos.

En la figura 5.4, las curvas de dispersión $v = f(\omega d)$ para parámetros de imperfección eléctrico y magnético fijos $k_\varphi = 0,1 \text{ F/m}^2$, $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$ y diferentes valores del parámetro de imperfección mecánico k_u se muestran. Como se puede ver, todas las curvas consisten de dos partes, la primera es convexa y la segunda concava para todos los valores de k_u .

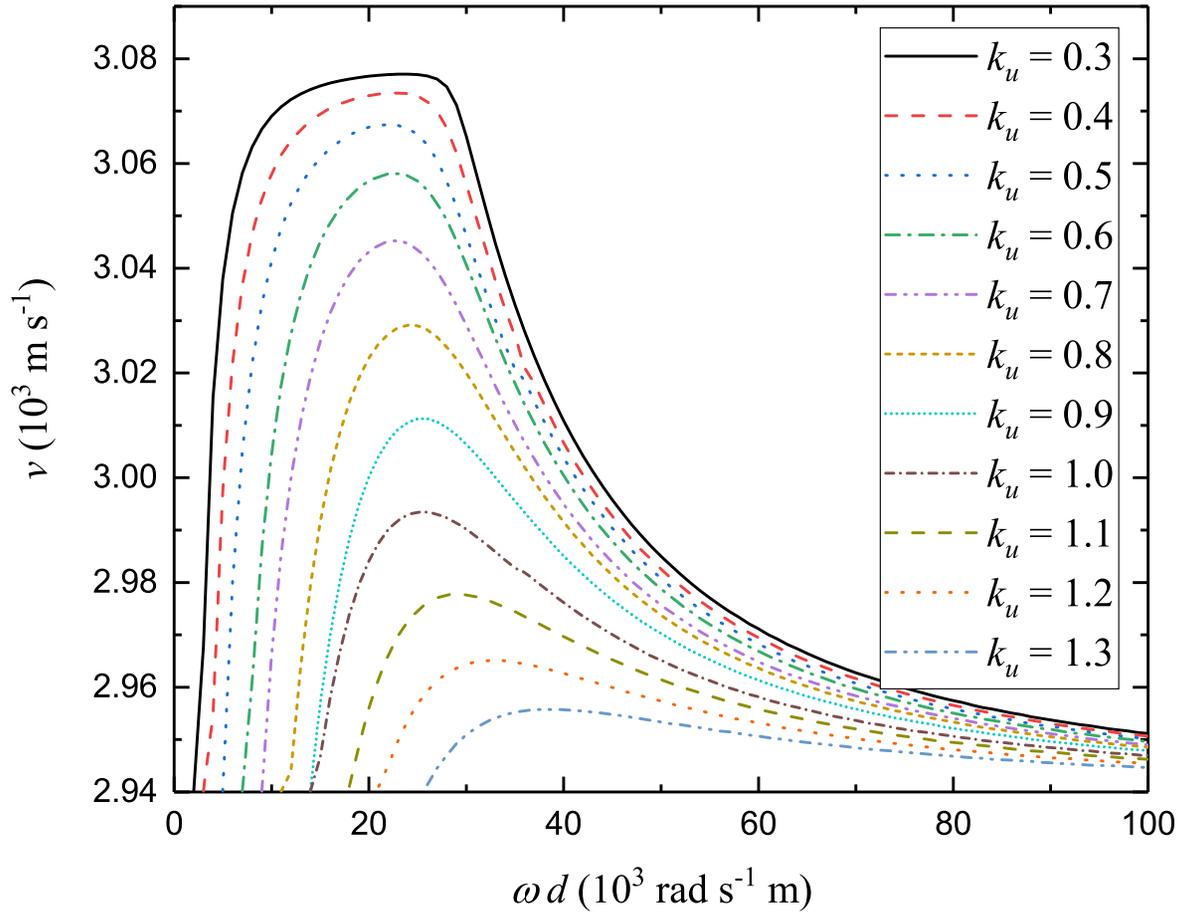


Figura 5.4: $k_\varphi = 0,1 \text{ F/m}^2$, $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$

Cada curva está en el rango físicamente aceptable de velocidades para ser una onda dispersiva y su comportamiento mientras ωd tiende a infinito, nos recuerda a la de la figura 5.1. Cada curva tiene un valor mínimo relativo, el cual es desplazado hacia la derecha cuando los valores de k_u aumentan. Los valores de k_u tienen una influencia muy marcada sobre las curvas de dispersión.

In la figura 5.5, las curvas de dispersión para $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$, $k_u = 0,3 \text{ Pa/m}$ y diferentes valores del parámetro de imperfección eléctrica k_φ se muestran. Cada curva

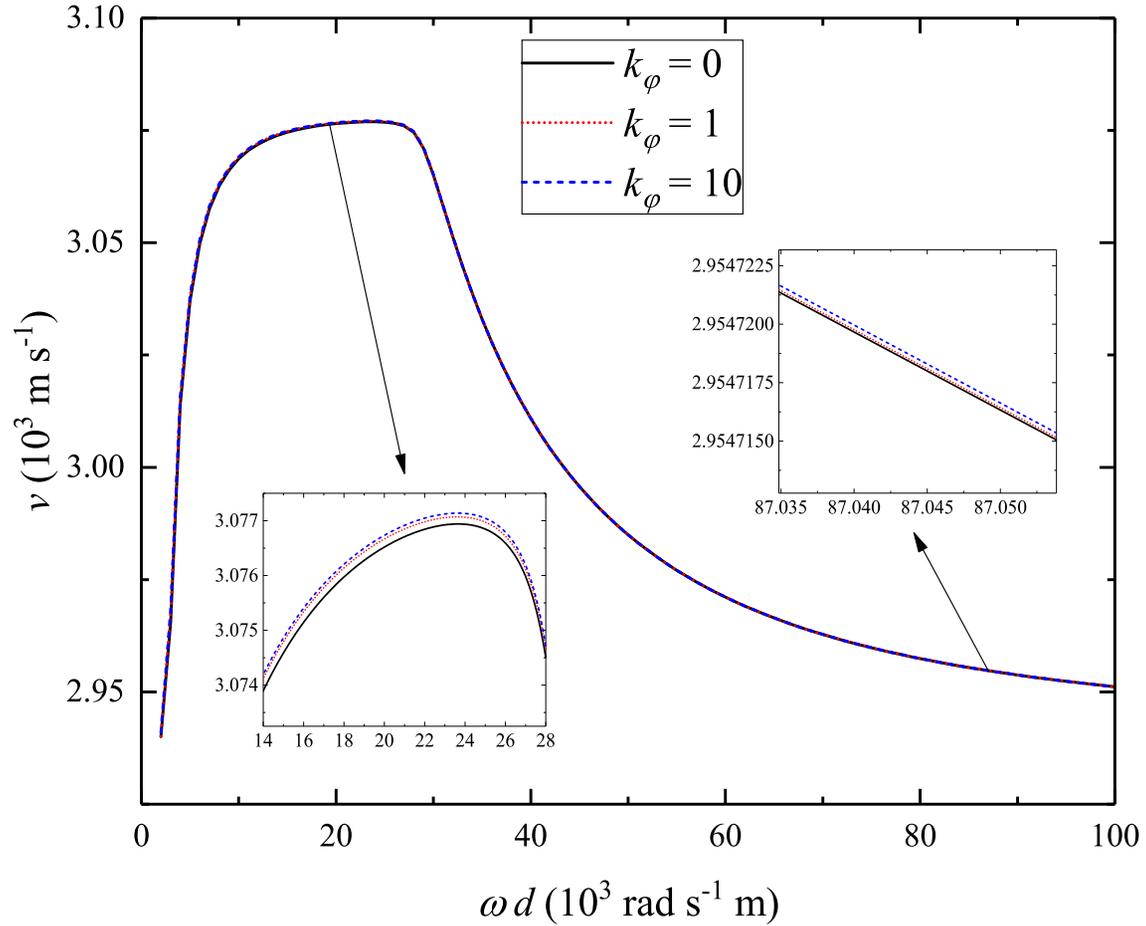


Figura 5.5: $k_\psi = 0,2 \text{ H/m}^2$, $k_u = 0,3 \text{ Pa/m}$

tiene un valor mínimo relativo, el cual es desplazado hacia la derecha cuando los valores de k_u incrementan. Las tres curvas son mostradas en el rango completo de ωd , el cual está fragmentado en dos partes de tal manera que se pueda exhibir la diferencia entre estos. Las curvas son mostradas en los intervalos:

- i) $14000 \leq \omega d \leq 28000 \text{ rad s}^{-1} \text{ m}$, las curvas tienen un máximo y es clara la separación entre ellas,
- ii) $65712 \leq \omega d \leq 65715 \text{ rad s}^{-1} \text{ m}$, en esta sección se tuvo que ir hasta las sexta posición

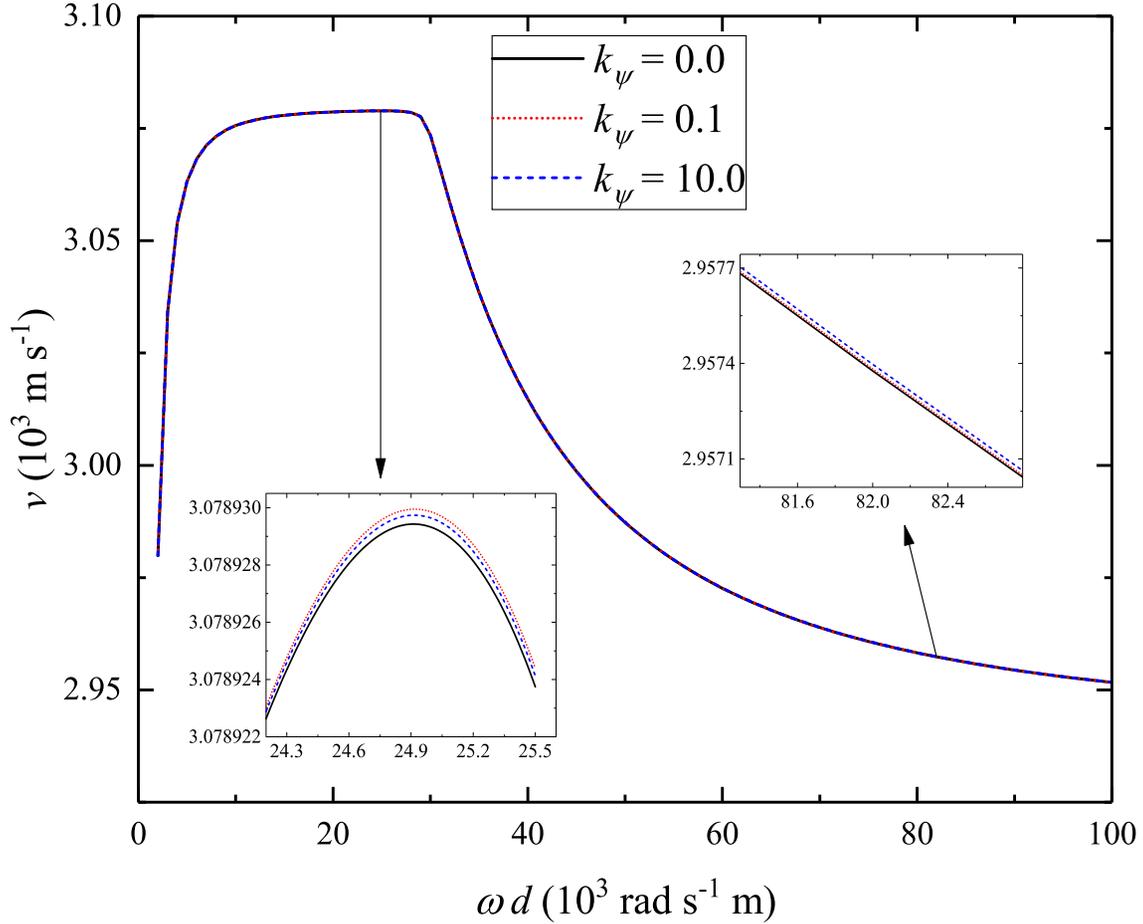


Figura 5.6: $k_\varphi = 0,2 \text{ F/m}^2$, $k_u = 0,2 \text{ Pa/m}$

decimal para poder observar la separación de las curvas. Esas dos curvas siguen el mismo patrón que la gráfica $k_u = 0,3 \text{ Pa/m}$ en la figura 5.4. Todas las curvas de dispersión están en el rango de velocidades entre v_B y v_A . Los valores de k_φ tienen una pequeña influencia sobre las curvas de dispersión.

En la figura 5.6, las curvas de dispersión para $k_\varphi = 0,2 \text{ F/m}^2$, $k_u = 0,2 \text{ Pa/m}$ y diferentes valores del parámetro de imperfección magnética k_ψ son mostrados. Las curvas de dispersión en las figuras 5.5 y 5.6 son parecidas, por lo cual la figura 5.6 es mostrada tam-

bién en dos fragmentos. Todas las gráficas pertenecen al rango de velocidades físicamente aceptable para ser una onda dispersiva. La influencia del parámetro de imperfección k_ψ sobre las curvas de dispersión es débil, pero existe.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos a futuro

“El futuro pertenece a quienes creen

en la belleza de sus sueños.

(Eleanor Roosevelt (1884-1962))

6.1. Piezoeléctrico/Piezoeléctrico/Piezoeléctrico

Las relaciones de dispersión para la propagación de una onda interfacial de cizalladura en una estructura **A/B/A** piezoeléctrica para ambos modos: simétrico y antisimétrico, han sido estudiados, considerando imperfección eléctrica y mecánica en las interfaces. Dichas interfaces han sido modeladas por medio de un capacitor y un resorte, respectivamente. Expresiones analíticas para las relaciones de dispersión fueron obtenidas y diferentes casos límite estudiados, concordando con [Otero et al. 2011]. Ejemplos numéricos fueron presentados usando las propiedades de dos materiales piezoeléctricos (PZT4 y

BaTiO₃), y las curvas de dispersión para diferentes valores de los parámetros materiales (k_u y k_φ), se muestran. Algunas conclusiones acerca de las curvas de dispersión se enuncian a continuación:

- están confinadas dentro de la velocidad de los medios **A** y **B** para ambos modos: simétrico y antisimétrico,
- nunca se intersectan entre ellas para ambos modos,
- tienden a v_B conforme ωd tiende a infinito para todos los valores de (k_u) y de (k_φ),
- son no monotonas para pequeños valores de (k_u) y, estrictamente convexa y decreciente para grandes valores de (k_u),
- entre mas pequeño es el valor del parámetro (k_φ), mayor será el desplazamiento hacia la derecha.

6.2. Piezoeléctrico/Piezomagnético/Piezoeléctrico

Las relaciones de dispersión para la propagación de una onda interfacial en una estructura PiezoE/PiezoM/PiezoE tanto para los modos simétricos como los antisimétricos, fueron estudiadas considerando la existencia de las tres imperfecciones interfaciales (mecánica, eléctrica y magnética). Dichas imperfecciones fueron modeladas por medio de un resorte, un capacitor y un inductor, respectivamente. Expresiones analíticas para las relaciones de dispersión para ambos modos fueron obtenidas y algunos casos límite

fueron estudiados. Varios ejemplos numéricos se desarrollaron usando como piezoeléctrico BaTiO_3 y como piezomagnético CoFe_2O_4 y, las curvas de dispersión obtenidas para diferentes valores de los parámetros materiales (k_φ , k_ψ y k_u) son presentados. Finalmente, enlistemos algunas conclusiones acerca de las curvas de dispersión:

- están confinadas den el rango de velocidades de los medios **A** y **B** para ambos modos, simétricos y antisimétricos, siendo estas curvas, continuas en todo el rango de velocidades,
- nunca se intersectan,
- tienden a v_B conforme ωd tiende a infinito para todos los casos estudiados aquí,
- algunas curvas para los modos simétricos tienen un mínimo relativo, el cual se desplaza a la derecha cuando el parámetro k_u incrementa su valor y para los modos antisimétricos tiene un máximo relativo, el cual se dezplaza hacia la derecha cuando el parametro k_u incrementa su valor, pero permanece en la misma posición cuando los parametros k_ψ y k_φ incrementan su valor,
- son estrictamente cóncavas para grandes valores de ωd para ambos modos,
- son influenciadas en diferentes ordenes de magnitud por los parámetros: k_u , k_ψ y k_φ .

6.3. Perspectivas a futuro

Los trabajos realizados para esta tesis, aún pueden ser generalizados y extendidos incluyendo otras características de los materiales y, se pueden obtener expresiones que darían mucha información física con respecto al sistema estudiado. A continuación se enuncian posibles trabajos de investigación a futuro:

1. Trabajar el problema de curvas de dispersión para materiales magneto-electro - elasticos con interfaces imperfectas magneto-electro-mecánicas.
2. Trabajar el problema de curvas de dispersión para materiales visco-elásticos con imperfecciones electro-mecánicas.
3. Trabajar el problema de curvas de dispersión para materiales visco-elásticos con imperfecciones magneto-electro-mecánicas.
4. Estudiar un modelo análogo considerando una mesofase y relacionar las propiedades de esta mesofase en función de los parámetros de imperfección.
5. Calcular con dinámica molecular las propiedades de la mesofase.

Bibliografía

- [C.W. Nan et al. 2008] C.W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan, “Multiferroic magnetoelectric composites: historical perspective, status, and future directions”, *J. Appl. Phys.*, 103 (2008), 031-101.
- [C.W. Nan 1994] C.W. Nan, “Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases.”, *Phys. Rev. B*, 50 (1994), 6082–6088.
- [M. Fiebig 2005] M. Fiebig, “Revival of the magnetoelectric effect”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 38 (2005), R123–R152.
- [J. Du et al. 2009] J. Du, X. Jin, J. Wang, “Ultrasonics”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 49 (2009), 131–138.
- [A.K. Soh et al. 2009] A.K. Soh, J.X. Liu, “Interfacial shear horizontal waves in a piezoelectricpiezomagnetic bi-material”, *Philos. Mag. Lett.*, 89 (2009), 95–103.
- [Spaldin NA et al. 2005] Spaldin NA, Fiebig M, “The renaissance of magnetoelectric multiferroics.”, *Science*, (2005), 309:391–2.

- [Eerenstein W et al. 2006] Eerenstein W, Mathur ND, Scott JF, “Multiferroic and magnetoelectric materials”, *Nature*, (2006), 442:759–65.
- [Hur N et al. 2004] Hur N, Park S, Sharma P A, “Colossal magnetodielectric effects in DyMn₂O₅”, *Phys Rev Lett*, (2004), 93: 107207.
- [Lottermoser T et al. 2004] Lottermoser T, Fiebig M, “Magnetoelectric behavior of domain walls in multiferroic HoMnO₃”, *Phys Rev B*, (2004), 70: 220407(R).
- [Wang J et al. 2003] Wang J, Neaton J B, Zheng H, “Expiation BiFeO₃ multiferroic thin film feterostructures”, *Science*, (2003), 299: 1719—1722.
- [Benjeddou A et al. 1997] Benjeddou A, Trindade M A and Ohayon R, “A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms”, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, (1997), 8 1012–25.
- [Glazounov A et al. 1998] Glazounov A and Zhang Q, “Piezoelectric actuator generating torsional displacement from piezoelectric d₁₅ shear response”, *Appl. Phys. Lett.*, (1998), 72 2526–8.
- [Centolanza L R et al. 2002] Centolanza L R, Smith E C and Munsky B, “Induced-shear piezoelectric actuators for rotor blade trailing edge flaps”, *Smart Mater. Struct.*, (2002), 11 24–35.
- [Dong S X et al. 2003a] Dong S X, Cheng J R, Li J F, “Enhanced magnetoelectric effects in laminate composites of Terfenol-D/Pb(Zr,Ti)O₃ under resonant drive.”, *Appl Phys Lett.*, (2003), 83: 4812—4814

- [Dong S X et al. 2003b] Dong S X, Li J F, Viehland D, “Giant magneto-electric effect in laminate composites”, *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Contr*, (2003), 50: 1236—1239.
- [Srinivasan G et al. 2002] Srinivasan G, Rasmussen E T, Gallegos J, “Magnetoelectric effect in bilayers and multilayers of magnetostrictive and piezoelectric perovskite oxides”, *Phys Rev B*, (2002), 65: 134402
- [Dong S X et al. 2004] Dong S X, Li J F, Viehland D, “Characterization of magneto-electric laminate composites operated in longitudinal-transverse and transverse-transverse modes”, *J Appl Phys*, (2004), 95: 2625—2630.
- [Suchtelen J V 1972] Suchtelen J V, “Product properties: A new application of composite materials”, *Phil Res Rep*, (2004), 27: 28—37.
- [Yuan G L et al. 2006] G. L. Yuan, K. Z. Baba-Kishi, J. M. Liu, S. W. Or, Y. P. Wang, and Z. G. Liu, “Multiferroic properties of single-phase $\text{Bi}_{0.85}\text{La}_{0.15}\text{FeO}_3$ lead-free ceramics”, *J. Am. Ceram. Soc.*, (2006), 89 3136.
- [Li Y J et al. 2006] Y. J. Li, X. M. Chen, Y. Q. Lin, and Y. H. Tang, “Magnetoelectric effect of $\text{Ni}_{0.8}\text{Zn}_{0.2}\text{Fe}_2\text{O}_4/\text{Sr}_{0.5}\text{Ba}_{0.5}\text{Nb}_2\text{O}_6$ composites”, *J. Eur. Ceram. Soc.*, (2006), 26 2839.
- [Cai N et al. 2003] N. Cai, J. Zhai, C. W. Nan, Y. Lin, and Z. Shi, “Dielectric, ferroelectric, magnetic, and magnetoelectric properties of multiferroic laminated composites”, *Phys. Rev. B*, (2003), 68 224103.

- [Wan J G et al. 2003] J. G. Wan, J. M. Liu, H. L. W. Chand, C. L. Choy, G. H. Wang, and C. W. Nan, “Giant magnetoelectric effect of a hybrid of magnetostrictive and piezoelectric composites”, *J. Appl. Phys.*, (2003), 93 9916.
- [Dong S X et al. 2004] S. X. Dong, J. F. Li, and D. Viehland, “Circumferentially magnetized and circumferentially polarized magnetostrictive/piezoelectric laminated rings”, *J. Appl. Phys.*, (2004), 96 3382.
- [Li Y J et al. 1998] Y.J. Li, M.L. Dunn, “Micromechanics of magneto-electroelastic composite materials: average fields and effective behavior”, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, (1998), 9 404–416.
- [S. Li 1996] S. Li, M.L. Dunn, “The electromagneto-acoustic surface wave in a piezoelectric medium: the Bleustein–Gulyaev mode”, *J. Appl. Phys.*, (1996), 80 5264–5269.
- [Tarasenko S V 1999] S.V. Tarasenko, “A new type of surface spin wave in magnetoelectric crystals”, *Phys. Solid State*, (1999), 41 950–955.
- [Romeo M 2004] M. Romeo, “Non-dispersive and dispersive electromagnetoacoustic SH surface modes in piezoelectric media”, *Wave Motion*, (2004), 39 93–110.
- [Wang B L et al. 2007] B.L. Wang, Y.W. Mai, O.P. Nipaula, “A horizontal shear surface wave in magneto-electroelastic materials”, *Philos. Mag. Lett.*, (2007), 87 53–58.
- [Soh A K et al. 2006] A.K. Soh, J.X. Liu, Nipaula, “Interfacial shear horizontal waves in a piezoelectric–piezomagnetic bi-material”, *Philos. Mag. Lett.*, (2006), 86 31–35.

- [Melkumyan A 2007] A. Melkumyan, “Twelve shear surface waves guided by clamped/free boundaries in magneto-electro-elastic materials”, *Int. J. Solids. Struct.*, (2007), 44 3594–3599.
- [Liu J X et al. 2008] J.X. Liu, D.N. Fang, W.Y. Wei, X.F. Zhao, “Love waves in layered piezoelectric/piezomagnetic structures”, *J. Sound Vib.*, (2008), 315 146–156.
- [Du J et al. 2007] J. Du, X. Jin, J. Wang, “Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress”, *Acta Mech.*, (2007), 192 169–189.
- [Zhang J et al. 2008] J. Zhang, Y.P. Shen, J.K. Du, “The effect of inhomogeneous initial stress on Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures”, *Smart Mater. Struct.*, (2008), 17 025026.
- [Hashin Z 1991] Z. Hashin, “Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface”, *J. Mech. Phys. Solids.*, (1991), 39 745–762.
- [Cheng Z Q 1996] Z.Q. Cheng, A.K. Jemah, F.W. Williams, “Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces”, *J. Appl. Mech.*, (1996), 63 1019–1026.
- [Handge U A 2002] U.A. Handge, “Analysis of a shear-leg model with nonlinear elastic stress transfer for sequential cracking of polymer coatings”, *J. Mater. Sci.*, (2002), 37 4775–4782.

- [Rokhlin S I et al. 1991] S.I. Rokhlin, Y.J. Wang, “Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids”, *J. Acoust. Soc. Am.*, (1991), 89 503–515.
- [Huang W et al. 1992] W. Huang, S.I. Rokhlin, “Interface waves along an anisotropic imperfect interface between anisotropic solids”, *J. Nondestruct. Eval.*, (1992), 11 185–198.
- [Denh M 2006] M. Deng, “Analysis of second-harmonic generation of Lamb waves propagating in layered planar structures with imperfect interfaces”, *Appl. Phys. Lett.*, (2006), 88 221-902.
- [Berger J R et al. 2000] J.R. Berger, P.A. Martin, S.J. McCaffery, “Time-harmonic torsional waves in a composite cylinder with an imperfect interface”, *J. Acoust. Soc. Am.*, (2000), 107 1161–1167.
- [Kepceler T 2010] T. Kepceler, “Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface”, *Appl. Math. Model.*, (2010), 34 4058–4073.
- [Chen W Q et al. 2004] W.Q. Chen, K.Y. Lee, “Exact solution of angle-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections”, *Comput. Struct.*, (2004), 65 329–337.

- [Chen W Q et al. 2005] W.Q. Chen, K.Y. Lee, “Benchmark solution of angle-ply piezoelectric-laminated cylindrical panels in cylindrical bending with weak interfaces”, *Arch. Appl. Mech.*, (2005), 74 466–476.
- [Shodja H M et al. 2006] H.M. Shodja, S.M. Tabatabaei, M.T. Kamali, “A piezoelectric-in homogeneity system with imperfect interface”, *Int. J. Eng. Sci.*, (2006), 44 3344–3358.
- [Wang X et al. 2007] X. Wang, L.J. Sudak, “Piezoelectric screw dislocation interacting with an imperfect piezoelectric biomaterial interface”, *Int. J. Solid. Struct.*, (2007), 44 3344–3358.
- [Jin B et al. 2008] B. Jin, Q.H. Fang, “Piezoelectric screw dislocations interacting with a circular inclusion with imperfect interface”, *Arch. Appl. Mech.*, (2008), 78 105–116.
- [Li Y D et al. 2009a] Y.D. Li, K.Y. Lee, “Crack tip shielding and anti-shielding effects of the imperfect interface in a layered piezoelectric sensor”, *Int. J. Solid. Struct.*, (2009), 49 1736–1742.
- [Li Y D et al. 2009b] Y.D. Li, K.Y. Lee, “Interaction between an electrically permeable crack and the imperfect interface in a functionally graded piezoelectric sensor”, *Int. J. Eng. Sci.*, (2009), 47 363–371.
- [Fan H et al. 2006] H. Fan, J.S. Yang, L.M. Xu, “Piezoelectric waves near an imperfectly bonded interface between two half-spaces”, *Appl. Phys. Lett.*, (2006), 88 203-509.

- [Chen Z G et al. 2008] Z.G. Chen, Y.T. Hu, J.S. Yang, “Shear horizontal piezoelectric waves in a piezoceramic plate imperfectly bounded to two piezoceramic half-spaces”, *J. Mech.*, (2008), 24 229–239.
- [Wang X et al. 2007] X. Wang, E. Pan, A.K. Roy, “Scattering of antiplane shear wave by a piezoelectric circular cylinder with an imperfect interface”, *Acta Mech.*, (2007), 193 177–195.
- [Du J et al. 2009] J. Du, X. Jin, J. Wang, “SH surface acoustic wave propagation in a cylindrically layered piezomagnetic/piezoelectric structure”, *Ultrasonics*, (2009), 49 131–138.
- [Li Y D et al. 2010a] Y.D. Li, K.Y. Lee, “Effect of an imperfect interface on the SH wave propagating in a cylindrical piezoelectric sensor”, *Ultrasonics*, (2010), 50 473–478.
- [Huang Y et al. 2009] Y. Huang, X.F. Li, K.Y. Lee, “Interfacial shear horizontal (SH) waves propagating in a two-phase piezoelectric/piezomagnetic structure with an imperfect interface”, *Philos. Mag. Lett.*, (2009), 89 95–103.
- [Huang Y et al. 2010] Y. Huang, X.F. Li, “Shear waves guided by the imperfect interface of two magnetoelectric materials”, *Ultrasonics*, (2010), 50 750–757.
- [Qian Z et al. 2005] Z. Qian, F. Jin, Z. Wang, K. Kishimoto, “Investigation of scattering of elastic waves by cylinders in 1–3 piezocomposites”, *Ultrasonics*, (2005), 43 822–831.

- [Li Y D et al. 2010b] Y.D. Li, K.Y. Lee, “Effects of magneto-electric loadings and piezo-magnetic/piezoelectric stiffening on multiferroic interface fracture”, *Eng. Fract. Mech.*, (2010), 77 856–866.
- [Li Y D et al. 2010c] Y.D. Li, K.Y. Lee, “Magnetostrictive fracture of a cylindrical multiferroic composite”, *Int. J. Eng. Sci.*, (2010), 48 199–208.
- [Crawley 1994] Crawley, E.F., “Intelligent Structures for Aerospace: A Technology Overview and Assessment”, *AIAA Journal* vol.32, 8 (1994), 1689-1699.
- [Wada et. al. 1989] Wada, B.K., Fanson, J.L., and E.F. Crawley “Adaptative Structures”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* Vol.1, 2 (2006), 157-174.
- [Adimendun 2005] Adimendun “Materialak”, *Boletin externo ACTIMAT* 7 (2005), 1-6
- [Bleustein 1968] J. L. Bleustein, “A new surface wave in piezoelectric materials”, *Appl. Phys. Lett.* 13 (1968), 412-413.
- [Fan et al. 2006] Hui Fan, Jiashi Yang and Limei Xu, “Piezoelectric waves near an imperfectly bonded interface between two half-spaces”, *Appl. Phys. Lett.* 88 (2006), p203509.
- [H. Calas et al. 2008] H. Calas, J.A. Otero, R. Rodríguez-Ramos, G. Monsivais, C. Stern, “Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures”, *Int. J. of Sol. and Struc.* 45 (2008), p5356-5367

- [Huang et al. 2009] Y. Huang, X. -F. Li and K.Y.Lee. “Interfacial shear horizontal (SH) waves propagating in a two-phase piezoelectric/piezomagnetic structure with an imperfect interface ”, *Phil. Mag. Lett.* 89 (2009), p.95.
- [Huang and Li 2010] Y. Huang and X.F.Li., “Shear waves guided by the imperfect interface of two magnetoelectric materials ”, *Ultrasonics* 50 (2010), p.750.
- [Li et al. 2013] P. Li, F. Jin, W. Chen, and J. Yang, “Effects of interface bonding on acoustic wave generation in an elastic body by surface-mounted piezoelectric transducers ”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 60:9 (2013), 1957-1963.
- [Li et al. 2015a] Y.-D.Li. T. Xiong, and Q.-G. Cai, “Coupled interfacial imperfections and their effects on the fracture behavior of a layered multiferroic cylinder”, *Acta Mech.* 226:4 (2015), 1183-1199.
- [Li et al. 2015b] Y.-D.Li. T. Xiong, and L. Dong, “A new interfacial imperfection coupling model (IICM) and its effect on the fracture behavior of a layered multiferroic composite: anti-plane case”, *Eur. J. Mech. A Solids* 52 (2015), 26-36.
- [Li et al. 2015c] Y.-D.Li. T. Xiong, and L. Dong, “Interfacial imperfection coupling model with application to the in-plane fracture problem of a multiferroic composite.”, *Int. J. Solids Struct.* 54 (2015), 31-41.

- [Li et al. 2016] Y.-D.Li, T. Xiong, and L. Guan, “Effects of coupled interfacial imperfections on SH wave propagation in a layered multiferroic cylinder”, *Ultrasonics* 66 (2016), 11-17.
- [Maerfeld 1971] C. Maerfeld and P. Tournois, “Pure Shear Elastic Surface Wave Guided by the Interface of Two Semi-Infinite Media” *Appl. Phys. Lett.* 19 (1971), 117-118.
- [Melkumyan and Mai 2008] A. Melkumyan and Y.-W. Mai. “Influence of imperfect bonding on interface waves guided by piezoelectric/piezomagnetic composites”, *Phil. Mag.* 88 (2008), p.2965.
- [Nan et al. 2010] L. Nan, J. Yang, -H. Qian and S. Hirose, “Interface waves in functionally graded piezoelectric materials”, *Int. J. Eng. Sci.* 48 (2010), p.151.
- [Otero et al. 2011] J.A. Otero, R. Rodriguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, A.R. Aguiar and G. Monsivais, “Dispersion relations for SH waves on a magneto-electroelastic heterostructure with imperfect interfaces”, *J. Mech. Mat. Struct.* 6 (2011), 969-993.
- [Otero et al. 2012] J.A. Otero, R. Rodriguez-Ramos, J. Bravo-Castillero and G. Monsivais, “Interfacial waves between two piezoelectric half-spaces with electro-mechanical imperfect interface”, *Phil. Mag. Lett.* 92 (2012), 534-540.
- [Otero et al. 2013] J.A. Otero, R. Rodriguez-Ramos, G. Monsivais, C. Stern and F. Lebon, “Interfacial waves between piezoelectric and piezomagnetic half-spaces with magneto-electro-mechanical imperfect interface”, *Phil. Mag. Lett.* 93 (2013), 413-421.

- [Otero et al. 2014] J.A. Otero, R. Rodríguez-Ramos, G. Monsivais, C. Stern, R. Martínez and R. Dario, “Interfacial waves between two magneto-electro-elastic half-spaces with magneto-electro-mechanical imperfect interface”, *Phil. Mag. Lett.* 94 (2014), 629-638.
- [Reyes et al. 2017] M. A. Reyes, J. A. Otero and R. Pérez-Álvarez, “Interfacial waves in an A/B/A piezoelectric structure with electro-mechanical imperfect interfaces”, *J. Mech. Mat. Struct.* 12, 4 (2017), 457-470.
- [Soh and Liu 2006] A. K. Soh and J. X. Liu, “Interfacial shear horizontal waves in a piezoelectric-piezomagnetic bi-material”, *Phil. Mag. Lett.* 86 (2006), 31-35.
- [Yang and Yang 2009] Z. Yang and J. Yang, “Effects of electric field gradient on the propagation of short piezoelectric interface waves”, *Int. J. Appl. Electrom.* 29 (2009), 101-108.
- [Jackson 1998] John David Jackson, “Classical Electrodynamics”, *John Wiley and Sons, Inc.* (1998), chapter 6-7.
- [Royer 1996] Daniel Royer and Eugene Dieulesaint, “Elastic Waves in Solids I Free and Guided Propagation”, *Springer* (1996), chapter 3.