



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS  
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS**

# **Cirugía en el conjunto de Mandelbrot**

## **TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS**

**PRESENTA  
MIRIAM ROMERO CABRERA**

**DIRECTOR DE TESIS  
Dr. Rogelio Valdez Delgado**



## Índice general

0.1. AGRADECIMIENTOS . . . . .	1
0.2. INTRODUCCIÓN . . . . .	2
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>7</b>
1.1. Conjugaciones . . . . .	8
1.2. Dinámica holomorfa: Espacio fase . . . . .	10
1.2.1. Partición dinámica . . . . .	10
1.3. Teoría local . . . . .	13
1.4. Teoría global . . . . .	14
1.5. Dinámica polinomial . . . . .	16
1.6. Familias de dinámicas holomorfas: Espacio de parámetros . . . . .	19
1.6.1. Espacio de parámetros para polinomios cuadráticos: Conjunto de Mandelbrot . . . . .	20
<b>2. GEOMETRÍA CUASICONFORME</b>	<b>23</b>
2.1. Caso lineal: Coeficiente de Beltrami y elipses . . . . .	23
2.1.1. Interpretación geométrica . . . . .	26
2.2. Estructuras casi complejas y pullbacks . . . . .	28
2.2.1. Estructuras casi complejas y simetrías . . . . .	32
2.3. Transformaciones cuasiconformes . . . . .	32
2.3.1. Primera definición analítica de transformaciones cuasiconformes . . . . .	33
2.3.2. Segunda definición analítica de transformaciones cuasiconformes . . . . .	35
2.3.3. Un ejemplo, la escalera del diablo . . . . .	36
2.3.4. Propiedades de las transformaciones cuasiconformes . . . . .	38
2.3.5. Transformaciones y formas de Beltrami en superficies de Riemann . . . . .	39
2.4. Teorema de integrabilidad . . . . .	43
2.4.1. Dependencia de parámetros . . . . .	46
2.5. Ejemplo elemental . . . . .	47
2.5.1. Extendiendo $\mu_\nu$ por la dinámica . . . . .	51
2.5.2. Dependencia con respecto a los parámetros . . . . .	52
2.6. Transformaciones cuasiregulares . . . . .	53
2.6.1. Aplicación de la dinámica holomorfa . . . . .	55

<b>3. INTRODUCCIÓN A LA CIRUGÍA</b>	<b>59</b>
3.1. Cambiando el multiplicador de un ciclo atractor . . . . .	61
3.1.1. Caso del polinomio mónico: leyendo las coordenadas de Böttcher . . . . .	64
3.2. Cirugía de cortado y pegado de sectores . . . . .	65
3.2.1. Preliminares: Sectores y módulos de apertura . . . . .	66
3.2.2. Definición de sectores y módulos de apertura . . . . .	66
3.2.3. Interpolación cuasiconforme en sectores . . . . .	71
3.2.4. Extremidades del conjunto de Mandelbrot . . . . .	74
3.2.5. Controlando del módulo de apertura de sectores . . . . .	76
<b>4. CIRUGÍA EN POLINOMIOS COMPLEJOS</b>	<b>79</b>
4.1. La dinámica de $P_c$ para $c \in M$ . . . . .	79
4.1.1. La dinámica de $P_c$ para $c \in \mathcal{L}_{1/2}$ . . . . .	80
4.1.2. La dinámica de $P_\lambda$ para $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ . . . . .	80
4.2. Cirugía de $\mathcal{L}_{1/2}$ a $\mathcal{L}_{1/3}$ . . . . .	81
4.3. Continuidad de la función $\phi_A$ . . . . .	88
4.4. Cirugía Inversa de $\mathcal{L}_{1/3}$ a $\mathcal{L}_{1/2}$ . . . . .	92
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

## 0.1. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación ha sido de verdad bastante enriquecedor tanto en crecimiento académico, profesional y personal. Estoy agradecida con CONACYT que me otorgó una beca nacional para mi proyecto de investigación de maestría y un apoyo de movilidad con el cual tuve la oportunidad de hacer una estancia en Barcelona bajo la tutela de la Dra. Nuria Fagella. Esta fue una de las mejores experiencias que me llevo de este proyecto, tener la oportunidad de conocer otro país, la cultura, la educación. Estoy enteramente agradecida por poder trabajar con el grupo de Dinámica holomorfa del Departamento de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona, agradezco el apoyo que me brindaron durante toda mi estadía a la Dra. Nuria principalmente, a Toni, Xavi, Jordi, Alex Haro, Begoña y Gladston. GRACIAS. También a todas las personas que llegué a conocer y que me brindaron su apoyo sabiendo que no era mi país y no conocía a casi nadie, gracias a Elena, que me enseñaste tantas cosas, gracias, gracias, gracias, a Luena, Saúl, Marianne, Nuria, Cris, Mildred y Davide, GRACIAS.

Gracias a mis padres que también me han apoyado en todas las decisiones que he tomado, que estando lejos siempre estuvieron en contacto conmigo, demostrándome lo mucho que me quieren y echándome porras cuando más lo necesité, GRACIAS. A mis hermanos, que los quiero mucho y estoy orgullosa de ellos, que esto es una de tantas cosas que podemos lograr.

Quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Rogelio, que también no estaría donde estoy por todo el apoyo que me ha brindado y conocimiento que me ha compartido, es una gran persona y excelente matemático, gracias por ser mi tutor y todos estos años de aprendizaje, conocimiento y experiencias.

A mis sinodales, por esforzarse en la lectura y corrección de la redacción de esta tesis. A mi comité tutorial la Dra. Gabriela Hinojosa y el Dr. Carlos Cabrera, que me han acompañado desde la licenciatura y ahora en la maestría, estando presentes en todos mis exámenes tutorales, apoyándome y buscando mi crecimiento profesional, GRACIAS.

Estoy muy contenta con el resultado de este trabajo, me hizo amar más lo que hago y es bastante gratificante para mí cada vez que estoy en algún seminario poder entender, eso me demuestra que voy por un buen camino. Gracias a todos por sus consejos en todo momento y las aportaciones que siempre me han brindado. GRACIAS.

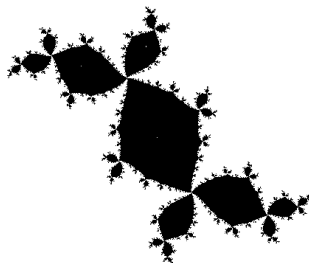
## 0.2. INTRODUCCIÓN

El conjunto de Mandelbrot ha sido objeto de interés y estudio, ya que los conjuntos notablemente similares al conjunto de Mandelbrot ocurren en muchas otras familias complejas uniparamétricas de funciones analíticas complejas. La razón es que las funciones, o iteraciones de las mismas, pueden comportarse localmente como un polinomio cuadrático.

El conjunto de Mandelbrot está asociado a la familia cuadrática de polinomios complejos  $P_c(z) = z^2 + c$ , para  $c \in \mathbb{C}$ . Más precisamente, sea  $\mathcal{K}_c$  el conjunto de Julia lleno de  $P_c$ , es decir,

$$\mathcal{K}_c = \{z \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ está acotado}\}$$

y el conjunto de Julia  $\mathcal{J}_c$ , se define como la frontera de  $\mathcal{K}_c$ . Ambos conjuntos están acotados y son completamente invariantes bajo  $P_c$ .

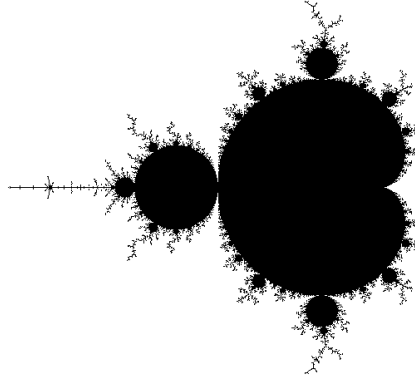


**Figura 1:** Ejemplo de conjunto de Julia,  $\mathcal{K}_c$  es la parte sombreada y  $\mathcal{J}_c = \partial\mathcal{K}_c$ .

Los polinomios  $P_c$  tienen un único punto crítico en  $\mathbb{C}$  que es  $w = 0$ . El comportamiento de este punto juega un papel crucial en la determinación de la dinámica de  $P_c$  y la topología de  $\mathcal{K}_c$ .

En efecto, el conjunto de Julia lleno es conexo si y sólo si contiene al punto crítico 0; sino, es un conjunto de Cantor. Esta dicotomía es reflejada en la definición del conjunto de Mandelbrot  $M$ , que está definido como el conjunto de parámetros  $c$ , para los cuáles  $\mathcal{K}_c$  es conexo, o equivalentemente como el conjunto de parámetros para los cuáles la órbita del 0 está acotada.

Los trabajos de A. Douady, J.H. Hubbard, D. Sullivan y J.C. Yoccoz contribuyeron enormemente al entendimiento del conjunto de Mandelbrot, pero quedan muchas preguntas abiertas interesantes. La principal es probar que  $M$  es localmente conexo (conjetura MLC).



**Figura 2:** Conjunto de Mandelbrot

Los siguientes son resultados conocidos sobre  $M$ :

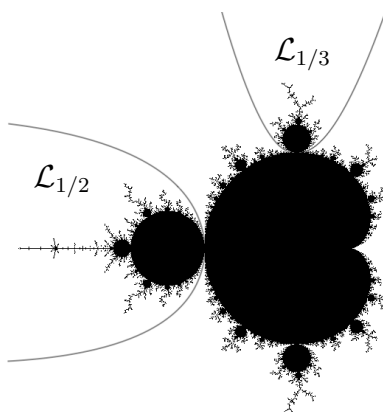
- $M$  es lleno, compacto y conexo.
- El interior de  $M$  contiene componentes conexas para las cuales  $P_c$  tiene una órbita periódica atractora, llamadas componentes hiperbólicas y es conjetura que su unión es igual al interior de  $M$ .
- Para cada componente hiperbólica  $\Omega$  de  $M$ , existe un isomorfismo conforme  $\varphi_\Omega : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ , tal que  $\varphi_\Omega(t) = c$  entonces el polinomio asociado  $P_c$  tiene un ciclo atractor cuyo multiplicador es  $t$ . El punto  $\varphi_\Omega(0)$  es llamado el centro de  $\Omega$ . Esta función se extiende a un homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\overline{\Omega}$ . Sea  $\lim_{r \rightarrow 1} \varphi_\Omega(re^{2\pi it}) = \gamma_\Omega(t) = \gamma(t)$ , esto define una parametrización de la frontera de  $\Omega$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , el punto  $\gamma(t)$  en  $\partial\Omega$  tiene argumento interno  $t$ .
- Existe una única componente hiperbólica, llamada  $\Omega_0$ , que es acotada por la cardioide principal, para la cual  $P_c$  tiene un punto fijo atractor. Para cualquier argumento interno  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  existe una componente hiperbólica  $\Omega_{p/q}$  adjunta a la cardioide en el punto  $\gamma_0(p/q)$ . Dicha componente hiperbólica tiene valores  $c$ , para los cuales  $P_c$  tiene un ciclo atractor de periodo  $q$ .
- Existe un isomorfismo conforme  $\varphi_M : \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , tal que  $\frac{\varphi_M(c)}{c} \rightarrow 1$  cuando  $c \rightarrow \infty$ . Un rayo externo de argumento externo  $\theta$  es definido como

$$R_M(\theta) = \varphi_M^{-1}(\{re^{2\pi i\theta}\}_{1 < r < \infty}).$$

Los rayos externos con argumento racional juegan un papel especial. Se sabe que tienen un límite en la frontera de  $M$  cuando  $r \rightarrow 1$ . El conjunto de puntos de aterrizaje de dichos rayos consiste de todas las raíces de las componentes hiperbólicas

y todos los puntos Misiurewicz, es decir, los valores de  $c$  para los cuales  $w = 0$  es estrictamente preperiódico.

Sean  $p$  y  $q$  enteros positivos,  $p < q$ ,  $q \geq 2$ , primos relativos. Definimos la  $p/q$ -extremidad de  $M$ ,  $\mathcal{L}_{p/q}$ , como la componente conexa de  $M \setminus \overline{\Omega}_0$  adjunta a la cardioide principal en el punto con argumento interno  $p/q$ , es decir, en  $c = \gamma_0(p/q)$ , ver Figura 3.



**Figura 3:** Limbs  $\mathcal{L}_{1/2}$  y  $\mathcal{L}_{1/3}$  de  $M$ .

La técnica de cirugía cuasiconforme en polinomios complejos como una forma de construir ciertas funciones entre espacios de parámetros fue introducida en [BD86], para relacionar un cierto espacio de parámetros cúbico y cuadrático a la  $1/2$ -extremidad del conjunto de Mandelbrot. Luego la cirugía se usó en [BF99] para construir homeomorfismos entre ciertas extremidades del conjunto de Mandelbrot.

El trabajo de esta tesis está basado en dicho resultado histórico de A. Douady y B. Branner, [BD86]. El objetivo principal es aprender la cirugía cuasiconforme como herramienta y lo haremos a través del entendimiento de la demostración del siguiente resultado.

**Teorema 0.2.1.** *Existe una función  $\phi_A : \mathcal{L}_{1/2} \rightarrow \mathcal{L}_{1/3}$  que es un homeomorfismo de  $\mathcal{L}_{1/2}$  con su imagen.*

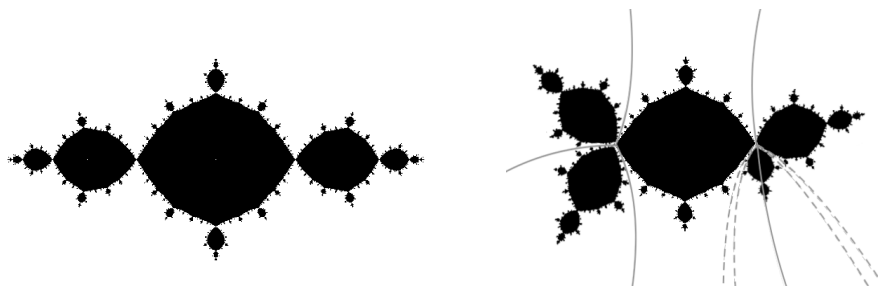
Este es un resultado sobre el espacio de parámetros para polinomios cuadráticos, considerados como sistemas dinámicos y es obtenido por medio de cirugía.

La cirugía cuasiconforme es una técnica comúnmente usada para la construcción de funciones holomorfas con una dinámica prescrita. La “dinámica prescrita” nos da una función  $f$  la cuál en general no es holomorfa, pero podría serlo. Nos referiremos a  $f$  como una función modelo. La palabra “CIRUGÍA” aparece porque se necesita “cortar” y “pegar” diferentes espacios y funciones juntas para construir a  $f$ . Éste es usualmente el primer paso para la construcción y es conocido como cirugía topológica. Después pasaremos al mundo holomorfo para hacer una mejor elección de



nuestro modelo, y verificar si la función modelo tiene una copia dinámica holomorfa, es decir, que exista una función holomorfa que conjugue a  $f$ .

En general, encontrar una función holomorfa  $F$  que esté conjugada a una función cuasiregular  $f$  es el último paso en la construcción de la cirugía. El primer paso, la construcción de una función modelo, requiere de creatividad. Es en esta etapa que la cirugía real está involucrada. No hay una teoría general sobre como hacerlo, ya que cada problema requiere de su propia solución particular.



**Figura 4:** Bosquejo de la cirugía de cortado y pegado para  $c \in \mathcal{L}_{1/2}$ .

Además como una consecuencia de nuestro teorema principal tenemos

**Corolario 0.2.2.** *La imagen de  $[-2, -3/4]$  bajo la función  $\phi_A$  es un arco topológico en  $\mathcal{L}_{1/3}$ .*

Este arco es la vena principal de  $\mathcal{L}_{1/3}$ . La principal motivación de Douady para hacer cirugía era dar soporte a la conjetura de arco conexidad, si la conjetura  $MLC$  es probada, se sigue inmediatamente que  $M$  es arco conexo, ya que un conjunto cerrado, conexo y localmente conexo es siempre arco conexo.

Estos resultados se basan de manera esencial en la teoría de funciones de tipo polinomial y la teoría de transformaciones cuasiconformes.

La estructura de la tesis es la siguiente: En el primer capítulo: Preliminares, introduciremos las notaciones y herramientas básicas. En el segundo capítulo se desarrolla la teoría de la geometría cuasiconforme. En el capítulo 3 introducimos la noción y ejemplos de cirugía. En particular, la cirugía de cortado y pegado en sectores, que es el tipo de cirugía que se utiliza para la demostración del teorema 0.2.1. Finalmente, el último capítulo será dedicado a la demostración del teorema 0.2.1.

Este trabajo tuvo aportaciones de la Dra. Nuria Fagella, como lo son algunas imágenes que aparecen en su libro [BFB14].



## Capítulo 1

### PRELIMINARES

La técnica de cirugía cuasiconforme que estudiaremos la aplicaremos a sistemas dinámicos holomorfos, o más precisamente a los sistemas dinámicos generados por la iteración de funciones holomorfas

$$f : S \rightarrow S,$$

donde  $S$  es una superficie de Riemann. Para cualquier condición inicial  $z_0 \in S$  consideraremos la órbita de  $z_0$  bajo  $f$ , como la sucesión de puntos

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f(z_1) = f^2(z_0), \dots, z_n = f(z_{n-1}) = f^n(z_0), \dots\}.$$

Entender el sistema dinámico generado por las iteraciones de  $f$  significa entender que sucede con todas las órbitas, en términos de su condición inicial, es decir, su comportamiento asintótico cuando el tiempo  $n$  tiende a infinito. Bajo  $f$ , el punto  $z_0$  puede ser fijo si  $f(z_0) = z_0$ , periódico de periodo  $p > 1$  o  $p$ -periódico, si  $f^p(z_0) = z_0$  y si  $k < p$  entonces  $f^k(z_0) \neq z_0$ , preperiódico si  $f^k(z_0)$  es periódico para algún  $k > 0$ , pero  $z_0$  no lo es, convergente si  $f^{np}(z_0) \rightarrow z^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para algún  $p \geq 1$  (entonces,  $z^*$  es  $p$ -periódico, si  $p$  es minimal con respecto a esta propiedad). Una órbita periódica de periodo  $p$  es llamada  $p$ -ciclo.

Un punto  $z_0 \in S$  es llamado recurrente si la órbita de  $z_0$  interseca cualquier vecindad arbitraria de  $z_0$ . Igualmente,  $U \subset S$  es un conjunto recurrente si  $F^n(U)$  interseca  $U$  para infinitos valores de  $n$ .

Una función holomorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función racional. Por lo tanto,  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios sin factores comunes. El grado de  $f$  se define como

$$d = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}.$$

Éste es entonces el grado topológico de  $f$  en el sentido de que todo punto en  $\widehat{\mathbb{C}}$  tiene exactamente  $d$  preimágenes bajo  $f$  contando multiplicidades. Para  $d = 1$  la función  $f$  es una transformación de Möbius y es un isomorfismo conforme. Dinámicas interesantes en  $\widehat{\mathbb{C}}$  requieren de una función racional de grado  $d \geq 2$ . Denotamos por  $Rat$  a la clase de funciones racionales de grado al menos 2, es decir,

$Rat = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es una función racional de grado al menos } 2\}$ . Un subconjunto de  $Rat$  es la clase de polinomios que denotamos por  $Pol$ .

Para cualquier grado  $d \geq 2$ , consideraremos las clases  $Rat_d$  y  $Pol_d$ , las funciones racionales y polinomios de grado  $d$ , respectivamente.

En este capítulo haremos un breve recordatorio de la teoría básica de la dinámica holomorfa.

## 1.1. Conjugaciones

Las conjugaciones son la principal herramienta usada para comparación y clasificación de sistemas dinámicos. En esta sección,  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos o métricos y  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  son funciones continuas, a menos que se especifique lo contrario. Muchos de los siguientes resultados pueden ser fácilmente comprobados, y los no tan obvios pueden ser encontrados por ejemplo en [Rob04].

**Definición 1.1.1. (Sistemas dinámicos conjugados).** Decimos que  $f$  y  $g$  son topológicamente conjugados  $f \sim_{top} g$ , si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ , es decir que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Si  $h$  puede ser escogida como  $C^r$  con  $0 < r \leq \infty$  (resp. lineal, afín) decimos que  $f$  y  $g$  son  $C^r$ -conjugadas (resp. linealmente conjugada, afinmente conjugada). Si  $X, Y \subset \widehat{\mathbb{C}}$  podemos usar también el término conformemente (resp. cuasiconformemente) conjugado con su respectiva definición. Estas definiciones también tienen sentido localmente. Observemos que cuando  $X = Y = \mathbb{C}$ , conjugaciones conformes son conjugaciones afines.

Sistemas conjugados son “el mismo” módulo un cambio de variables. La regularidad de la conjugación hace esta identificación más o menos restrictiva. Las conjugaciones preservan órbitas. De hecho, si  $f \sim_{top} g$  entonces  $f^n \sim_{top} g^n$ . Por lo tanto,  $\mathcal{O}_f(x_0)$  es enviada biyectivamente en  $\mathcal{O}_g(h(x_0))$  por  $h$ . En particular, órbitas periódicas son enviadas en órbitas periódicas de mismo periodo.

Propiedades que se preservan bajo conjugaciones son importantes y reciben un nombre especial.

**Definición 1.1.2. (Conjugaciones invariantes).** Una propiedad o una cualidad asociada a un sistema dinámico que preserva bajo conjugaciones topológicas (resp  $C^r$ , cuasiconformes, conformes, etc.) es llamada invariante topológico (resp.  $C^r$ , cuasiconforme, conforme, etc.)

Un ejemplo de un  $C^1$  - invariante es el multiplicador de una órbita periódica.

**Lema 1.1.3.** *Supongamos  $X, Y \subset \mathbb{R}$  y  $f, g \in C^1(\mathbb{R})$  o  $X, Y \subset \mathbb{C}$  y  $f, g$  son holomorfas. Si  $h$  es real (resp. compleja)  $C^1$  - conjugada entre  $f$  y  $g$ , y  $x_0$  es un punto periódico de periodo  $p$ , entonces  $y_0 := h(x_0)$  es periódico de periodo  $p$  y*

$$(f^p)'(x_0) = (g^p)'(y_0).$$

Podemos ver que muchas propiedades de conjuntos dinámicamente definidos son preservados bajo conjugación topológica. Como un ejemplo, lo siguiente.

**Definición 1.1.4. (Conjuntos invariantes).** *Un conjunto  $U \subset X$  es  $f$ - invariante o invariante (hacia delante) bajo  $f : X \rightarrow X$  si  $f(U) \subset U$ . Decimos que  $U$  es invariante hacia atrás bajo  $f$ , si  $(f^{-1})(U) \subset U$ . Finalmente,  $U$  es topológicamente invariante o completamente invariante bajo  $f$ , si  $f(U) = U = f^{-1}(U)$ .*

**Lema 1.1.5.** *Conjugaciones topológicas entre  $f$  y  $g$ , envían conjuntos  $f$ - invariantes en conjuntos  $g$  - invariantes.*

Algunos sistemas dinámicos que no son conjugados podrían ser semiconjugados. Esto pasa cuando existe una función continua  $h : X \rightarrow Y$  que satisface  $h \circ f = g \circ h$  pero no es un homeomorfismo. Cuando es éste el caso, muchas propiedades todavía se transfieren de  $f$  en  $g$ . Por ejemplo, órbitas de  $f$  son enviadas en órbitas de  $g$ , pero un  $p$  - ciclo de  $f$  podría ser enviado a un  $p'$  - ciclo de  $g$ , donde  $p' | p$ . Un concepto más débil es el de la equivalencia entre sistemas dinámicos.

**Definición 1.1.6. (Sistemas dinámicos equivalentes ).** *Decimos que  $f$  y  $g$  son topológicamente equivalentes si existen homeomorfismos  $h_1$  y  $h_2$  tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Las equivalencias no preservan órbitas y por lo tanto la dinámica de  $f$  y  $g$  son muy diferentes. Sin embargo, si  $f$  y  $g$  son topológicamente equivalentes, existe una biyección entre los puntos críticos de  $f$  y los puntos críticos de  $g$  (un punto crítico es un punto donde una función no puede ser localmente inyectiva), y lo mismo para los valores críticos (las imágenes de los puntos críticos). Como hemos visto, el número de puntos y valores críticos juegan un muy importante rol en dinámica holomorfa. En este contexto, ser equivalente significa, en algún sentido, pertenecer a la misma "familia" de funciones.

## 1.2. Dinámica holomorfa: Espacio fase

A partir de ahora consideraremos funciones holomorfas  $f : S \rightarrow S$  con espacio fase o espacio dinámico  $S$  igual a la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , el plano complejo  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

### 1.2.1. Partición dinámica

Una propiedad especial de los sistemas dinámicos holomorfos es la división del espacio fase inducido por el concepto de familia normal.

**Definición 1.2.1. (Familia normal de una función holomorfa)** Sea  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  un dominio y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas de  $U$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  es una familia normal en  $U$  si alguna sucesión infinita de elementos de  $\mathcal{F}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en conjuntos compactos de  $U$  a alguna función límite.

La condición de normalidad puede ser expresada en términos de equicontinuidad, pidiendo que la familia sea localmente equicontinua en  $U$  con respecto a la métrica esférica en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Una forma fácil de verificar normalidad es aplicar el Teorema de Montel.

**Teorema 1.2.2. (Teorema de Montel)** Sea  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  un dominio y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas de  $U$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Si existen tres puntos distintos  $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $f(U) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$  para toda  $f \in \mathcal{F}$ , entonces  $\mathcal{F}$  es una familia normal en  $U$ . En particular, si  $|f(U)| \leq R$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  y para algún  $R > 0$ , entonces  $\mathcal{F}$  es una familia normal en  $U$ .

En dinámica holomorfa el concepto de normalidad es aplicado a la familia de iteraciones de una función  $f$  dada. Si  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  es normal en un dominio  $U$ , las órbitas de puntos en  $U$  se comportan de manera similar. El concepto de normalidad define la partición dinámica explicada en la siguiente definición.

**Definición 1.2.3. (Conjunto de Fatou y conjunto de Julia)** Dada una función holomorfa  $f : S \rightarrow S$  como antes, definimos el conjunto de Fatou de  $f$  como

$$\mathcal{F}_f = \{z \in S \mid \{f^n\}_n \text{ forma una familia normal en una vecindad de } z\},$$

y el conjunto de Julia de  $f$  es su complemento

$$\mathcal{J}_f = S \setminus \mathcal{F}_f.$$

El conjunto de Fatou es abierto y el conjunto de Julia es cerrado en  $S$ , y ambos conjuntos son totalmente invariantes (es decir, sus órbitas no se mezclan, esto quiere

decir que si tomamos un punto en  $\mathcal{J}(f)$  e iteramos su órbita hacia adelante o hacia atrás estas nunca se escapan). De hecho,  $\mathcal{J}(f)$  es el conjunto cerrado infinito más pequeño que es totalmente invariante bajo  $f$ . Pensamos entonces al conjunto de Fatou como el conjunto de órbitas de  $f$  que en algún sentido son estables o mansa, mientras que el conjunto de Julia es el conjunto de órbitas caóticas.

Los conjuntos de Fatou y Julia son preservados bajo conjugación topológica en el sentido de que si  $h$  es un homeomorfismo tal que  $h \circ f = g \circ h$ , para  $f, g$  holomorfas, entonces  $\mathcal{J}(g) = h(\mathcal{J}(f))$  y  $\mathcal{F}(g) = h(\mathcal{F}(f))$ .

Como un ejemplo básico, consideremos  $f(z) = z^d$  para  $d \geq 2$ . Entonces el conjunto de Fatou es igual a  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{S}^1$ , mientras que  $\mathcal{J}_f = \mathbb{S}^1$ . En efecto, cualquier órbita dentro de  $\mathbb{D}$  converge a 0, mientras que toda órbita en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  converge a infinito. Órbitas de puntos en  $\mathbb{S}^1$  permanecen en  $\mathbb{S}^1$  y siguen la dinámica de la función  $M_d : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  definida por  $t \mapsto dt \pmod{1}$ . Puntos arbitrariamente cercanos al círculo unitario tienen un comportamiento asintótico radicalmente diferente que los del círculo. A pesar de que los conjuntos de Julia en general son fractales, las dinámicas en un conjunto de Julia comparten muchas de las propiedades de la función  $M_d$  en el círculo unitario. En el ejemplo antes mencionado, 0 e infinito, son puntos fijos atractores. En general, si  $\mathcal{O}(z) = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$  forma un  $p$ -ciclo, definimos el multiplicador del ciclo como

$$\lambda = (f^p)'(z_i) = f'(z_0) \cdot f'(z_1) \cdots f'(z_{p-1})$$

para algún  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ , si las órbitas pertenecen a  $\mathbb{C}$ . Si las órbitas incluyen el punto al infinito, el multiplicador es definido como antes después de un cambio de variables que mueven la órbita en  $\mathbb{C}$ . La órbita periódica se clasifica como

- atractora si  $|\lambda| < 1$  (superatractora si  $\lambda = 0$ );
- repulsora si  $|\lambda| > 1$ , y
- neutra o indiferente si  $|\lambda| = 1$ ,

donde el último caso se divide en los siguientes dos

- parabólica si  $\lambda = e^{2\pi i p/q}$  con  $p/q \in \mathbb{Q}$ , o
- Indiferente si  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$  con  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

En la siguiente sección 1.3 (teoría local de puntos fijos) describiremos como estas definiciones relacionan la dinámica local alrededor de las órbitas periódicas. Observemos que el multiplicador es cero si y sólo si la derivada es cero en uno de los puntos del ciclo. Los puntos  $z$  para los cuales  $f'(z_0) = 0$  son llamados puntos críticos. La dinámica alrededor de los puntos críticos juegan un papel importante en el estudio de la dinámica de  $f$ .

En el ejemplo básico, los dos puntos fijos atractores 0 e  $\infty$  pertenecen a conjuntos abiertos de órbitas cuyas iteraciones convergen hacia el punto fijo. Tales conjuntos son en general llamados cuencas de atracción.

**Definición 1.2.4. (Cuenca de atracción de un ciclo atractor)** Dado un  $p$  - ciclo atractor  $\mathcal{O}(z_0)$  de  $f$ , definimos la cuenca de atracción  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$  como el conjunto de puntos  $z \in S$  tal que  $f^{np}(z)$  converge a algún  $z_i \in \mathcal{O}(z_0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia. Todas las demostraciones pueden encontrarse en [Mil06] o [Ber93].

**Definición 1.2.5. (Gran órbita y conjunto excepcional)** Dada  $f : S \rightarrow S$  y un punto  $z \in S$  su gran órbita consiste de todos los puntos en  $S$  que están relacionados hacia adelante o hacia atrás con  $z$  bajo iteración por  $f$ . Más precisamente,

$$GO(z) = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^p(z) = f^q(w) \text{ para algún } p, q \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos el conjunto excepcional  $\varepsilon(f)$  como el conjunto de puntos con una gran órbita finita.

Las gran órbitas son totalmente invariantes.

**Teorema 1.2.6. (Propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou)** Sea  $f : S \rightarrow S$  una función en *Rat*.

1. Para cualquier  $k > 0$ , el conjunto de Julia  $\mathcal{J}_{f^k}$  coincide con  $\mathcal{J}_f$ .
2. Todo ciclo atractor y su cuenca de atracción pertenecen a  $\mathcal{F}_f$ .
3. Si  $\mathcal{A}$  es la cuenca de atracción de un ciclo atractor, entonces  $\mathcal{J}_f = \partial\mathcal{A}$ .
4. Todo ciclo repulsor o parabólico pertenece a  $\mathcal{J}_f$ .
5.  $\mathcal{J}_f \neq \emptyset$ . Si  $f \in \text{Rat}$  entonces  $\mathcal{J}_f$  tiene un punto fijo repulsor o un punto fijo parabólico con multiplicador 1.
6. El conjunto  $\varepsilon(f)$  tiene dos puntos si  $f \in \text{Rat}$ .
7.  $\mathcal{J}_f = S$ , o  $\mathcal{J}_f$  no tiene puntos interiores.
8. Si  $z_0 \in S \setminus \varepsilon(f)$ , entonces  $\mathcal{J}_f \subset \overline{\bigcup_{n>0} f^{-n}(z_0)}$ .
9.  $\mathcal{J}_f$  no tiene puntos aislados.
10.  $\mathcal{J}_f$  es o conexo, o tiene muchas componentes no contables.
11. Para  $z$  en un conjunto generico de puntos en  $\mathcal{J}_f$ , la órbita hacia adelante de  $z$  es densa casi dondequiera en  $\mathcal{J}_f$ .
12. Puntos periódicos repulsores son densos en  $\mathcal{J}_f$ .



## 1.3. Teoría local

En esta sección describiremos la dinámica local de  $f$  en una vecindad de un  $p$ -ciclo. Después de reemplazar  $f$  por  $f^p$ , podemos asumir que la órbita es fija. Además, sabemos que  $\mathcal{J}_{f^p} = \mathcal{J}_f$ . Podemos también suponer que el punto fijo es el cero, conjugando por una traslación si es necesario.

Por lo tanto, sea  $f$  una función holomorfa definida en una vecindad del origen con expansión de Taylor

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

donde  $\lambda = f'(0)$  es el multiplicador de  $f$  en el punto fijo 0.

Estamos interesados en encontrar formas normales de  $f$ . Más precisamente, buscamos cambios de variables conformes que conjuguen  $f$  a una función con un número finito de términos en su serie de potencias. La solución del problema depende del valor del multiplicador  $\lambda$ .

### (a) Puntos fijos atractores y repulsores ( $|\lambda| \neq 0, 1$ )

En los casos de atractores y repulsores,  $f$  se conjuga localmente de manera conforme a su parte lineal  $\lambda \mapsto \lambda z$ . El resultado es de 1884 y es dado por Koenigs.

**Teorema 1.3.1. (Linealización de Koenigs)** *Si el multiplicador satisface  $|\lambda| \neq 0, 1$ , entonces existe una vecindad  $U$  del 0 y una conjugación conforme local  $w = \varphi(z)$  donde  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  satisface  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w) = \lambda w$  en  $\varphi(U \cap f^{-1}(U))$ . La conjugación  $\varphi$  es llamada una función de linealización de  $f$  en el punto fijo y es única modulo multiplicación por una constante no cero.*

*Más aún, si  $f_\alpha(z) = \lambda(\alpha)z + a_2(\alpha)z^2 + \dots$  depende holomorfamente de un parámetro complejo  $\alpha$ , que satisface  $|\lambda(\alpha)| \neq 0, 1$ , entonces la función de linealización  $\varphi_\alpha$ , normalizada apropiadamente (por ejemplo por  $\varphi'_\alpha(0) = 1$ ), también depende holomorfamente de  $\alpha$ .*

El teorema de linealización de Koenigs es claramente un resultado local. Pero en el caso atractor, la función de linealización puede ser extendida a toda la cuenca de atracción del punto fijo, a expensas de su biyectividad.

**Teorema 1.3.2. (Linealización global)** *Supongamos  $f$  definida globalmente y con un punto fijo atractor  $z_0$  con  $0 < |\lambda| < 1$ . Sea  $\mathcal{A}$  la cuenca de atracción de  $z_0$ . Entonces, existe una función holomorfa  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\varphi(z_0) = 0$ , tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{w \mapsto \lambda w} & \mathbb{C} \end{array}$$

*conmuta. Más aún,  $\varphi$  es biholomorfa en una vecindad de  $z_0$  (donde se determina*

una conjugación conforme local). La función  $\varphi$  es única módulo multiplicación por una constante no cero.

La función de linealización se construye de la siguiente manera. Sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función de linealización para  $f$  en una vecindad  $U$  de  $z_0$ . Entonces para cualquier  $z \in U$  definimos

$$\varphi(z) = \left( \frac{1}{\lambda^k} \right) \varphi(f^k(z)).$$

donde  $k$  es elegida tal que  $f^k(z) \in U$ . El valor de  $\varphi(z)$  es independiente de la elección de  $k$ . Notemos, que la función definida globalmente ya no es inyectiva. Por ejemplo, toda preimagen de  $z_0$  bajo  $f$  es enviada a 0 por  $\varphi$ .

### (b) Puntos fijos superatractores ( $\lambda = 0$ )

El caso superatractor corresponde a una función holomorfa  $f$  con un punto crítico en el origen. Entonces  $f$  se conjuga localmente de manera conforme a la forma normal  $w \mapsto w^m$  donde  $m - 1$  es la multiplicidad del punto crítico. La siguiente afirmación es de 1904 y es dada por Böttcher.

**Teorema 1.3.3. (Coordenadas de Böttcher)** Sea  $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$  con  $m \geq 2$  y  $a_m \neq 0$ . Entonces existe una vecindad  $U$  del 0 y una conjugación conforme local  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  que conjuga  $f$  a  $w \mapsto w^m$ . La conjugación  $\varphi$  es única módulo multiplicación por una  $m - 1$  raíz de la unidad.

La función  $\varphi$  es llamada función o coordenada de Böttcher. No podemos extender  $\varphi$  a toda la cuenca de atracción como lo hicimos en el caso atractor donde  $\lambda \neq 0$  ya que  $w \mapsto w^m$  no es una función invertible. Sin embargo, es posible extender la función real  $|\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  a toda la cuenca.

Este teorema tiene importantes aplicaciones en la dinámica de polinomios cerca de infinito, que es un punto fijo superatractor para cualquier polinomio de grado  $\geq 2$ .

## 1.4. Teoría global

### Ciclos periódicos, componentes de Fatou y valores singulares

En esta sección  $f : S \rightarrow S$  es una función racional. Describiremos la estructura del conjunto de Fatou. Supongamos que  $\mathcal{J}_f \neq S$ , así que el conjunto de Fatou es abierto y no vacío. En general, tiene infinito número de componentes conexas, llamadas componentes de Fatou. Si  $f \in \text{Rat}$  una componente de Fatou es enviada a una componente de Fatou, ya que  $f$  es una función abierta y los conjuntos de Fatou y Julia son completamente invariantes. Por lo tanto, una componente de Fatou  $U$  es o

- $p$  - periódica, si  $f^p(U) \subset U$  por un mínimo  $p > 0$ ,

- (estrictamente) preperiódica, si  $f^k(U)$  es periódico para alguna  $k > 0$  pero  $U$  no lo es, o
- errante, si  $f^k(U) \cap f^m(U) = \emptyset$  para todo  $k \neq m$ .

Una componente de Fatou 1 - periódica es llamada fija o invariante.

Si  $U$  es  $p$  - periódica, denotamos por  $\mathcal{O}(U)$  el ciclo de componentes de Fatou a la que pertenece  $U$ .

**Teorema 1.4.1. (Clasificación de componentes de Fatou periódicas)** Sea  $f$  como antes y  $U$  una componente de Fatou  $p$  - periódica de  $f$ . Entonces una y sólo una de las siguientes posibilidades ocurre.

1.  $U$  contiene un punto  $z_0$   $p$  - periódico atractor y  $f^{np} \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $z \in U$ . El ciclo  $\mathcal{O}(U)$  es llamado la cuenca inmediata de atracción del ciclo atractor  $\mathcal{O}(z_0)$  (denotada por  $\mathcal{A}^\circ$ ).
2.  $\partial U$  contiene un punto periódico  $z_0$  y  $f^{np}(z) \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $z \in U$ . Entonces  $z_0$  es un punto fijo parabólico de multiplicador 1 para  $f^p$ . El ciclo  $\mathcal{O}(U)$  es llamado la cuenca parabólica inmediata de atracción del ciclo parabólico  $\mathcal{O}(z_0)$ .
3. Existe una función conforme  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$  tal que  $(\varphi \circ f^p \circ \varphi^{-1})(z) = e^{2\pi iw} z$  para algún  $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . El ciclo  $\mathcal{O}(U)$  es llamado un  $p$  - ciclo de discos de Siegel.
4. Existe  $0 < r < 1$  y una función conforme  $\varphi : U \rightarrow A_r := \{r < |z| < 1\}$  tal que  $(\varphi \circ f^p \circ \varphi^{-1})(z) = e^{2\pi iw} z$  para algún  $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . El ciclo  $\mathcal{O}(U)$  es llamado un  $p$  - ciclo de anillos de Herman.

### Hiperbólicidad y conceptos relacionados

Las funciones hiperbólicas juegan un papel importante en dinámica, porque su “estabilidad” bajo perturbación. El siguiente resultado resume sus propiedades.

**Teorema 1.4.2. (Definiciones de hiperbólicidad)** Una función  $f \in \text{Rat}_d$  con  $d \geq 2$  es llamada hiperbólica si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se satisface.

- (a) No existen puntos críticos o ciclos parabólicos en  $\mathcal{J}_f$ .
- (b) Todo punto crítico tiende a un ciclo atractor bajo iteraciones hacia adelante.
- (c) Existe una métrica suave conforme  $\rho$ , definida en una vecindad de  $\mathcal{J}_f$  tal que  $|f'(z)_\rho| > C > 1$  para todo  $z \in \mathcal{J}_f$ .
- (d) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  expande estrictamente la métrica esférica en  $\mathcal{J}_f$ .

Las últimas dos condiciones dicen que  $f$  se expande en su conjunto de Julia. El concepto de expandir sistemas dinámicos es muy general. En este contexto, es equivalente a la hiperbólicidad.

## 1.5. Dinámica polinomial

La teoría general explicada en las secciones anteriores toma una forma especial cuando tratamos con dinámica polinomial.

Para  $d \geq 2$ , sea  $f \in Pol_d$ , esto es

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con  $a_d \neq 0$ . Observemos que  $f(\infty) = \infty = f^{-1}(\infty)$ .

Entonces  $f$  tiene  $d - 1$  puntos críticos en  $\mathbb{C}$  contando multiplicidades y un punto crítico de multiplicidad  $d - 1$  en el infinito. Sea  $Crit(f)$  el conjunto finito de puntos críticos. El punto al infinito es siempre un punto fijo superatractor. De manera que la cuenca de atracción del infinito

$$\mathcal{A}_f(\infty) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\}$$

es siempre conexa, ya que  $f$  no tiene polos, y por lo tanto  $\mathcal{A}_f(\infty)$  no tiene ninguna preimagen que no sea ella misma. El complemento

$$\mathcal{K}_f := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_f(\infty)$$

es llamado el conjunto de Julia lleno. Esté conjunto es completamente invariante y compacto, también es lleno, es decir, que  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_f$  es conexo, o equivalentemente, que toda componente de Fatou es simplemente conexa. Esta es una consecuencia del Principio del Módulo Máximo.

El conjunto de Julia es la frontera en común de dichos conjuntos complementarios, es decir,

$$\mathcal{J}_f = \partial \mathcal{A}_f(\infty) = \partial \mathcal{K}_f$$

mientras que el conjunto de Fatou  $\mathcal{F}_f$  consiste de las componentes conexas  $\mathcal{A}_f(\infty)$  y todas las componentes conexas del interior de  $\mathcal{K}_f$ , si los hay. Ya que  $\mathcal{K}_f$  es lleno, se sigue que  $\mathcal{K}_f$  es conexo si y sólo si  $\mathcal{J}_f$  es conexo.

El nombre “conjunto de Julia lleno” para  $\mathcal{K}_f$  se refiere al hecho que  $\mathcal{K}_f$  se obtiene del conjunto de Julia  $\mathcal{J}_f$  rellenando todas las componentes de Fatou acotadas, si las hay.

La propiedad topológica de conectividad está fuertemente relacionada con el comportamiento dinámico de las órbitas críticas.

**Teorema 1.5.1. (Conectividad de conjuntos polinomiales de Julia)** Sea  $f \in Pol_d$ . Entonces,

- (a)  $\mathcal{K}_f$  es conexo si y sólo si  $Crit(f) \subset \mathbb{K}_f$ . En este caso, la restricción de  $f$  a  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_f$  es conformemente conjugada a  $z \mapsto z^d$  en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ .
- (b)  $\mathcal{K}_f$  es totalmente desconexo si  $Crit(f) \subset \mathcal{A}_f(\infty)$ . En este caso  $\mathcal{J}_f = \mathcal{K}_f$  y es un conjunto de Cantor.

(c) Si al menos un punto crítico de  $f$  pertenece a  $\mathcal{A}_f(\infty)$  entonces ambos conjuntos  $\mathcal{K}_f$  y  $\mathcal{J}_f$  son desconexos y tienen innumerables conjuntos conexos.

Observemos que los incisos (a) y (c) del teorema anterior, implican que  $\mathcal{A}_f(\infty)$  es o simplemente conexo o infinitamente conexo.

**Observación 1.5.2. (Las coordenadas de Böttcher alrededor de infinito)** Ya que el punto al  $\infty$  es un punto fijo superatractor para cualquier  $f \in \text{Pol}_d$ , se sigue del Teorema 1.3.3 que existe una vecindad  $U$  de  $\infty$  y una conjugación conforme  $\varphi = \varphi_f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que conjuga  $f$  a  $z \mapsto z^d$ . Si el polinomio es mónico entonces nos referiremos a las coordenadas de Böttcher como la conjugación que está determinada de manera única por  $f(z)/z \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

### Función de Green, equipotenciales y rayos externos

Supongamos que  $f$  es mónico y sea  $\varphi : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r$  las coordenadas de Böttcher que conjugan  $f$  a  $z \mapsto z^d$  en el dominio  $U$ , que es enviado fuera de  $\mathbb{D}_r$  para el máximo  $r \geq 1$ . Si  $\mathcal{K}_f$  es conexo entonces  $r = 1$  como lo establecido en el Teorema 1.5.1 inciso (a), y si  $\mathcal{K}_f$  es desconexo entonces  $r > 1$  y  $\partial U$  contiene un punto crítico.

Sea  $\mathcal{A}_f^*(\infty) = \mathcal{A}_f(\infty) \setminus \{\infty\}$  y  $U^* = U \setminus \{\infty\}$ . La función de Green para  $\mathcal{K}_f$  es la función armónica real continua  $g : \mathcal{A}_f^*(\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  se extiende  $\log |\varphi| : U^* \rightarrow (\log r, +\infty)$  como se sigue

$$g(z) = \begin{cases} \log |\varphi(z)| & \text{si } z \in U^* \\ \frac{1}{d^k} g(f^k(z)) & \text{si } f^k(z) \in U^*. \end{cases}$$

Ya que  $g(f(z)) = d \cdot g(z)$  para  $z \in U^*$  la función  $g$  es bien definida en todo  $\mathcal{A}_f^*(\infty)$ . También puede ser extendida a todo el plano por  $g \equiv 0$  en  $\mathcal{K}_f$ .

Para  $\rho > 0$ , el conjunto

$$g_\rho := g^{-1}(\rho) = \{z \in \mathcal{A}_f^*(\infty) \mid g(z) = \rho\},$$

es llamado el equipotencial de potencial  $\rho$ . Si  $e^\rho > r$ , es una curva cerrada simple que se extiende alrededor del conjunto de Julia.

Supongamos  $\mathcal{K}_f$  es conexo. Entonces para  $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , la curva

$$R_f(t) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_f \mid \arg(\varphi(z)) = 2\pi t\}$$

es llamada el rayo externo de argumento externo  $t$ . Notemos que  $R_f(t)$  es enviado biyectivamente bajo  $f$  a  $R_f(d \cdot t)$  con argumentos en  $\mathbb{T}$ . En particular, si  $d^p \cdot t \equiv t \pmod{1}$  entonces el rayo  $R_f(t)$  es  $p$ -periódico (con el mínimo  $p$ ).

Por ejemplo,  $R_f(0)$  es siempre fijo, mientras  $R_f(n/d)$  es siempre prefijo para cualquier  $1 \leq n < d$ .

Si el límite

$$\gamma(t) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \varphi^{-1}(r e^{2\pi i t})$$

existe, decimos que  $R_f(t)$  aterriza en el punto  $\gamma(t)$  que necesariamente pertenece al conjunto de Julia. Todos los rayos de argumento racional aterrizan en un punto periódico repulsor o parabólico (ver Thm. 18.10 en [Mil06] o Thm. I.A en [Hub92]). Si  $k$  es el periodo de  $z_0$ , sólo un número finito de rayos, digamos  $q'$ , aterrizan en  $z_0$ , y estos rayos son todos periódicos del mismo periodo, permutan transitivamente por  $f^k$ , y esta permutación debe preservar su orden circular ya que  $f$  es un homeomorfismo local en  $z_0$ , así la permutación debe enviar cada rayo al rayo  $p'$  más cercano, para  $p' < q'$ . Llamamos a  $p/q$  el número de rotación combinatorio de  $f$  en  $z_0$ , donde  $p/q = p'/q'$  en su forma más simple.

Existen polinomios para los cuales los rayos no aterrizan. Pero Fatou mostró que el conjunto de argumentos  $t \in \mathbb{T}$  para el cual  $R_f(t)$  no aterriza, tiene medida cero. Más aún, M. y F. Riesz probaron que dado  $z_0 \in \mathcal{J}_f$  el conjunto de argumentos para el cual  $\gamma(t) = z_0$ , tiene medida cero (cf. [CL66]). El siguiente teorema resume las propiedades de aterrizaje de los rayos externos (cf. Thm. 18.3 en [Mil06]).

**Teorema 1.5.3. (Aterrizaje continuo de rayos)** *Para cualquier polinomio  $f$  con conjunto de Julia conexo, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) *Todo rayo externo  $R_t$  aterriza en un punto  $\gamma(t)$  que depende continuamente del argumento  $t$ .*
- (ii) *El conjunto de Julia  $\mathcal{J}_f$  es localmente conexo.*
- (iii) *El conjunto de Julia lleno  $\mathcal{K}_f$  es localmente conexo.*
- (iv) *La inversa de las coordenadas de Bottcher  $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_f$  se extiende continuamente a  $\partial\mathbb{D}$  y por lo tanto induce una parametrización  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{J}_f$  del conjunto de Julia, dada por  $\gamma(t) = \gamma^{-1}(e^{2\pi it})$ .*

**Observación 1.5.4. (Semi conjugación de Carathéodory)** *Si las condiciones en el teorema anterior se satisfacen entonces la función  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{J}_f$  es una semi conjugación entre la función  $t \mapsto d \cdot t \pmod{1}$  en  $\mathbb{T}$  y  $f$  en  $\mathcal{J}_f$ . Esta es la llamada semi conjugación de Carathéodory de  $\mathcal{J}_f$ . Este es otro ejemplo de cuán fuertemente interactúan las propiedades topológicas y dinámicas.*

### Equivalencias híbridas

Terminaremos esta sección mencionando otro tipo importante de conjugación, a pesar de que es llamada equivalencia por razones históricas.

**Definición 1.5.5. (Equivalencia híbrida)** *Dos polinomios  $f$  y  $g$  en  $Pol_d$  son híbridamente equivalentes si existen vecindades  $U_f$  y  $U_g$  de  $\mathcal{K}_f$  y  $\mathcal{K}_g$ , respectivamente, y una conjugación cuasiconforme  $\bar{\partial}\phi = 0$  casi dondequiera en  $\mathcal{K}_f$ .*

Observemos que por el lema de Weyl esto significa que  $\phi$  es holomorfa en el interior de  $\mathcal{K}_f$ , si éste es no vacío.

Equivalencias híbridas son el tipo de conjugación más fuerte posible cuando los

conjuntos de Julia son conexos, como se muestra en el siguiente teorema (Prop. 21 en [DH85]).

**Teorema 1.5.6. (Clases híbridas son clases afines en el caso conexo)** Sean  $f, g \in \text{Pol}_d$  con conjuntos de Julia conexos. Si  $f$  y  $g$  son híbridamente equivalentes entonces son conjugados afines.

## 1.6. Familias de dinámicas holomorfas: Espacio de parámetros

Consideraremos familias de funciones holomorfas en  $\text{Rat}_d$ , donde  $d$  es fijo, es decir,

$$\{f_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \lambda \in \Lambda\} \subset \text{Rat}_d$$

donde el espacio de parámetros  $\Lambda$  es un campo complejo de dimensión  $N \geq 1$  tal que la función  $\Lambda \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definida por  $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$  es holomorfa, es decir, que los coeficientes de  $f_\lambda$  dependen holomorfamente de  $\lambda$ .

Para definir  $\mathcal{J}$ -estabilidad necesitamos establecer el concepto general de movimiento holomorfo introducido por Mañé, Sad, Sullivan en [MSS83].

**Definición 1.6.1. (Movimiento holomorfo)** Un movimiento holomorfo de un conjunto  $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$  sobre  $\Lambda$  es una función  $H : \Lambda \times A \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que satisface

1. Para  $z \in A$  fijo, la función  $\lambda \mapsto H(\lambda, z)$  es holomorfa.
2. Para  $\lambda \in \Lambda$  fijo, la función  $z \mapsto H_\lambda(z) := H(\lambda, z)$  es inyectiva.
3. La función  $H_{\lambda_0} = Id_A$ , para un punto base  $\lambda_0 \in \Lambda$ .

Notemos que la continuidad de  $H$  no es obligatoria en la definición. Sin embargo, esta propiedad se sigue como consecuencia, como se muestra en el  $\lambda$ -lema probado en [MSS83].

**Lema 1.6.2. ( $\lambda$ -Lema)** Un movimiento holomorfo de  $A$  como antes, tiene una única extensión a un movimiento holomorfo de  $\overline{A}$ . La función extensión  $H : \Lambda \times \overline{A} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es continua, y para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $H_\lambda : A \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  se extiende a una función en sí misma cuasiconforme de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definición 1.6.3. ( $\mathcal{J}$ -estable)** Consideremos como antes una familia holomorfa  $f : \Lambda \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de funciones racionales en  $\text{Rat}_d$ . Para  $\lambda_0 \in \Lambda$ , el conjunto de Julia  $\mathcal{J}_{f_{\lambda_0}}$  es  $\mathcal{J}$ -estable, si existe una vecindad  $U_{\lambda_0} \subset \Lambda$  de  $\lambda_0$  sobre el cual los conjuntos

de Julia se mueven de manera holomorfa, es decir,  $H : U_{\lambda_0} \times \mathcal{J}_{\lambda_0} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $H_\lambda(\mathcal{J}_{\lambda_0}) = \mathcal{J}_\lambda$  y además  $H_\lambda \circ f_{\lambda_0} = f_\lambda \circ H_{\lambda_0}$ .

Funciones racionales hiperbólicas son  $\mathcal{J}$ -estables. El siguiente teorema es probado en [MSS83].

**Teorema 1.6.4. (Conjunto  $\mathcal{J}$ -estable de parámetros)** El conjunto  $\mathcal{J}$ -estable de parámetros  $\Lambda^{\mathcal{J}\text{-estable}} \subset \Lambda$  es un subconjunto abierto denso de  $\Lambda$ .

### 1.6.1. Espacio de parámetros para polinomios cuadráticos: Conjunto de Mandelbrot

La familia holomorfa mejor entendida es  $Pol_2$ . En la parametrización

$$\{P_c(z) = z^2 + c \mid c \in \mathbb{C}\},$$

todo polinomio cuadrático tiene un único representante módulo una conjugación conforme. Para polinomios cuadráticos de la forma  $P_c$  con  $c \in \mathbb{C}$ , sea  $\mathcal{K}_c := \mathcal{K}_{P_c}$ ,  $\mathcal{A}_c := \mathcal{A}_{P_c}(\infty)$  y  $\mathcal{J}_c := \mathcal{J}_{P_c}$ .

En el plano paramétrico  $\mathbb{C}$ , el conjunto de Mandelbrot  $M$ , se define como

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(0) \not\rightarrow \infty\},$$

es decir, el conjunto de los  $c$ -valores para los cuales la órbita del valor crítico  $\{P_c^n(0)\}_n$  es acotada. Se sigue del teorema 1.5.1, que si  $c \in M$  entonces  $\mathcal{K}_c$  (y por lo tanto también  $\mathcal{J}_c$ ) es conexo, y si  $c \notin M$  entonces  $\mathcal{K}_c = \mathcal{J}_c$  es un conjunto de Cantor. Esto significa que

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \mathcal{K}_c \text{ es conexo}\}.$$

Para enfatizar esta propiedad  $M$  es también llamado el lugar de conectividad de la familia cuadrática  $\{P_c\}_{c \in \mathbb{C}}$ .

Las primeras propiedades básicas de  $M$  fueron probadas por Douady y Hubbard en 1982 ([DHL84]).

**Teorema 1.6.5.** El conjunto de Mandelbrot es compacto, conexo y lleno. Más aún, esta contenido en  $\overline{\mathbb{D}}_2$ .

#### Componentes hiperbólicas de $M$

Un polinomio  $P_c$  puede tener a lo más un ciclo atractor en  $\mathbb{C}$ . Se sigue que  $P_c$  es hiperbólica si y sólo si  $P_c$  tiene un ciclo atractor en  $\mathbb{C}$ , o si la órbita del punto crítico es atraída al punto fijo superatractor  $\infty$  (ver teorema 1.4.2). En este caso el  $c$ -valor es llamado un parámetro hiperbólico.

Si  $P_{c_0}$  tiene un  $p$ -ciclo atractor en  $\mathbb{C}$ , entonces se sigue del teorema de la función implícita que el  $p$ -ciclo se mueve holomorfamente para parámetros cercanos a  $c_0$  y que el ciclo sigue siendo atraído. Como consecuencia,  $c_0 \in \text{Int}(M)$ . El conjunto



## 1.6. FAMILIAS DE DINÁMICAS HOLOMORFAS: ESPACIO DE PARÁMETROS 21

abierto maximal que contiene a  $c_0, \Omega$ , de parámetros para los cuales existe un  $p$ -ciclo y permanece atractor es llamado una componente hiperbólica (de periodo  $p$ ) de  $M$ .

Podemos verificar que  $\partial\Omega \subset \partial M$  tal que una componente hiperbólica es en realidad una componente conexa del interior de  $M$ . No se sabe si todas las componentes conexas del interior de  $M$  son hiperbólicas.

**Conjetura 1.6.6. (Conjetura de Hiperbolicidad)**

$$\text{Int}(M) = \bigcup_{\Omega \text{ comp. hyp.}} \Omega$$

Equivalentemente, parámetros hiperbólicos son densos en  $\mathbb{C}$ . La conjetura esta probada para parámetros en el eje real ([GS97], [KSvS07]).

Dada una componente hiperbólica  $\Omega$  de periodo  $p$ , la función multiplicador

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

definida por  $c \mapsto \varphi(c) = (P_c^p)'(z(c))$  donde  $z(c)$  para cada  $c \in \Omega$  denota un punto en el  $p$ -ciclo atractor tal que  $c \mapsto z(c)$  es holomorfa. Se sigue que  $\varphi$  es holomorfa. Una de las primeras construcciones de cirugía fue hecha para probar el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.7. (Función multiplicador)** *Sea  $\Omega$  una componente hiperbólica de  $M$  de periodo  $p$ . Entonces la función multiplicador es un isomorfismo conforme que se extiende continuamente a  $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ .*

Se sigue que todas las componentes hiperbólicas son discos topológicos, cada uno con centro, el único parámetro para el cual el ciclo de atracción es super atractor, es decir,  $\varphi^{-1}(0)$ . La frontera de  $\Omega$  tiene un único punto llamado raíz de  $\Omega$ , para el cual el multiplicador del  $p$ -ciclo es exactamente 1. Adjunto a todo parámetro de la frontera para el cual el multiplicador del ciclo tiene derivada  $e^{2\pi i r/s}$  podemos encontrar una nueva componente hiperbólica de periodo  $p \cdot s$ , que explica parte de la estructura fractal observable cerca de cualquier punto de la frontera de  $M$ .

### La frontera de $M$

La frontera del conjunto de Mandelbrot es intrínsecamente un objeto fascinante que sigue siendo el foco de intensa investigación. Tiene una notable estructura fractal de dimensión de Hausdorff igual a 2 [Shi98], la más alta posible en el plano.

La frontera del conjunto de Mandelbrot puede ser también caracterizado en términos de familias normales como,

$$\partial M = \{c \in \mathbb{C} \mid \{g_n(c) := P_c^n(0)\}_n \text{ no es normal en cualquier vecindad de } c\}.$$

Decimos que  $c \in M$  es Misiurewicz, si  $P_c$  es un polinomio de Misiurewicz. Esta caracterización de  $\partial M$  es usada para probar las siguientes propiedades.

**Teorema 1.6.8. (Parametros en  $\partial M$ )**

- *Puntos de Misiurewicz son densos en  $\partial M$ .*
- *Para cada  $c \in \partial M$ , existe una sucesión  $\{c_n\}_n$  de centros de componentes hiperbólicas tal que  $c_n \rightarrow c$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*
- *Si  $P_c$  es un ciclo parabólico, Siegel o Cremer, entonces  $c \in \partial M$ .*

La  $\mathcal{J}$ -estabilidad puede ser formulada en muchas formas equivalentes diferentes. Para la familia cuadrática  $\{P_c\}_{c \in \mathbb{C}}$ , la  $\mathcal{J}$ -estabilidad en  $c$  es equivalente a la familia de funciones  $g_c(c) := P_c^n(0)$  normal en  $c$ . Por lo tanto

$$\mathbb{C}^{\mathcal{J}\text{-estabilidad}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \{g_n(c)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ normal en una vecindad de } c\} = \mathbb{C} \setminus \partial M.$$

La conjetura más importante sobre el conjunto de Mandelbrot se refiere a una propiedad topológica.

**Conjetura 1.6.9. (MLC)**  *$M$  es localmente conexo.*

**Clases de conjugación**

La familia  $\{P_c\}_{c \in \mathbb{C}}$  tiene exactamente una representación en cada clase de conjugación conforme (por lo tanto afín).

Algunos resultados sobre otros tipos de conjugaciones son resumidos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.10. (Clases de conjugación)**

- *Todos los polinomios en una componente hiperbólica dada con la excepción de sus centros, son globalmente conjugados cuasiconformemente. Si sólo pedimos que las conjugaciones se mantengan en una vecindad del conjunto de Julia, entonces el centro también es incluido.*
- *Si  $c \in \partial M$ ,  $c' \in \mathbb{C}$  y  $P_c$  es cuasiconformemente conjugada a  $P_{c'}$ , entonces  $c = c'$ . En otras palabras, todos los parametros  $c \in \partial M$  son representantes únicos de sus clases de conjugación cuasiconforme.*

Es una pregunta central en dinámica holomorfa si una conjugación topológica implica una conforme.

**Teorema 1.6.11. (Conjetura de rigidez)** *Dos funciones racionales que son topológicamente conjugadas son cuasiconformemente conjugadas.*

En el caso particular de polinomios cuadráticos

$$\text{Conjetura de Rigidez} \implies \text{MLC} \implies \text{Conjetura de hiperbolicidad.}$$

## Capítulo 2

# GEOMETRÍA CUASICONFORME

En este capítulo se darán definiciones básicas, así como resultados de transformaciones cuasiconformes usados en cirugía.

Las funciones holomorfas son muy rígidas, debido a la propiedad de continuidad analítica. Por esta razón no es posible pegar diferentes funciones holomorfas a lo largo de una curva para formar una nueva función holomorfa. Sin embargo, las transformaciones cuasiconformes tienen este tipo de flexibilidad y pueden ser pegadas juntas para formar una nueva transformación cuasiconforme. Es esta flexibilidad la que produce la base para las construcciones de cirugías donde podemos cambiar transformaciones y a veces también los espacios subyacentes. Cuando la construcción es exitosa, el objetivo final del proceso es una transformación holomorfa, obtenida vía el teorema de Integrabilidad.

## 2.1. Caso lineal: Coeficiente de Beltrami y elipses

Sea  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  el plano complejo, visto como el espacio vectorial real euclidiano 2 - dimensional, orientado positivamente con base estándar y ortonormal  $\{1, i\}$ . En  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  usaremos como coordenadas  $(x, y)$  o  $(z, \bar{z})$ , donde  $z = x + iy$  y  $\bar{z} = x - iy$ .

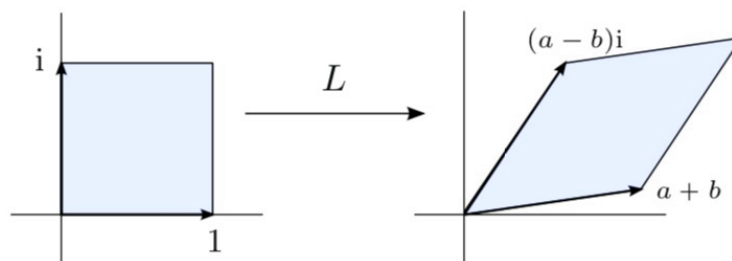
Cualquier transformación  $\mathbb{R}$  - lineal  $L : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  puede ser descrita usando coordenadas  $(z, \bar{z})$ , en la forma

$$L(z) = az + b\bar{z}, \quad \text{con } a, b, z \in \mathbb{C}.$$

El cuadrado unitario, generado por 1 e  $i$ , es transformado en el paralelogramo generado por  $a + b$  y  $(a - b)i$ . Ver Figura 2.1.

El valor absoluto del determinante de  $L$  es el área del paralelogramo, es decir,  $\det(L) = |a|^2 - |b|^2$ . Nos restringiremos a las transformaciones  $\mathbb{R}$  - lineales que son invertibles y que preservan orientación, es decir, con  $|a| > |b|$ .

Definimos el coeficiente de Beltrami de  $L$ , como  $\mu(L) = \frac{b}{a}$ , y sea  $\theta \in \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$  el



**Figura 2.1:** El cuadrado unitario es transformado al paralelogramo generado por  $\{a + b, (a - b)i\}$

argumento de  $\mu(L)$ , es decir,

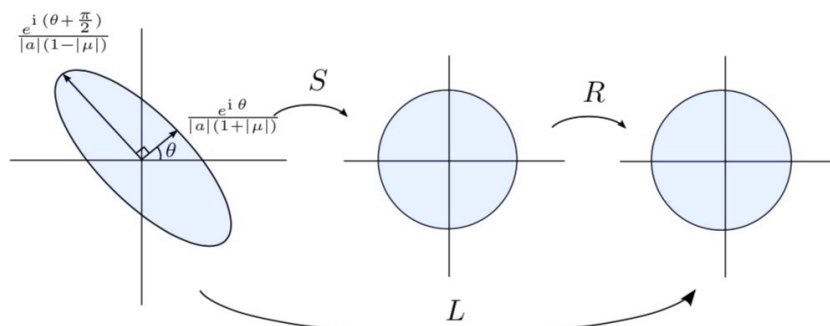
$$\mu(L) := \left| \frac{b}{a} \right| e^{i2\theta}.$$

Notemos que  $\mu(L) \in \mathbb{D}$  cuando  $L$  preserva orientación,  $L$  es holomorfa si y sólo si  $b = 0$ , si y sólo si  $\mu(L) = 0$ .

Para determinar la elipse  $E(L)$ , sea  $a = |a|e^{i\alpha}$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ ,  $\mu = \mu(L)$  y reescribimos a  $L$  como

$$L(z) = e^{i\alpha}|a|(z + |\mu|e^{2\pi\theta}\bar{z}).$$

Por lo tanto,  $L$  es la transformación  $\mathbb{R}$ -lineal  $S(z) = |a|(z + |\mu|e^{2\pi\theta}\bar{z})$  compuesta con una rotación  $R(z) = e^{i\alpha}z$ . Tenemos que  $L$  es la composición de una transformación auto-adjunta seguida de una transformación ortogonal. De aquí que  $S$  tiene dos valores propios y si  $b \neq 0$ , las correspondientes direcciones de los autovectores son ortogonales. Ver Figura 2.2.



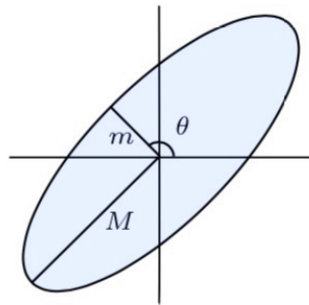
**Figura 2.2:** La elipse  $E(S) = E(L)$ .

Es fácil verificar que  $e^{i\theta}$  y  $e^{i(\theta+\pi/2)}$  son autovalores de  $S$  correspondientes a los autovalores  $|a|(1 + |\mu|)$  y  $|a|(1 - |\mu|)$ , respectivamente. Se sigue que  $E(S)$  es una elipse con medio eje mayor  $\frac{1}{|a|(1 - |\mu|)}$  a lo largo de la dirección  $e^{i(\theta+\pi/2)}$  y medio eje menor

$\frac{1}{|a|(1+|\mu|)}$  a lo largo de la dirección ortogonal  $e^{i\theta}$ . La elipse  $E(L)$  es igual a  $E(S)$ , ya que el círculo unitario se preserva bajo la rotación  $R(z) = e^{i\alpha}z$ . Definimos la dilatación  $K(L)$  de  $L$  como la relación del eje mayor y el eje menor:

$$K(L) := \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|} = \frac{|a|+|b|}{|a|-|b|},$$

y la dilatación compleja de  $L$  como el coeficiente de Beltrami  $\mu(L)$ . La dilatación  $K(L)$  determina la forma de la elipse módulo la escala. Inversamente, si comenzamos con una elipse  $E$ , el coeficiente de Beltrami es determinado por  $\mu(E) = \frac{M-m}{M+m}e^{2i\theta}$ , donde  $M$  y  $m$  son los ejes mayor y menor, respectivamente de  $E$ , y  $\theta$  el argumento de la dirección del eje menor de  $E$  escogido en  $[0, \pi)$ . La dilatación  $K(E)$  es definida de manera natural. Ver Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Dada una elipse  $E$ , definimos  $\mu(E)$  y  $K(E)$  en términos de  $M$ ,  $m$  y  $\theta$ . Obsérvese que escogemos el argumento del eje menor,  $\theta \in [0, \pi)$ .

Denotaremos por  $\sigma_0$  a la estructura conforme estándar en  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ , esto es, considerar  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  como un espacio  $\mathbb{C}$ -vectorial con multiplicación escalar compleja estándar. Cualquier transformación  $\mathbb{R}$ -lineal,  $L$ , invertible puede definir una nueva estructura conforme  $\sigma(L)$  en el dominio de  $L$ , esta es una nueva operación que convierte a  $\mathbb{C}$  en un espacio  $\mathbb{C}$ -vectorial, extendiendo la estructura del espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial. Esto se hace de la siguiente manera: necesitamos definir que significa “multiplicar” elementos de  $\mathbb{C}$  por escalares complejos, esto se reduce (después de imponer todas las propiedades que deben cumplirse) al definir multiplicación por  $i$ . Esto es, necesitamos elegir una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal,  $J$ , y definir  $c * z = \operatorname{Re} cz + \operatorname{Im} c J(z)$  para  $c, z \in \mathbb{C}$ . Se sigue de la imposición de  $i^2 * z = i * i * z$ , que  $J(J(z)) = -z$ . La estructura inducida por  $L$  es definida por la elección de  $J = L^{-1} \circ I \circ L$ , donde  $I(z) = iz$  es la forma estándar.

Terminaremos esta discusión de linealidad considerando como el coeficiente de Beltrami y la dilatación cambian bajo inversión y composición de transformaciones lineales. Comenzaremos con la inversión. Dada una transformación  $L$  como antes,

es fácil probar que

$$L^{-1}(w) = \frac{1}{|a|^2 - |b|^2}(\bar{a}w - b\bar{w}).$$

Se sigue que

$$\mu(L^{-1}) = -\mu(L)e^{i(2 \arg a)} \quad (2.1)$$

de aquí  $|\mu(L^{-1})| = |\mu(L)|$  implica que

$$K(L^{-1}) = K(L). \quad (2.2)$$

Supongamos  $j \in \{1, 2\}$  y sean  $L_j(z) = a_j z + b_j \bar{z}$  dos transformaciones lineales con dilatación  $K_j$  y coeficiente de Beltrami  $\mu_j$ . La elipse definida por la composición  $L_1 \circ L_2$  es la preimagen bajo  $L_2$  de la elipse definida por la transformación  $L_1$ . Observemos que del álgebra lineal, podemos asegurar que

$$K(L_1 \circ L_2) \leq K(L_1)K(L_2),$$

dado que la dilatación maximal posible es el producto de dos dilataciones maximales de cada transformación, mientras que la correspondencia se mantiene en la dilatación minimal.

Si queremos conocer el coeficiente de Beltrami de una nueva elipse, tenemos que calcular la composición

$$(L_1 \circ L_2)(z) = (a_1 a_2 + b_1 \bar{b}_2)z + (a_1 b_2 + b_1 \bar{a}_2)\bar{z},$$

por lo tanto

$$\mu(L_1 \circ L_2) = \frac{b_2 + \mu_1 \bar{a}_2}{a_2 + \mu_1 \bar{b}_2} \quad (2.3)$$

o equivalentemente

$$\mu(L_1 \circ L_2) = \frac{\mu_2 + \mu_1 e^{-2i \arg a_2}}{1 + \mu_1 \mu_2 e^{-2i \arg b_2}}. \quad (2.4)$$

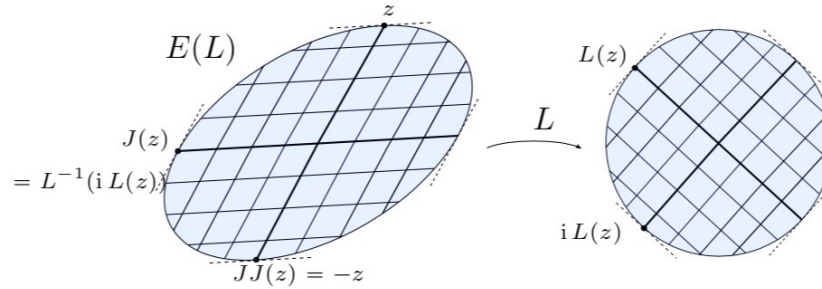
Usaremos estas expresiones más adelante cuando discutamos transformaciones más generales.

### 2.1.1. Interpretación geométrica

Daremos una interpretación geométrica de la estructura conforme  $\sigma$  definida por una elipse, o más bien una familia infinita de elipses concéntricas similares.

Primero, supongamos que tenemos una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal,  $L$ , como antes

y una elipse  $E(L)$ . Dado un diámetro en el círculo unitario o en la elipse  $E(L)$ , el diámetro conjugado es definido como el que está formado por los puntos medios de las cuerdas en el círculo o en la elipse, paralelas al diámetro dado. En el círculo, esto corresponde al diámetro ortogonal. En una elipse genuina, los únicos diámetros conjugados que son ortogonales entre sí son los ejes. (Ver Figura 2.4)

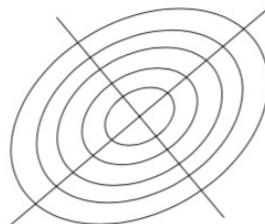


**Figura 2.4:**  $E \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  tal que  $L(E)$  es un círculo en  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ . El par de diámetros conjugados en  $E$  son mandados por  $L$  en su correspondiente par de diámetros conjugados en el círculo  $L(E)$ .

Alternativamente, el diámetro conjugado es una paralela a la línea tangente a la elipse en el punto de intersección con el diámetro dado. La transformación  $L$  manda diámetros conjugados de la elipse  $E(L)$  en diámetros conjugados del círculo, así líneas paralelas son enviadas en líneas paralelas y puntos en puntos.

Si  $z \in E(L)$ , definimos  $J(z)$  como el vector en  $E(L)$  tal que  $z$  y  $J(z)$  están en los diámetros conjugados, pasando de  $z$  en dirección positiva (menor que  $\pi$ ) a  $J(z)$ . Claramente  $J = L^{-1} \circ I \circ L$  donde  $I(z) = iz$ .

Supongamos que una elipse en  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  solo se define módulo la escala, lo que significa que tenemos una familia infinita de elipses concéntricas similares. Ver Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Elipses concéntricas similares. Iguales módulo multiplicación por una constante real.

Tal familia determina una estructura conforme  $\sigma$  en  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ . Para  $z \neq 0$ , escogemos la elipse que contenga a  $z$ . Sea  $J(z)$  el punto en la dirección positiva en esa elipse y en el diámetro conjugado que contiene a  $z$ . La transformación  $J$  claramente satisface  $J(J(z)) = -z$  y define como multiplicar un vector por  $i$ .

## 2.2. Estructuras casi complejas y pullbacks

Sea  $U \subset \mathbb{C}$ , y  $TU = \bigcup_{u \in U} T_u U$  el haz tangente sobre  $U$ , es decir, la colección de los espacios tangentes sobre puntos  $u \in U$ , cada uno visto como una copia de  $\mathbb{C}$ . Una estructura casi compleja en  $U$  es un campo medible de elipses infinitesimales contenidas en  $TU$ . Por esto, nos referimos a una elipse  $E_u \subset T_u U$  definida módulo la escala, para casi todo punto  $u \in U$ , tal que la transformación  $u \mapsto \mu(u)$  de  $U$  en  $\mathbb{D}$  es medible (con respecto a la medida de Lebesgue), donde  $\mu(u)$  denota el coeficiente de Beltrami de  $E_u$ . Cada elipse infinitesimal define una estructura casi compleja  $\sigma(u)$  en  $T_u U$ , según lo definido y explicado en la sección 2.1 haciendo al espacio tangente  $T_u U$  un espacio vectorial  $\mathbb{C}$ -lineal. Denotaremos la estructura casi compleja por  $\sigma$ , y definimos la dilatación de  $\sigma$  como

$$K(\sigma) := \operatorname{ess\,sup}_{u \in U} K(u), \quad \text{donde} \quad K(u) := \frac{1 + |\mu(u)|}{1 - |\mu(u)|}$$

denota la dilatación de  $E(u)$ . Observe que  $K(\sigma) \in [1, \infty]$ .

Notemos también que cualquier función medible  $\mu : U \rightarrow \mathbb{D}$  define una estructura casi compleja asociando a cada punto un campo de elipses.

Veamos ahora como podemos obtener estructuras casi complejas desde transformaciones que satisfacen ciertas condiciones. Consideremos  $U, V \subset \mathbb{C}$  abiertos y la clase  $D^+(U, V)$  de funciones continuas  $f$  que preservan la orientación desde  $U$  en  $V$ , las cuales son  $\mathbb{R}$ -diferenciables casi dondequiera, es decir, diferenciables excepto en un conjunto de medida cero y con un diferencial no singular  $D_u f : T_u U \rightarrow T_{f(u)} V$  casi dondequiera, es decir, definidas excepto en un conjunto de medida cero con la medida de Lebesgue, como la matriz asociada a la transformación lineal, dependiendo de  $u$ . Ya que nosotros trabajaremos en espacios tangentes, usaremos coordenadas infinitesimales  $dz$  y  $d\bar{z}$ . Entonces el diferencial puede ser escrito como

$$D_u f = \partial_z f(u) dz + \partial_{\bar{z}} f(u) d\bar{z}$$

donde

$$\partial_z f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Aplicando la discusión de la sección 2.1 a esta transformación, vemos que  $D_u f$  define una elipse infinitesimal en  $T_u U$  con coeficiente de Beltrami igual a

$$\mu_f(u) = \frac{\partial_{\bar{z}} f(u)}{\partial_z f(u)} \tag{2.5}$$

casi dondequiera o equivalentemente, a una nueva estructura conforme en este espacio tangente, este tipo de estructuras las estudiaremos en la siguiente sección



2.3. La dilatación puede escribirse como

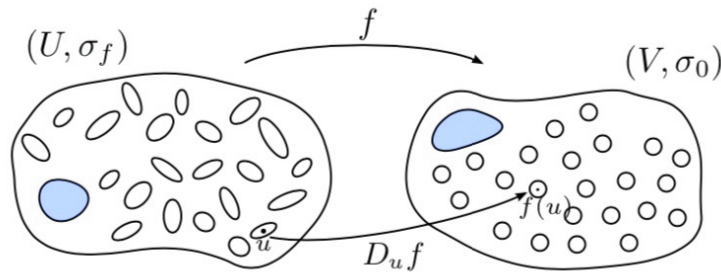
$$K_f(u) := K(D_u f) = \frac{1 + |\mu_f(u)|}{1 - |\mu_f(u)|}.$$

Observemos que la ecuación de Cauchy - Riemann  $\partial_{\bar{z}} f(u) = 0$  se satisface en  $u$  si y sólo si,  $\mu_f(u) = 0$ , o equivalentemente, si y sólo si la elipse es un círculo.

Si hacemos lo mismo para todos los puntos  $u \in U$  para los cuales  $f$  es diferenciable, obtenemos un campo medible de elipses infinitesimales, uno en casi todo espacio tangente o, definido como antes, una estructura casi compleja  $\sigma_f$  en  $U$ , con coeficiente de Beltrami  $\mu_f$ . Decimos que  $\sigma_f$  es el pullback de  $\sigma_0$  (el campo de círculos infinitesimales, conocido como la estructura compleja estándar) por  $f$ , o equivalentemente que  $\mu_f$  es el pullback de  $\mu_0 \equiv 0$  por  $f$ . Escribimos para casi cualquier  $u \in U$

$$\mu_f(u) = f^* \mu_0(u) \quad \circ \quad \sigma_f(u) = f^* \sigma_0(u).$$

La dilatación de esta estructura casi compleja es entonces el supremo esencial sobre  $U$  de  $K_f(u)$ , el cual se denota por  $K_f$ .

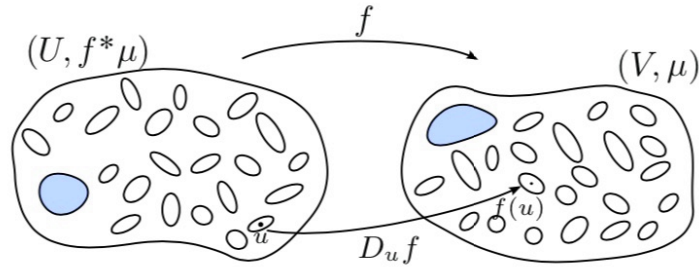


**Figura 2.6:** La estructura casi compleja  $\sigma_f$  en  $U$  es el pullback de  $\sigma_0$  en  $V$ , bajo  $f$ . Los campos de elipses infinitesimales viven en el haz tangente. La elipse infinitesimal en  $T_u U$  es mandada bajo  $D_u f$  (si existe) al círculo infinitesimal en  $T_{f(u)} V$ .

Observemos que dado que el diferencial no necesita variar continuamente con respecto a  $u$ , tampoco los campos de elipses infinitesimales ni el coeficiente de Beltrami. Solo podemos decir que  $\mu_f$  es una función medible (es un cociente de funciones medibles) con respecto a  $u$ , esencialmente en la frontera.

El concepto de pullback puede ser ligeramente generalizado, ya que podemos considerar el pullback de cualquier estructura casi compleja  $\sigma$ , no necesariamente  $\sigma_0$ , bajo una transformación que satisfaga una condición adicional. Necesitamos que la transformación  $f$  sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, requerir que la preimagen por  $f$  de cualquier conjunto de medida cero sea de medida cero. Denotamos por  $D_0^+(U, V)$  la subclase de  $D^+(U, V)$  que consiste de funciones con esta propiedad. Sea  $f \in D_0^+(U, V)$  y  $\mu$  el coeficiente de Beltrami

en  $TV$  correspondiente a la estructura casi compleja  $\sigma$  en  $V$ . Sea  $E_v$  la elipse infinitesimal definida en  $T_vV$  para casi todo  $v \in V$ . Por el pullback por  $f$  de un campo medible de elipses infinitesimales  $\varepsilon$ , nos referimos al campo medible de elipses infinitesimales  $\varepsilon'$  con  $E'_u = (D_u f)^{-1}(E_{f(u)})$ , bien definido para casi cualquier  $u \in U$ . (Ver Figura 2.7).



**Figura 2.7:** El pullback del coeficiente de Beltrami  $\mu$  (en  $V$ ) bajo  $f$  se denota por  $f^*$  (en  $U$ ).

En efecto,  $E'_u$  se define para toda  $u$  tal que  $E_{f(u)}$  está definido y  $D_u f$  existe y es no singular. La primera propiedad se satisface en un conjunto de medida completa por que  $f$  es absolutamente continua y también lo es la segunda propiedad por hipótesis.

Cuando escribimos

$$(U, \mu_1) \xrightarrow{f} (V, \mu_2)$$

significa que  $f : U \rightarrow V$  y  $f^* \mu_2 = \mu_1$ , en el sentido antes explicado.

Si sucede que  $\mu$  está dada por cierta transformación  $g : V \rightarrow W$  en la clase  $D^+(V, W)$  (es decir,  $\mu = \mu_g$ ), entonces

$$f^* \mu_g = f^*(g^* \mu_0) = (g \circ f)^* \mu_0 = \mu_{g \circ f}.$$

De la discusión de la linealidad de la sección 2.1, se sigue que

$$K_{g \circ f} \leq K_f \cdot K_g,$$

y podemos escribir las fórmulas de abajo para los coeficientes de Beltrami (compararlas con las ecuaciones (2.3) y (2.4)):

$$f^* \mu(u) = \frac{\partial_{\bar{z}} f(u) + \mu(f(u)) \overline{\partial_z f(u)}}{\partial_z f(u) + \mu(f(u)) \partial_{\bar{z}} f(u)}, \quad (2.6)$$

y también

$$\mu_{g \circ f}(u) = \frac{\mu_f(u) + \mu_g(f(u))e^{-i2 \arg(\partial_z f(u))}}{1 + \mu_f(u)\mu_g(f(u))e^{-i2 \arg(\partial_z f(u))}}. \quad (2.7)$$

Además, notemos que si  $f$  es holomorfa entonces (2.6) se reduce a

$$f^* \mu(u) = \mu(f(u)) \frac{\overline{\partial_z f(u)}}{\partial_z f(u)}. \quad (2.8)$$

**Definición 2.2.1. (Estructuras casi complejas  $f$  - invariantes)** Sean  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f : U \rightarrow U$  una función en  $D_0^+(U, U)$ . Sea  $\sigma$  una estructura casi compleja en  $U$  con coeficiente de Beltrami  $\mu$ . Decimos que  $\mu$  (o  $\sigma$ ) es  $f$ -invariante si  $f^* \mu(u) = \mu(u)$  para casi toda  $u \in U$ . Escribiremos  $f^* \sigma = \sigma$ . Equivalentemente, diremos que  $f$  es holomorfa (o conforme) con respecto a  $\mu$  (o  $\sigma$ ).

Las estructuras casi complejas que son  $f$  - invariantes tienen una importancia crucial cuando hacemos cirugía. Consideremos la situación particular con las transformaciones  $F \in D_0^+(V, V)$ ,  $G \in D_0^+(U, U)$  y  $f \in D_0^+(U, V)$ , y supongamos que las transformaciones hacen que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{G} & U \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{F} & V \end{array}$$

Notemos que para cualquier estructura casi compleja  $F$  - invariante  $\sigma$  en  $V$  con coeficiente de Beltrami  $\mu$ , el pullback  $f^* \sigma$  en  $U$  es  $G$  - invariante ya que

$$G^*(f^* \mu) = (f \circ G)^* \mu = (F \circ f)^* \mu = f^*(F^* \mu) = f^* \mu.$$

Observemos que si la función inversa  $f^{-1}$  es absolutamente continua, entonces tiene sentido empujar hacia delante las estructuras casi complejas, lo que significa tomar el pullback de las funciones bajo  $f^{-1}$  del haz tangente  $TU$  al  $TV$ . Escribiremos  $f_* = (f^{-1})^*$ , tenemos entonces

$$K_{f^{-1}} = K_f.$$

Como observación final, se tiene que tomar en cuenta que incluso podemos permitir que  $f$  no sea invertible siempre que pertenezca localmente a la clase  $D_0^+$ , excepto alrededor de un conjunto discreto de "puntos críticos". Alrededor de los puntos críticos la operación empujar hacia delante no esta bien definida (debido a múltiples pre imágenes bajo  $f^{-1}$ ) pero el pullback por  $f$  si lo es. Los puntos críticos no son importantes ya que las estructuras casi complejas están definidas casi dondequiera.

### 2.2.1. Estructuras casi complejas y simetrías

Sea  $\mu$  el coeficiente de Beltrami de una estructura casi compleja definida en  $\mathbb{C}$ . Nos gustaría definir lo que significa para  $\mu$  ser simétrico con respecto al eje real o al círculo unitario. Transformaciones que proporcionan estas simetrías son precisamente  $c(z) = \bar{z}$  para  $\mathbb{R}$  y  $\tau(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  para  $\mathbb{S}^1$ . Podría parecer razonable decir que el coeficiente de Beltrami que es simétrico con respecto a, digamos, el círculo unitario, sea  $\tau$ -invariante. Pero las reflexiones  $c$  y  $\tau$  son antiholomorfas y por lo tanto invierten orientación, y hasta ahora no hemos definido que significa hacer pullback a estructuras casi complejas bajo dichas transformaciones.

De una manera general, consideremos conjuntos abiertos  $U, V \subset \mathbb{C}$  y una función que preserva la orientación  $f \in D_0^-(U, V)$ , definido análogamente para  $D_0^+(U, V)$  con el diferencial  $D_u f : T_u U \rightarrow T_{f(u)}$ . Sea  $\mu$  el coeficiente de Beltrami en  $V$ .

**Definición 2.2.2. (Pullback bajo transformaciones que preservan la orientación)** En la situación anterior, definimos el pullback de  $\mu$  bajo  $f$  como

$$f^{\circledast} \mu := \bar{f}^* \bar{\mu}.$$

En particular

$$f^{\circledast} \mu_0 := \mu_{\bar{f}} \quad \text{y} \quad K_f := K_{\bar{f}}.$$

Observemos que  $\bar{f}$  preserva orientación y por lo tanto las definiciones tienen sentido formal. Retomando el problema inicial, obtenemos lo siguiente.

**Definición 2.2.3. (Simetrías)** Un coeficiente de Beltrami es simétrico con respecto a  $\mathbb{R}$ , si y sólo si

$$\mu(z) = \overline{\mu(\bar{z})},$$

o equivalentemente, si  $c^{\circledast} \mu = \mu$  donde  $c(z) = \bar{z}$ .

Decimos que  $\mu$  es simétrico con respecto a  $\mathbb{S}^1$ , si y sólo si

$$\mu(z) = \overline{\mu(1/\bar{z})} \frac{z^4}{|z|^4} = \overline{\mu(1/\bar{z})} e^{4i \arg z},$$

o equivalentemente, si  $\tau^{\circledast} \mu = \mu$  donde  $\tau(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ .

## 2.3. Transformaciones cuasiconformes

Estamos listos para definir transformaciones cuasiconformes. Existen varias definiciones equivalentes de  $K$ -cuasiconformidad para un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$  entre dominios de  $\mathbb{C}$  que preserve la orientación, donde  $1 \leq K < \infty$ . Como ya veremos, una transformación 1-cuasiconforme es conforme. El valor de  $K$  puede ser considerado como una medida de que tan cerca esta  $\phi$  de ser conforme. A pesar

de que una transformación cuasiconforme es siempre  $\mathbb{R}$  - diferenciable casi dondequiera y con dilatación acotada, lo contrario no es verdad.

No trataremos de dar un procedimiento autónomo de la teoría de transformaciones cuasiconformes, sino que daremos una visión general que debería ser suficiente para las aplicaciones de las transformaciones cuasiconformes en dinámica holomorfa, y para la cirugía cuasiconforme en particular.

Las referencias a la literatura son principalmente los libros de texto clásicos por Ahlfors [Ahl06] y por Lehto y Virtanen [LV73]. También los trabajos modernos por Hubbard [HH06], por Lyubich [Lyu13] y por Astala et al. [AIM08].

La idea original de una transformación cuasiconforme se remonta a Grötzsch y se formula geoméricamente en términos del módulo de cuadriláteros  $Q$  en  $U$  y  $\phi(Q)$  en  $V$ , o alternativamente, del módulo de un anillo  $A$  en  $U$  y  $\phi(A)$  en  $V$ .

Las definiciones analíticas son formuladas en términos de derivadas distributivas de  $\phi$ , o alternativamente, de derivadas ordinarias parciales de  $\phi$  casi dondequiera para una transformación que es absolutamente continua en líneas.

### 2.3.1. Primer definición analítica de transformaciones cuasiconformes

Comenzaremos con el enfoque más moderno (no necesariamente el más intuitivo) para definir transformaciones cuasiconformes, usando derivadas distributivas. Daremos una breve introducción a este concepto.

Una función de prueba es una función  $C^\infty$  con soporte compacto en  $U$ , y el espacio de funciones de prueba es denotado por  $C_c^\infty(U)$ . Con la topología adecuada, esto es un espacio vectorial topológico, y las distribuciones son precisamente funcionales linealmente continuos en este espacio, es decir,  $L : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ .

Como un ejemplo, si  $\phi \in L^1_{loc}(U)$  (es decir, es localmente integrable como por ejemplo cualquier función continua), entonces  $\phi$  define una distribución

$$L_\phi(h) := \int_U \phi \cdot h \, dm,$$

donde  $m$  denota la medida de Lebesgue. Estas son en realidad las distribuciones que nos interesarán pensando en que no todas las distribuciones son de esta forma. A menudo se utiliza el mismo símbolo para la función en  $L^1_{loc}(U)$  y la distribución que define.

Observe que si  $h$  es una función de prueba entonces  $\partial_z h$  y  $\partial_{\bar{z}} h$  son también funciones de prueba. Se sigue que si  $L$  es una distribución, entonces  $h \mapsto L(\partial_z h)$  y  $h \mapsto L(\partial_{\bar{z}} h)$  son también distribuciones.

**Definición 2.3.1. (Derivadas distributivas)** Si  $L$  es una distribución definimos sus derivadas distributivas como las distribuciones

$$(\partial L)(h) := -L(\partial_z h) \quad \text{y} \quad (\bar{\partial} L)(h) := -L(\partial_{\bar{z}} h).$$

El signo menos en esta definición es necesario ya que si  $\phi$  es una función  $\mathcal{C}^1$ , entonces

$$\partial L_\phi = L_{\partial_z \phi} \quad \text{y} \quad \bar{\partial} L_\phi = L_{\partial_{\bar{z}} \phi}.$$

Pero si  $\phi \in L^1_{loc}(U)$  no es  $\mathcal{C}^1$ , entonces las derivadas distributivas no necesitan ser definidas por funciones, a pesar de que son distribuciones. Sin embargo, si existen  $\phi_1, \phi_2 \in L^1_{loc}(U)$  tal que

$$\partial L_\phi = L_{\phi_1} \quad \text{y} \quad \bar{\partial} L_\phi = L_{\phi_2},$$

entonces  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se denotan por  $\partial\phi$  y  $\bar{\partial}\phi$ , donde  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  son llamadas las derivadas de  $\phi$  en el sentido de distribuciones, o derivadas distributivas de  $\phi$  en  $L^1_{loc}(U)$ .

Precisamente,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  deben satisfacer

$$\int \phi_1 \cdot h \, dm = - \int \phi \cdot \partial_z h \, dm \quad \text{y} \quad \int \phi_2 \cdot h \, dm = - \int \phi \cdot \partial_{\bar{z}} h \, dm \quad (2.9)$$

para cualquier función de prueba  $h \in \mathcal{C}^\infty_c$ . Más generalmente, para  $p \geq 1$ , si existen  $\phi_1, \phi_2 \in L^p_{loc}(U)$  decimos que  $\phi$  tiene derivadas distributivas en  $L^p_{loc}(U)$ . El espacio de funciones en  $L^p_{loc}(U)$  (o distribuciones) que tiene derivadas distributivas en  $L^p_{loc}(U)$  es llamado espacio de Sobolev  $W^{1,p}_{loc}(U)$ . Observemos que  $L^p_{loc}(U) \subset L^1_{loc}(U)$  para  $p > 1$ .

Si  $\phi \in \mathcal{C}^1$ , sus derivadas distributivas son precisamente sus derivadas en el sentido ordinario.

Estamos listos para la primera definición de transformación cuasiconforme.

**Definición 2.3.2. (Primera definición de transformaciones  $K$  - cuasiconformes)**  
Sea  $U$  y  $V$  dominios en  $\mathbb{C}$ , y sea  $K \geq 1$  dada. Sea  $k := (K - 1)/(K + 1)$ . Entonces  $\phi : U \rightarrow V$  es  $K$  - cuasiconforme si y sólo si

- (i)  $\phi$  es un homeomorfismo,
- (ii) las derivadas parciales  $\partial\phi$  y  $\bar{\partial}\phi$  existen en el sentido de distribuciones y pertenecen a  $L^2_{loc}$  (es decir, localmente cuadrado integrable),
- (iii) y satisface  $|\bar{\partial}\phi| \leq k|\partial\phi|$  en  $L^2_{loc}$ .

**Observación 2.3.3.** (a) Observemos que si  $\phi$  es un homeomorfismo  $\mathcal{C}^1$  entonces  $\phi$  es cuasiconforme si satisface  $|\partial_{\bar{z}}\phi| \leq k|\partial_z\phi|$ , para algún  $k < 1$ .

- (b) Si  $\phi$  es un difeomorfismo entre conjuntos compactos, entonces  $\phi$  es cuasiconforme. Para obtener la cota  $K$  en la dilatación, usamos simplemente la continuidad de las derivadas y el hecho de que una función continua alcanza su máximo valor en un conjunto compacto.

### 2.3.2. Segunda definición analítica de transformaciones cuasiconformes

Una transformación cuasiconforme, en lugar de usar derivadas parciales en el sentido de distribuciones, se puede caracterizar en términos de continuidad absoluta en líneas. Esta es una condición que asegura la existencia de derivadas parciales en el sentido ordinario casi dondequiera.

**Definición 2.3.4. (Continuidad absoluta en un intervalo)** Una función continua compleja  $f$  definida en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  es llamada absolutamente continua en  $I$  si satisface lo siguiente: Para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta > 0$  tal que  $\sum_j |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$  para toda sucesión finita de intervalos disjuntos  $(a_j, b_j)$  cuya cerradura esta contenida en  $I$  y de longitud total  $\sum_j |b_j - a_j| < \delta$ .

Si  $f$  es absolutamente continua en  $I$ , entonces  $f$  es de variación acotada local, por lo tanto  $f$  tiene una derivada  $f'(x)$  en el sentido ordinario para toda  $x \in I$ . Ver Sect. 2.7 Chapt. III [LV73]

La noción anterior de continuidad absoluta en un intervalo se generaliza a una función compleja en un dominio  $U$  de la siguiente manera.

**Definición 2.3.5. (ACL, continuidad absoluta en líneas)** Una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  se llama absolutamente continua en líneas, si para alguna familia de líneas paralelas, contenidas en cualquier disco  $D$  compactamente contenido en  $U$  (esto es,  $\overline{D} \subset U$ ),  $f$  es absolutamente continua en casi todas ellas.

De la discusión de intervalo anterior se deduce que si  $f$  es absolutamente continua en líneas, entonces  $f$  tiene derivadas parciales en el sentido ordinario casi dondequiera en  $U$ . La existencia de derivadas parciales en un punto no necesariamente implica diferenciabilidad de  $f$  en el punto. Sin embargo, el siguiente resultado por Gehring y Lehto es verdadero. (Ver pp. 17-18 en [Ahl06] y p. 128 en [LV73]).

**Teorema 2.3.6. (Diferenciabilidad casi dondequiera)** Sea  $f : U \rightarrow V$  una función continua y abierta. Si  $f$  tiene derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  en el sentido ordinario, casi dondequiera, entonces  $f$  es  $\mathbb{R}$ -diferenciable casi dondequiera.

Notemos que para que las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  existan casi dondequiera es suficiente para que  $f$  sea absolutamente continua a lo largo de casi todas las líneas verticales y horizontales, en todo rectángulo compacto contenido en  $U$ . Por lo tanto,  $\partial_z f$  y  $\partial_{\bar{z}} f$  son definidas casi dondequiera. Ya que la integral del Jacobiano sobre un conjunto es acotada por arriba por el área de la imagen de este conjunto, se sigue que el Jacobiano  $Jac f = |\partial_z f|^2 - |\partial_{\bar{z}} f|^2$  esta en  $L^1_{loc}$ .

Pero para realmente relacionar la propiedad ACL con la definición de cuasiconformidad necesitamos entender la relación de las derivadas ordinarias y las distributivas. Resulta que estas dos coinciden cuando ambas son localmente integrables. (Ver p. 19 en [Ahl06] y Lem. A.5.2 en [AIM08]).

**Lema 2.3.7. (Caracterización ACL de espacios Sobolev)** Una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  esta en  $W_{loc}^{1,1}$  (es decir, tiene derivadas distributivas en  $L_{loc}^1$ ) si y sólo si  $f$  es ACL y sus derivadas parciales ordinarias estan en  $L_{loc}^1$ . Cuando es este el caso, las derivadas distributivas y ordinarias coinciden.

Estamos listos para formular la segunda definición analítica.

**Definición 2.3.8. (Segunda definición analítica de transformaciones  $K$  - cuasiconformes)** Una transformación  $\phi : U \rightarrow V$  es  $K$  - cuasiconforme si y sólo si

1.  $\phi$  es un homeomorfismo,
2.  $\phi$  es ACL,
3.  $|\partial_z \phi| \leq k |\partial_z \phi|$ , casi dondequiera cuando  $k := \frac{K-1}{K+1}$ .

Para concluir que ambas definiciones son equivalentes debemos añadir algo a las afirmaciones anteriores. Es decir, ya que  $\phi$  es ACL, el Jacobiano esta en  $L_{loc}^1$  y 3 se cumple, se sigue entonces

$$|\bar{\partial} \phi|^2 \leq |\partial_z \phi|^2 \leq \frac{Jac \phi}{1 - k^2},$$

y por lo tanto las derivadas parciales son localmente cuadrado integrables.

Con esta definición podemos ahora relacionar la sección previa de estructuras casi complejas y pullbacks por una transformación cuasiconforme  $\phi$ . Ya que tenemos que  $\phi$  es  $\mathbb{R}$  - diferenciable casi dondequiera, y como veremos en el teorema 2.3.9 con un diferencial no singular definido casi dondequiera, la condición 3 en la segunda definición analítica requiere que el coeficiente de Beltrami  $\mu_\phi = \frac{\partial_z \phi}{\partial_z \phi}$  tenga módulo acotado lejos del 1, casi dondequiera, es decir,  $\|\mu_\phi\|_\infty < 1$ . Equivalentemente, en el lenguaje de pullbacks, pedimos que la estructura casicompleja  $\phi^* \sigma_0$ , inducida por  $\phi$  como el pullback de la estándar, tenga dilatación acotada, es decir,  $K_\phi = K < \infty$ . Cuanto mayor es  $K$ , más alejadas estan las elipses de ser círculos, es decir, cuanto más lejos esta la función  $\phi$  de ser conforme.

Sin embargo, esta condición por sí sola no es suficiente. Incluso si  $\phi^* \sigma$  tiene dilatación acotada, por ejemplo, ACL es necesaria para asegurar cuasiconformidad.

### 2.3.3. Un ejemplo, la escalera del diablo

El siguiente ejemplo clásico es un homeomorfismo  $F : \mathbb{C}_\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_\mathbb{R}$ , el cual es  $\mathbb{R}$  - diferenciable casi dondequiera y con un  $\mathbb{R}$  - diferencial no singular casi dondequiera. Sin embargo, no es absolutamente continuo en líneas horizontales.

Sea  $\Lambda \subset [0, 1]$  el conjunto de Cantor usual. La función de Cantor  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , es llamada la función escalera del diablo, se define de dos maneras a continuación.



Recordemos que el conjunto de Cantor  $\Lambda$  consiste de los puntos  $x \in [0, 1]$ , que en base 3 tienen representación de la forma

$$x = .x_1x_2 \dots x_n \dots = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots \quad \text{con } x_n \in \{0, 2\}.$$

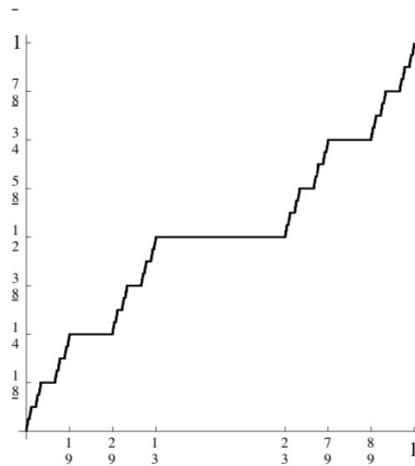
Definimos a  $f$  como la única función no decreciente, en que  $x \in \Lambda$  como arriba, se envía al valor con la siguiente representación en base 2

$$f(x) = .\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots = \frac{\bar{x}_1}{2} + \frac{\bar{x}_2}{2^2} + \dots + \frac{\bar{x}_n}{2^n} + \dots$$

donde  $\bar{x}_n$  es igual a 0 si  $x_n = 0$  y 1 si  $x_n = 2$ . El conjunto de Cantor tiene medida cero y  $f(\Lambda) = [0, 1]$ .

Alternativamente  $f$  es definida como la función límite  $f = \lim f_n$  de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definida inductivamente comenzando con  $f_0(x) = x$ , y para  $n \geq 0$

$$f_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x - 2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



**Figura 2.8:** Gráfica de la función Cantor, una escalera del diablo.

La función  $f$  es igual a la constante  $\frac{1}{2^n}$  en cualquier intervalo del conjunto de Cantor de la forma  $[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}]$  con la  $j$  apropiada. Por lo tanto la derivada es  $f'(x) = 0$  en  $[0, 1] \setminus \Lambda$ , es decir, casi dondequiera. Sin embargo,  $f$  no es absolutamente continua en  $[0, 1]$ , ya que el conjunto de Cantor puede ser cubierto por un conjunto finito de intervalos abiertos de longitud total arbitrariamente pequeña, pero para la cual la suma correspondiente  $\sum_j |f(b_j) - f(a_j)|$  sea mayor que, digamos  $\frac{1}{2}$ .

Ahora extenderemos la función a  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = 0$  para  $x \leq 0$  y  $f(x) = 1$  para

$x \geq 1$ . Sea  $F : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  definida como  $F(x + iy) = x + i(y + f(x))$ , para  $x + iy \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ . Entonces  $F$  es un homeomorfismo que preserva la orientación, con  $\partial_z F(x + iy) = 1$  y  $\partial_{\bar{z}} F(x + iy) = 0$  para  $x + iy \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \setminus (\Lambda + i\mathbb{R})$ , es decir, casi dondequiera. Se sigue del ejemplo 1 - dimensional que  $F$  no es absolutamente continua en líneas horizontales y por lo tanto  $F$  no es ACL.

### 2.3.4. Propiedades de las transformaciones cuasiconformes

Sea  $\phi : U \rightarrow V$  un homeomorfismo que preserva la orientación. En esta sección daremos algunas propiedades útiles de las transformaciones cuasiconformes. En muchos casos ayudan a decidir la cuasiconformidad de una transformación. En general nos referimos a [Ahl06] para las demostraciones.

- P1** Si  $\phi$  es  $K$  - cuasiconforme, entonces  $\phi^{-1}$  es  $K$  - cuasiconforme.
- P2** Si  $\phi$  es  $K$  - cuasiconforme, entonces cualquier composición a la izquierda o derecha con una transformación conforme es  $K$  - cuasiconforme.
- P3** La composición de una transformación  $K_1$  - cuasiconforme y una transformación  $K_2$  - cuasiconforme es  $K_1 K_2$  - cuasiconforme.  
La siguiente afirmación viene directamente de la primer definición analítica, aunque se hace evidente cuando pensamos en términos geométricos.
- P4** El homeomorfismo  $\phi$  es  $K$  - cuasiconforme si y sólo si  $\phi$  es localmente  $K$  - cuasiconforme.  
La siguiente propiedad se sigue también de las definiciones analíticas.
- P5** Si  $\phi$  es  $K$  - cuasiconforme y de clase  $C^1$ , entonces la dilatación de la elipse infinitesimal  $E_z$  en  $T_z U$  es acotada por  $K$ , para todo  $z \in U$ .  
En efecto, si el  $\mathbb{R}$  - diferencial cambia constantemente, entonces también lo hace la dilatación de  $E_z$ . Si la dilatación fuera más grande que  $K$  en algún punto, esto sería verdad en una vecindad del punto, es decir, en un conjunto de medida positiva.
- P6** Si  $\phi$  es  $K$  - cuasiconforme, entonces  $\phi$  satisface la condición uniforme de Hölder

$$|\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|^{1/K}$$

en todo subconjunto compacto de  $U$ .

- P7** Si  $\phi$  es bilipschitz, es decir, si existe  $L > 0$  tal que

$$L^{-1}|z_1 - z_2| \leq |\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

entonces  $\phi$  es cuasiconforme. Lo contrario no es cierto. (Ver también [Roh97]).

El siguiente es un resultado muy útil en aplicaciones de cirugía. Ver p.16 [Ahl06].

**Teorema 2.3.9. (Lema de Weyl)** Si  $\phi$  es 1 - cuasiconforme, entonces  $\phi$  es conforme. En otras palabras, si  $\phi$  es cuasiconforme y  $\partial_{\bar{z}}\phi = 0$  casi dondequiera, entonces  $\phi$  es conforme.

Una propiedad importante es que las transformaciones cuasiconformes son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 2.3.10. (Lema de Rickman)** Sea  $U \subset \mathbb{C}$  abierto,  $C \subset U$  compacto,  $\phi$  y  $\Phi$  dos transformaciones  $U \rightarrow C$  que son homeomorfismos en sus imágenes. Supongamos que  $\phi, \Phi$  son cuasiconformes en  $U \setminus C$ , y que  $\phi = \Phi$  en  $C$ . Entonces  $\Phi$  es cuasiconforme y  $\partial_{\bar{z}}\phi = \partial_{\bar{z}}\Phi$  casi dondequiera en  $C$ .

**Teorema 2.3.11. (Compacidad)** El conjunto de homeomorfismos  $K$  - cuasiconformes  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , con  $\phi(0) = 0$  es compacto en la topología de convergencia uniforme de subconjuntos compactos.

### 2.3.5. Transformaciones y formas de Beltrami en superficies de Riemann

Hasta ahora hemos definido las transformaciones cuasiconformes, coeficientes de Beltrami y pullbacks de coeficientes de Beltrami en subconjuntos de  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, necesitamos estas nociones también en la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . Por consiguiente, discutimos brevemente cómo los diferentes términos se extienden a las superficies de Riemann. Se definen localmente con cartas, donde concuerden con las definiciones anteriores. El trabajo extra consiste en checar que las definiciones sean independientes de las cartas en donde son expresadas. Verificarlo es fácil, solo tenemos que reformular lo que ya conocemos.

Primer notación: Recordemos que una superficie de Riemann  $S$  es un campo complejo 1 - dimensional, es decir, un campo real 2 - dimensional dotado con la estructura analítica compleja. Tal estructura es dada por una colección de cartas  $\varphi : U_S \rightarrow U$  que forman un atlas. Para cada carta,  $\varphi$  es un homeomorfismo de un subconjunto abierto  $U_S$  de  $S$  en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{C}$ . La unión de todos los dominios  $U_S$  es igual a  $S$ , y para cualquier par de cartas sobrepuestas, la transformación de transición es conforme, es decir, si  $\tilde{\varphi} : \tilde{U}_S \rightarrow \tilde{U}$  es una carta tal que  $U_S \cap \tilde{U}_S \neq \emptyset$  entonces

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_S \cap \tilde{U}_S) \rightarrow \tilde{\varphi}(U_S \cap \tilde{U}_S)$$

es conforme.

Observemos que una superficie topológica  $S$  puede ser dotada con una estructura cuasiconforme (resp. suave), esto significa, con una colección de cartas  $\varphi : U_S \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  que forman un atlas con transformaciones de transición cuasiconformes (resp. suaves).

Cuando se trata de transformaciones entre superficies de Riemann, su regularidad

esta siempre definida en términos de regularidad de transformaciones entre conjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$  inducido por cartas. En este sentido, un isomorfismo conforme entre superficies de Riemann es un isomorfismo que es localmente conforme (entre conjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$ ) cuando se expresa con cartas.

Un teorema notable por Koebe y Poincaré establece que existen solo tres posibles superficies de Riemann simplemente conexas, módulo composiciones con isomorfismos conformes. Para una prueba, ver por ejemplo Chapt. 10 en [Ahl10], IV.4. en [FK92], o Chapt. 1 en [HH06]

**Teorema 2.3.12. (Teorema de Uniformización)** *Sea  $S$  una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces  $S$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

Ahora analizaremos transformaciones cuasiconformes entre superficies de Riemann.

**Definición 2.3.13. (Transformaciones  $K$  - cuasiconformes entre superficies de Riemann)** *Sean  $S, S'$  dos superficies de Riemann, y sea  $\phi : S \rightarrow S'$  un homeomorfismo. Entonces  $\phi$  es cuasiconforme si y sólo si existe  $K \geq 1$  tal que  $\phi$  es localmente  $K$  - cuasiconforme cuando se expresa con cartas.*

Para un punto arbitrario  $s \in S$  escogemos una carta arbitraria  $\varphi : U_s \rightarrow U$  definida en una vecindad de  $U_s$  de  $s$  y escogemos una carta arbitraria  $\varphi' : U'_s \rightarrow U'$  definida en una vecindad  $U'_s$  de  $\phi(s)$ . Podemos suponer que  $\phi(U_s) = U'_s$ . Por definición  $\phi|_{U_s} : U_s \rightarrow U'_s$  es  $K$  - cuasiconforme si  $\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow U'$  es  $K$  - cuasiconforme. El concepto está bien definido ya que es independiente de las cartas donde verificamos localmente  $K$  - cuasiconformidad. Esto se sigue de la propiedad P2 en la sección 2.3.4: la composición de transformaciones  $K$  - cuasiconformes con transformaciones conformes a la izquierda o derecha es de nuevo  $K$  - cuasiconforme. Cambiar cartas en el dominio y el rango de  $\phi$  corresponde exactamente a componer  $\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}$  izquierda y derecha con transformaciones conformes, es decir,

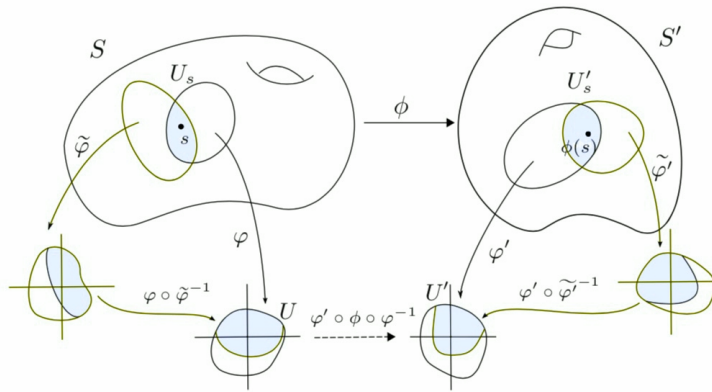
$$(\tilde{\varphi}' \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^{-1} = \tilde{\varphi}' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

donde  $\tilde{\varphi}$  y  $\tilde{\varphi}'$  son cartas alrededor de  $s$  y  $\phi(s)$ , respectivamente. Ver Figura 2.9.

Ahora veremos como los coeficientes de Beltrami en subconjuntos de  $\mathbb{C}$  son generalizados a formas de Beltrami en superficies de Riemann.

**Definición 2.3.14. (Forma de Beltrami en una superficie de Riemann)** *Una forma de Beltrami  $\mu$ , también llamada diferencial de Beltrami, en una superficie de Riemann  $S$  es un diferencial  $(-1, 1)$  en  $S$ .*

Localmente un diferencial  $(-1, 1)$  es expresado como  $\mu(z)d\bar{z}/dz = \mu(z)dz^{-1}d\bar{z}$ . Formalmente, esto significa que si  $\varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  son dos cartas sobrepuestas definidas en  $S$  con la transformación conforme  $h = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ , entonces la forma de Beltrami satisface la siguiente regla de transformación



**Figura 2.9:** Bosquejo de una transformación  $K$ -cuasiconforme  $\phi$  entre superficies de Riemann. La composición  $\phi' \circ \phi \circ \phi^{-1} : U \rightarrow U'$  es  $K$ -cuasiconforme, mientras que las funciones de transición  $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$  y  $\phi' \circ \tilde{\phi}'^{-1}$  entre las áreas sombreadas son conformes.

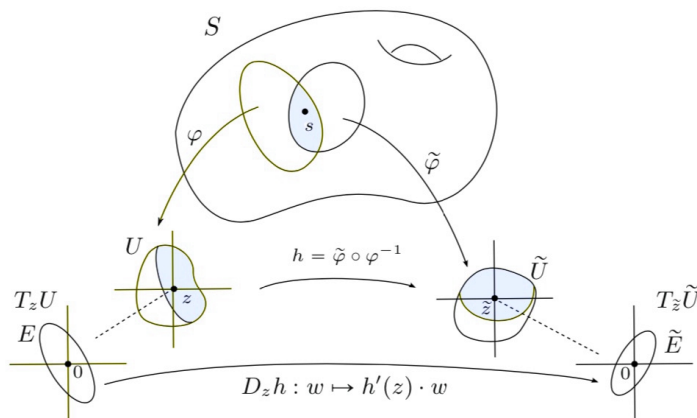
$$\mu_\phi(z) = \mu_{\tilde{\phi}}(\tilde{z}) \frac{\overline{h'(z)}}{h'(z)} \tag{2.10}$$

donde  $z = \phi(s)$  y  $\tilde{z} = \tilde{\phi}(s)$ . En otras palabras,  $\mu_\phi(z)$  y  $\mu_{\tilde{\phi}}(\tilde{z})$  son los coeficientes de Beltrami de la forma de Beltrami cuando se expresa en la coordenada  $z$  en  $U$ , respectivamente la coordenada  $\tilde{z}$  en  $\tilde{U}$ , en las dos cartas superpuestas. Dado que  $h$  es holomorfa,  $h'(z) = \partial_z h(z)$ , se descubre la similitud entre (2.10) y la fórmula del pullback (2.8) de un coeficiente de Beltrami por una transformación holomorfa. Además, notemos que  $|\mu_{\tilde{\phi}}(\tilde{z})| = |\mu_\phi(z)|$  tal que  $\|\mu\|_\infty$  esta bien definida.

Para justificar la regla de transformación consideremos la información geométrica dada por la forma de Beltrami en  $S$  con  $\|\mu\|_\infty < 1$ . La forma de Beltrami define en este caso una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $S$ , es decir, un campo medible de elipses infinitesimales en el haz tangente  $TS$ . El coeficiente de Beltrami  $\mu_\phi(z)$  define casi dondequiera una elipse infinitesimal en  $T_z U$  con dilatación igual a  $\frac{1+|\mu_\phi(z)|}{1-|\mu_\phi(z)|}$ . Se sigue de (2.10) que la elipse infinitesimal es mandada por la transformación  $D_z h : T_z U \rightarrow T_z \tilde{U}$  de las cartas en los haces tangentes a la elipse infinitesimal definida por el coeficiente de Beltrami  $\mu_{\tilde{\phi}}(\tilde{z})$  en  $T_z \tilde{U}$ . Más precisamente, sea  $E$  una elipse representante de la elipse infinitesimal en  $T_z U$ , que es bien definida módulo la multiplicación por un escalar. Entonces  $E$  es mandada por  $D_z h$  en la elipse  $\tilde{E}$  en  $T_z \tilde{U}$ , que es  $E$  multiplicación por  $|h'(z)|$  y rotada por el argumento de  $h'(z)$ , ver Figura 2.10.

Las dos elipses tienen la misma dilatación:

$$K(E) = K(\tilde{E}) \tag{2.11}$$



**Figura 2.10:** La elipse  $E$  en  $T_z U$  es mandada por  $D_z h : w \mapsto h'(z) \cdot w$  en la elipse  $\tilde{E}$  en  $T_z \tilde{U}$ . Por lo tanto las elipses son iguales módulo multiplicación por un número complejo.

y dos veces el argumento del eje real más el argumento del eje menor de  $\tilde{E}$  es exactamente igual al argumento de  $\mu_{\tilde{\varphi}}(\tilde{z})$ :

$$\arg \mu_{\varphi}(z) + 2 \arg h'(z) = \arg \mu_{\tilde{\varphi}}(\tilde{z}). \quad (2.12)$$

Por lo tanto, la elipse  $\tilde{E}$  representa la elipse infinitesimal definida por el coeficiente de Beltrami  $\mu_{\tilde{\varphi}}(\tilde{z})$ . Se sigue que el campo medible de elipses infinitesimales en  $TS$  está bien definido, y de aquí que la forma de Beltrami con dilatación acotada determine una estructura casi compleja en  $S$ .

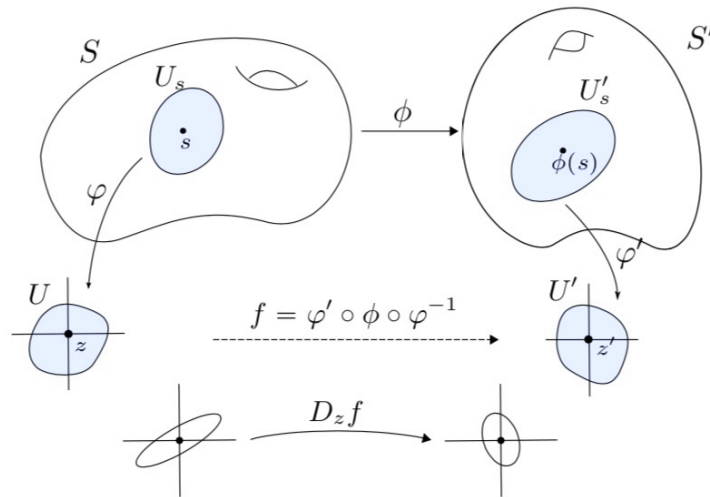
Lo último que definimos es el pullback de una forma de Beltrami por una transformación cuasiconforme.

**Definición 2.3.15. (Pullback de Formas de Beltrami).** Sean  $S, S'$  dos superficies de Riemann, y sea  $\phi : S \rightarrow S'$  una transformación cuasiconforme. Si  $\mu'$  es la forma de Beltrami en  $S'$  entonces  $\phi^* \mu'$  se define como una forma de Beltrami en  $S$ , que cuando se expresa con cartas se ajusta a la definición previa del pullback.

Para hacer esto más preciso, sean  $\varphi : U_S \rightarrow U$  y  $\varphi' : U_{S'} \rightarrow U'$  cartas arbitrarias alrededor de  $s \in S$  y  $\phi(s) \in S'$ , y definamos  $z = \varphi(s)$  y  $z' = \varphi'(\phi(s))$ . Sea  $\mu'_{\varphi'}(z')$  el coeficiente de Beltrami de  $\mu'$  en la carta  $\varphi'$ . Entonces  $\phi^* \mu'$  es la forma de Beltrami en  $S$ , que en la carta  $\varphi$  tiene el siguiente coeficiente de Beltrami

$$(\phi^* \mu')_{\varphi}(z) = \frac{\partial_{\bar{z}} f(z) + \mu'_{\varphi'}(f(z)) \overline{\partial_z f(z)}}{\partial_z f(z) + \mu'_{\varphi'}(f(z)) \overline{\partial_{\bar{z}} f(z)}},$$

donde  $f(z) = \varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}(z)$ . Comparar con (2.6). Además esta definición es independiente de las cartas. Ver Figura 2.11.



**Figura 2.11:** La elipse en  $T_z U$  es mandada por  $D_z f$  en la elipse en  $T_{z'} U'$ . Dichas elipses en general son diferentes ya que  $D_z f$  es una transformación líneal de  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ .

Recordemos que el espacio cubriente universal de la esfera de Riemann menos tres puntos es el disco unitario. De este hecho, el teorema análogo al teorema 2.3.11 es el siguiente.

**Teorema 2.3.16. (Compacidad)** *El conjunto de homeomorfismos  $K$  - cuasiconformes  $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , que fijan tres puntos, es compacto en la topología de convergencia uniforme de subconjuntos compactos.*

## 2.4. Teorema de integrabilidad

Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto que es todo el plano o conformemente equivalente al disco unitario. En secciones previas revisamos como un homeomorfismo cuasiconforme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  da lugar a una estructura casi compleja  $\sigma_\phi$  en  $U$  con dilatación compleja, o equivalentemente, a un coeficiente de Beltrami  $\mu_\phi = \partial_{\bar{z}}\phi/\partial_z\phi$  definido casi dondequiera con  $\|\mu_\phi\|_\infty = k < 1$ .

La siguiente pregunta surge de forma natural. Dada una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $U$ , ¿bajo qué condiciones podemos encontrar un homeomorfismo cuasiconforme  $\phi$  tal que induce  $\sigma$  casi dondequiera? En el lenguaje del pullback significa que  $\phi^*\sigma_0 = \sigma$ , casi dondequiera, o equivalentemente, dado un coeficiente de beltrami  $\mu$  en  $U$ , ¿bajo qué condiciones podemos encontrar  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  cuasiconforme (por lo tanto en  $D_0^+$ ) tal que

$$\partial_{\bar{z}}\phi(z) = \mu(z)\partial_z\phi(z) \tag{2.13}$$

para casi todo  $z \in U$ ? Tal función  $\phi$  se dice  $\mu$  integrable y es, por lo tanto, llamada función integradora, esta ecuación se llama ecuación de Beltrami y la respuesta a la

pregunta es dada por el Teorema de Integrabilidad (también conocido como el Teorema de la transformación medible de Riemann) debido a Morrey [Mor38], Bojarski [Boj55], Ahlfors y Bers [AB60].

**Teorema 2.4.1. (Teorema de integrabilidad - versión local)** Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto tal que  $U \simeq \mathbb{D}$  (resp.  $U = \mathbb{C}$ ). Sea  $\sigma$  una estructura casi compleja en  $U$  correspondiente al coeficiente de Beltrami  $\mu$ . Supongamos que la dilatación de  $\sigma$  es uniformemente acotada, esto es,  $J(\sigma) < \infty$ , o equivalentemente, el supremo esencial de  $|\mu|$  en  $U$  es

$$\|\mu\|_{\infty} = k < 1.$$

Entonces  $\mu$  es integrable, es decir, que existe un homeomorfismo cuasiconforme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  (resp. en  $\mathbb{C}$ ) que resuelve la ecuación de Beltrami, es decir, tal que

$$\mu(z) = \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(z)}{\partial_z\phi(z)}$$

para  $z \in U$  casi dondequiera. Además,  $\phi$  es único módulo post-composición con automorfismos de  $\mathbb{D}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ).

En el lenguaje del pullback podemos decir que existe un homeomorfismo cuasiconforme  $\phi$  tal que  $\mu = \phi^*\mu_0$  casi dondequiera.

La demostración de este teorema se puede encontrar en muchos textos clásicos, así como en algunos textos más recientes. Ver por ejemplo [LV73, Ahl06] o [AIM08, Boj10, DB, HH06, Lyu13]. Como se indicó anteriormente, el teorema de integrabilidad se aplica a coeficientes de Beltrami en subconjuntos del plano complejo. Sin embargo, a menudo tratamos con transformaciones racionales en la esfera de Riemann y estamos interesados en un cambio global de la estructura casi compleja en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Además, construimos superficies abstractas de Riemann isomorfas al disco, al plano complejo o la esfera de Riemann. Por lo tanto estamos interesados en una versión global del teorema de integrabilidad.

**Teorema 2.4.2. (Teorema de Integrabilidad - versión global)** Sea  $S$  una superficie de Riemann simplemente conexa y  $\sigma$  una estructura casi compleja en  $S$  con forma de Beltrami medible  $\mu$ . Supongamos que la dilatación de  $\sigma$  es uniformemente acotada, es decir,  $K(\sigma) < \infty$ , o equivalentemente, el supremo esencial de  $|\mu|$  en  $S$  es

$$\|\mu\|_{\infty} = k < 1.$$

Entonces  $\mu$  es integrable, es decir, que existe un homeomorfismo cuasiconforme  $\phi : S \rightarrow \mathbb{D}$  (resp. en  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ ) que satisface

$$\phi^*\mu_0 = \mu.$$

Si  $S$  es isomorfo a  $\mathbb{D}$  (resp. a  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ ) entonces  $\phi : S \rightarrow \mathbb{D}$  (resp. en  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ ) es único módulo post-composición con automorfismos de  $\mathbb{D}$  (resp. de  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ ).



En este caso diremos también que  $\phi$  resuelve la ecuación de Beltrami y escribimos  $\mu = \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(z)}{\partial_z\phi(z)}$  casi dondequiera (donde la ecuación puede ser expresada en cartas si es necesario). El teorema global se deduce fácilmente del local como se explica a continuación.

*Demostración.* El caso del disco o el plano complejo se sigue casi inmediatamente del teorema local. En efecto, sea  $X$  en  $\mathbb{D}$  o  $\mathbb{C}$  y sea  $\Phi : S \rightarrow X$  un isomorfismo conforme. Entonces para cualquier carta  $\varphi : U_S \rightarrow U$  en un atlas dado para  $S$ , la transformación  $\Phi \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow X$  es holomorfa. Usando estas transformaciones conformes, podemos empujar hacia delante a la forma de Beltrami  $\mu$  en  $S$  a una forma de Beltrami  $\mu'$  en  $X$ . Ya que el coeficiente de Beltrami en cartas sobrepuestas en  $S$  se transforma, la forma de Beltrami  $\mu'$  esta bien definida en  $X$  y satisface  $\|\mu'\|_\infty = \|\mu\| := k < 1$ . El teorema de integrabilidad local 2.4.1 proporciona un homeomorfismo cuasiconforme  $\phi : X \rightarrow X$  tal que  $\phi^*\mu_0 = \mu'$ . Entonces  $\phi \circ \Phi : S \rightarrow X$  es la función integradora requerida.

Ahora supongamos que  $S$  es isomorfa a  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $\mu$  es la forma de Beltrami en  $S$ , tal que  $\|\mu\|_\infty := k < 1$ . Escogamos un atlas finito  $\{\varphi_j : U_S^j \rightarrow U^j\}$  para  $S$  tal que  $U^j \subset \mathbb{C}$  es conformemente isomorfo a  $\mathbb{D}$ . Por definición,  $\mu$  induce un coeficiente de Beltrami  $\mu_j$  en los conjuntos  $U^j$ , compatible bajo transformaciones de transición entre cartas sobrepuestas. Aplicamos el teorema de integrabilidad local en cada coeficiente de Beltrami y obtenemos homeomorfismos  $K_j$ -cuasiconformes  $\phi_j : U^j \rightarrow \mathbb{D}$ , tal que  $\phi_j^*\mu_0 = \mu_j$ .

Se sigue del Lema de Weyl que, donde sea que este bien definido, las transformaciones  $\phi_j \circ \varphi_j \circ \varphi_j^{-1} \circ \phi_j^{-1}$  son conformes, ya que son cuasiconformes y preservan la estructura compleja estándar. Así las transformaciones  $\{\phi_j \circ \varphi_j : U_S^j \rightarrow \mathbb{D}\}$  forman un nuevo atlas para  $S$  con transformaciones conformes de transición.

Por el teorema de uniformización existe un isomorfismo conforme  $\Phi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , lo que significa que es conforme cuando es expresado en cartas del nuevo atlas para  $S$  y cartas para  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Tal expresión es  $\Phi_j := \psi_j \circ \Phi \circ \varphi_j^{-1} \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow V_j$  donde  $\psi_j : \Phi(U_S^j) \rightarrow V_j$  es una carta en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

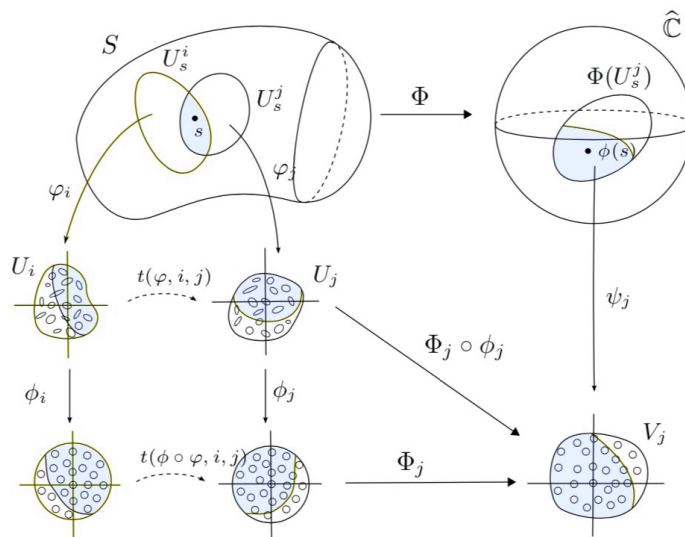
Ya que la función integradora  $\phi_j$  es  $K_j$ -cuasiconforme, se sigue que las transformaciones  $\phi_j \circ \Phi_j : U_j \rightarrow V_j$  para cualquier  $j$  son  $K$ -cuasiconformes donde  $K = \max_j K_j$ . Por lo tanto, con respecto al atlas original en  $S$ , la transformación  $\Phi$  es  $K$ -cuasiconforme, y  $\Phi^*\mu_0 = \mu$ , entonces  $\Phi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es la función integradora requerida.  $\square$

**Observación 2.4.3.** *Notemos que podemos usar el teorema de integrabilidad para dotar a una superficie  $S$  con una estructura analítica compleja, convirtiéndola en una superficie de Riemann, siempre que admita una estructura cuasiconforme. En efecto, supongamos que existe un atlas  $\{\varphi_j\}$  con transformaciones cuasiconformes de transición y una forma de Beltrami  $\mu$  que es compatible con el atlas y con  $\|\mu\|_\infty < 1$ . Sea  $\phi_j$  una función integradora. Entonces  $\{\phi_j \circ \varphi_j\}$  es un nuevo atlas con transfor-*

maciones holomorfas de transición, y por lo tanto se define una estructura analítica compleja en  $S$ .

### 2.4.1. Dependencia de parámetros

En la construcción de la cirugía, a menudo estamos interesados en aplicar el teorema de integrabilidad a una familia de formas de Beltrami dependiendo de los parámetros. En estos casos, es necesario conocer como la solución de la ecuación de Beltrami varía en términos de parámetros. Notemos que una transformación integradora  $\phi$  se determina de manera única si esta normalizada. Si  $s_1, s_2$  y  $s_3$  son puntos distintos en  $S$ , entonces en el caso de  $\mathbb{D}$  se puede elegir una normalización pidiendo  $\phi(s_1) = 0$  y  $\phi(s_2) \in \mathbb{R}^+$ ; en el caso de  $\mathbb{C}$  se requiere que  $\phi(s_1) = 0$  y  $\phi(s_2) = 1$ ; y en el caso de  $\hat{\mathbb{C}}$  pidiendo adicionalmente que  $\phi(s_3) = \infty$ . Pueden ocurrir otros tipos de normalizaciones. Para argumentar el siguiente teorema es importante hacer referencia a alguna normalización elegida.



**Figura 2.12:** El teorema de integrabilidad en superficies de Riemann se sigue de la versión local en conjuntos abiertos del plano complejo. En el dibujo,  $t(\varphi, i, j) := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  representa la función transición con respecto de las cartas  $\{\varphi\}$ . Igualmente,  $t(\phi \circ \varphi, i, j)$  con respecto a las nuevas cartas  $\{\phi \circ \varphi\}$ . Estas funciones de transición están definidas solo en las regiones sombreadas. Por otro lado, la función  $\Phi_j$  se define en todo el disco, y las funciones integradoras  $\Phi_j \circ \phi_j$  son definidas en todo  $U_j$ .

**Teorema 2.4.4. (Teorema de Integrabilidad - dependencia de parámetros)** Sea  $\Lambda$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^N$  (o  $\mathbb{R}^N$ ) para algún  $N \geq 1$ .

(a) Sea  $S$  una superficie de Riemann isomorfa a  $\mathbb{C}$  (o  $\hat{\mathbb{C}}$ ), y sea  $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de formas de Beltrami medibles en  $S$ . Supongamos  $\lambda \mapsto \mu_\lambda(s)$  es holomorfa

(resp. continua, diferenciable, real analítica) en  $\lambda$  para puntos  $s \in S$  (siempre que este definido). Además, supongamos que existe una  $k < 1$  tal que  $\|\mu_\lambda\|_\infty \leq k$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Escogiendo una normalización apropiada y definiendo  $\phi_\lambda : S \rightarrow \mathbb{C}$  (o en  $\widehat{\mathbb{C}}$ ) un homeomorfismo cuasiconforme único que integra  $\mu_\lambda$ , entonces para algún  $s \in S$  fijo, la transformación  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(s)$  es holomorfa (resp. continua, diferenciable, real analítica).

- (b) Sea  $U$  un dominio de Jordan en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y sea  $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de formas de Beltrami medibles en  $U$ . Supongamos  $\lambda \mapsto \mu_\lambda(s)$  es continua (resp. diferenciable, real analítica) en  $\lambda$  para cada  $s \in S$  fijo (siempre que este definido). Además, supongamos que existe una  $k < 1$  tal que  $\|\mu_\lambda\|_\infty \leq k$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Escogamos una normalización apropiada y sea  $\phi_\lambda : S \rightarrow \mathbb{D}$  un homeomorfismo cuasiconforme único que integra  $\mu_\lambda$ . Entonces para cualquier  $s \in S$  fijo, la transformación  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(s)$  es continua (resp. diferenciable, real analítica).

**Observación 2.4.5. (En  $\mathbb{D}$  no se puede esperar dependencia holomorfa)** Observemos que en el caso del disco unitario, no podemos expresar dependencia holomorfa. En efecto, si  $s \in \partial U$  entonces necesariamente  $\phi_\lambda(s) \in \mathbb{S}^1$ . La transformación  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(s)$  no puede ser holomorfa, ya que no es una transformación abierta.

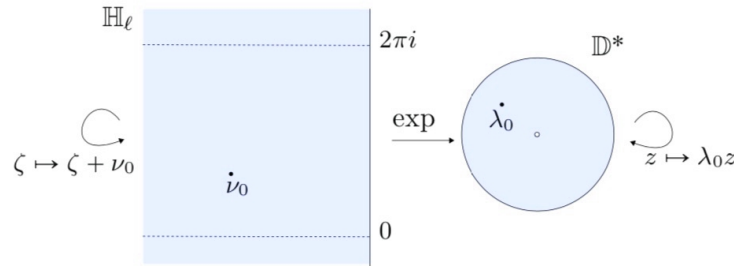
**Observación 2.4.6. (Dependencia de parámetros de transformaciones inversas)** Es importante observar que incluso si la transformación integradora depende holomórficamente de un parámetro  $\lambda$ , sus inversas no necesariamente tienen la misma propiedad. En efecto, la diferenciación implícita muestra que necesitamos diferenciable de  $\phi_\lambda(z)$  con respecto a  $z$  para asegurar la diferenciable de  $\phi_\lambda^{-1}(w)$  con respecto a  $\lambda$ , y esto en general no siempre es verdad. Ver el ejemplo 4.8.18 en [HH06].

## 2.5. Ejemplo elemental

El ejemplo elemental es un caso especial de la cirugía cuasiconforme, es decir, cirugía suave y es elemental en el sentido de que todo se puede calcular explícitamente. Comencemos con una función simple  $M_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  definido por  $M_0(z) = \lambda_0 z$  para  $0 < |\lambda_0| < 1$ . Definiremos una nueva estructura casi compleja en  $\mathbb{D}$ , inducida por ciertas funciones cuasiconformes  $M_0$ -invariantes.

El semiplano izquierdo,  $\mathbb{H}_l$ , es el espacio cubriente universal de  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$  bajo la función exponencial. Notemos que la función exponencial semiconjuga  $M_0$  en  $\mathbb{D}^*$  con una traslación  $\nu_0 = \log \lambda_0$  en  $\mathbb{H}_l$ . Escogemos  $\nu_0$  tal que  $0 \leq \text{Im}(\nu_0) \leq 2\pi$ . Ver Figura 2.13.

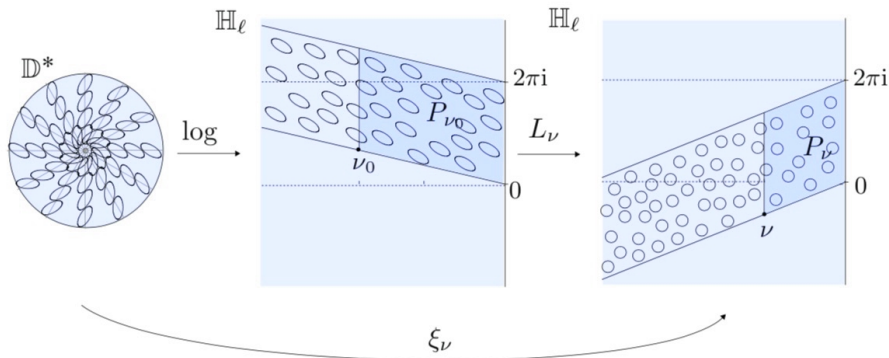
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo.



**Figura 2.13:** La función exponencial semi-conjuga la traslación por  $\nu_0$  en el semiplano superior  $\mathbb{H}_l$  con la multiplicación por  $\lambda_0 = e^{\nu_0}$  en  $\mathbb{D}^*$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}^* & \xrightarrow{z \mapsto \lambda_0 z} & \mathbb{D}^* \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 \mathbb{H}_l & \xrightarrow{\zeta \mapsto \zeta + \nu_0} & \mathbb{H}_l
 \end{array}$$

Eligiendo cualquier parámetro  $\nu$  en el semiplano izquierdo  $\mathbb{H}_l$ , tomemos una función  $\mathbb{R}$ -lineal  $L_\nu : \mathbb{H}_l \rightarrow \mathbb{H}_l$  que manda la base  $\{\nu_0, i\}$  en la base  $\{\nu, i\}$ , por lo tanto el paralelogramo  $P(\nu_0 = \{t\nu_0 + is \mid t \in (0, 1), s \in (0, 2\pi)\})$  en el paralelogramo  $P(\nu) = \{t\nu + is \mid t \in (0, 1), s \in (0, 2\pi)\}$  (ver Figura 2.14).



**Figura 2.14:** La estructura compleja estándar en  $\mathbb{H}_l$  es el primer pullback por  $L_\nu$  y entonces por el logaritmo, en una estructura casi compleja en  $\mathbb{D}^*$  con coeficiente de Beltrami  $\mu_\nu$ .

Si escribimos  $L_\nu(\zeta) = a\zeta + b\bar{\zeta}$  se sigue que

$$a\nu_0 + b\bar{\nu}_0 \quad \text{y} \quad a - b = 1,$$

por lo tanto

$$a = \frac{\nu + \bar{\nu}_0}{\nu_0 + \bar{\nu}_0}, \quad b = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0 + \bar{\nu}_0},$$

y el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_l & \xrightarrow{\zeta \mapsto \zeta + \nu_0} & \mathbb{H}_l \\ L_\nu \downarrow & & \downarrow L_\nu \\ \mathbb{H}_l & \xrightarrow{\zeta \mapsto \zeta + \nu} & \mathbb{H}_{<} \end{array}$$

conmuta. Observemos que  $D_\zeta L_\nu = L_\nu$  para cualquier  $\zeta$ , para que el coeficiente de Beltrami de  $L_\nu$ , sea constantemente igual a

$$\frac{\partial L_\nu}{\partial \bar{\zeta}} \bigg/ \frac{\partial L_\nu}{\partial \zeta} = \mu(L_\nu) = \frac{b}{a} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu + \bar{\nu}_0}.$$

Sea  $\xi_\nu = L_\nu \circ \log$ , donde  $\log$  puede ser elegido como la rama del logaritmo que manda  $\mathbb{D}^*$  en la semibanda  $\{t\nu_0 + is \mid t \in (0, 1), s \in [0, 2\pi)\}$ . Entonces podemos calcular fácilmente el coeficiente de Beltrami  $\mu_\nu$  con pullback  $\xi_\nu^* \mu_0 = \log^* \mu(L_\nu)$  en un punto arbitrario  $z \in \mathbb{D}^*$ . De  $\xi_\nu(z) = a \log z + b \overline{\log z}$  obtenemos

$$\partial_z \xi_\nu = a \frac{1}{z}, \quad \partial_{\bar{z}} \xi_\nu = b \frac{1}{\bar{z}},$$

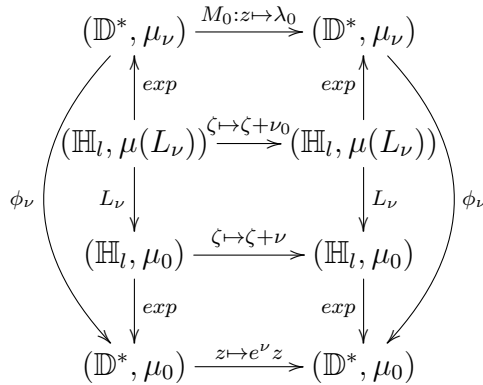
y por lo tanto

$$\mu_\nu(z) = \frac{\nu - \nu_0}{\nu + \bar{\nu}_0} \frac{z}{\bar{z}}.$$

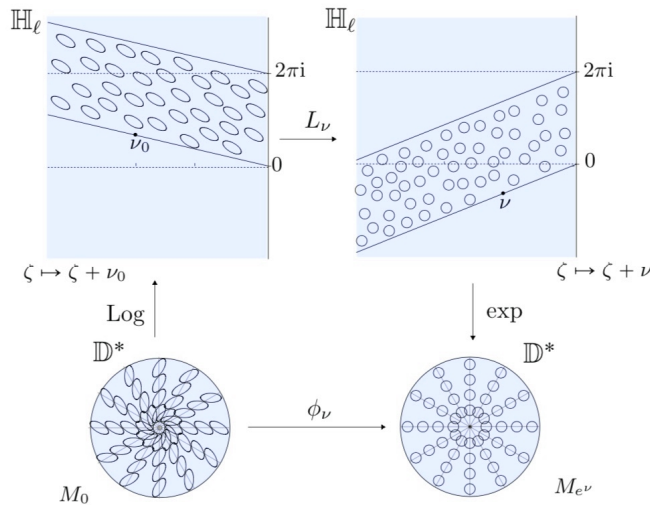
El módulo de dilatación compleja  $\mu_\nu$  es constante, pero el argumento varía. Para  $z \neq 0$  es  $2 \arg z + \arg\left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu + \bar{\nu}_0}\right)$ . Esto significa que el argumento del eje menor de una elipse infinitesimal en  $T_z \mathbb{D}$  es igual a  $\arg z + \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu + \bar{\nu}_0}\right)$ . Por lo tanto, a lo largo de cualquier círculo  $|z| = r$  en  $\mathbb{D}^*$  las elipses darán una vuelta completa, y a lo largo de cualquier eje radial, el argumento del eje menor a la línea radial es constantemente igual a  $\frac{1}{2} \arg\left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu + \bar{\nu}_0}\right)$ . Dada  $\nu \in \mathbb{H}_l$  construimos una estructura casi compleja  $\sigma_\nu$  en  $\mathbb{D}^*$  correspondiente al coeficiente de Beltrami  $\mu_\nu$  definido anteriormente, fijando  $\mu_\nu(0) = 0$ . La función  $\phi_\nu : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  definida por

$$\phi_\nu(z) := \begin{cases} (\exp \circ L_\nu \circ \log)(z) & \text{si } z \in \mathbb{D}^* \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es la función integradora, que por construcción hace que el siguiente diagrama conmute.



En otras palabras,  $M_0^* \mu_\nu = \mu_\nu$  y la transformación  $M_\nu = \phi_\nu \circ M_0 \circ \phi_\nu^{-1}$ , obtenida como la conjugación de  $M_0$  por la función integradora  $\phi_\nu$ , es holomorfa. El diagrama conmutativo también muestra que esta composición  $\phi_\nu \circ M_0 \circ \phi_\nu^{-1}$  en  $\mathbb{D}^*$  es igual a  $M_\nu : z \mapsto e^\nu z$ , por lo tanto, se mantiene en  $\mathbb{D}$ . Ver figura 2.15.



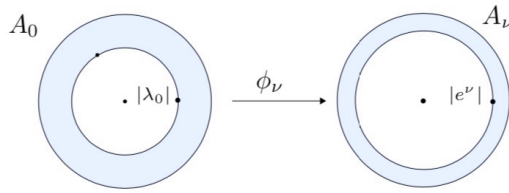
**Figura 2.15:** La composición  $exp \circ L_\nu \circ log$  es precisamente la función integradora  $\phi_\nu$  en  $\mathbb{D}^*$ .

Notemos que, cuando  $\nu$  es igual a cualquiera de los valores del  $\log \lambda_0$ , la composición  $\phi_\nu \circ M_0 \circ \phi_\nu^{-1}$  es justo  $M_0$  de nuevo. Por lo tanto, puede suceder que a pesar de que construyéramos una estructura casi compleja  $M_0$  - invariante, podemos recuperar la transformación  $M_0$  cuando conjugamos con la función integradora.

La función integradora,  $\phi_\nu$ , manda el anillo  $A_0 := \{|\lambda_0| \leq |z| < 1\}$  en el anillo  $A_\nu := \{|e^\nu| \leq |z| < 1\}$ . Notemos que el módulo de los dos anillos es

$$\text{mod} A_0 = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|\lambda|} \quad \text{y} \quad \text{mod} A_\nu = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|e^\nu|}.$$

Ver también Figura 2.16.



**Figura 2.16:** Los anillos definidos dinámicamente  $A_0$  y  $A_\nu$  en el disco unitario. Por razones visuales, el dibujo está desproporcionado, en proporción a los valores de  $\nu$  y  $\nu_0 = \log \lambda_0$  en los otros dibujos.

### 2.5.1. Extendiendo $\mu_\nu$ por la dinámica

En esta sección comentaremos sobre la extensión de la estructura casi compleja dada por el coeficiente de Beltrami  $M_0$  - invariante  $\mu_\nu$  en  $\mathbb{D}$ , en un coeficiente de Beltrami  $M_0$  - invariante en  $\mathbb{C}$ , denotado también por  $\mu_\nu$ . Es geoméricamente evidente que la estructura casi compleja dada por

$$\mu_\nu(z) = \frac{\nu - \nu_0 z}{\nu + \bar{\nu}_0 \bar{z}} \quad \text{si } z \in \mathbb{C}^*$$

es  $M_0$  - invariante.

Sin embargo, usaremos este ejemplo para mostrar como esta extensión puede ser definida recursivamente por pullbacks de  $\mu_\nu$  en el anillo  $A_0$  por  $M_0^n$  para  $n \in \mathbb{N}$  creciente. Decimos que el coeficiente de Beltrami es extendido por la dinámica. Esta manera de extender el coeficiente de Beltrami es muy común, y por tanto vale la pena ilustrar en este ejemplo. Sea

$$A_n := M_0^{-n}(A_0) = \left\{ \frac{1}{|\lambda|^{n-1}} \leq |z| < \frac{1}{|\lambda_0|^n} \right\},$$

y

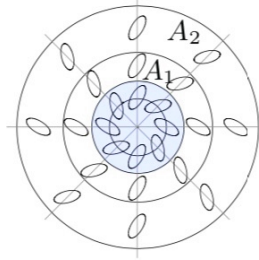
$$\tilde{\mu}_\nu(z) := \begin{cases} \mu_\nu(z) & \text{si } z \in \mathbb{D}, \\ (M_0^n)^* \mu_\nu(z) & \text{si } z \in A_n. \end{cases}$$

Entonces  $\tilde{\mu}_\nu$  es  $M_0$  - invariante por construcción y con la misma dilatación acotada, es decir,  $k(\mu_\nu) = k(\tilde{\mu}_\nu)$ , ya que todo pullback esta hecho por transformaciones holomorfas. Ver Figura 2.17.

En este ejemplo, donde todo puede ser calculado explícitamente, podemos también extender la función integradora  $\phi_\nu : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  conjugando  $M_0$  con  $M_\nu$ , a una transformación integradora  $\tilde{\phi}_\nu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , aún conjugando  $M_0$  con  $M_\nu$ .

Fijando

$$\tilde{\phi}_\nu(z) := \begin{cases} \phi_\nu(z) & \text{si } z \in \mathbb{D}, \\ (M_\nu^{-n} \circ \phi_\nu \circ M_0^n)(z) & \text{si } z \in A_n, \end{cases}$$



**Figura 2.17:** Extendemos el coeficiente de Beltrami  $M_0$ - invariante  $\mu_\nu$  en  $\mathbb{D}$  a un coeficiente de Beltrami  $M_0$ - invariante en todo  $\mathbb{C}$ .

notemos que  $K_{\phi_\nu} = K_{\tilde{\phi}_\nu}$  ya que la composición por transformaciones holomorfas no cambia la dilatación. Observe que  $\tilde{\phi}_\nu$  fija al 0 y 1. Por lo tanto,  $\phi_\nu$  es la única función integradora determinada, normalizada en la forma estándar. El coeficiente de Beltrami global  $\tilde{\mu}_\nu$  que obtenemos de esta manera es el pullback del coeficiente de Beltrami estándar  $\mu_0$  bajo la transformación  $\tilde{\phi}_\nu$ . En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, \tilde{\mu}_\nu) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda_0} & (\mathbb{C}, \tilde{\mu}_\nu) \\ \tilde{\phi}_\nu \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi}_\nu \\ (\mathbb{C}, \mu_0) & \xrightarrow{z \mapsto e^\nu z} & (\mathbb{C}, \mu_0) \end{array}$$

## 2.5.2. Dependencia con respecto a los parámetros

Terminaremos esta sección observando como la construcción varía con respecto a los parámetros  $\nu \in \mathbb{H}_l$ . Notemos que para cualquier  $z \in \mathbb{C}^*$  la transformación

$$\nu \mapsto \tilde{\mu}_\nu(z) = \frac{\nu - \nu_0 z}{\nu + \bar{\nu}_0 \bar{z}}$$

es holomorfa en  $\nu$ . Por lo tanto, la función integradora  $\tilde{\phi}_\nu$ , normalizada por fijar 0 y 1, también varía holomorficamente con el parámetro  $\nu$ .

Para  $z \in \mathbb{D}^*$ :

$$\nu \mapsto \tilde{\phi}_\nu(z) = \exp\left(\frac{\bar{\nu}_0 \log z - \nu_0 \overline{\log z}}{\nu_0 + \bar{\nu}_0}\right) \exp\left(\nu \frac{2 \log |z|}{\nu_0 + \bar{\nu}_0}\right).$$

Para  $z \in A_n$ :

$$\nu \mapsto \exp(-n\nu) \tilde{\phi}_\nu(\lambda_0^n z).$$



## 2.6. Transformaciones cuasiregulares

El pullback es un concepto local. La inyectividad global no es realmente necesaria para poder aplicar pullback a estructuras casi complejas. Esto lleva al concepto de transformaciones cuasiregulares. En esta sección todas las transformaciones cuasiregulares son denotadas por  $g$ .

**Definición 2.6.1. (Primera definición de transformaciones  $K$  - cuasiregulares)**  
Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $K < \infty$ . Una transformación  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  es  $K$  - cuasiregular si y sólo si  $g$  se puede expresar como

$$g = f \circ \phi$$

donde  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  es  $K$  - cuasiconforme y  $f : \phi(U) \rightarrow g(U)$  es holomorfa.

Se sigue inmediatamente que  $g$  es localmente  $K$  - cuasiconforme excepto en un conjunto discreto de puntos  $\phi^{-1}(\text{Crit}(f))$ , donde  $\text{Crit}(f)$  es el conjunto de puntos críticos de  $f$ . Alrededor de estos puntos la transformación no es inyectiva. Este hecho nos lleva a la siguiente definición alternativa.

**Definición 2.6.2. (Segunda definición de transformaciones  $K$  - cuasiregulares)**  
Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $K < \infty$ . Una transformación continua  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  es  $K$  - cuasiregular si y sólo si  $g$  es localmente  $K$  - cuasiconforme, excepto en un conjunto discreto de puntos en  $U$ .

*Demostración.* La primera definición implica la segunda inmediatamente.

Para ver el regreso, sea  $\Omega$  el conjunto discreto de puntos para los cuales  $g$  no es  $K$  - cuasiconforme en cualquier vecindad de tal punto. Cubrir el conjunto abierto  $U \setminus \Omega$  por una colección contable de conjuntos abiertos en los que  $g$  es  $K$  - cuasiconforme. Tal colección contable existe, ya que cualquier cubierta abierta de un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  tiene una subcubierta contable (Teorema de Lindelöf, [Ke, p.49]). Resulta que  $\partial_z g$  y  $\partial_{\bar{z}} g$  están bien definidas, casi donde quiera, en cada uno de los conjuntos abiertos en la subcubierta y pertenece localmente a  $L^2_{loc}$ . Ya que unión contable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero,  $\partial_z g$  y  $\partial_{\bar{z}} g$  están bien definidas, casi dondequiera, en  $U$ . Más aún, el coeficiente de Beltrami  $\mu(z) = \partial_{\bar{z}} g(z) / \partial_z g(z)$  satisface  $\|\mu\| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1$  en  $U$ . Si  $U$  es simplemente conexo podemos aplicar el teorema de integrabilidad inmediatamente para obtener un homeomorfismo  $K$  - cuasiconforme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  (o en  $\mathbb{C}$ ) integrando el coeficiente de Beltrami  $\mu$ . Si  $U$  no es simplemente conexo primero extendemos  $\mu$  a  $\hat{\mu}$  en  $\mathbb{C}$  definiendo  $\hat{\mu}(z) = 0$  si  $z \notin U$ , entonces aplicamos el teorema de integrabilidad global para obtener un homeomorfismo  $K$  - cuasiconforme  $\hat{\phi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  integrando el coeficiente de Beltrami  $\hat{\mu}$ . Sea  $\phi := \hat{\phi}|_U : U \rightarrow \hat{\phi}(U)$ . Entonces la composición  $f := g \circ \phi^{-1}$  es localmente  $K$  - cuasiconforme excepto en un conjunto discreto de puntos  $\phi^{-1}(\Omega)$ .

Más aún

$$f^*(\mu_0) = (\phi^{-1})^* g^*(\mu_0) = (\phi^{-1})^* \mu = \mu_0,$$

como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} (U, \mu) & \xrightarrow{g} & (g(U), \mu_0) \\ \phi \downarrow & \nearrow f & \\ (\hat{\phi}(U), \mu_0) & & \end{array}$$

Por lo tanto por el lema de Weyl,  $f$  es localmente conforme excepto en un conjunto discreto de puntos donde es continua. Esto implica que  $f$  es holomorfa, y se sigue que  $g = f \circ \phi$  como queríamos.  $\square$

Las transformaciones cuasiregulares pueden ser caracterizadas localmente por la siguiente definición equivalente.

**Definición 2.6.3. (Tercera definición de transformaciones  $K$  - cuasiregulares)**  
Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $K < \infty$ . Una transformación  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  es  $K$  - cuasiregular si y sólo si para todo  $z \in U$ , existen vecindades  $N_z$  y  $N_{g(z)}$  de  $z$  y  $g(z)$ , respectivamente, una transformación  $K$  - cuasiregular  $\psi : N_z \rightarrow \mathbb{D}$  y una transformación conforme  $\varphi : N_{g(z)} \rightarrow \mathbb{D}$ , tal que  $(\varphi \circ g \circ \psi^{-1})(z) = z^d$ , para algún  $d \geq 1$ .

Se mostrará que esta definición es en efecto equivalente a las dos anteriores.

*Demostración.* Supongamos que  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  satisface la tercera definición de cuasiregularidad. Entonces  $g$  es localmente  $K$  - cuasiconforme en dichos puntos donde  $d = 1$ . Si  $d > 1$  en  $N_z$ , entonces  $z$  es el único punto en esta vecindad donde la transformación no es localmente invertible. Por lo tanto, tales puntos son aislados, y  $g$  satisface la segunda definición de cuasiregularidad.

Supongamos que  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  satisface la primera definición de cuasiregularidad y por lo tanto podemos escribirla como  $g = f \circ \phi$  en  $U$ . Probaremos que  $g$  satisface la tercera definición de cuasiregularidad. Se tienen dos casos.

**Caso 1.** Si  $\phi(z)$  no está en  $\text{Crit}(f)$ , entonces existen vecindades  $N_{\phi(z)}$  y  $N_{g(z)}$  de  $\phi(z)$  y  $g(z)$  respectivamente tal que  $f : N_{\phi(z)} \rightarrow N_{g(z)}$  es invertible con inversa conforme. Sea  $N_z = \phi^{-1}(N_{\phi(z)})$ . Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N_z & \xrightarrow{g} & N_{g(z)} \\ \phi \downarrow & & \downarrow f^{-1} \\ N_{\phi(z)} & \xrightarrow{z \mapsto z^1} & N_{\phi(z)} \end{array}$$

y hemos terminado.

**Caso 2.** Si  $\phi(z)$  esta en  $\text{Crit}(f)$ , entonces existen vecindades  $N_{\phi(z)}$  y  $N_{g(z)}$  de  $\phi(z)$  y  $g(z)$  respectivamente tal que  $f : N_{\phi(z)} \rightarrow N_{g(z)}$  es una cubriente ramificada de grado  $d > 1$ , ramificado sólo en  $\phi(z)$ . Todas estas cubrientes son equivalentes a  $z \mapsto z^d$ , en el sentido que si  $\varphi : N_{g(z)} \rightarrow \mathbb{D}$  es la transformación de Riemann mandando  $g(z)$  a 0, entonces  $\varphi$  puede ser levantada a una transformación conforme  $\tilde{\varphi} : N_{\phi(z)} \rightarrow \mathbb{D}$ , y tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 N_z & \xrightarrow{g} & N_{g(z)} \\
 \phi \downarrow & & \downarrow Id \\
 N_{\phi(z)} & \xrightarrow{f} & N_{g(z)} \\
 \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \mathbb{D} & \xrightarrow{z \mapsto z^d} & \mathbb{D}
 \end{array}$$

Ya que  $\tilde{\varphi} \circ \phi$  es  $K$ -cuasiconforme y  $\varphi$  es conforme, hemos terminado. □

### 2.6.1. Aplicación de la dinámica holomorfa

Antes de dar una introducción en el Capítulo 3 sobre que trata la cirugía cuasiconforme, terminaremos este capítulo obteniendo una idea de cómo aplicar a los sistemas dinámicos lo que hemos aprendido hasta ahora. Esta aplicación es el corazón de la construcción de la cirugía.

Supongamos  $S$  una superficie de Riemann isomorfa a  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ . Estamos interesados en el sistema dinámico generado por las iteraciones de una función  $f : S \rightarrow S$ , que por el momento podemos asumir que es a lo más cuasiregular. En otras palabras, dado un punto inicial  $s \in S$ , estamos interesados en el comportamiento asintótico de su órbita  $\mathcal{O}(s) = \{s, f(s), f^2(s), \dots, f^n(s), \dots\}$ . En el estudio cualitativo de tal sistema dinámico, las conjugaciones juegan un rol crucial. Estamos interesados en encontrar una “copia de la dinámica holomorfa”, es decir, una transformación holomorfa que sea cuasiconformemente conjugada a una previamente dada. El siguiente lema establece condiciones bajo las cuales esto es posible.

**Lema 2.6.4. (Lema de Key para cirugía)**

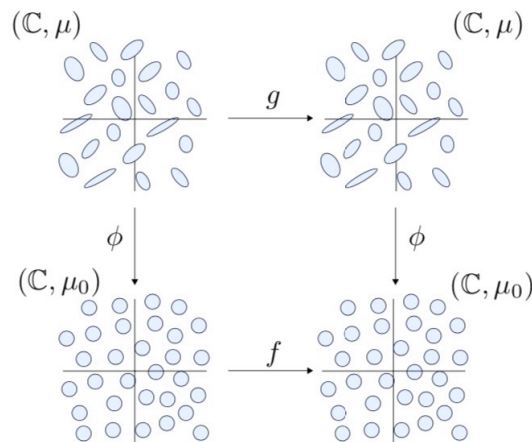
- (a) *Sea  $S$  una superficie de Riemann isomorfa a  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$  y sea  $g : S \rightarrow S$  cuasiregular. Sea  $\mu$  una forma de Beltrami  $g$ -invariante en  $S$ , tal que  $\|\mu\|_\infty := k < 1$ . Entonces existe una transformación holomorfa  $f : X \rightarrow X$  donde  $X \in \{\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}\}$ , tal que  $g$  y  $f$  son cuasiconformemente conjugadas.*
  
- (b) *Sea  $S' \subset S \simeq \mathbb{D}$  un conjunto abierto, y sea  $g : S' \rightarrow S$  cuasiregular. Sea  $\mu$  una forma de Beltrami  $g$ -invariante en  $S$ , tal que  $\|\mu\|_\infty := k < 1$ . Entonces existe*

una transformación holomorfa  $f : D' \rightarrow \mathbb{D}$  donde  $D' \subset \mathbb{D}$  es abierto y tal que  $g$  y  $f$  son cuasiconformemente conjugadas.

*Demostración.* (a) Sea  $\phi : S \rightarrow X$  una transformación cuasiconforme que integra a  $\mu$ , dada por el teorema de integrabilidad. Entonces, si definimos  $f := \phi \circ g \circ \phi^{-1}$ , el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} (S, \mu) & \xrightarrow{g} & (S, \mu) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ (X, \mu_0) & \xrightarrow{f} & (X, \mu_0) \end{array}$$

La transformación  $f$  es cuasiregular y satisface  $f^* \mu_0 = \mu_0$  casi dondequiera. Por lo tanto por el lema de Weyl,  $f$  es holomorfa y es cuasiconformemente conjugada a  $g$  vía  $\phi$ . Ver Figura 2.18



**Figura 2.18:** Bosquejo del Lema de Key por cirugía donde  $S = \mathbb{C}$ .

(b) La prueba es análoga a (a) tomando  $D' := \phi(S')$ .

□

Como veremos después en las construcciones de cirugía, tales procedimientos pueden realizarse con dependencia en un parámetro, digamos  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}$ . Las transformaciones  $g_\lambda : S \rightarrow S$  y las formas de Beltrami  $\mu_\lambda$ , que son  $g_\lambda$ -invariantes, pueden ambas depender holomorfaamente de  $\lambda$ . El teorema de integrabilidad con dependencia de parámetros 2.4.4 provee una familia de transformaciones  $\phi_\lambda$ , determinados de manera única cuando normalizamos apropiadamente, y variando holomorfaamente con  $\lambda$ . Aplicando el lema de Key a cada una de estas transformaciones obtenemos

una familia de transformaciones holomorfas  $F_\lambda : X \rightarrow X$  que satisfacen

$$f_\lambda \circ \phi_\lambda \equiv \phi_\lambda \circ g_\lambda$$

en  $S$ . Es natural preguntarse cuando  $f_\lambda$  depende holomorfaamente de  $\lambda$ . A menudo, uno puede deducir la forma de la familia resultante, por ejemplo una familia de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , entonces es equivalente a preguntarse si los coeficientes son funciones holomorfas de  $\lambda$ .

Sin embargo, la respuesta no siempre es simple. Como se mencionó en la observación 2.4.6 las inversas de las funciones integradoras pueden no depender holomorfaamente del parámetro.

**Lema 2.6.5. (Dependencia en parámetros)** *Sea  $g$  dado como en el lema anterior 2.6.4 (a), y sea  $\mu_\lambda$  la forma de Beltrami y por lo tanto la función integradora  $\phi_\lambda$ , propiamente normalizada, depende holomorfaamente de  $\lambda$ . Entonces la transformación holomorfa  $f_\lambda(z) := \phi_\lambda \circ g \circ \phi_\lambda^{-1}(z)$  depende holomorfaamente de  $\lambda$ .*

*Demostración.* Consideremos la expresión  $f_\lambda \circ \phi_\lambda \equiv \phi_\lambda \circ g$ . Queremos mostrar que  $\partial f_\lambda / \partial \bar{\lambda}(\phi_\lambda(z)) = 0$  para todo  $z$ . La transformación del lado izquierdo puede ser escrita como

$$(\lambda, \bar{\lambda}, z, \bar{z}) \mapsto f_\lambda(\lambda, \bar{\lambda}, \phi_\lambda(z), \overline{\phi_\lambda(z)}),$$

y la transformación del lado derecho como

$$(\lambda, \bar{\lambda}, z, \bar{z}) \mapsto \phi_\lambda(\lambda, \bar{\lambda}, g(z), \overline{g(z)}).$$

Aplicando la regla de la cadena y calculando las derivadas en el sentido de distribuciones obtenemos que

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{\phi_\lambda(z)} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} \Big|_{\phi_\lambda(z)} \cdot \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_z + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar{z}} \Big|_{\phi_\lambda(z)} \cdot \frac{\partial \overline{\phi_\lambda}}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_z = \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{g(z)}.$$

Ya que  $\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \bar{z}} \equiv 0$  y  $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar{z}} \equiv 0$  tenemos

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{\phi_\lambda(z)} = 0.$$

Se sigue que  $f_\lambda$  varía holomorfaamente con  $\lambda$ . □

Enfatizaremos que en el lema 2.6.5, la transformación cuasiregular  $g$  es independiente del parámetro. Sin embargo, si depende holomorfaamente del parámetro entonces la familia resultante de transformaciones  $f_\lambda$  no necesita hacerlo.



## Capítulo 3

# INTRODUCCIÓN A LA CIRUGÍA

En este capítulo se describe de que trata la cirugía cuasiconforme y se explican los diferentes tipos de cirugías que se desarrollaron como primeras apariciones de esta técnica.

¿Qué sabemos de la cirugía cuasiconforme en dinámica holomorfa? Es una técnica comúnmente usada para la construcción de funciones holomorfas con una dinámica preéscrita. La “dinámica preéscrita” nos da una función  $f$  la cuál en general no es holomorfa, pero podría serlo. Nos referiremos a  $f$  como una función modelo. La palabra “CIRUGÍA” aparece porque se necesita “cortar” y “pegar” diferentes espacios y funciones juntas para construir a  $f$ . Este es usualmente el primer paso para la construcción y es conocido como cirugía topológica.

Dejaremos el mundo holomorfo para hacer una mejor elección de nuestro modelo, y verificar si la función modelo tiene una copia dinámica holomorfa, es decir, que exista una función holomorfa que conjuge a  $f$ .

La herramienta principal para obtener “copias con la misma dinámica” es aplicando el teorema de integrabilidad 2.4.2 que nos da una conjugación cuasiconforme que regresa a una vecindad holomorfa (lema de Key 2.6.4). De ello se deduce que debemos buscar modelos en el espacio de funciones cuasiconformes. Para ser más precisos, sea  $S$  una superficie de Riemann, conformemente isomorfa a  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ , y supongamos que podemos escoger una función cuasiregular  $f : S \rightarrow S$ . Nos interesa encontrar una nueva función  $F$ , que sea holomorfa y cuasiconformemente conjugada a  $f$ , así tendrán ambas funciones la misma dinámica.

Como se vio en el lema de Key 2.6.4, para que esto sea posible se debe construir una forma de Beltrami  $\mu$  en  $S$ , que satisfaga  $\|\mu\|_\infty = k < 1$  y que sea  $f$ -invariante (es decir,  $f^*\mu = \mu$ ), o equivalentemente a construir una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $S$ , que satisfaga  $K(\sigma) < \infty$  y que sea  $f$ -invariante. En estas condiciones la existencia de  $F$  está asegurada.

Definir una estructura casi compleja  $f$ -invariante, con dilatación acotada no siempre es posible. Es natural preguntarse bajo que condiciones esto puede ser posible. Recordemos el ejemplo elemental de la sección 2.5, y observemos como proporciona (en el caso más simple cuando la función modelo es holomorfa) un ejem-

plo explícito de lo que se acaba de explicar. Consideremos una función  $\mathbb{C}$ -lineal  $f = M_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  donde  $M_0(z) = \lambda_0 z$  para alguna  $0 < |\lambda_0| < 1$ . Se define el coeficiente de Beltrami  $\mu_\nu$  en  $\mathbb{D}$ , que es el pullback de  $\mu_0$ , primero por una función  $\mathbb{R}$ -lineal  $L_\nu$  del plano (por lo tanto cuasiconforme) y después por una rama del logaritmo (por lo tanto cuasiconforme). La dilatación de  $\mu_\nu$  es la misma que la dilatación de la función  $L_\nu$ , y por tanto constante. Por construcción, este coeficiente de Beltrami  $\mu_\nu$  es  $M_0$ -invariante. En este ejemplo, podemos escribir explícitamente una función integradora  $\phi_\nu$  y ver que (después de una conjugación con logaritmo) esta conjuga  $M_0(z) = \lambda_0 z$  con  $F(z) = M_\nu(z) = e^\nu z$ .

En general, encontrar una función holomorfa  $F$  que esté conjugada a una función cuasiregular  $f$  es el último paso en la construcción de la cirugía. El primer paso, la construcción de una función modelo, requiere de creatividad. Es en esta etapa que la cirugía real está involucrada. No hay una teoría general sobre cómo hacerlo, ya que cada problema requiere de su propia solución particular.

Una clasificación aproximada de las diferentes cirugías vienen de la regularidad de la función modelo y su dominio.

### **Cirugía suave: la función modelo es holomorfa**

La cirugía suave es un cambio en la estructura compleja sin cambiar la función modelo. Comencemos con una superficie de Riemann  $S$  y una función holomorfa  $f : S \rightarrow S$ . Supongamos que podemos encontrar una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $S$  (diferente de  $\sigma_0$ ), la cual es  $f$ -invariante, es decir,  $f^*\sigma = \sigma$ , y con dilatación acotada. Después de aplicar el teorema de integrabilidad como en el lema de Key 2.6.4, obtenemos una función holomorfa  $F$ , la cual es conjugada cuasiconformemente con la función original  $f$  y es llamada la deformación cuasiconforme de  $f$ . Se tiene que probar que  $f$  y  $F$  son funciones diferentes, ya que podría suceder que volvamos a donde empezamos (como en el ejemplo elemental, cuando  $e^\nu = \lambda_0$ ). Si siempre obtenemos la función de vuelta, no importa cual estructura casi compleja invariante escojamos, diremos que  $f$  es cuasiconformemente rígida.

La cirugía suave en dinámica holomorfa es equivalente a su análogo y predecesor en los grupos Kleinianos. Dado un grupo Kleiniano  $\Gamma$ , supongamos que podemos encontrar una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  que es  $\gamma$ -invariante por todos los elementos  $\gamma \in \Gamma$ , y con dilatación acotada. Si  $\phi$  es una función integradora dada por el teorema de integrabilidad, los elementos  $\phi \circ \gamma \circ \phi^{-1}$  son de nuevo transformaciones de Möbius y  $\Gamma_\phi := \{\phi \circ \gamma \circ \phi^{-1} | \gamma \in \Gamma\}$  es de nuevo un grupo Kleiniano, conjugado cuasiconformemente a  $\Gamma$ . Es llamada una deformación de  $\Gamma$ .

Este tipo de cirugía a veces es usada como un bloque de construcción para otras más complicadas, pero es más interesante cuando se realiza de manera que depende de uno o más parámetros. Esto nos permite, por ejemplo, la parametrización de subconjuntos de espacios paramétricos donde las funciones (o grupos) son estructuralmente estables. Las componentes hiperbólicas del conjunto de Mandelbrot o las rebanadas de Bers son ejemplos de estos.

El espacio de deformaciones cuasiconformes de una función  $f$  dada es de gran in-



terés. Con algunas identificaciones se conoce como el espacio de Teichmüller de  $f$ , ver [MS98].

### Cirugía de cortado y pegado: la función modelo es cuasiregular

Esté es el tipo de cirugía para la cual se han encontrado más aplicaciones. La función modelo dada  $f : S \rightarrow S$  es cuasiregular y suave, obtenida pegando diferentes piezas de un plano complejo o de otras superficies de Riemann.

Cuando se obtienen resultados, vía cirugía, que relacionan diferentes espacios de parámetros, la función modelo y las formas de Beltrami usualmente dependen de un parámetro. La superficie de Riemann puede ser fija o también depender de un parámetro. El último caso es más complejo desde que se requiere del uso del teorema de uniformización. En el capítulo 3.2 consideraremos ejemplos de este tipo, tanto cuando la superficie de Riemann subyacente es fija, como cuando depende de un parámetro.

## 3.1. Cambiando el multiplicador de un ciclo atractor

Sea  $\Omega$  una componente hiperbólica de periodo  $p$  del conjunto de Mandelbrot  $\mathcal{M}$ . La técnica que se usa para probar que la función multiplicador  $\Lambda : \Omega^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ , en una componente hiperbólica, es una transformación cubriente, es una cirugía suave que puede ser aplicada en muchas situaciones. El paso esencial es, para un determinado polinomio cuadrático en  $\Omega^*$ , cambiar el multiplicador de un ciclo atractor. Por lo tanto, comenzaremos explicando como cambiar el multiplicador de forma general. Para facilitar la notación, elegimos trabajar con funciones racionales  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , aunque la técnica se aplica también a funciones trascendentes enteras de  $\mathbb{C}$ , o funciones propias trascendentes de  $\mathbb{C}^*$ .

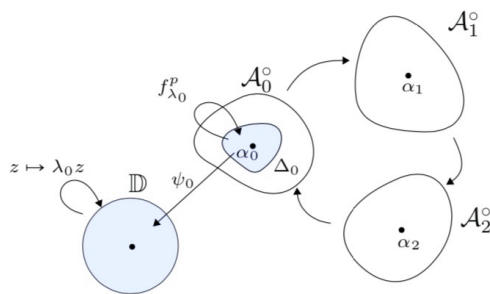
Sea  $f_{\lambda_0} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una función racional de grado  $d \geq 2$ , con un ciclo atractor de periodo  $p$  con multiplicador  $\lambda_0 \in \mathbb{D}^*$ . Para algún  $\lambda \in \mathbb{D}^*$  la primer meta es construir una función  $f_\lambda$  conjugada cuasiconformemente a  $f_{\lambda_0}$  tal que el correspondiente ciclo atractor tiene multiplicador  $\lambda$ . Para fines posteriores nos restringimos a una vecindad arbitraria simplemente conexa  $U_0$  de  $\lambda_0 \in \mathbb{D}^*$  tal que  $\lambda \in U_0$ .

Sea  $\alpha = \mathcal{O}(\alpha_0) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}\}$ , un ciclo atractor, donde  $\alpha_{j+1} = f_{\lambda_0}(\alpha_j)$  y  $p$  es el menor entero tal que  $\alpha_p = \alpha_0$ . Sea  $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}_f(\alpha)$  la cuenca de atracción de  $\alpha$  y  $\mathcal{A}_j^\circ$  la componente conexa de  $\mathcal{A}(\alpha)$  que contiene a  $\alpha_j$ , tal que  $\mathcal{A}^\circ(\alpha) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \mathcal{A}_j^\circ$  es la cuenca inmediata de atracción de  $\alpha$ . Después de componer con una transformación de Möbius si es necesario, asumimos que  $\mathcal{A}(\alpha)$  no contiene al  $\infty$ .

Sea  $\Delta_0$  una vecindad de  $\alpha_0$  en  $\mathcal{A}_0^\circ$ , elegida como preimagen de  $\mathbb{D}$  bajo una función de linealización  $\psi_0 : \Delta_0 \rightarrow \mathbb{D}$ , que conjuga  $f_{\lambda_0}^p$  con  $z \mapsto \lambda_0 z$ . Ver Figura 3.1.

La función de linealización  $\psi_0 : \Delta_0 \rightarrow \mathbb{D}$  es un isomorfismo cuasiconforme.

La función  $\psi_0$  puede ser extendida a la cuenca de atracción  $\mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0)$  de  $\alpha_0$  como un punto fijo de  $f_{\lambda_0}^p$ , tal que  $\psi_0(\mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0)) = \mathbb{C}$  y que  $\psi_0$  conjuga  $f_{\lambda_0}^p$  con  $z \mapsto \lambda_0 z$ , es



**Figura 3.1:** La cuenca inmediata del ciclo  $\alpha$  y la vecindad  $\Delta_0$  de  $\alpha_0$  son mandadas a  $\mathbb{D}$  bajo la función de linealización  $\psi_0$  de  $f_{\lambda_0}^p$ . En la figura  $p = 3$ .

decir,  $\psi_0(f_{\lambda_0}^p(z)) = \lambda_0 \psi_0(z)$ , para todo  $z \in \mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0)$ . La función extensión  $\psi_0$  es un holomorfismo pero no es inyectiva.

Sea  $\nu_0$  determinado tal que  $\lambda_0 = e^{\nu_0}$  y  $\text{Im}(\nu_0) \in [0, 2\pi)$ , y sea  $\mathcal{L} : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  la rama del logaritmo que satisface  $\mathcal{L}(\lambda_0) = \nu_0$ . Para cualquier  $\lambda \in U_0$ , tenemos  $\nu = \mathcal{L}(\lambda)$ . En el ejemplo elemental 2.5 se mostró como cambiar la estructura estándar compleja  $\mu_0 \equiv 0$  en  $\mathbb{C}$  al coeficiente de Beltrami  $\mu_\lambda(z) = \frac{\nu - \nu_0}{\nu + \bar{\nu}_0} \frac{z}{\bar{z}}$  para  $z \in \mathbb{C}^*$ . El coeficiente de Beltrami es invariante bajo  $z \mapsto \lambda_0 z$ , y la transformación integradora  $\phi_\lambda$ , normalizada para fijar al 0 y 1, es una conjugación cuasiconforme entre  $z \mapsto \lambda_0 z$  y  $z \mapsto \lambda z$ . Por lo tanto, para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\phi_\lambda^+ \mu_0 = \mu_\lambda \quad \text{y} \quad \lambda \phi_\lambda(z) = \phi_\lambda(\lambda_0 z).$$

Ahora definimos una forma de Beltrami en una cuenca de atracción  $\mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0)$  por un pullback  $\mu_\lambda$  bajo una función holomorfa  $\psi_0$ . Al hacerlo, obtenemos una forma de Beltrami  $f_{\lambda_0}^p$ -invariante  $\hat{\mu}_\lambda$  en  $\mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0)$ , como el siguiente diagrama conmutativo lo indica:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0), \hat{\mu}_\lambda) & \xrightarrow{f_{\lambda_0}^p} & (\mathcal{A}_{f^p}(\alpha_0), \hat{\mu}_\lambda) \\ \psi_0 \downarrow & & \downarrow \psi_0 \\ (\mathbb{C}, \mu_\lambda) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda_0 z} & (\mathbb{C}, \mu_\lambda) \\ \phi_\lambda \downarrow & & \downarrow \phi_\lambda \\ (\mathbb{C}, \mu_0) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & (\mathbb{C}, \mu_0) \end{array}$$

Observemos que la dilatación de  $\hat{\mu}_\lambda$  es exactamente la de  $\mu_\lambda$ , ya que el pullback es una función holomorfa.

**Observación 3.1.1.** La forma  $\hat{\mu}_\lambda$  puede ser obtenida de diferente manera: Definamos  $\hat{\mu}_\lambda$  inicialmente en una vecindad  $\Delta_0$  de un punto periódico  $\alpha_0$ . Entonces, extendemos  $\hat{\mu}_\lambda$  por la dinámica de  $f_{\lambda_0}^p$ , a toda la cuenca de atracción de  $\alpha_0$ ,

similarmente como en el ejemplo elemental 2.5. La principal diferencia esta en que tenemos múltiples pre-imágenes del anillo  $\Delta_0 \setminus f_{\lambda_0}^p(\Delta_0)$  donde tenemos el pullback.

Si  $p > 1$  extendemos  $\hat{\mu}_\lambda$  a toda la cuenca de atracción  $\mathcal{A}(\alpha)$  por una sucesión de pullbacks por  $f_{\lambda_0}^p$ . Denotamos a la extensión del coeficiente de Beltrami de la misma manera  $\hat{\mu}_\lambda$ . Más precisamente,  $\hat{\mu}_\lambda$  se define

- en  $\mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_{p-1})$  como el pullback de  $\hat{\mu}_\lambda$  en  $\mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_0)$  por  $f_{\lambda_0} : \mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_{p-1}) \rightarrow \mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_0)$ ,
- en  $\mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_{p-2})$  como el pullback de  $\hat{\mu}_\lambda$  en  $\mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_{p-1})$  por  $f_{\lambda_0} : \mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_{p-2}) \rightarrow \mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_{p-1})$ ,
- $\vdots$
- en  $\mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_1)$  como el pullback de  $\hat{\mu}_\lambda$  en  $\mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_2)$  por  $f_{\lambda_0} : \mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_1) \rightarrow \mathcal{A}_{f_{\lambda_0}^p}(\alpha_2)$ .

Ya que  $\hat{\mu}_\lambda$  satisface la hipótesis del teorema de integrabilidad, sabemos que existe una transformación integradora  $\hat{\phi}_\lambda : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Por lo tanto, la transformación  $f_\lambda = \hat{\phi}_\lambda \circ f_{\lambda_0} \circ \hat{\phi}_\lambda^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es holomorfa, por consiguiente una transformación racional de grado  $d$  que conjuga cuasiconformemente a  $f_{\lambda_0}$ . El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mu}_\lambda) & \xrightarrow{f_{\lambda_0}} & (\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mu}_\lambda) \\ \hat{\phi}_\lambda \downarrow & & \downarrow \hat{\phi}_\lambda \\ (\hat{\mathbb{C}}, \mu_0) & \xrightarrow{f_\lambda} & (\hat{\mathbb{C}}, \mu_0) \end{array}$$

**Observación 3.1.2.** Si en particular  $f_{\lambda_0}$  es un polinomio de grado  $d$  para empezar, la estructura casi compleja  $\hat{\mu}_\lambda$  es igual a  $\mu_0 = 0$  en la cuenca de atracción del infinito. Normalizando la transformación integradora  $\hat{\phi}_\lambda$  para fijar al infinito, se sigue que el infinito es un punto fijo superatractor de  $f_\lambda$ , sin ninguna otra preimagen de infinito. Por lo tanto  $f_\lambda$  también es un polinomio de grado  $d$ .

Además, si  $f_{\lambda_0}$  es un polinomio mónico y  $\hat{\phi}_\lambda$  es escogido de tal forma que satisfaga  $\hat{\phi}_\lambda(z)/z \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , entonces  $f_\lambda$  también es mónico. Si  $w = \hat{\phi}_\lambda(z)$  entonces

$$\frac{f_\lambda(w)}{w^d} = \frac{\hat{\phi}_\lambda(f_{\lambda_0}(\hat{\phi}_\lambda^{-1}(w)))}{w^d} = \frac{\hat{\phi}_\lambda(f_{\lambda_0}(z))}{f_{\lambda_0}(z)} \frac{f_{\lambda_0}(z)}{z^d} \left( \frac{z}{\hat{\phi}_\lambda(z)} \right)^d \rightarrow 1$$

cuando  $w \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, si  $f_{\lambda_0}$  es un polinomio mónico centrado y si normalizamos  $\hat{\phi}_\lambda$  para que la suma de preimágenes bajo  $\hat{\phi}_\lambda$  de puntos críticos, añadiendo multiplicidad, también sea cero, entonces  $f_\lambda$  es de nuevo un polinomio mónico centrado.

Con las tres condiciones de normalización anteriores sobre  $\hat{\phi}_\lambda$  estamos listos para aplicar el teorema de integrabilidad con dependencia holomorfa en el parámetro  $\lambda$ .

Necesitamos revisar que  $f_\lambda$  tenga un  $p$ -ciclo atractor de multiplicador  $\lambda$ . Ya que  $f_\lambda$  es conjugada por  $\widehat{\phi}_\lambda$  a  $f_{\lambda_0}$ , el  $f_\lambda$ -ciclo  $\alpha_\lambda = \{\widehat{\phi}_\lambda(\alpha_0), \dots, \widehat{\phi}_\lambda(\alpha_{p-1})\}$  es atractor, así la primer parte es clara. La segunda parte se sigue del siguiente hecho.

**Proposición 3.1.3. (Transformación de linealización)** *La composición*

$$\psi_\lambda = \phi_\lambda \circ \psi_0 \circ \widehat{\phi}_\lambda^{-1} : \widehat{\phi}_\lambda(\delta_0) \rightarrow \mathbb{D}$$

es holomorfa y conjuga  $f_\lambda^p$  con  $z \mapsto \lambda z$ . Por lo tanto,  $\psi_\lambda$  es una transformación de linealización alrededor de un punto fijo atractor  $\widehat{\phi}_\lambda(\alpha_0)$  de  $f_\lambda^p$ .

*Demostración.* La transformación  $\psi_\lambda : \widehat{\phi}_\lambda(\delta_0) \rightarrow \mathbb{D}$  preserva, bajo el pullback, la estructura compleja estándar, como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 (\widehat{\phi}_\lambda(\Delta_0), \mu_0) & \xrightarrow{f_\lambda^p} & (\widehat{\phi}_\lambda(\Delta_0), \mu_0) \\
 \widehat{\phi}_\lambda \uparrow & & \widehat{\phi}_\lambda \uparrow \\
 (\Delta_0, \widehat{\mu}_\lambda) & \xrightarrow{f_\lambda^p} & (\Delta_0, \widehat{\mu}_\lambda) \\
 \psi_\lambda \downarrow \psi_0 & & \psi_0 \downarrow \psi_\lambda \\
 (\mathbb{D}, \mu_\lambda) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda_0 z} & (\mathbb{D}, \mu_\lambda) \\
 \phi_\lambda \downarrow & & \phi_\lambda \downarrow \\
 (\mathbb{D}, \mu_0) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & (\mathbb{D}, \mu_0)
 \end{array}$$

Por lo tanto, por el lema de Weyl 2.3.9,  $\psi_\lambda$  es holomorfa. Así  $\psi_\lambda$  es una transformación conforme que conjuga  $f_\lambda^p$  alrededor de  $\widehat{\phi}_\lambda(\alpha_0)$  con la transformación lineal  $z \mapsto \lambda z$  alrededor del origen, por lo tanto  $\psi_\lambda$  es una transformación de linealización.  $\square$

Esto concluye nuestro primer objetivo.

### 3.1.1. Caso del polinomio mónico: leyendo las coordenadas de Böttcher

Supongamos  $f_{\lambda_0}$  un polinomio mónico de grado  $d \geq 2$ . Sea  $\widehat{\phi}_\lambda$  una transformación normalizada que fija al infinito y satisface  $\widehat{\phi}_\lambda(z)/z \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Entonces por la observación 3.1.2 anterior,  $f_\lambda$  es un polinomio mónico. La cuenca de atracción  $\mathcal{A}(\alpha)$  del  $\alpha$ -ciclo está contenida en el conjunto de Julia lleno  $\mathcal{K}_{\lambda_0} := \mathcal{K}_{f_{\lambda_0}}$ .

Si el conjunto de Julia lleno  $\mathcal{K}_{\lambda_0}$  es conexo, entonces la transformación de Böttcher  $\psi_{\lambda_0}$  es definida en una cuenca entera de atracción del infinito de  $f_{\lambda_0}$ , es decir,  $\varphi_{\lambda_0} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Por simplicidad, asumimos que  $\mathcal{K}_{\lambda_0}$  es conexo.

**Proposición 3.1.4. (Coordenadas de Böttcher)** Sea  $\varphi_{\lambda_0} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  la transformación de Böttcher de  $f_{\lambda_0}$  en la cuenca de atracción del infinito. Entonces, la transformación

$$\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda_0} \circ \widehat{\phi}_\lambda^{-1} : \mathbb{C} \setminus \widehat{\phi}_\lambda(\mathcal{K}_{\lambda_0}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

es la transformación de Böttcher de  $f_\lambda$  en la cuenca de atracción del infinito.

*Demostración.* Recordemos que una función  $\varphi$  que conjuga un polinomio mónico a  $z \mapsto z^d$  en una vecindad del infinito es una transformación de Böttcher alrededor del infinito si y sólo si satisface que  $\varphi(z)/z \rightarrow 1$ , cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Observe que, definimos  $\widehat{\mu}(z) = 0$  para todos los puntos  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{\lambda_0}$ . Se sigue que la transformación integradora  $\widehat{\phi}_\lambda$  es holomorfa en este conjunto, ya que manda  $\mu_0 = 0$  en sí mismo. La inversa en este conjunto es holomorfa y bien definida. Esto significa que  $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda_0} \circ \widehat{\phi}_\lambda^{-1}$  es holomorfa y conjuga  $f_\lambda$  a  $z \rightarrow z^d$  en la cuenca de atracción del infinito de  $f_\lambda$  como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \mu_0) & \xrightarrow{z \mapsto z^d} & (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \mu_0) \\
 \varphi_{\lambda_0} \uparrow & & \varphi_{\lambda_0} \uparrow \\
 (\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{\lambda_0}, \mu_0) & \xrightarrow{f_{\lambda_0}} & (\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_{\lambda_0}, \mu_0) \\
 \widehat{\phi}_\lambda \downarrow & & \widehat{\phi}_\lambda \downarrow \\
 (\mathbb{C} \setminus \widehat{\phi}_\lambda(\mathcal{K}_{\lambda_0}), \mu_0) & \xrightarrow{f_\lambda} & (\mathbb{C} \setminus \widehat{\phi}_\lambda(\mathcal{K}_{\lambda_0}), \mu_0)
 \end{array}$$

Finalmente, tenemos que  $\varphi_\lambda(w)/w \rightarrow 1$ , cuando  $w = \widehat{\phi}(z) \rightarrow \infty$  ya que

$$\frac{\varphi_{\lambda_0}(\widehat{\phi}^{-1}(w))}{w} = \frac{\varphi_{\lambda_0}(z)}{z} \frac{z}{\widehat{\phi}_\lambda(z)}$$

y ambos factores tienden a 1. □

Si el polinomio tiene un conjunto de Julia disconexo, entonces la transformación de Böttcher todavía es definida por  $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda_0} \circ \widehat{\phi}_\lambda^{-1}$ , pero solo en una vecindad del infinito.

## 3.2. Cirugía de cortado y pegado de sectores

En esta sección recopilamos herramientas para la técnica de cirugía de cortado y pegado de sectores que es utilizada en la demostración de nuestro teorema principal 0.2.1. Definiremos sectores fuera del conjunto de Julia lleno de una pendiente dada, módulos de apertura, casi traslaciones e interpolaciones cuasiconformes.

En la cirugía, es importante el control de los módulos de apertura de ciertos sectores y entender cómo esto garantiza que podemos interpolar cuasiconformemente entre ciertas transformaciones frontera.

El módulo de apertura se introdujo en [BD86]. Sin embargo, el argumento para la interpolación cuasiconforme no es correcta en este artículo. Fue corregido por Bielefeld en su tesis doctoral [Bie]. Él introdujo la noción de casi traslaciones y mostro como aplicarlas.

### 3.2.1. Preliminares: Sectores y módulos de apertura

Sea  $P$  un polinomio mónico de grado  $d \geq 2$  con conjunto de Julia conexo  $J(P)$ . Sea  $\zeta$  un punto  $k$ -periódico repulsor. Existe un número finito de rayos externos que aterrizan en  $\zeta$ . Este conjunto de rayos externos se envía en sí mismo bajo  $P^k$  con un cierto número de rotación combinatorio, digamos  $p/q$ . Si los  $q$  argumentos de un ciclo de rayos son cíclicamente ordenados como  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < 1$ , entonces  $d \cdot \theta_i \pmod{1} = \theta_{(i+p) \pmod{q}}$ . Podemos suponer que  $\zeta$  es un punto fijo de  $P$ . (De lo contrario, consideremos  $P^k$  como un polinomio mónico de grado  $d^k$ .)

Entonces para  $i = 1, 2, \dots, q$ , los argumentos anteriores son de la forma  $\frac{j}{d^q - 1}$  para cierto  $j \in \{0, 1, \dots, d^q - 2\}$ .

### 3.2.2. Definición de sectores y módulos de apertura

Con  $P, \zeta$  y  $p/q$  como antes, definimos un sector frontera  $S$  con vértice en  $\zeta$  como un dominio acotado simplemente conexo que satisface  $S \subset P^q(S)$ , acotado por dos arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que satisfacen  $\gamma_j \subset P^q(\gamma_j)$ , para  $j = 1, 2$ , y un tercer arco que conecta las dos esquinas no iguales de  $\zeta$ . La numeración de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es escogida de tal forma que  $S$  está a la izquierda de  $\gamma_1$  cuando se orienta de  $\zeta$  hacia fuera.

Considera el cociente  $S \setminus P^q$ , obtenemos un dominio fundamental conformemente equivalente a un anillo  $A_S$ . Ver Figura 3.2.

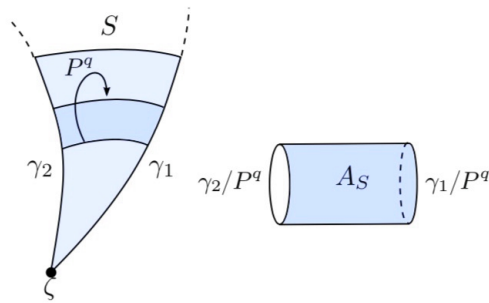
Definimos el módulo de apertura de un sector  $S$  con vértice en  $\zeta$  como el módulo del anillo  $A_S$ , es decir,

$$\text{mód}_\zeta(S, P^q) = \text{mód}(A_S).$$

El módulo de apertura de un sector es en general difícil de calcular. Introduciremos tres tipos especiales de sectores. En el primer caso, el módulo de apertura es calculable.

#### Sectores Log-Böttcher

Sea  $\psi_P : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_P$  la transformación inversa de las coordenadas de Böttcher conjugando  $P_0(z) := z^d$  con  $P$  en la cuenca del infinito. Además, sea  $\mathbb{H}_r$  el semiplano derecho y consideremos  $\psi_P \circ \exp : \mathbb{H}_r \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_P$ , la transformación que conjugua la



**Figura 3.2:** La definición de un sector con vértice en  $\zeta$ , invariante bajo  $P^q$  y su módulo de apertura.

transformación  $M_d$  (multiplicación por  $d$ ) con  $P$ . Un rayo externo en  $R_P(\theta)$  en  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_P$  corresponde a una semilínea horizontal  $R(\theta)$  con parte imaginaria  $2\pi\theta$  y todas las traslaciones verticales por  $2\pi$ . Un equipotencial del potencial  $\rho$  corresponde en  $\mathbb{H}_r$  a una línea vertical de parte real  $\rho$ .

En  $\mathbb{H}_r$  definimos el sector no acotado log - Böttcher de pendiente  $s$  centrado en  $R(\theta)$  como

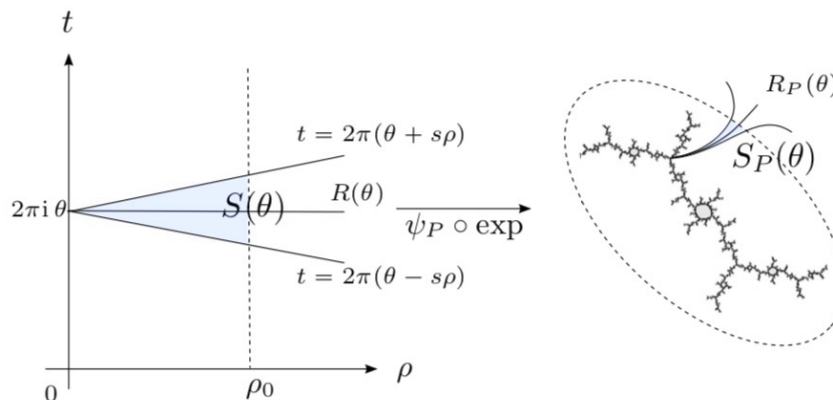
$$S(\theta) = S^s(\theta) = \{\rho + 2\pi it \in \mathbb{H}_r \mid |t - \theta| \leq s\rho\}.$$

A partir de ahora omitiremos la palabra log - Böttcher. El sector  $S(\theta)$  es enviado homeomorficamente en el sector  $S(d \cdot \theta)$  por  $M_d$ .

El sector no acotado  $S_P(\theta)$  en el plano dinámico de  $P$  esta definido como

$$S_P(\theta) = (\psi_P \circ \exp)(S(\theta)).$$

Ver Figura 3.3.



**Figura 3.3:** La definición de un sector no acotado en el semiplano superior derecho y sus correspondientes sectores no acotados en el plano dinámico de  $P$ . La región sombreada es la parte del sector módulo el equipotencial  $\rho$ .

Notemos que cualquier sector de este tipo se intersecta, no importa que tan pequeña sea la pendiente. Para evitar esto y evitar las intersecciones de diferentes sectores, consideraremos únicamente sectores acotados.

Como antes, sea  $\zeta$  un punto fijo repulsor en  $J(P)$ . Consideremos sus órbitas hacia atrás  $\bigcup_{n \geq 0} P^{-n}(\zeta)$  y todos los rayos que aterrizan en dichos puntos. Sus argumentos pertenecen al conjunto

$$\left\{ \frac{j}{d^n(d^q - 1)} \mid j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Escogemos un arbitrario  $\eta > 0$ . Para cualquier  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se define el  $n$ -sector acotado de pendiente  $s$  centrado en  $R(\theta)$  como

$$S_n^s(\theta) := S_n^s(\theta, \eta) := \left\{ \rho + 2\pi it \in \mathbb{H}_r : |t - \theta| \leq s\rho; \rho \leq \frac{\eta}{d^n} \right\}. \quad (3.1)$$

Esto no es difícil de verificar si la pendiente  $s$  es escogida como

$$s < s_{\text{máx}} := \frac{1}{2\eta(d^q - 1)}$$

entonces, para cualquier  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  el  $n$ -sector acotado  $S_n\left(\frac{j}{d^n(d^q - 1)}\right)$  para  $j \in \mathbb{Z}$ , son disjuntos por parejas. Además, los sectores acotados

$$S_0^s\left(\frac{j}{d^q - 1}\right), j \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad S_n^s\left(\frac{k}{d^n(d^q - 1)}\right), \quad k \in \mathbb{Z}, k \nmid d, n \in \mathbb{N},$$

son todos disjuntos a pares, y también lo son sus homólogos dinámicos. Ver Figura 3.4.

Es fácil calcular los módulos de apertura de sectores fuera del conjunto de Julia lleno.

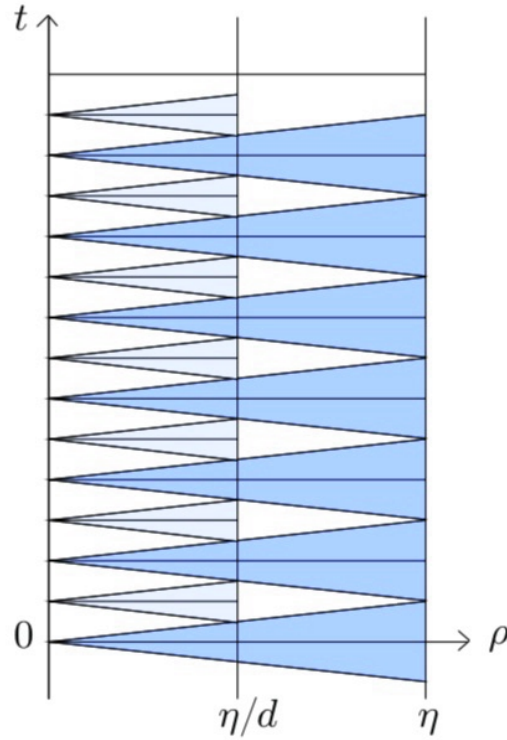
**Proposición 3.2.1. (Módulos de apertura de sectores log - Böttcher de pendiente  $s$ ).**

Sean  $P$  un polinomio mónico de grado  $d$  con conjunto de Julia lleno conexo,  $\zeta$  un punto fijo repulsor con número de rotación combinatorio  $p/q$ , y  $S_P^s(\theta)$  un sector log - Böttcher de pendiente  $s$  con vértice en  $\zeta$ . Entonces el módulo de apertura relativo a  $P$  es

$$\text{mód}_\zeta(S_P^s(\theta), P^q) = \frac{2}{q \log d} \arctan(2\pi s), \quad (3.2)$$

por lo tanto, una función creciente de  $s$ . Si  $\eta$  tiende a 0 y  $s$  tiende a  $+\infty$ , bajo la condición de que  $s\eta < \frac{1}{2(d^q - 1)}$ , entonces  $\text{mód}_\eta(S_P^s(\theta), P^q)$  tiende a  $\frac{\pi}{q \log d}$ .





**Figura 3.4:** Sectores acotados disjuntos de pendiente  $s = s_{\max}$  en  $\mathbb{H}_r$ .

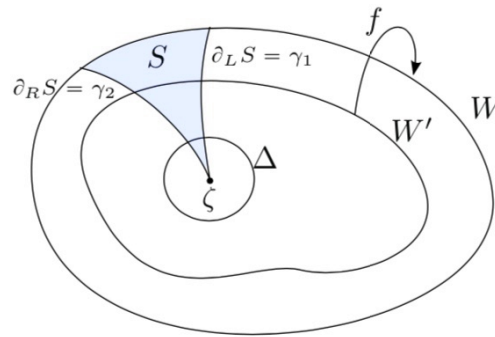
*Demostración.* Ya que el módulo de apertura es invariante bajo conjugaciones holomorfas, es suficiente probar que  $\text{mód}_0(S^s(0), (M_d)^q) = \frac{2}{q \log d} \arctan(2\pi s)$ . □

### Sectores para aplicaciones de tipo polinomial.

De manera general, sea  $f : W' \rightarrow W$  una aplicación de tipo polinomial con punto fijo repulsor  $\zeta$  de número de rotación combinatorio  $p/q$ . Entonces un sector invariante  $S \subset W \setminus \mathcal{K}_f$  con vértice en  $\zeta$  es un dominio simplemente conexo acotado por una parte de  $\partial W$  y dos arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con punto final en común  $\zeta$  y que satisfacen que  $\gamma_j \subset f^q(\gamma_j)$  para  $j = 1, 2$ . Escribimos  $S = \setminus \gamma_1, \gamma_2 /$  como el sector entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  o por simplicidad  $\partial_L S := \gamma_1$  y  $\partial_R S := \gamma_2$ , las curvas izquierda y derecha que acotan a  $S$ . Ver Figura 3.5.

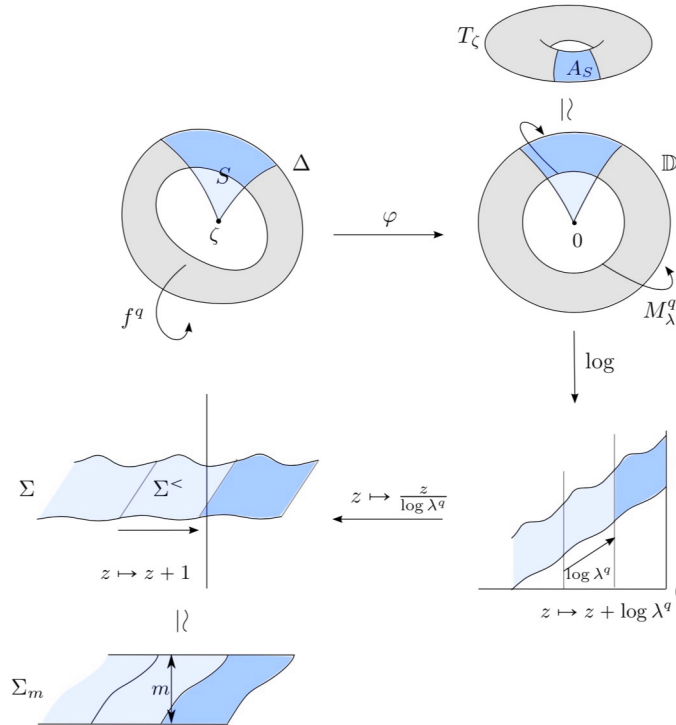
### Sectores en dominios linealizables.

Sean  $\Delta$  una vecindad de  $\zeta$  y  $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{D}$  una coordenada linealizable, que conjuga  $f : \Delta' \rightarrow \Delta$  con la transformación lineal  $z \mapsto \lambda z$ , donde  $\Delta'$  es una componente conexa de  $f^{-1}(\Delta)$  que contiene a  $\zeta$  y  $\lambda = f'(\zeta)$ . Un sector en  $\Delta$  es un dominio simplemente conexo  $S \subset \Delta$  con vértice en  $\zeta$ , el cual es invariante bajo  $f^q$ , es decir,  $S \cap \Delta =$

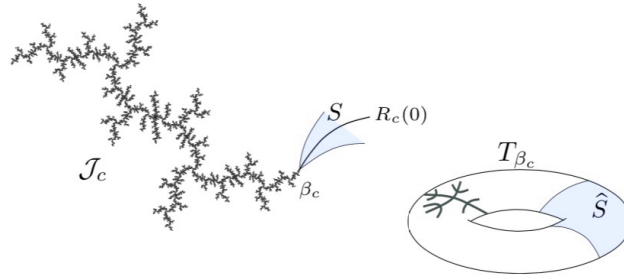


**Figura 3.5:** Un sector general para una aplicación de tipo polinomial. La vecindad  $\Delta$  es un dominio linealizable.

$f^q(S) \cap \Delta$ . En particular, un sector invariante  $\log$  - Böttcher bajo  $P^q$  intersecta al dominio  $\Delta$  en un sector de este tipo. En general, sectores invariantes en  $\Delta$  contienen partes del conjunto de Julia lleno. Si  $S$  es un sector para una aplicación de tipo polinomial,  $S \cap \Delta$  es un sector en  $\Delta$ . (Ver Figura 3.5). Consideremos el Toro cociente asociado  $T_\zeta = (\Delta \setminus \{\zeta\})/f^q$ . La proyección del sector  $S$  en  $T_\zeta$  es el anillo  $A_S$ , cuyo módulo es  $\text{mód}_\zeta(S, f^q)$ , el módulo de apertura de  $S$ . Ver Figuras 3.6 y 3.7.



**Figura 3.6:** Un sector en los dominios de linealización y sus equivalentes conformes.



**Figura 3.7:** Un sector invariante  $S = S_c^s(0)$  con vértice  $\beta_c$ , el punto de aterrizaje del rayo cero  $R_c(0)$ .

Sea  $S$  un sector invariante en  $\Delta$  bajo la acción de  $f^q$ . Escogemos una banda  $\log$  del logaritmo definido en  $\varphi(S \cap \Delta)$ . Entonces la normalización de la coordenada de  $\log$  - linealización es la coordenada de  $\log$  - linealización normalizada dividiendo por  $\log \lambda^q$ ,

$$z \mapsto w = \frac{1}{\log \lambda^q} (\log \circ \varphi)(z).$$

Conjuga  $f^q$  en  $S$  con la traslación  $T_1$  por 1 en la semibanda horizontal  $\Sigma^<$ , la imagen de  $S \cap \Delta$  bajo la transformación  $\log$  - linealización normalizada. Notemos que un módulo de apertura  $\text{mód}_\zeta(S, f^q)$  de  $S$  es igual al módulo de un cuadrilátero  $\Sigma^< \setminus T_1^{-1}(\Sigma^<)$ .

Sea  $\Sigma$  la doble banda infinita que es invariante bajo  $T_1$  y la extensión de la semibanda  $\Sigma^<$ . Esta banda es conformemente equivalente a la doble banda infinita horizontal derecha  $\Sigma_m$  con  $\mathbb{R}$  como frontera inferior y altura igual a  $m := \text{mód}_\zeta(S, f^q)$  y de tal manera que la equivalencia conforme conjuga  $T_1$  en  $\Sigma$  con  $T_1$  en  $\Sigma_m$ .

Observemos que si  $S$  es la restricción de un sector  $\log$  - Böttcher en el dominio de linealización  $\Delta$  de un polinomio  $P$ , es decir,  $S = S_P^s(\theta) \cap \Delta$  entonces el cociente de dos anillos conformemente equivalente y por el lema anterior

$$\text{mód}_\zeta(S, P^q) = \frac{2}{q \log d} \arctan(2\pi s).$$

### 3.2.3. Interpolación cuasiconforme en sectores

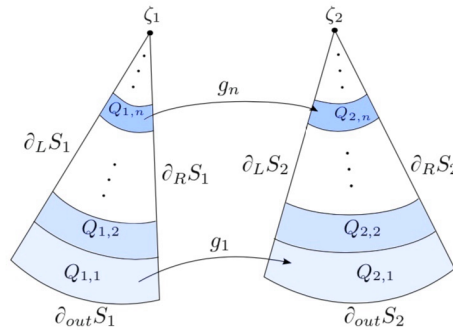
En la cirugía necesitamos construir transformaciones cuasiconformes de un sector invariante en otro, como una interpolación entre transformaciones de frontera dadas. En esta subsección recolectaremos diferentes casos.

Para  $j = 1, 2$ , sea  $f_j$  una transformación holomorfa con punto fijo repulsor  $\zeta_j$  y sea  $S_j$  un sector que es invariante bajo  $f_j$  con vértice en  $\zeta_j$ . La frontera de  $S_j$  consiste de tres piezas  $\partial_{L/R}S_j$ , las fronteras izquierda y derecha de  $S_j$ , y  $\partial_{out}S_j$ , la frontera

opuesta al vértice. Podemos suponer que ambas  $\partial_{L/R}S$  son reales analíticas y que  $\partial_{out}S$  es  $\mathcal{C}^2$ .

**Lema 3.2.2. (Interpolación cuasiconformemente simple).** Sean  $f_j$  y  $S_j$  como antes. Sean  $g_{L/R} : \partial_{L/R}S_1 \rightarrow \partial_{L/R}S_2$  y  $g_{out} : \partial_{out}S_1 \rightarrow \partial_{out}S_2$  difeomorfismos dados, que se supone son analíticos en los lados y  $\mathcal{C}^2$  fuera de la frontera. Además, supongamos que  $g_{L/R} \circ f_1 = f_2 \circ g_{L/R}$  siempre que esté definida. Entonces existe una extensión  $g : \bar{S}_1 \rightarrow \bar{S}_2$ , que es cuasiconforme en el interior.

*Demostración.* La transformación  $g$  es definida inductivamente usando la dinámica en los sectores. Para  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $Q_{j,n}$  el cuadrilátero cerrado definido como la cerradura de  $f_j^{-(n-1)}(S_j) \setminus f_j^{-n}(S_j)$ . Definimos  $g_1 : Q_{1,1} \cap Q_{1,2} \rightarrow Q_{2,1} \cap Q_{2,2}$  del interior de la frontera de  $Q_{1,1}$  en el interior de la frontera de  $Q_{2,1}$  tal que  $g_{out} \circ f_1 = f_2 \circ g_1$  se satisfaga. Escogamos una extensión cuasiconforme  $g_1 : Q_{1,1} \rightarrow Q_{2,1}$  de la transformación frontera la cual es  $\mathcal{C}^2$  - difeomorfismo a trozos. Definimos inductivamente  $g_n : Q_{1,n} \rightarrow Q_{2,n}$  tal que  $f_2 \circ g_{n-1} = g_n \circ f_1$ . Comparar con la Figura 3.8.



**Figura 3.8:** Una extensión cuasiconforme simple de las funciones frontera.

La transformación resultante  $g : S_1 \rightarrow S_2$  es cuasiconforme con distorsión igual que en  $g_1$  donde la distorsión no cambia cuando aplicamos pullback por transformaciones holomorfas.  $\square$

Para  $j = 1, 2$ , sea  $\varphi_j : \Delta_j \rightarrow \mathbb{D}$  una coordenada linealizable alrededor de  $\zeta_j$  conjugando  $f_j$  con  $z \mapsto \lambda_j z$ , donde  $\lambda_j$  es el multiplicador de  $f_j$  en el punto fijo. Luego,  $S_j \cap \Delta_j = f_j(S_j) \cap \Delta_j$  tal que  $S_j \cap \Delta_j$  es un sector invariante en  $\Delta_j$ . Escogemos ramas del logaritmo definido en  $S_j \cap \Delta_j$  y consideremos la correspondiente normalización de coordenadas log - linealización

$$z \mapsto w = \frac{1}{\log \lambda_j} (\log \circ \varphi_j)(z) \quad \text{para } z \in S_j \cap \Delta_j.$$

Revisaremos conceptos que necesitamos. Recordemos, que una transformación entre dos arcos de Jordan periódicos hacia atrás (unilateral infinito) es casi una traslación si, más o menos, la transformación no es tan lejana de la transformación

identidad cuando tendemos al infinito y con derivada acotada. Transformaciones periódicas son ejemplos siempre de casi traslaciones. Un ejemplo de este tipo, es dado por la siguiente proposición.

**Lema 3.2.3. (Ejemplo de casi traslación).** *Sea  $f : W' \rightarrow W$  una transformación de tipo cuadrático con conjunto de Julia conexo,  $\zeta$  es un punto fijo repulsor con número de rotación combinatorio  $p/q$  y  $S = \setminus r, l/ \subset W$  un sector invariante con vértice  $\zeta$  acotado por arcos suaves. Sea  $\tilde{f} : \tilde{W}' \rightarrow \tilde{W}$  otra transformación de tipo cuadrático con punto fijo repulsor  $\tilde{\zeta}$  con el mismo número de rotación combinatorio, y  $\tilde{S} = \setminus \tilde{r}, \tilde{l}/$  definido similarmente. Consideremos una transformación suave  $\psi : r \rightarrow \tilde{r}$  conjugando la dinámica:*

$$\psi \circ f^q = \tilde{f}^q \circ \psi.$$

*En las coordenadas log - linealización la función  $\psi$  se convierte en una casi traslación.*

En efecto, la función  $\psi$  expresada en coordenadas log - linealizables conmuta con la traslación por 1 y es por lo tanto una casi traslación.

Más generalmente, cualquier sector invariante es conformemente equivalente a una semibanda estándar invariante bajo la traslación  $T_1$  por 1. De aquí que, la extensión del problema sea reducido a encontrar transformaciones entre semibandas estándar. Usaremos dos resultados. Si dos sectores tienen el mismo módulo de apertura - o equivalentemente si dos semibandas tienen la misma altura- entonces la única transformación de Riemann entre ellos, preserva esquinas cuando extendemos a las fronteras (en particular mandando  $\zeta_1$  en  $\zeta_2$ ), se extiende como casi traslación en las fronteras cercanas al infinito. Por otra parte, si dos bandas tienen diferente altura y damos una transformación frontera las cuales son traslaciones, entonces se extienden en el interior como una transformación cuasiconforme. En lo que sigue, aplicaremos estos resultados a nuestra situación actual.

**Lema 3.2.4. (Transformaciones de frontera de casi traslación)** *Sean  $f_j$  y  $S_j$  como antes, y sea  $\mathcal{R} : S_1 \rightarrow S_2$  la única transformación de Riemann, cuya extensión a la frontera manda esquinas en esquinas, en particular  $\zeta_1$  a  $\zeta_2$ . Denotamos a las transformaciones frontera por  $\partial_{L/R}\mathcal{R} : \partial_{L/R}S_1 \rightarrow \partial_{L/R}S_2$  y  $\partial_{out}\mathcal{R} : \partial_{out}S_1 \rightarrow \partial_{out}S_2$ . Supongamos que el módulo de apertura de los sectores  $S_j$  relativos a  $f_j$  en  $\zeta_j$  son iguales. Entonces las transformaciones frontera  $\partial_{L/R}\mathcal{R}$  cuando son expresados en coordenadas log - linealizables normalizadas son casi traslaciones.*

*Demostración.* Podemos suponer que  $\mathcal{R}(S_1) \cap \Delta_1 \subset S_2 \cap \Delta_2$ . Si no, encogemos  $\Delta_1$  y redefinimos  $\varphi_1$ . Consideremos la restricción de  $\mathcal{R}$  a  $S_1 \cap \Delta_1$ . La semibanda estándar es obtenida por las coordenadas log - linealizables normalizadas composición con transformaciones conformes con la misma altura. Por lo tanto las transformaciones frontera entre las semibandas estándar son casi traslaciones. Ver la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.5. (Extensión de transformaciones conformes en semibandas estándar de misma altura).** Sea  $f : \Sigma_{1,\gamma_1}^< \rightarrow \Sigma_{1,\gamma_2}^<$  la transformación de Riemann entre el interior de la semibanda cuya extensión continua a las fronteras satisface  $\hat{f}(-\infty) = -\infty$ ,  $\hat{f}(\gamma_1(0)) = \gamma_2(0)$ , y  $\hat{f}(\gamma_1(1)) = \gamma_2(1)$ . Sean  $\tilde{f}_1(x) := \hat{f}(x)$  para  $x \leq \gamma_1(0)$  y  $\tilde{f}_2(x) := \hat{f}(x+i) - i$  para  $x \leq \operatorname{Re}\gamma_1(1)$ . Entonces  $f_j, j = 1, 2$ , son casi traslaciones.

□

**Lema 3.2.6. (Lema general de interpolación cuasiconforme).** Sean  $f_j, S_j$  y  $\varphi_j$  como antes. Sean  $g_{L/R} : \partial_{L/R}S_1 \rightarrow \partial_{L/R}S_2$  transformaciones analíticas y  $g_{out} : \partial_{out}S_1 \rightarrow \partial_{out}S_2$  un difeomorfismo  $\mathcal{C}^2$ . Supongamos que  $g_{L/R}$  son casi traslaciones cuando se expresan en coordenadas  $\log$  - linealizables normalizadas cerca de  $\zeta_j$ . Entonces existe una extensión  $g : \bar{S}_1 \rightarrow \bar{S}_2$ , que es cuasiconforme en el interior.

*Demostración.* Podemos suponer que  $g_{L/R}(\partial_{L/R}S_1 \cap \Delta_1) \subset \partial_{L/R}S_2 \cap \Delta_2$ . Consideremos la restricción de  $g_{L/R}$  a  $\partial_{L/R}S_1 \cap \Delta_1$ . La semibanda estándar es obtenida por composición de coordenadas de linealización normalizadas con transformaciones conformes con diferentes alturas en general. Pero las transformaciones frontera inducidas son casi traslaciones por hipótesis. Por lo tanto, podemos extenderlas cuasiconformemente al interior. Ver el siguiente lema.

**Lema 3.2.7. (Interpolación  $\mathcal{C}^1$  en semibandas).** Sean

$$\tilde{f}_1 : (-\infty, \gamma_1(0)] \rightarrow (-\infty, \gamma_2(0)]$$

y

$$\tilde{f}_2 : (-\infty, \operatorname{Re}\gamma_1(r_1)] \rightarrow (-\infty, \operatorname{Re}\gamma_2(r_2)]$$

difeomorfismos  $\mathcal{C}^2$  crecientes, que son casi traslaciones.

La transformación frontera de  $\partial\Sigma_{r_1,\gamma_1}^<$  a  $\partial\Sigma_{r_2,\gamma_2}^<$  consiste de tres difeomorfismos  $f_1(x) = \tilde{f}_1(x)$ ,  $f_2(x+ir_1) = \tilde{f}_2(x) + ir_2$ , y  $f_\gamma(\gamma_1(y)) = \gamma_2(\frac{r_2}{r_1}y)$ , se extiende a una transformación cuasiconforme  $f : \Sigma_{r_1,\gamma_1}^< \rightarrow \Sigma_{r_2,\gamma_2}^<$ .

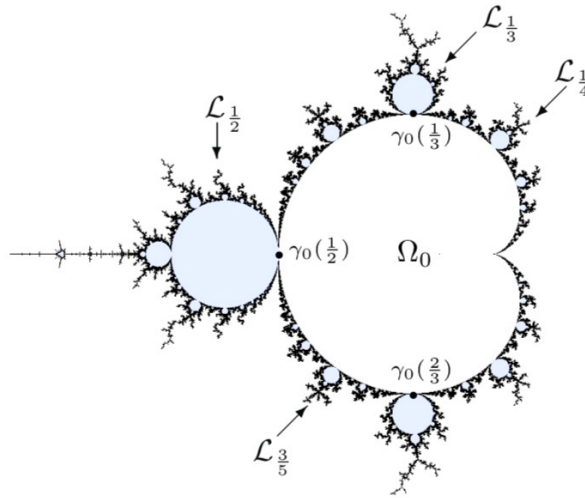
□

### 3.2.4. Extremidades del conjunto de Mandelbrot

Las cirugías comienzan tomando polinomios cuadráticos en una extremidad del conjunto de Mandelbrot o una transformación de tipo cuadrático híbridamente equivalente a tales polinomios. Recordaremos las características de los polinomios cuadráticos en las extremidades. Sea  $\Omega_0$  la componente principal del conjunto de Mandelbrot, que consiste de todos los valores de  $c$  para los cuales  $P_c(z) = z^2 + c$  tiene

un punto fijo atractor. La frontera  $\partial\Omega_0$  es la cardioide principal, parametrizada por  $\gamma_0 : t \in \mathbb{T} \mapsto (e^{2\pi it}/2) - (e^{2\pi it}/2)^2$ .

Para cualquier  $0 < p < q$  con  $\text{mcd}(p, q) = 1$ , la  $p/q$ -extremidad,  $\mathcal{L}_{p/q}$  del conjunto de Mandelbrot es la componente conexa de  $M \setminus \bar{\Omega}_0$  cuya cerradura está unida a  $\bar{\Omega}_0$  en  $\gamma_0(e^{2\pi ip/q})$ . Ver Figura 3.9.



**Figura 3.9:** Extremidades del conjunto de Mandelbrot son componentes conexas de  $M \setminus \bar{\Omega}_0$ .

Los polinomios en la  $p/q$ -extremidad  $\mathcal{L}_{p/q}$  comparten las siguientes características. El punto fijo interno  $\alpha_c$  es repulsor y punto de aterrizaje de un ciclo de  $q$  rayos externos mandados entre ellos por un número de rotación  $p/q$  combinatorio. Denotaremos por  $R_{\alpha_c}$  los  $q$  rayos externos que aterrizan en  $\alpha_c$  más el punto fijo en sí. La única preimagen de  $\alpha_c$ , además de si misma, es  $-\alpha_c$  y este es el punto de aterrizaje de otros  $q$  rayos externos mandados en el  $q$ -ciclo de rayos. Denotamos por  $R_{-\alpha_c}$  este conjunto de rayos más el punto pre-fijo  $-\alpha_c$ . El complemento de  $R_{\alpha_c} \cup R_{-\alpha_c}$  consiste de  $2q - 1$  dominios. Denotaremos a estos dominios por  $\{V_c^i\}_{0 \leq i < q}$  donde  $V_c^0$  contiene al punto crítico  $0$ , y por  $\tilde{V}_c^i = -V_c^i$  para  $0 < i < q$ , todos numerados en orden cíclico en relación con  $\pm\alpha_c$ . El polinomio cuadrático actúa en estos dominios como

- $V_c^0 \xrightarrow{2:1} \tilde{V}_c^p$
- $V_c^i, \tilde{V}_c^i \xrightarrow{1:1} \tilde{V}_c^{i+p \pmod{q}}$
- $V_c^{q-p}, \tilde{V}_c^{q-p} \xrightarrow{1:1} R_{-\alpha_c} \cup V_c^0 \cup \bigcup_{i=1}^{q-1} V_c^i$

El conjunto  $\mathcal{K}_c \setminus \{\alpha_c, -\alpha_c\}$  tiene  $2q - 1$  componentes conexas, una para cada conjunto  $V_c^i$  para  $i = 0, 1, \dots, q - 1$ , y  $\tilde{V}_c^i$  para  $i = 1, \dots, q - 1$ . Denotamos las componente de  $K_c$  en  $V_c^i$  y  $\tilde{V}_c^i$  por  $K_c^i$  y  $\tilde{K}_c^i$ , respectivamente.

Para  $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  el conjunto  $M \setminus \{\gamma_\Omega(t)\}$  tiene dos componentes conexas (excepto si  $\Omega = \Omega_0$  y si  $t = 0$ ). Sea  $\mathcal{L}_{\Omega,t}^*$  la componente que no contiene a  $\Omega$ , y sea

$$\mathcal{L}_{\Omega,t} = \overline{\mathcal{L}_{\Omega,t}^*} = \mathcal{L}_{\Omega,t}^* \cup \{\gamma_\Omega(t)\}.$$

Llamamos a  $\mathcal{L}_{\Omega,t}$  el limb de  $M$  relativo a  $\Omega$  de argumento interno  $t$ .

### 3.2.5. Controlando del módulo de apertura de sectores

En las cirugías necesitamos mandar ciertos sectores en otros de manera conforme, de tal forma que las transformaciones frontera tengan buenas propiedades. En particular requerimos que el módulo de apertura de estos sectores sea el mismo.

En la sección 4 usaremos polinomios  $P_c$  con  $c \in \mathcal{L}_{p/q} \setminus \overline{\Omega}_{p/q}$ , donde  $\Omega_{p/q}$  es la componente hiperbólica con el mismo punto raíz que la extremidad  $\mathcal{L}_{p/q}$ . En lo que sigue se mostrará como es posible controlar el módulo de apertura si el equipotencial  $\eta > 0$  es escogido suficientemente pequeño tal que la pendiente  $s$  puede ser escogida suficientemente grande.

#### Trabajando con polinomios cuadráticos directamente

Para cualquier  $P_c$  con  $c \in \mathcal{L}_{p/q}$  consideremos la restricción  $P_c : W' \rightarrow W$  de tipo cuadrático donde  $W', W$  son acotados por equipotenciales de potencial  $\eta/2$  y  $\eta$ , para algún  $\eta > 0$  escogido arbitrariamente. Consideremos el conjunto de sectores acotados  $S_c^s(\theta_i)$  de pendiente  $s$  alrededor de  $q$  rayos  $R_c(\theta_i), i = 1, \dots, q$ , aterrizando en  $\alpha_c$ , invariante hacia adelante.

Sea  $\Delta$  un dominio linealizable alrededor de  $\alpha_c$  y sea  $T_{\alpha_c} = \Delta \setminus \{\alpha_c\} / P_c^q$  el toro cociente. Observemos que el polinomio  $P_c$  induce una transformación conforme  $\hat{P}_c : T_{\alpha_c} \rightarrow T_{\alpha_c}$ . Los  $q$  sectores de pendiente  $s$  se proyectan a un  $q$ -ciclo bajo la transformación  $\hat{Q}_c$  del anillo en  $T_{\alpha_c}$ , de módulo en común  $m(s)$ , dados por la fórmula 3.2 del lema 3.2.1. Observemos que  $m(s)$  no depende de  $c$  y  $\eta$ . Los anillos intermedios forman otro  $q$ -ciclo bajo la transformación  $\hat{P}_c$ . Denotamos el módulo común de estos anillos intermedios por  $m_\Sigma(c, s)$ . Estos módulos son independientes de  $\eta$ .

**Lema 3.2.8.** *El módulo  $m_\Sigma(c, s)$  es una función continua de  $(c, s) \in \mathcal{L}_{p/q} \times \mathbb{R}_+$ . Para  $c \in \mathcal{L}_{p/q} \setminus \overline{\Omega}_{p/q}$  fijo, el módulo  $m_\Sigma(c, s)$  tiende a 0 cuando  $s$  tiende a  $\infty$ .*

*Demostración.* Sea  $\zeta$  una coordenada de linealización para  $P_c^2$  en una vecindad  $U_1$  del punto fijo  $\alpha_c$

$$\zeta : U_1 \rightarrow \zeta(U_1)$$

tal que

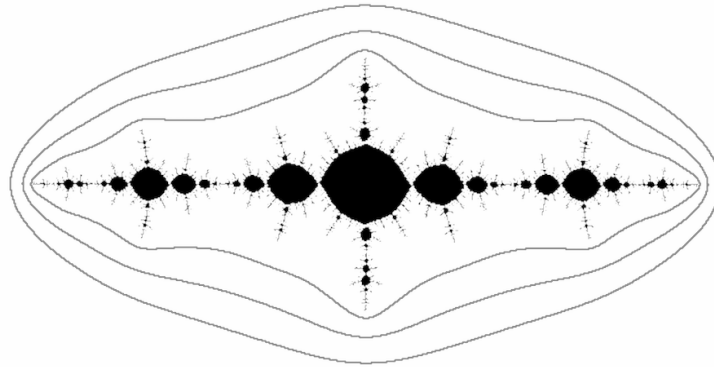
$$\zeta(P_c^2(x)) = \rho\zeta(x) \quad \text{para } x \in U_1' = (P_c^2)^{-1}(U_1) \cap U_1.$$

Sea  $\Delta_c$  una vecindad de  $\alpha_c$  tal que  $\zeta(\Delta_c)$  es un disco.

Bajo las hipótesis hechas para  $c$ , tenemos del Teorema de Yoccoz 4.3.3, que existe



$\tau \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tal que  $c \in \mathcal{L}_{1/2, \tau}$  la extremidad de  $M$  relativa a  $\Omega_{1/2}$  de argumento  $\tau$ . Cualquier polinomio  $P_c$  con  $c \in \mathcal{L}_{1/2, \tau}$  tiene la propiedad de que existe una sucesión de puntos pellizco, (cuando existen rayos externos que aterrizan en un mismo punto, el punto de aterrizaje es llamado un punto pellizco), en el conjunto de Julia que convergen a  $\alpha_c$  y tales que cada punto pellizco tienen argumentos externos  $(1/3, 1/2)$  y  $(1/2, 2/3)$ . Ver figura 3.10.



**Figura 3.10:** Conjunto de Julia con  $c \in \Omega_{1/2, 1/2}$ .

Sea  $x_0$  un punto pellizco que pertenece a la misma componente conexa de  $\mathcal{K}_c \cap \Delta_c$  que  $\alpha_c$  y que tiene al menos dos argumentos externos  $1/3 + u$  y  $2/3 - v$  con  $u$  y  $v \in (0, 1/6)$ . Entonces la sucesión de puntos  $x_n \in \Delta_c$  satisface que

$$\zeta(x_n) = \frac{1}{\rho} \zeta(x_{n-1})$$

pertenece a la misma componente de  $\mathcal{K}_c \cap \Delta_c$  que  $\alpha_c$  y

$$x_n = \gamma_c \left( \frac{1}{3} + \frac{u}{4^n} \right) = \gamma_c \left( \frac{2}{3} + \frac{v}{4^n} \right).$$

Para  $s > 0$  dado, sean  $y'_n$  y  $y''_n$ , respectivamente, los puntos del potencial  $s/4^n$  en los rayos  $R_c(\frac{1}{3} + \frac{u}{4^n})$  y  $R_c(\frac{2}{3} + \frac{v}{4^n})$ , respectivamente. Podemos escoger  $q$  tal que los sectores  $S_q(1/3)$  y  $S_q(2/3)$  contengan los puntos  $y'_n(s)$  y  $y''_n(s)$  para  $n$  suficientemente grande. Si es necesario podemos reducir  $\eta$  tal que  $q\eta < \frac{1}{6}$ .

Sea  $T_c$  el toro complejo  $\Delta_c \setminus \{\alpha_c\} / P_c^2$  (que no depende de  $s$ ), y sea  $\bar{w}_c : \Delta_c \setminus \{\alpha_c\} \rightarrow T_c$  la proyección. Sea  $A_\Sigma$  el anillo en  $T_c$  correspondiente al sector  $\Sigma$ ,  $P^2$ -invariante.

Cuando  $s$  tiende a 0, entonces los puntos  $\bar{\omega}_c(y'_c(s))$  y  $\bar{\omega}_c(y''_c(s))$  tienden a  $\bar{\omega}_c(x_n)$ . El anillo  $A_\Sigma$  pasa entre dichos puntos y tiene su ecuador en la clase de homotopía fija de bucles en  $T_c$ . Dotamos  $T_c$  con la métrica euclidiana local, tal que la geodésica tiene longitud 1, y denotamos por  $\delta(s)$  la distancia entre  $\bar{\omega}_c(y'_c(s))$  y  $\bar{\omega}_c(y''_c(s))$  en esta métrica. Entonces

$$m_\Sigma(c, s) = \text{mód}(A_\Sigma) = \frac{\pi}{2l}$$

donde  $l$  es la longitud de Poincaré en  $\text{Int}(A_\Sigma)$  del ecuador de  $A_\Sigma$ . Este ecuador tiene una longitud euclidiana  $\geq 1$  y pasa a una distancia  $\leq \delta/2$  de uno de los puntos  $\bar{\omega}_c(y'_c(s))$ ,  $\bar{\omega}_c(y''_c(s))$ . Usando la  $\frac{1}{4}$ -desigualdad de Koebe, tenemos que

$$l \geq \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\delta(s)}\right),$$

por lo tanto

$$\text{mód}(A_\Sigma) \leq \frac{\pi}{\log(1/\delta)}.$$

Pero  $\delta(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow 0$ , por lo tanto  $m_\Sigma(c, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Observación 3.2.9.** *Para cualquier  $c_0 \in \mathcal{L}_{p/q} \setminus \bar{\Omega}_{p/q}$  podemos escoger una pendiente  $s$  ( $\eta$  decreciente si es necesario) tal que  $m_\Sigma(c, s) < m(s)$  se cumple para todo  $c$  en una vecindad de  $c_0$  en  $\mathcal{L}_{p/q} \setminus \bar{\Omega}_{p/q}$ . Entonces podemos dividir sectores de pendiente  $s$  en tres subsectores  $P_c^q$ -invariantes,  $S_L, S_M$  y  $S_R$ , tal que el sector intermedio  $S_M$  tenga módulo de apertura igual a  $m_\Sigma(c, s)$ .*

## Capítulo 4

# CIRUGÍA EN POLINOMIOS COMPLEJOS

Se conoce que el conjunto de Mandelbrot es conexo y se conjetura que es localmente conexo (MLC). Si la conjetura MCL es probada, se sigue inmediatamente que  $M$  es arco conexo, ya que un conjunto conexo y localmente conexo es siempre arco conexo.

La principal motivación de Douady para hacer cirugía fue para dar soporte a la conjetura de arco conexidad. En esta sección nos enfocaremos en su trabajo con Branner [BD86], en cirugía de polinomios complejos, tomando únicamente a la familia cuadrática, en particular polinomios en  $\mathcal{L}_{1/2}$  y  $\mathcal{L}_{1/3}$ . El teorema principal es el siguiente

**Teorema 4.0.1. (TEOREMA A)** *Existe una función  $\phi_A : \mathcal{L}_{1/2} \rightarrow \mathcal{L}_{1/3}$  que es un homeomorfismo de  $\mathcal{L}_{1/2}$  en su imagen.*

## 4.1. La dinámica de $P_c$ para $c \in M$

En la sección 1.2 del capítulo 1 hablamos del plano dinámico y en la sección 3.2.4 del capítulo anterior se proporcionó la dinámica de los polinomios cuadráticos elegidos en cualquier  $p/q$  - extremidad. En esta sección mostraremos con más detalle la dinámica de  $P_c$  para polinomios cuadráticos tomados en  $\mathcal{L}_{1/2}$  y  $\mathcal{L}_{1/3}$ .

Recordemos que el polinomio cuadrático  $P_c(z) = z^2 + c$  con  $c \in M$ , tiene un punto crítico  $w = 0$  y dos puntos fijos  $\alpha_c$  y  $\beta_c$ , sea  $\beta_c$  el punto fijo que satisface  $\beta_c = \gamma_c(0)$  y  $-\beta_c = \gamma_c(1/2)$  su pre - imagen. Para  $c$  dentro de la cardiode principal de  $M$ , el punto fijo  $\alpha_c$  es atractor y el conjunto de Julia es una curva de Jordan, pero para  $c \in \mathcal{L}_{p/q}$  el punto fijo  $\alpha_c$  es repulsor y un punto de pellizco del conjunto de Julia.

### 4.1.1. La dinámica de $P_c$ para $c \in \mathcal{L}_{1/2}$

Sea  $P_c$  un polinomio cuadrático en  $\mathcal{L}_{1/2}$  y sean  $w, \alpha_c$  y  $\beta_c$  como antes. Observemos que  $\alpha_c = \gamma_c(\frac{1}{3}) = \gamma_c(\frac{2}{3})$  y que su pre - imagen  $-\alpha_c$ , satisface  $\gamma_c(\frac{1}{6}) = \gamma_c(\frac{5}{6}) = -\alpha_c$ .

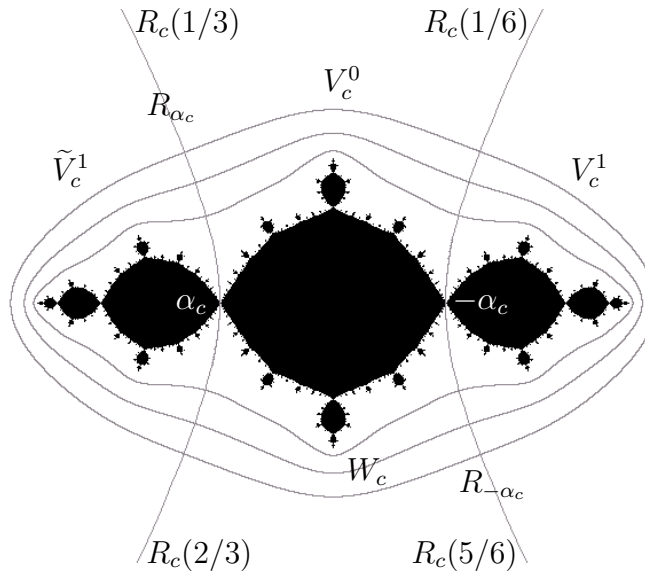
Escogemos  $\eta > 0$  y sean

$$W_c = \{z \in \mathbb{C} \mid G_c(z) \leq \frac{\eta}{2^i}\}$$

los equipotenciales.

De la sección 3.2.4 recordemos que  $R_{\alpha_c}$  denota los rayos que aterrizan en  $\alpha_c$  unión el punto de aterrizaje, entonces  $R_{\alpha_c} = R_c(\frac{1}{3}) \cup \{\alpha_c\} \cup R_c(\frac{2}{3})$  y  $R_{-\alpha_c} = R_c(\frac{1}{6}) \cup \{-\alpha_c\} \cup R_c(\frac{5}{6})$ , descomponen a  $W$  en tres subconjuntos compactos  $V_c^0, V_c^1$  y  $\tilde{V}_c^1$ , con  $w \in V_c^0, \beta_c \in V_c^1$  y  $\beta'_c \in \tilde{V}_c^1$ . Ver Figura 4.1.

Entonces  $P_c$  induce homeomorfismos de  $V_c^1$  en  $V_c^1 \cup V_c^0$  y de  $\tilde{V}_c^1$  en  $V_c^1 \cup V_c^0$  y una transformación de grado 2 de  $V_c^0$  en  $\tilde{V}_c^1$ .



**Figura 4.1:** Conjunto de Julia para  $c \in \mathcal{L}_{1/2}$ .  $R_{\alpha_c}$  y  $R_{-\alpha_c}$ , descomponen a  $W_c$  en 3 subconjuntos compactos  $V_c^0, V_c^1$  y  $\tilde{V}_c^1$ .

### 4.1.2. La dinámica de $P_\lambda$ para $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$

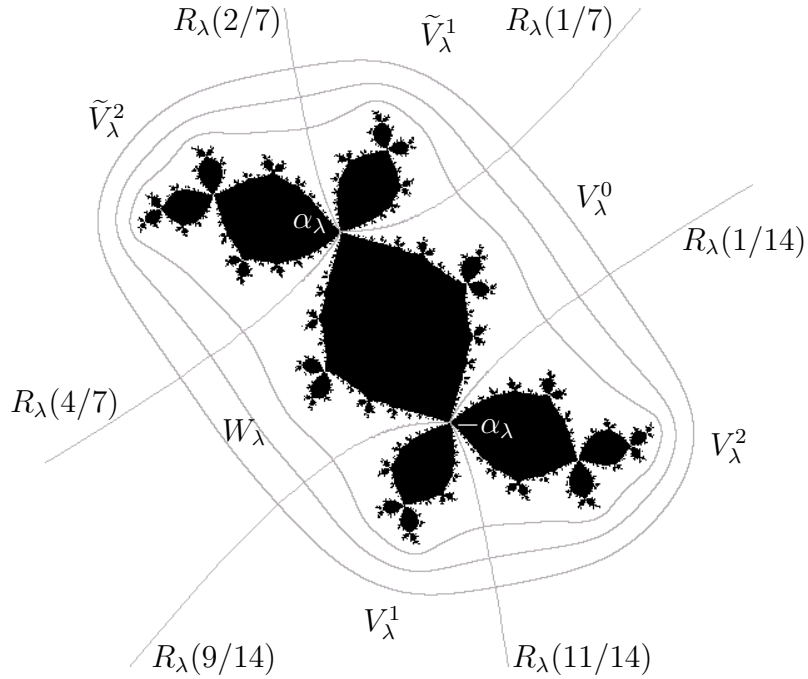
Tomamos  $P_\lambda$  en  $\mathcal{L}_{1/3}$  y sean  $w, \alpha_\lambda$  y  $\beta_\lambda$  como antes. Los rayos exteriores correspondientes al punto de aterrizaje  $\alpha_\lambda$  son  $\alpha_\lambda = \gamma_\lambda(\frac{1}{7}) = \gamma_\lambda(\frac{2}{7}) = \gamma_\lambda(\frac{4}{7})$  y la preimagen

$$-\alpha_\lambda = \gamma_\lambda\left(\frac{1}{14}\right) = \gamma_\lambda\left(\frac{9}{14}\right) = \gamma_\lambda\left(\frac{11}{14}\right).$$

Fijamos  $\eta > 0$  y

$$W_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid G_\lambda(z) \leq \frac{\eta}{2^i}\}.$$

Observemos que  $R_{\alpha_\lambda} = R_\lambda\left(\frac{1}{7}\right) \cup R_\lambda\left(\frac{2}{7}\right) \cup R_\lambda\left(\frac{4}{7}\right) \cup \{\alpha_\lambda\}$  y  $R_{-\alpha_\lambda} = R_\lambda\left(\frac{1}{14}\right) \cup R_\lambda\left(\frac{9}{14}\right) \cup R_\lambda\left(\frac{11}{14}\right) \cup \{-\alpha_\lambda\}$  descomponen a  $W_\lambda$  en 5 subconjuntos compactos  $V_\lambda^0, V_\lambda^1, \tilde{V}_\lambda^1, V_\lambda^2$  y  $\tilde{V}_\lambda^2$ . Ver figura 4.2.



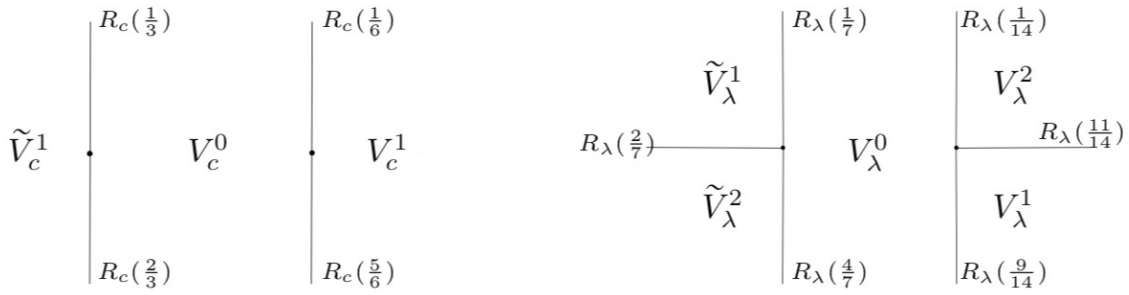
**Figura 4.2:** Conjunto de Julia para  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ ,  $R_{\alpha_\lambda}$  y  $R_{-\alpha_\lambda}$  descomponen a  $\widehat{W}$  en 5 subconjuntos compactos  $V_\lambda^0, V_\lambda^1, \tilde{V}_\lambda^1, V_\lambda^2$  y  $\tilde{V}_\lambda^2$ .

La dinámica de  $P_\lambda$  induce homeomorfismos  $V_\lambda^1, \tilde{V}_\lambda^1 \xrightarrow{1:1} \tilde{V}_\lambda^2$  y  $V_\lambda^2, \tilde{V}_\lambda^2 \xrightarrow{1:1} V_\lambda^0 \cup V_\lambda^1 \cup V_\lambda^2$ , y  $V_\lambda^0 \rightarrow \tilde{V}_\lambda^1$  una transformación de grado 2.

## 4.2. Cirugía de $\mathcal{L}_{1/2}$ a $\mathcal{L}_{1/3}$

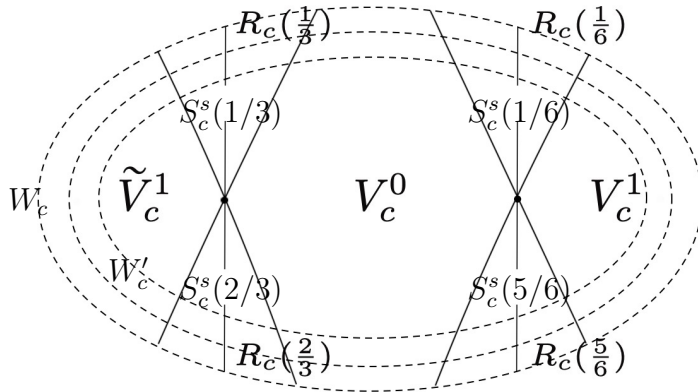
Comencemos con un polinomio cuadrático  $P_c$  con  $c \in \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2}$ , construiremos una transformación que tenga las mismas propiedades topológicas que una transformación de tipo cuadrático, híbridamente equivalente a un polinomio  $P_\lambda$  con  $\lambda = \lambda(c) \in \mathcal{L}_{1/3}$  y esto lo haremos en 6 pasos.

**Paso 0: Restringiendo el polinomio a una transformación de tipo cuadrático**



**Figura 4.3:** Bosquejo de las particiones del plano dinámico para  $c \in \mathcal{L}_{1/2}$  y  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ .

Restringimos  $P_c$  a una transformación del tipo cuadrático  $Q_c : W'_c \rightarrow W_c$  por la elección de un potencial  $\eta > 0$  tal que  $W_c$  es acotado por el equipotencial elegido. Como explicamos en la sección 3.2, podemos escoger sectores de pendiente arbitraria  $s$  alrededor de los rayos  $R_c(1/3)$  y  $R_c(2/3)$  en  $W_c$ , que satisfacen  $\eta s < 1/6$  tal que los sectores acotados  $S_c^s(1/3)$  y  $S_c^s(2/3)$  y sus sucesivas preimágenes son todas disjuntas. Los sectores están fuera del conjunto de Julia lleno  $\mathcal{K}_c$ . Ver Figura 4.4.



**Figura 4.4**

Aplicando el lema 3.2.8 y la observación 3.2.9, podemos elegir  $\eta$  y  $s$  tal que  $m_\Sigma(c, s) < m(s)$ , donde  $m_\Sigma(c, s)$  es el módulo de apertura de  $\Sigma_c^s = \tilde{V}_c^1 \setminus (S_c^s(1/3) \cup S_c^s(2/3))$  y  $m(s)$  el módulo de apertura de los dos sectores de pendiente  $s$ , con vértice en  $\alpha_c$  y relativo a  $P_c^2$ . Notemos que  $-\alpha_c$  es un punto fijo de  $P_c^2$  con el mismo multiplicador que  $\alpha_c$  bajo  $P_c^2$  y los sectores de pendiente  $s$  alrededor de  $R_c(1/6)$  y  $R_c(5/6)$  son  $-P_c^2$ -invariantes y de módulo de apertura  $m(s)$ .

Por lo tanto, podemos escoger un sector intermedio  $S_M$  alrededor de  $R_c(5/6)$  de pendiente  $s_M < s$  tal que el módulo de apertura  $\text{mód}_{-\alpha_c}(S_M, -P_c^2) = m_\Sigma(c, s)$ . Tenemos una subdivisión del sector alrededor de  $R_c(5/6)$  en tres subsectores  $S_L, S_M, S_R$  tal que  $S_L \cup S_M \cup S_R = S_c^s(5/6) \cap W'_c$ . Ver Figura 4.5.

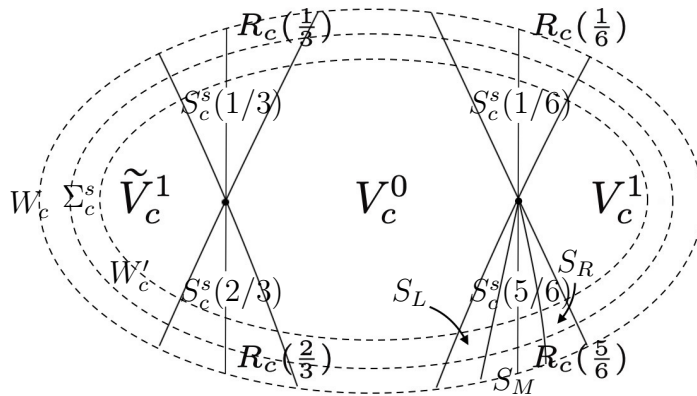
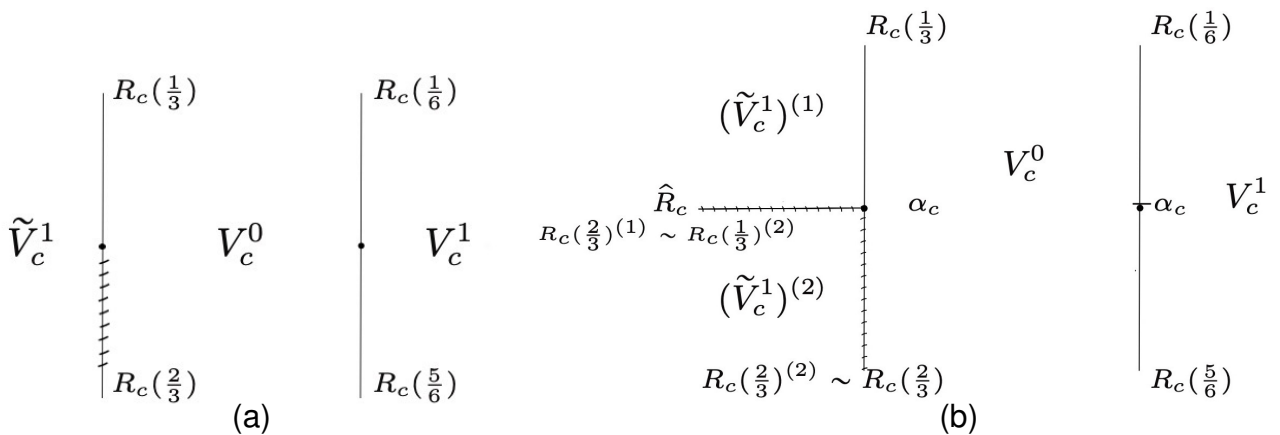


Figura 4.5

**Paso 1: Cortar y pegar para obtener una superficie de Riemann  $\mathbb{C}_c^E$  abstracta**

Definiremos el espacio  $\mathbb{C}_c^E$  extendiendo a  $\mathbb{C}$  como se explicará más adelante. Cortando alrededor de  $R_c(2/3)$  y abriendo la apertura creando dos copias del rayo que denotaremos por  $R_c(2/3)^{(1)} \subset \partial \tilde{V}_c^1$  y  $R_c(2/3)^{(2)} \subset \partial V_c^0$ . Ver Figura 4.6.



**Figura 4.6:** (a) Bosquejo del cortado alrededor del rayo  $R_c(2/3)$ . (b) Bosquejo de la copia  $(\tilde{V}_c^1)^{(2)}$  insertada entre los rayos  $R_c(2/3)^{(1)}$  y  $R_c(2/3)^{(2)}$ .

Insertamos una copia de  $\tilde{V}_c^1$  entre dichos rayos. El conjunto original es denotado por  $(\tilde{V}_c^1)^{(1)}$  y la copia por  $(\tilde{V}_c^1)^{(2)}$ . Este último es acotado por una copia de cada rayo original que denotamos por  $R_c(1/3)^{(2)}$  y  $R_c(2/3)^{(2)}$ . Haremos el pegado identificando  $z^{(2)}$  en  $R_c(2/3)^{(2)}$  con el punto  $z$  en  $R_c(2/3)$ , en el mismo equipotencial como  $z^{(2)}$ , e identificando  $z^{(2)}$  en  $R_c(1/3)^{(2)}$  con  $P_c(z)^{(1)}$  en  $R_c(2/3)^{(1)}$ . La identificación de  $R_c(2/3)$  y  $R_c(2/3)^{(2)}$  la denotamos por  $R_c(2/3)$  mientras que el pegado de  $R_c(2/3)^{(1)}$  con  $R_c(1/3)^{(2)}$  es denotado por  $\hat{R}_c$ . Ver Figura 4.6.

El espacio extendido  $\mathbb{C}_c^E$  tiene la estructura natural de una superficie de Riemann isomorfa a  $\mathbb{C}$ .

### Paso 2: Definir la función $f_c$ en el plano extendido

Definimos la función  $f_c$  por

$$f_c(z) := \begin{cases} P_c(z) & z \in V_c^1 \\ P_c(z)^{(1)} & z \in V_c^0 \\ z^{(2)} & z = z^{(1)} \in (\tilde{V}_c^1)^{(1)} \\ P_c(z) & z = z^{(2)} \in (\tilde{V}_c^1)^{(2)}. \end{cases}$$

Esta función es holomorfa en su dominio de definición. Por extensión continua,  $R_c(1/6)$  es enviado a  $R_c(1/3)$ , y  $R_c(1/3)$  a  $\hat{R}_c$ , mientras  $R_c(5/6)$  es una línea de discontinuidad. Ver Figura 4.7.

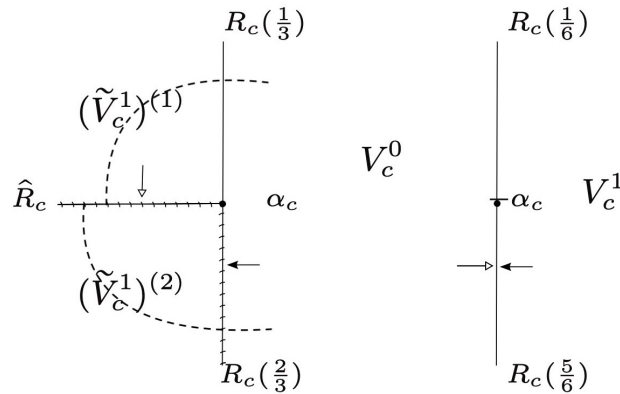


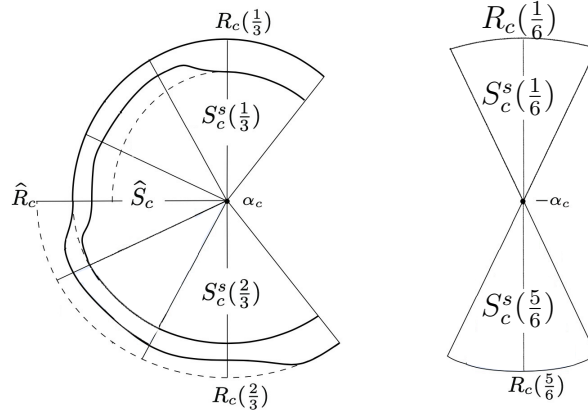
Figura 4.7

Notemos que  $f_c(z)$  se acerca a  $R_c(2/3)$  y  $\hat{R}_c$  respectivamente, cuando  $z$  se acerca a  $R_c(5/6)$  en  $V_c^1$  y en  $V_c^0$ , respectivamente. Puntos en  $(\tilde{V}_c^1)^{(2)}$  tienen únicamente una preimagen bajo  $f_c$ . Sea  $\mathcal{K}_c^{(2)} := (\mathcal{K}_c \cap (\tilde{V}_c^1)^{(2)})$ , y sea  $\mathcal{K}_c^E := \mathcal{K}_c \cup \mathcal{K}_c^{(2)}$  la extensión del conjunto de Julia lleno. Notemos que,  $\mathcal{K}_c^E$  es invariante hacia adelante bajo  $f_c$ .

### Paso 3: Modificar $f_c$ a una transformación $g_c$ en un dominio restringido

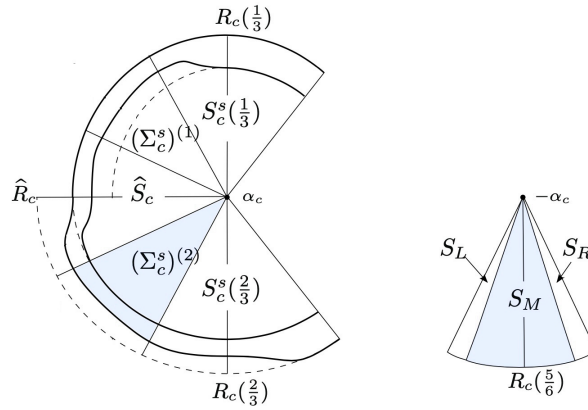
Comencemos con la elección de un dominio de definición  $X'_c$  y el rango  $X_c$  de la función modificada  $g_c$ . Los sectores alrededor de  $R_c(1/3)$  y  $R_c(2/3)$  son denotados por  $S_c^s(1/3)$  y  $S_c^s(2/3)$  mientras que el sector alrededor de  $\hat{R}_c$  es denotado por  $\hat{S}_c$ . La frontera de  $X_c$  es escogida como una curva  $\mathcal{C}^2$ , que coincide con la frontera de  $W_c^E$  excepto en el interior de  $(\tilde{V}_c^1)^{(2)} \cup S_c^s(2/3)$ , donde se escoge que pertenezca a  $W_c^E \setminus \overline{W_c^E}$ . La frontera de  $X'_c$  coincide con la frontera de  $W_c^E$  excepto en el interior de  $(\tilde{V}_c^1)^{(1)} \cup \hat{S}_c$ , donde esta determinada por  $f_c$  enviando  $X'_c$  en  $X_c$ . Modificaremos la función  $f_c$  en el sector  $S_c^s(5/6) \cap W_c'$ . Ver Figura 4.8.





**Figura 4.8:** Definición de sectores, del dominio  $X'_c$  y rango  $X_c$ .

Por la observación 3.2.9 y anteriormente en el paso 0, podemos dividir al sector  $S_c^s(5/6)$  en tres subsectores  $S_L, S_M$  y  $S_R$ . Sea  $\mathcal{R} : S_M \rightarrow (\Sigma_c^s)^{(2)} \cap X_c$  la única transformación de Riemann, que cuando extendemos continuamente a las fronteras manda esquinas a esquinas y que el vértice  $-\alpha_c$  de  $S_M$  es enviado al vértice  $\alpha_c$  de  $(\Sigma_c^s)^{(2)}$  y donde  $(\Sigma_c^s)^{(2)}$  es el sector formado entre los sectores  $\widehat{S}_c$  y  $S_c^s(2/3)$ , es decir,  $(\Sigma_c^s)^{(2)} = (\widetilde{V}_c^1)^{(2)} \setminus (\widehat{S}_c \cup S_c^s(2/3))$ . Ver Figura 4.9



**Figura 4.9:** La figura muestra donde  $X'_c$  y  $X_c$  difieren de  $W_c'^E$  y  $W_c^E$  y muestra los sectores que son importantes cuando modificamos  $f_c$  y  $g_c$ .

Ya que arreglamos que los módulos de apertura sean el mismo, las funciones frontera en los lados son casi traslaciones cuando son expresadas en coordenadas de log - linealización (recordemos el lema 3.2.4). Por el lema 3.2.5 podemos encontrar transformaciones cuasiconformes

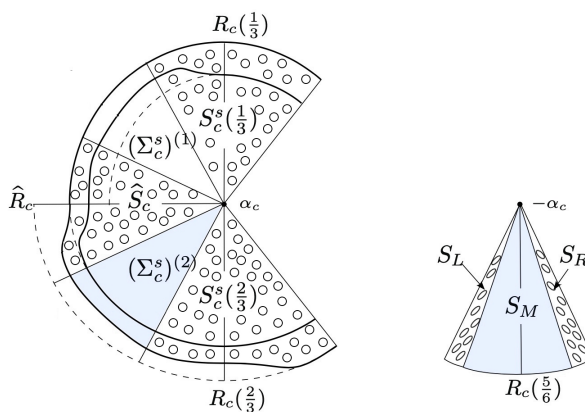
$$g_c : S_L \rightarrow \widehat{S}_c \cap X_c \quad \text{y} \quad g_c : S_R \rightarrow S_c^s(2/3) \cap X_c$$

quienes extienden a las transformaciones frontera dadas por  $\partial\mathcal{R}_{L/R}$  y  $f_c$ . Esto termina la construcción de  $g_c : X'_c \rightarrow X_c$ , una transformación cuasiregular de grado 2.

Notemos que las órbitas pasan por los sectores laterales  $S_{L/R}$  a lo más una vez, mientras que las órbitas pueden pasar por  $S_M$  infinitas veces.

**Paso 4: Cambiando la estructura compleja para obtener una función híbridamente equivalente  $h_c$**

Definimos una forma de Beltrami  $\mu_c$  en  $X_c$  como se sigue. Sea  $\mu_c := \mu_0$  en los tres sectores  $S_c^s(1/3), \hat{S}_c, S_c^s(2/3)$  en  $X_c$ . La unión de estos forma un conjunto invariante hacia adelante para  $g_c$  cuando esta definida. Entonces sea  $\mu_c := (g_c)^* \mu_0$  en  $S_{L/R}$ . Ya que las órbitas pasan a lo más una vez en  $S_{L/R}$  podemos expandir  $\mu_c$  por sucesiones de pullbacks bajo  $g_c$  a  $\bigcup_{n \geq 1} (g_c)^{-n}(S_{L/R})$ . Por construcción  $\mu_c$  es  $g_c$ -invariante. Ver figura 4.10



**Figura 4.10:** Definición del coeficiente de Beltrami  $\mu_c$  en  $X_c$ .

La dilatación de  $\mu_c$  es acotada por la dilatación de  $\mu_c$  en  $S_{L/R}$ , ya que todos los pullbacks, excepto el primero, son hechos por funciones holomorfas.

Por el teorema de integrabilidad obtenemos un homeomorfismo  $\phi_c : \text{Int}(X_c) \rightarrow \mathbb{D}$  tal que  $\phi_c^* \mu_0 = \mu_c$ . Sea  $D'_c := \phi(X'_c)$  y definimos  $h_c : D'_c \rightarrow \mathbb{D}$  como  $h_c := \phi_c \circ g_c \circ \phi_c^{-1}$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc} (X'_c, \mu_c) & \xrightarrow{g_c} & (X_c, \mu_c) \\ \phi_c \downarrow & & \downarrow \phi_c \\ (D'_c, \mu_0) & \xrightarrow{h_c} & (\mathbb{D}, \mu_0) \end{array}$$

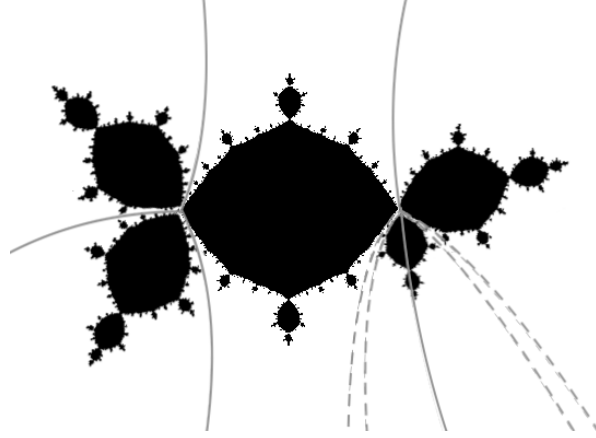
Entonces  $h_c$  es holomorfa. En particular,  $\mu_c = \mu_0$  en  $\bigcup_{n \geq 0} (g_c)^{-n}(\mathcal{K}_c^E)$ .

**Paso 5: Obtener un polinomio en  $\mathcal{L}_{1/3}$**

Se sigue de lo anterior que  $h_c : D'_c \rightarrow \mathbb{D}$  es una transformación de tipo cuadrático con un punto crítico en  $\phi_c(0)$ . La órbita crítica pertenece a  $\phi_c(\mathcal{K}_c^E)$ . Por lo tanto el conjunto de Julia lleno de  $h_c$  es conexo. Por el teorema de enderezamiento, existe

una equivalencia híbrida  $\chi_c$ , que conjuga  $h_c$  con un único polinomio cuadrático  $P_\lambda$  con  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ .

$$\begin{array}{ccc} D'_c & \xrightarrow{h_c} & \mathbb{D} \\ \chi_c \downarrow & & \downarrow \chi_c \\ X'_\lambda & \xrightarrow{P_\lambda} & X_\lambda \end{array}$$



**Figura 4.11:** Bosquejo del resultado de la Cirugía partiendo de un polinomio cuadrático  $P_c$  con  $c \in \mathcal{L}_{1/2}$ .

**Proposición 4.2.1.** *La transformación  $\Phi : \mathcal{L}_{1/2} \rightarrow \mathcal{L}_{1/3}$  dada por  $c \mapsto \lambda(c)$  esta bien definida. Su imagen satisface*

$$\Phi(\mathcal{L}_{1/2}) = \mathcal{N}_{1/3} := \{\lambda \in \mathcal{L}_{1/3} \mid P_\lambda^n(0) \notin V_\lambda^1 \text{ para cualquier } n \geq 0\}.$$

*Más aún, si  $P_c$  tiene una órbita periódica, que es atractora, parabólica o Siegel, respectivamente, entonces  $P_{\lambda(c)}$  también la tiene.*

*Demostración.* Supongamos que tenemos más opciones en la construcción (un diferente nivel de equipotencial, pendiente, extensión, etc.), y obtenemos una función  $\tilde{g}_c$ . Entonces existe una conjugación  $\tilde{h}_c$  entre  $g_c$  y  $\tilde{g}_c$  que es de hecho una equivalencia híbrida. Se sigue que las funciones holomorfas  $h_c$  y  $\tilde{h}_c$  son también híbridamente equivalentes por la función conjugación  $\tilde{\phi}_c \circ \tilde{h}_c \circ \phi_c^{-1}$ , y también lo son los polinomios  $P_\lambda$  y  $P_{\tilde{\lambda}}$  obtenidos después del estiramiento. Ya que los conjuntos de Julia llenos,  $\mathcal{K}_{P_{\lambda(c)}}$  y  $\mathcal{K}_{P_{\tilde{\lambda}(c)}}$ , son conexos, los polinomios  $P_{\lambda(c)}$  y  $P_{\tilde{\lambda}(c)}$  son conjugaciones afines. Porque las normalizaciones de conjugaciones afines son parecidas a la identidad y por lo tanto  $\lambda(c) = \tilde{\lambda}(c)$ .  $\square$

Con esta construcción hemos definido una transformación en el complemento de  $\overline{\Omega}$ , es decir,

$$\phi_A : \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2} \rightarrow \mathcal{L}_{1/3},$$

la cual extenderemos de manera natural a  $\mathcal{L}_{1/2}$  definiendo

$$\phi_A = \varphi_{\Omega_{1/3}}^{-1} \circ \varphi_{\Omega_{1/2}} \text{ en } \overline{\Omega}_{1/2}.$$

donde  $\varphi_{\Omega_r} : \overline{\Omega}_r \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ , es la función multiplicador que asocia todo  $c \in \Omega_r$  el multiplicador del ciclo atractor para  $P_c$ . Ver Figura 4.12.

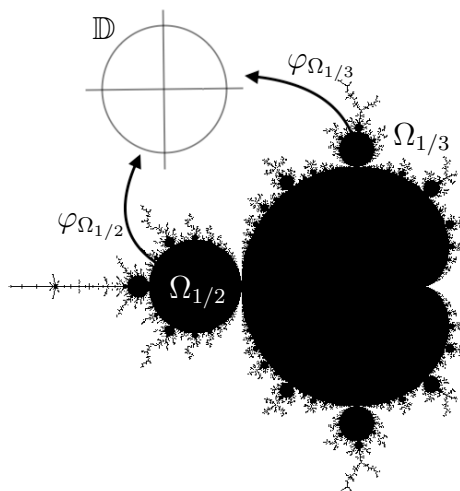


Figura 4.12: Función multiplicador para  $\Omega_{1/2}$  y  $\Omega_{1/3}$ .

### 4.3. Continuidad de la función $\phi_A$

La continuidad no es obvia, ya que  $\mu_c$  y  $\phi_c$  no dependen continuamente de  $c$ , y probablemente  $h_c$  menos. Comencemos analizando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X'_c & \xrightarrow{g_c} & X_c \\ \phi_c \downarrow & & \downarrow \phi_c \\ D'_c & \xrightarrow{h_c} & \mathbb{D} \\ \chi_c \downarrow & & \downarrow \chi_c \\ X'_\lambda & \xrightarrow{P_\lambda} & X_\lambda \end{array}$$

Si consideramos por un momento que  $X_c$  y  $X'_c$  como subconjuntos del plano complejo, entonces el coeficiente de Beltrami  $\mu_c$  y la función  $g$  varía homórfamemente con el parámetro  $c$ , como desde el inicio ambos fueron construidos en el plano complejo

y luego enviados por las coordenadas de Böttcher, que también varían holomorfa-mente con el parámetro. Sin embargo, esto funciona en la cuenca del infinito, que se mueve con  $c$ . Entonces no podemos hacer las mismas afirmaciones para todos los puntos en el plano dinámico, ya que dado un punto  $z$  podría pertenecer a  $\mathcal{K}_c$  para un  $c$  dado, pero podría estar en la cuenca del infinito para parámetros arbitrariamente cercanos.

Para empeorar las cosas, una vez que se hacen las identificaciones, la superficie de Riemann  $X_c$  varía con  $c$ . Si queremos aplicar el teorema de Integrabilidad para concluir que  $\phi_c$  depende continuamente de  $c$ , necesitamos uniformizar  $X_c$  al disco Unitario. Pero entonces debemos tener en cuenta la dependencia de la función de uniformización con respecto de  $c$ .

Recordemos la definición de la función  $\phi_A$ , es decir,

$$\phi_A := \begin{cases} \phi_A & z \in \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2} \\ \varphi_{\Omega_{1/3}}^{-1} \circ \varphi_{\Omega_{1/2}} & z \in \overline{\Omega}_{1/2}. \end{cases}$$

Entonces  $\phi_A$  es continua en  $\overline{\Omega}_{1/2}$  por ser composición de dos transformaciones de Riemann. Para mostrar la continuidad completa de  $\phi_A$  se hará de la siguiente manera;

1. Probar la continuidad de  $\phi_A$  en  $\mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2}$ .
2. Verificar que  $\phi_A$  es continua en la frontera, es decir, que las dos piezas de la función están bien definidas en su frontera común.

**Caso 1.** Se probará la continuidad usando el método inspirado por el capítulo II en [[DH85]. Sea  $c_n$  una sucesión de puntos en  $\mathcal{L}_{1/2}$  que convergen a un límite  $c$ . Sea  $P_n = P_{\lambda_n}$  los polinomios construidos a partir de  $P_{c_n}$  y sea  $P_\lambda$  el polinomio construido a partir de  $P_c$ . Supongamos que  $\lambda_n$  tiene un límite  $\tilde{\lambda}$ . Probaremos que  $\tilde{\lambda} = \lambda$ , en otras palabras que  $P_{\tilde{\lambda}} = P_\lambda$ .

Trataremos por separado los casos  $c \in \text{Int } \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2}$  y  $c \in \partial \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2}$ . El caso de  $c$  en el interior se basa en la teoría de [MSS83], y la demostración en este caso es análogo al de la proposición 12, capítulo II.5 en [DH2].

El caso  $c \in \partial \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2}$  se probará gracias a los siguientes dos resultados, la demostración del primero puede verse en el capítulo I.6, [DH85].

**Proposición 4.3.1. ([DH85], Proposición 7)** *Supongamos que  $c_1$  y  $c_2$  están en  $\mathbb{C}$  con  $c_1 \in \partial M$ . Si los polinomios  $P_1(z) = z^2 + c_1$  y  $P_2(z) = z^2 + c_2$  son cuasiconformemente equivalentes, entonces  $c_1 = c_2$ .*

**Lema 4.3.2.** *Sean  $\lambda$  y  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$  como antes, con  $\lambda \in \partial \mathcal{L}_{1/3}$ . Los polinomios cuadráticos  $P_\lambda$  y  $P_{\tilde{\lambda}}$  son cuasiconformemente equivalentes.*

*Demostración.* Denotamos por  $g_n, \phi_n, h_n, \dots$  las funciones  $g_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_n}, h_{\lambda_n}, \dots$  definidas a partir de  $P_n = P_{\lambda_n}$ . Podemos suponer que  $g_n$  es obtenido de  $f_n$  de la misma manera

para todo  $n$ .

Las funciones  $\phi_n$  son cuasiconformes con dilatación acotada. Por lo tanto forman una familia equicontinua y podemos asumir, restringiendonos a una subfamilia, que la sucesión  $\phi_n$  tiende hacia delante a un homeomorfismo  $\tilde{\phi}$ .

No necesariamente tenemos  $\bar{\partial}\tilde{\phi} = 0$  en  $\mathcal{K}_g$ , ya que  $\mathcal{K}_g$  no es en general el límite de  $\mathcal{K}_{g_n}$ .

Pero

$$h_n = \phi_n \circ g_n \circ \phi_n^{-1} \text{ tiende hacia delante a } \tilde{h} = \tilde{\phi} \circ g \circ \tilde{\phi}^{-1},$$

y  $\tilde{h}$  es cuasiconformemente equivalente a  $h_\lambda$ . Usando el lema de la pag. 313, capítulo II.7 en [DH2], obtenemos que  $\tilde{h}$  es cuasiconformemente equivalente a  $P_{\tilde{\lambda}}$ , por lo tanto

$$P_\lambda \sim_{hb} h_\lambda \sim_{qc} \tilde{h} \sim_{qc} P_{\tilde{\lambda}} \text{ y } P_\lambda \sim_{qc} P_{\tilde{\lambda}}.$$

$$\begin{array}{ccc} X'_{c_n} & \xrightarrow{g_n} & X_{c_n} \\ \phi_n \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ D'_{c_n} & \xrightarrow{h_n} & \mathbb{D} \\ \chi_n \downarrow & & \downarrow \chi_n \\ X'_{\lambda_n} & \xrightarrow{P_{\lambda_n}} & X_{\lambda_n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X'_c & \xrightarrow{g} & X_c \\ \tilde{\phi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi} \\ D'_c & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathbb{D} \\ \chi_n \downarrow & & \downarrow \chi_n \\ X'_{\lambda_n} & \xrightarrow{P_{\tilde{\lambda}}} & X_{\lambda_n} \end{array}$$

Del lema 4.3.2 obtenemos que  $P_\lambda$  es cuasiconformemente equivalente a  $P_{\tilde{\lambda}}$  lo cual satisface las condiciones de la proposición 4.3.1 y por lo tanto  $\lambda = \tilde{\lambda}$ .

El polinomio, para el cual todo punto crítico es estrictamente preperiódico, es llamado polinomio Misiurewicz. Sabemos que todos los puntos Misiurewicz en  $M$ , es decir, los  $c$  tal que  $P_c$  es Misiurewicz, forman un conjunto denso en  $\partial M$ .

Si los  $c_n$  son puntos Misiurewicz en  $M$ , entonces los  $\lambda_n$  son puntos Misiurewicz en  $\mathcal{L}_{1/3}$ , por lo tanto el lím  $\lambda_n = \tilde{\lambda} \in \partial\mathcal{L}_{1/3}$  y se sigue del lema 4.3.2 que las condiciones en la proposición 4.3.1 se cumplen, por lo tanto  $\lambda = \tilde{\lambda}$ .

En general, podemos encontrar una sucesión  $c_n^*$  de puntos Misiurewicz en  $M$  tendiendo a  $c$ , y tal que  $\lambda_n^* = \phi_A(c_n^*)$  tiene como límite  $\tilde{a}_n^*$ . Por lo tanto tenemos que  $\tilde{a}^* \in \mathcal{L}_{1/3}$  y por lo que acabamos de demostrar que  $\lambda = \tilde{\lambda}^*$ , entonces  $\lambda \in \partial\mathcal{L}_{1/3}$ . Aplicando la proposición 4.3.1, el lema 4.3.2 y la observación obtenemos  $\lambda = \tilde{\lambda}$ .  $\square$

**Caso 2.** Tenemos que probar que

$$\phi_A(c_n) \rightarrow \phi_A(c) \text{ cuando } c_n \rightarrow c$$

donde  $c_n \in \mathcal{L}_{1/2} \setminus \overline{\Omega}_{1/2}$  y  $c \in \partial\Omega_{1/2}$ . El punto  $c$  es de la forma  $\gamma_{\Omega_{1/2}}(\theta)$ . En los diferentes casos distinguiremos entre  $\theta$  racional o irracional.

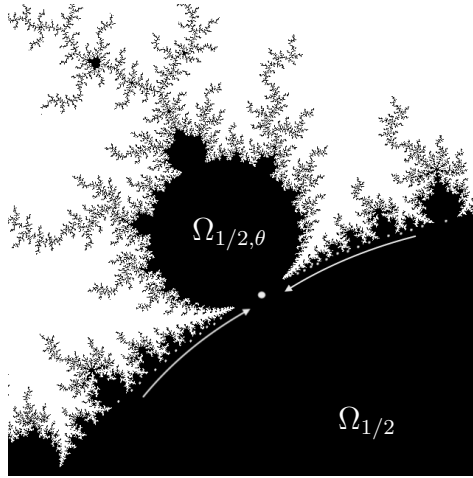
Notemos que de la construcción para  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{L}_{1/2,\theta}$ , el limb de  $M$  relativo a  $\Omega_{1/2}$

de argumento interno  $\theta$ , es enviado por  $\phi_A$  a  $\mathcal{L}_{1/3,\theta}$ , el limb de  $M$  relativo a  $\Omega_{1/3}$  de argumento interno  $\theta$ . El siguiente resultado es esencial para la demostración.

**Teorema 4.3.3. (Teorema de Yoccoz)** *Para cada componente hiperbólica  $\Omega$ , existe una constante  $C_\Omega$ , tal que para cada  $t = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , el diámetro de  $\mathcal{L}_{\Omega,t}$  es  $\leq C_\Omega/q$ .*

Comenzamos con los casos:

(a) *Caso  $\theta$  irracional:* Cada  $c_n \in M_{1/2,\theta_n}$  con  $\theta_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , y la sucesión  $\theta_n \rightarrow \theta$ , en particular el denominador de  $\theta_n$  tiende a  $\infty$ . Entonces  $\phi_A(c_n) \in \mathcal{L}_{1/3,\theta_n}$ , y tenemos que  $\gamma_{\Omega_{1/3}}(\theta_n) \rightarrow \phi_A(c)$ . Del teorema de Yoccoz sabemos que el diámetro de  $\mathcal{L}_{1/3,\theta_n}$  tiende a 0, entonces  $\phi_A(c_n) - \gamma_{\Omega_{1/3}}(\theta_n) \rightarrow 0$ . Se sigue que  $\phi_A(c_n) \rightarrow \phi_A(c)$ .



**Figura 4.13:** Ejemplo de la sucesión de puntos  $c_n$  que convergen a  $c$  con  $\theta$  racional, caso (b).

(b) *Caso  $\theta$  racional y cada  $c_n \in \mathcal{L}_{1/2,\theta_n}$  con  $\theta_n \neq \theta$ :* Este caso es tratado como el caso anterior.

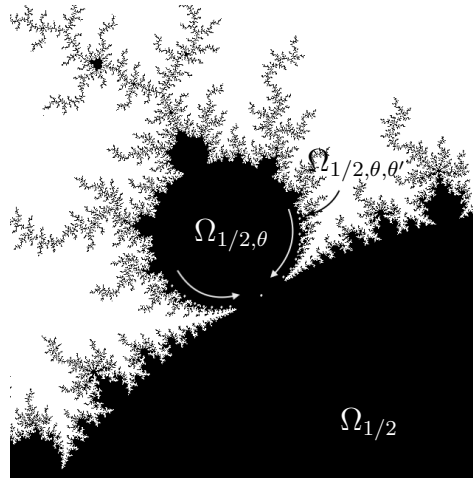
(c) *Caso  $\theta$  racional y cada  $c_n \in \mathcal{L}_{1/2,\theta}$ :* Denotemos por  $\Omega_{\tau,\theta}$  la componente de  $\text{Int}(M)$  adjunta a  $\Omega_\tau$  en el punto  $\gamma_{\Omega_\tau}(\theta)$ , denotamos por  $\mathcal{L}_{1/2,\theta,\theta'}$  el limb de  $M$  relativo a  $\Omega_{\tau,\theta}$  de argumento interno  $\theta'$  y distinguiamos entre dos casos:

(c1)  $c_n \in \overline{\Omega}_{1/2,\theta}$ .

Notemos que  $\phi_A|_{\overline{\Omega}_{1/2,\theta}} = \varphi_{\Omega_{1/3,\theta}}^{-1} \circ \varphi_{\Omega_{1/2,\theta}}$ .

(c2)  $c_n \in \mathcal{L}_{1/2,\theta} \setminus \overline{\Omega}_{1/2,\theta}$ :

Cada  $c_n \in \mathcal{L}_{1/2,\theta,\theta'_n}$  con  $\theta'_n \rightarrow 0$  o  $1$ . Entonces  $\phi_A(c_n) \in \mathcal{L}_{1/3,\theta,\theta'_n}$ . La conclusión es alcanzada aplicando el teorema de Yoccoz.



**Figura 4.14:** Ejemplo de la sucesión de puntos  $c_n$  que convergen a  $c$  con  $\theta$  racional, caso (c2).

#### 4.4. Cirugía Inversa de $\mathcal{L}_{1/3}$ a $\mathcal{L}_{1/2}$

Para terminar de probar que  $\phi_A$  es un homeomorfismo de  $\mathcal{L}_{1/2}$  en su imagen, debemos de revisar la biyectividad y esto lo haremos haciendo cirugía partiendo de un polinomio  $P_\lambda$  con  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ . En otras palabras, construiremos una transformación  $\Psi_A$  de una parte de  $\mathcal{L}_{1/3}$  en  $\mathcal{L}_{1/2}$ , tal que  $\Psi_A \circ \phi_A$  es la identidad en  $\mathcal{L}_{1/2}$ .

Análogamente a la cirugía anterior, esta construcción tiene lugar en varios pasos

$$P_\lambda \rightarrow f_\lambda \rightarrow g \xrightarrow{\sim} h \xrightarrow{\sim} P_c.$$

Sea  $P_\lambda$  con  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ , construiremos una función que tenga las mismas propiedades topológicas que una función de tipo cuadrático, híbridamente equivalente a un polinomio  $P_c$  con  $c \in \mathcal{L}_{1/2}$ .

##### **Paso 1: Identificar y pegar para obtener una superficie de Riemann $\mathbb{C}_\lambda^E$ abstracta**

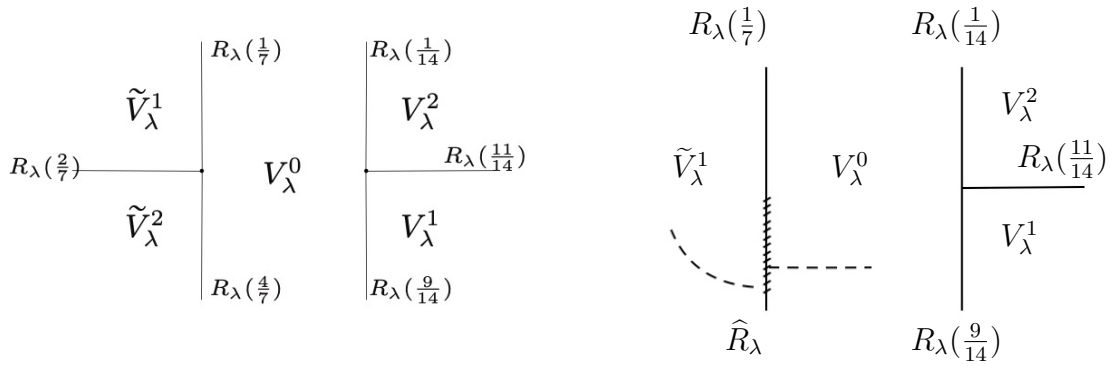
En la primera construcción definimos un espacio  $X_c$  añadiendo una parte de  $W_c$ . Ya que queremos hacer la construcción opuesta, ahora removeremos la parte similar que fue añadida.

Utilizaremos la misma notación de la parte dinámica para  $P_\lambda$  con  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ .

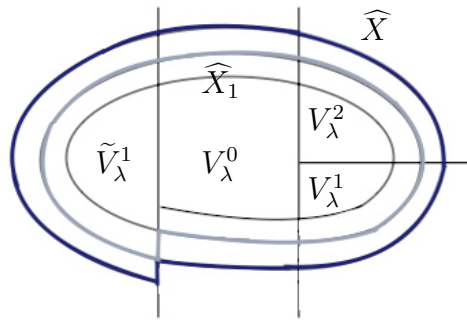
Definimos un nuevo espacio por la identificación  $z \in R_\lambda(\frac{2}{7})$  con  $P_\lambda(z) \in R_\lambda(\frac{4}{7})$  (Ver Figura 4.15). La identificación no es equipotencial. Denotamos por  $\widehat{R}_\lambda$  a la identificación de  $R_\lambda(\frac{2}{7})$  y  $R_\lambda(\frac{4}{7})$ . Sea  $\widehat{X} = \widetilde{V}_\lambda^1 \cup V_\lambda^0 \cup V_\lambda^1 \cup V_\lambda^2$  el espacio que tiene naturalmente la estructura de una superficie de Riemann con frontera  $\mathbb{R}$  - analítica, excepto en las dos esquinas. Sea  $\widehat{X}_1$  la imagen de  $V_\lambda^0 \cup V_\lambda^1 \cup V_\lambda^2 \cup \widetilde{V}_\lambda^1$  en  $\widehat{X}$ . Ver Figura 4.16.

##### **Paso 2: Definir la función $f_\lambda$ en el plano extendido**





**Figura 4.15:** Bosquejo de la identificación de los puntos sobre los rayos  $R_\lambda(\frac{2}{7})$  y  $R_\lambda(\frac{4}{7})$ .



**Figura 4.16:** Definición de los espacios  $\widehat{X}$  y  $\widehat{X}_1$ .

Definiremos a  $f_\lambda$ , como la función de primer retorno de  $P_\lambda$ , ya que hemos quitado la parte de  $\widetilde{V}_\lambda^2$ , por lo tanto,

$$f_\lambda(z) = \begin{cases} P_\lambda & z \in V_\lambda^0 \cup V_\lambda^2 \\ P_\lambda^2 & z \in \widetilde{V}_\lambda^1. \end{cases}$$

Esta función  $f_\lambda$  es analítica en el interior de su dominio de definición pero no está definida en  $V_\lambda^1$ .

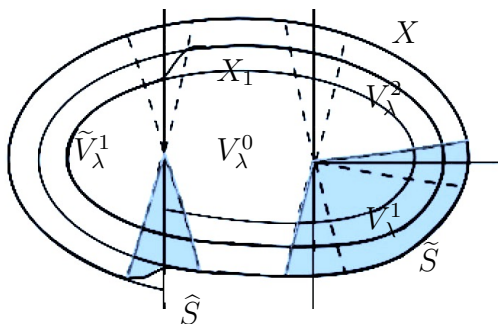
**Paso 3: Modificar  $f_\lambda$  a una transformación  $g_\lambda$  en un dominio restringido**

Fijando  $q$  tal que  $q\eta < \frac{1}{14}$  y definiendo sectores de pendiente  $q$  como antes. Denotamos por  $\widehat{S} = (S(2/7) \cap \widetilde{V}_\lambda^1) \cup (S(4/7) \cap V_\lambda^0)$ .

Modificaremos la frontera de  $\widehat{X}$  en  $\widehat{S}$  para obtener un subconjunto  $X \subset \widehat{X}$  con frontera  $\mathcal{C}^1$ , y definimos a  $X_1$  por

$$X_1 \cap S\left(\frac{1}{7}\right) = f^{-1}(X) \cap S\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$X_1 \setminus S\left(\frac{1}{7}\right) = \widehat{X}_1 \setminus S\left(\frac{1}{7}\right).$$



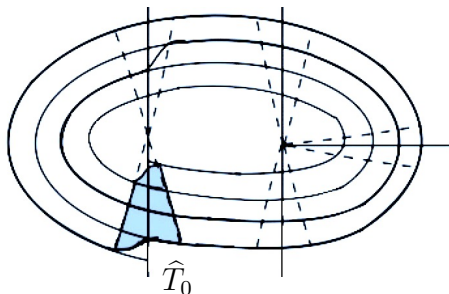
**Figura 4.17:** Definición del dominio  $X$  y rango  $X_1$  de la función modificada  $g_\lambda$ . Así como de los sectores  $\hat{S}$  y  $\tilde{S}$ .

Sea  $\tilde{S} = S(9/14) \cup V_\lambda^1 \cup S(11/14) \setminus \{-\alpha_\lambda\}$ . En este paso obtendremos una transformación cuasiregular  $g_\lambda$  que coincide con  $f$  en  $X_1 \setminus \tilde{S}$ .

Observemos que el polinomio  $P_\lambda$  induce un homeomorfismo de  $S_{i+1}(\theta)$  en  $S_i(2\theta)$ . En particular  $P_\lambda^3$  induce un homeomorfismo

$$P_\lambda^3 : S_{i+3}(\frac{k}{7}) \rightarrow S_i(\frac{k}{7}) \quad \text{para } k = 1, 2, 4.$$

Por lo tanto  $\hat{S}$  es un sector  $f^2$ -invariante. Sea  $\hat{T}_0 = (\hat{S} \cap X) \setminus (f^2)^{-1}(\hat{S} \cap X)$  y  $\hat{T}_i = (f^2)^{-1}(\hat{T}_{i-1}) \cap \hat{S} \cap X$ .



La función  $P_\lambda^3$  también induce un homeomorfismo

$$P_\lambda^3 : \tilde{S}_{i+3} \rightarrow \tilde{S}_i(\frac{1}{7}) \cup \tilde{V}_\lambda^{(1)} \cup S_i(\frac{2}{7}).$$

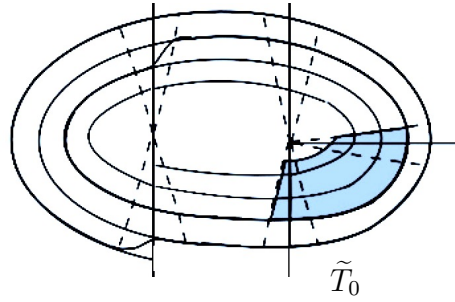
Se sigue que la función  $-P_\lambda^3$  induce un homeomorfismo

$$-P_\lambda^3 : \tilde{S}_{i+3} \rightarrow \tilde{S}_i.$$

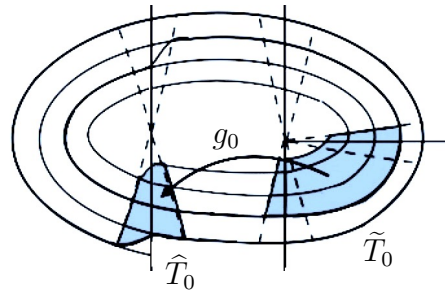
Sean  $\tilde{T}_0 = \tilde{S} \setminus (-P_\lambda^3)^{-1}(\tilde{S})$  y  $\tilde{T}_i = (-P_\lambda^3)^{-1}(\tilde{T}_{i-1}) \cap \tilde{S}$ .

Elegimos un difeomorfismo  $g_0 : \tilde{T}_0 \rightarrow \hat{T}_0$  tal que

1.  $g_0$  es tangente a  $f$  en  $\tilde{T}_0 \cap \partial\tilde{S}$ , es decir, cuando  $z \rightarrow z_0$  con  $z_0 \in \tilde{T}_0 \cap \partial\tilde{S}$ , entonces  $g_0(z)/f(z) \rightarrow 1$ .



2.  $f^2 \circ g_0 = g_0 \circ -P_\lambda^3$  en  $\tilde{T}_0 \cap \tilde{T}_1$  y ambas funciones tienen la misma función lineal en cada punto de  $\tilde{T}_0 \cap \tilde{T}_1$ .



**Figura 4.18:** Definición de la función  $g_0$ .

Entonces definimos  $g_i : \tilde{T}_i \rightarrow T_i$  inductivamente por

$$f^2 \circ g_i = g_{i-1} \circ -P_\lambda^3.$$

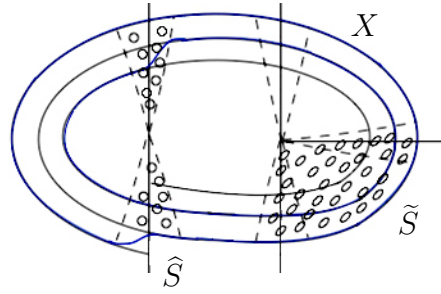
Finalmente definimos la función cuasiregular  $g : X_1 \rightarrow X$  como

$$g_\lambda = \begin{cases} f & \text{en } X_1 \setminus \tilde{S} \\ g_i & \text{en } \tilde{T}_i(\theta). \end{cases} \quad (4.1)$$

**Paso 4: Cambiando la estructura compleja para obtener una función híbridamente equivalente  $h_\lambda$**

La estructura compleja es cambiada a una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $X$ , tal que  $g^*\sigma = \sigma$ . De nuevo el punto esencial en la prueba es que  $g_\lambda$  es holomorfa excepto en  $\tilde{S}$  y que una órbita pasa a lo más una vez por  $\tilde{S}$ : si  $x \in \tilde{S}$ , entonces  $g_\lambda^n(x) \in \tilde{S} \cup S(\frac{1}{7})$  para todo  $n$  donde  $g_\lambda^n$  está bien definida. Por lo tanto definimos el coeficiente de Beltrami como

$$\mu_\lambda := \begin{cases} g^*(\mu_0) & \text{en } \tilde{S} \\ (g^n)^*(\mu) & \text{on } g^{-n}(\tilde{S}), n \geq 0 \\ \mu_0 & \text{en } X \setminus \bigcup g^{-n}(\tilde{S}). \end{cases}$$



**Figura 4.19:** Definición del coeficiente de Beltrami  $\mu_\lambda$ .

Por lo tanto, existe una estructura casi compleja  $\sigma$  en  $X$ , cuasi conformemente equivalente a la estructura estándar  $\sigma_0$ , tal que  $g^*\sigma = \sigma$ , es decir, que el coeficiente de Beltrami es invariante bajo  $g$ , y  $\sigma$  coincide con  $\sigma_0$  en  $X \setminus \bigcup g^{-n}(\hat{S})$ .

El conjunto  $\mathcal{K}_g$  de puntos  $x \in X_1$  para los cuales  $g^n(x)$  está definido y pertenece a  $X_1$  para todo  $n$ , es igual a

$$\mathcal{K}_g = \mathcal{K}_\lambda \setminus \left( (\mathcal{K}_\lambda \cap \text{Int}(\tilde{V}_\lambda^2)) \cup \bigcup_n g^{-n}(\mathcal{K}_\lambda \cap \text{Int}(V_\lambda^1)) \right).$$

Sea  $\varphi : \text{Int}(X) \rightarrow U$  un homeomorfismo cuasiconforme que integra  $\sigma$ . Sea  $U' = \varphi(\text{Int}(X))$ , definimos  $h = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{D}$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc} (X_1, \mu) & \xrightarrow{g_\lambda} & (X, \mu) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (U', \mu_0) & \xrightarrow{h_\lambda} & (\mathbb{D}, \mu_0) \end{array}$$

Entonces  $h_\lambda$  es holomorfa. En particular, el coeficiente de Beltrami  $\mu_\lambda$  en  $\mathcal{K}_g$  coincide con  $\mu_0$ .

#### Paso 5: Obtener un polinomio en $\mathcal{L}_{1/3}$

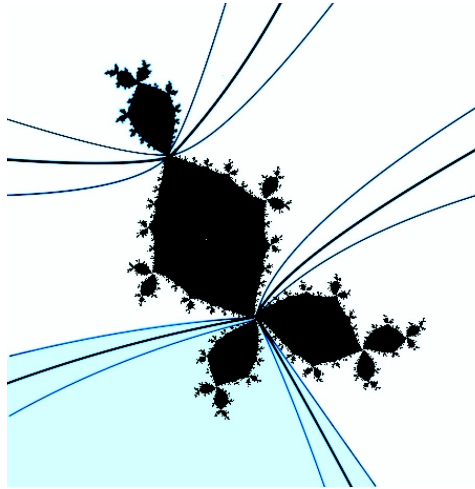
La transformación  $h_\lambda$  es de tipo polinomial de grado 2. Admite una equivalencia híbrida a un polinomio cuadrático  $P_c$ , por lo tanto la transformación

$$\hat{\Psi}_A : \lambda \mapsto c \text{ de } \mathcal{L}_{1/3} \text{ en } \mathbb{C},$$

está bien definida y puede haber opciones en la definición:  $c$  es determinado de manera única si  $c \in M$ .

Tenemos que  $c = \hat{\Psi}_A(\lambda) \in M \iff 0 \in \mathcal{K}_c \iff g^n(w) \in X$  para todo  $n \iff P_\lambda^n(0) \notin \mathcal{K}_\lambda \cap \text{Int}(V_\lambda^1)$  para ningún  $n$ . Sean

$$\mathcal{N}_{1/3} = \{ \lambda \in \mathcal{L}_{1/3} \mid (\forall n) P_\lambda^n(0) \notin \mathcal{K}_\lambda \cap \text{Int}(V_\lambda^1) \}$$



**Figura 4.20:** Bosquejo del resultado de la cirugía partiendo de un polinomio cuadrático  $P_\lambda$  con  $\lambda \in \mathcal{L}_{1/3}$ .

$$\Psi_A = \widehat{\Psi}_A|_{\mathcal{N}_{1/3}} : \mathcal{N}_{1/3} \rightarrow M.$$

Podemos verificar que

$$\Psi_A(\mathcal{N}_{1/3}) \subset \mathcal{L}_{1/2},$$

$$\phi_A(\mathcal{L}_{1/2}) \subset \mathcal{N}_{1/3},$$

y que si  $c \in \mathcal{L}_{1/2}$  y  $c' = \Psi_A(\phi_A(c))$ , entonces existe una equivalencia híbrida entre  $P_c$  y  $P_{c'}$ , por lo tanto  $c = c'$ . En otras palabras

$$\Psi_A \circ \phi_A = id_{\mathcal{L}_{1/2}}$$

y

$$\phi_A \circ \Psi_A = id_{\mathcal{N}_{1/3}}.$$

Esto termina la demostración del Teorema A.



## Bibliografía

- [AB60] Lars Ahlfors and Lipman Bers. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Annals of Mathematics*, pages 385–404, 1960.
- [Ahl06] Lars Valerian Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*, volume 38. American Mathematical Soc., 2006.
- [Ahl10] Lars Valerian Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, volume 371. American Mathematical Soc., 2010.
- [AIM08] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane (PMS-48)*. Princeton University Press, 2008.
- [BD86] B. Branner and A. Douady. Surgery on complex polynomials. *Proc. of the Symposium on Dynamical Systems, México. Lecture Notes in Math. 1345*,, pages 11–72, 1986.
- [Ber93] W. Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (29):151–188, 1993.
- [BF99] B. Branner and N. Fagella. Homeomorphisms between limbs of the mandelbrot set. *J. Geom. Anal. 9.*, (3):987–989, 1999.
- [BFB14] Bodil Branner, Núria Fagella, and Xavier Buff. *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*, volume 141. Cambridge University Press, 2014.
- [Bie] B. Bielefeld. *Lect. Nothes in Math.*, (1574, Springer- Verlag,).
- [Boj55] B Bojarski. Homeomorphic solutions of beltrami systems. In *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, volume 102, pages 661–664, 1955.
- [Boj10] Bogdan Bojarski. On the beltrami equation. once again: 54 years later. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 35:59–73, 2010.
- [CL66] E.F. Collingwood and A.J. Lohwater. *The Theory of Cluster Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1966.

- [DB] Adrien Douady and Xavier Buff. Le théoreme d'intégrabilité des structures presque complexes, the mandelbrot set, theme and variations. *London Math. Soc. Lecture Note Ser*, 274:307–324.
- [DH85] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 18, pages 287–343, 1985.
- [DHL84] Adrien Douady, John Hamal Hubbard, and P Lavaurs. Etude dynamique des polynômes complexes. 1984.
- [FK92] Hershel M Farkas and Irwin Kra. Riemann surfaces. In *Riemann surfaces*, pages 9–31. Springer, 1992.
- [GS97] Jacek Graczyk and Grzegorz Swiatek. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Annals of mathematics*, 146(1):1–52, 1997.
- [HH06] JH Hubbard and JH Hubbard. Teichmüller theory and applications to geometry, topology and dynamics, volume i: Teichmüller theory. 2006.
- [Hub92] J. H. Hubbard. Local connectivity of julia sets and bifurcation loci: three theorems of j.c. yoccoz, in topological methods in modern mathematics. *Publish or Perish*, pages 467–511 y 375–378, 1992.
- [KSvS07] Oleg Kozlovski, Weixiao Shen, and Sebastian van Strien. Density of hyperbolicity in dimension one. *Annals of mathematics*, pages 145–182, 2007.
- [LV73] Olli Lehto and Kaarlo Ilmari Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane*, volume 126. Citeseer, 1973.
- [Lyu13] Mikhail Lyubich. Conformal geometry and dynamics of quadratic polynomials. *to appear*, 2013.
- [Mil06] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 2006.
- [Mor38] Charles B Morrey. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1):126–166, 1938.
- [MS98] Curtis T McMullen and Dennis P Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics iii. the teichmüller space of a holomorphic dynamical system. *Advances in Mathematics-New York-*, 1998.
- [MSS83] Ricardo Mané, Paulo Sad, and Dennis Sullivan. On the dynamics of rational maps. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 16, pages 193–217, 1983.



- [Rob04] R. C. Robinson. An introduction to dynamical systems. *Northwestern University*, 2004.
- [Roh97] S Rohde. Bilipschitz maps and the modulus of rings. In *ANNALES-ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE SERIES A1 MATHEMATICA*, volume 22, pages 465–474. ACADEMIA SCIENTIARUM FENNICA, 1997.
- [Shi98] Mitsuhiro Shishikura. The hausdorff dimension of the boundary of the mandelbrot set and julia sets. *Annals of Mathematics*, pages 225–267, 1998.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



**DR. VICTOR BARBA LÓPEZ  
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS  
PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada “**Cirugía en el conjunto de Mandelbrot**” que presenta la alumna **Miriam Romero Cabrera (10019236)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dra. Masuma Atakishiyeva CInC-UAEM		
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC-UAEM		
Dr. Germán Aubin Arroyo Camacho UCIM		
Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas UCIM		
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM		



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**MASUMA ATAKISHIYEVA | Fecha:2020-06-26 14:44:36 | Firmante**

c/kbrSx20xWiqf9YDeOrMGji2aibVajg4/QY/0StX5xqnN+3QTWqk9ztUpCst0Poh/YusAhMpFmanRzzK+q5PNyoqbYIIXAy/SdBLGiz7wDM6ys8Lz9tMRPPEZDUgkvWou0/Ta7JD0ZsnL3mpWzeU46Fwd5VgoT5OC+t8i0HbpiCJpgkTUqdAvvCb3aELLNovFxDy1UotfnhW8IZGivaj3aJqhtLp3SfAZli80+6wLvuY5rlo/mee/d+8rZgqB6iOUMIBCs79Aw65PqZL5BZ4/eT01gDzJdQr/psQ+tykZeK+XhzaLiNw47na9yedJDpraLlb8yFI38FdE5bTqQ==

**CARLOS ALFONSO. CABRERA OCAÑAS | Fecha:2020-07-13 18:56:39 | Firmante**

AUMkez81erEq9NtVAOuqQ0FW5bMg+KxD6ulgPKoctGFUEXgo1NrB3ammN6djmFaF7Fm0xnVOsYb8qnWiiMz5ulaBR3Zr9SwXo962rMo2QeKxM+p4WQx5TNkkOhwZTI+Z0B8AYRPKIOWVlj7gE4tibPj2sZqZ3sMPqEcFLbXxj9bi4wrc2K4zR64yiGq6EzRgMOxxalwz31c0eNRbiBBKpjDJPTHvQxhgA6zJxV8uWNhse+Gjx2P7C4nSFbmO2IVJRPytTt7uvaS4dfjnXminFS3ol/hpLiBdwAcvC2xVbMGQLD+0JGKaJoHqsU+EHJ4WYMH3QW8dKmu5O7OEGFyw==

**GERMÁN AUBIN ARROYO CAMACHO | Fecha:2020-07-14 11:43:43 | Firmante**

N3HhyjgtQ+Ud38s+Pn7B7yqk41cmUglfoBil8l/nggoBUT/b7H4DCCA2NXSmV6JBOca0ii2qE9Ja9my8klBfVb+M4qthhSyTaL/88/FLK6i7Lzjgs4KZWS82+H0okQv7IbXgKceGiviJ0Xi4IQFml6s0tmvniJbe4FFGNxoUxUHQgzfihYy78xNom/oAqW10aV6uaihs+x6iHwuc4yxabnAbOLunMRQVs3egYEzgrqLAOwlnLqJzrFBZc+nwSbnAkUFxGcoNgLru9sl23vDcOXPUfr27LRhxx0AHydhIXcZMvNsGZuUjMR21IK77mHJvzh9Brm6pXLBhhXUJiWg73g==

**GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2020-07-16 18:58:47 | Firmante**

iq/vuuUng1am6s7uT8Ign/1MN2TPaYTF96VBN2NtValfmyGR0rV9mXGyu7C83b/3Ca7Tf0tJNwbHcfcg4Zcs+HQ1YmN2hDttjTz/v1K7/g10SdTiFVgA5j36W9VGGy+9GW6xc0MMhyhMxyn/T6QFDKrJWPgtw1RjBQB0jzw5/yD9VoSxZNBLSNKUithxU+jxZxXbNi6JUsbAaPu+MUm630K06715XmhGUjXZoXi1PII5gSZAH+u82n011wdPuZR1gNddrtfUkNgjKudxcS/dLAITkpJK8mVXtZ6cFQAkeZU28+k5oeuCjG68SONLjo+ttO5u/KMMP7zbadlaAFRQ==

**ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2020-07-22 12:37:19 | Firmante**

esz5T7jfvbQsEv6OzEfEcOJDy5bNgcwKnL4Oz9uAh8Vx1Jwp0aEH+bdwVtWtNKnHhZ2gYNwWfLP2oICyGHRWo84RJGE0a/xiXiGgaApZS62FmqWOrp4Mky5+/q8YNcaziogrINY38WOOop+AgZZIYVfUimiff4AL59U6xHsQQED7DJYnAytqel6GK112/kVszftsIX4L8YL4aQ8cxAL3KdGpxOEBfdQMujChY//wgXmKBSCTZonu6BhsM6RINjRkL/4zkVe+RuJkO0s+TJq47dpAsf2CaSu3y3uavF89v35tGgCU2siNivITYm6BII1BWII+JY3eyvu4ZfebtWXPAA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



r6TDQw

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/D6E3aZS6AUUf8SvprAZUjP9VQIX52iBI>

