



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

FACULTAD DE CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA
MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN Y CÓMPUTO APLICADO

ANÁLISIS FRACTAL DE FITOESTRUCTURAS

T E S I S

Que para obtener el Grado de MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN Y
CÓMPUTO APLICADO

Presenta

IVONNE MIRANDA SOTO

Director de Tesis

LUIS MANUEL GAGGERO SAGER

Co-Director

DAN SIDNEY DÍAZ GUERRERO

CUERNAVACA, MORELOS.

DICIEMBRE, 2020.



Cuernavaca, Morelos a 11 de diciembre del 2020.

DR. AUGUSTO RENATO PÉREZ MAYO
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI
PRESENTE

En mi carácter de revisor de Tesis, hago de su conocimiento que he leído con interés la tesis para obtener el grado de la Maestría en Optimización y Cómputo Aplicado, del estudiante **Ivonne Miranda Soto**, con matrícula **10023094** con el título **Análisis Fractal de Fitoestructuras** por lo cual, me permito informarle que después de una revisión cuidadosa de dicha tesis, concluyo que el trabajo se caracteriza por el establecimiento de objetivos académicos pertinentes y una metodología adecuada para su logro. Además construye una estructura coherente y bien documentada, por lo cual considero que los resultados obtenidos contribuyen al conocimiento del tema tratado.

Con base en los argumentos precedentes me permito expresar mi **VOTO APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que el estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría de Investigación y Posgrado tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

Atentamente
Por una humanidad culta
Una universidad de excelencia

Dr. Luis Manuel Gaggero Sager
Profesor-Investigador
Centro de Investigación en Ingenierías y Ciencias Aplicadas



Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

LUIS MANUEL GAGGERO SAGER | Fecha: 2020-12-13 13:09:50 | Firmante

AmrTjCku+pTK+wDkSwzdpzd1+2z7NGWEV7uhK5XOoYs5hvMZ+bJJmuDeNiktZqw2TIVMzBTiKtMKz7UI9ntmP/3a34PEzggHj8oGHQH9ebPyRD55wt1aWmoRtgyPfdTdPscT
+VlvjNWDIGh8OOedBe+QfaaoWVTO4A/WaqMGn4dnt6boZsyfK584Ljm6AayvvVIASQVZmzksVaZhW64kR/44d/Xt0gDoFxGcrFivx6+GLz4dd7BGgE8Ft3j46S+3AlsXxV7Xdn/H
iDbt5Ja5Jn4K/HR2kXo2/hHreJsllyab7PyPaEclAbf2fPqu9ms24DD2eV/z1aMTYISA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



Li0m4N

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/XGA8dPCJAR1YXg6S7mbwixHlge6NJCV>



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



FACULTAD DE CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

Cuernavaca, Morelos a 11 de diciembre del 2020.

DR. AUGUSTO RENATO PÉREZ MAYO
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAEI
PRESENTE

En mi carácter de revisor de Tesis, hago de su conocimiento que he leído con interés la tesis para obtener el grado de la Maestría en Optimización y Cómputo Aplicado, del estudiante **Ivonne Miranda Soto**, con matrícula **10023094** con el título **Análisis Fractal de Fitoestructuras** por lo cual, me permito informarle que después de una revisión cuidadosa de dicha tesis, concluyo que el trabajo se caracteriza por el establecimiento de objetivos académicos pertinentes y una metodología adecuada para su logro. Además, construye una estructura coherente y bien documentada, por lo cual considero que los resultados obtenidos contribuyen al conocimiento del tema tratado.

Con base en los argumentos precedentes me permito expresar mi **VOTO APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que el estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría de Investigación y Posgrado tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

Atentamente
Por una humanidad culta
Una universidad de excelencia

Dr. Dan Sidney Díaz Guerrero
Profesor por horas
Instituto de Investigación en Ciencias Básicas

Av. Universidad 1001 Chamilpa Cuernavaca Morelos México C.P. 62209, Edificio 19
Tel. (777) 329 7917, Ext. 3038, 3039/ posgrado.fcaei@uaem.mx



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023



Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

DAN SIDNEY DIAZ GUERRERO | Fecha: 2020-12-18 10:52:23 | Firmante

Dqc+YbBISnmu5eaFhAd8eUXveYrPmwxmml85+XQ9DOcUKVxMrkemeCd4Ofjlg0zZd/j417qG/69w/dUP5uf6D6pn6IDF5uNtlEUgsNFnmSubr+UGlhbHs/AoXyIMyPJFgEzsZvuNJBroyj9uH7x5E94RED0iyuw+LdRDy5NZ+RpM+MXf3HYACmYRoXxr8U6ydm0/wWapmWySEH7uzB6VWfjxxrdXsV4JDkqu9ZJO07ambEe26vsF2/sFDeMEe+xt1toUkjsWibfjrbV2OD0KxePtf9wMp1THL3PYJ9HOKLIGxs8OMmWVfJbmBHZpjlTjiuDL6AGiXla3NVqQrdbpV2QQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



qD5ml7

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/qsqKN1eADtUAl0yGfh9oyTIZleveNLp>



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



FACULTAD DE CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

Cuernavaca, Morelos a 11 de diciembre del 2020.

DR. AUGUSTO RENATO PÉREZ MAYO
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI
PRESENTE

En mi carácter de revisor de Tesis, hago de su conocimiento que he leído con interés la tesis para obtener el grado de la Maestría en Optimización y Cómputo Aplicado, del estudiante **Ivonne Miranda Soto**, con matrícula **10023094** con el título **Análisis Fractal de Fitoestructuras** por lo cual, me permito informarle que después de una revisión cuidadosa de dicha tesis, concluyo que el trabajo se caracteriza por el establecimiento de objetivos académicos pertinentes y una metodología adecuada para su logro. Además construye una estructura coherente y bien documentada, por lo cual considero que los resultados obtenidos contribuyen al conocimiento del tema tratado.

Con base en los argumentos precedentes me permito expresar mi **VOTO APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que el estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría de Investigación y Posgrado tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

Atentamente
Por una humanidad culta
Una universidad de excelencia

Dra. Lorena Díaz González
Profesor-Investigador
Centro de Investigación en Ciencias

Av. Universidad 1001 Chamilpa Cuernavaca Morelos México C.P. 62209, Edificio 19
Tel. (777) 329 7917, Ext. 3038, 3039/ posgrado.fcaei@uaem.mx



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

LORENA DIAZ GONZALEZ | Fecha:2020-12-15 12:28:16 | Firmante
GG7E1JSJLKgh4bdleNvyEOF1ftNJZHCKdZQeOik4kxuv2l9Q38Q3gjEzcbRAIGV1dAzukDIDfjbWYG0/cKSakpoL0xcInGjU3KnB/CLOtTGUmQ8Ap2rnuIYCcN9deZnBbpcJNbvDy
icFiLYWF5ExURXuRzcSrseqObDKgw9SeEopUGDuFWzDot47H6ckKRVzJk+Oyxb0La0DW03XF7QHT12iiNNXSeEl8jIWtqP7AWxfu2NVtYYCAZ8BklohH0GVlUOnIM77+CZn
Rl/SrubAZiYHmF/UxOHnKqCvVwVwRop3gkBynwPakh/BN7Svbjd85Gc4lqBc/YKOV8qTLA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



1cm5za

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/w8bqv9WXGByh9jWl8peAPIWcuuxRzml9>



Cuernavaca, Morelos a 11 de diciembre del 2020.

DR. AUGUSTO RENATO PÉREZ MAYO
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI
PRESENTE

En mi carácter de revisor de Tesis, hago de su conocimiento que he leído con interés la tesis para obtener el grado de la Maestría en Optimización y Cómputo Aplicado, del estudiante **Ivonne Miranda Soto**, con matrícula **10023094** con el título **Análisis Fractal de Fitoestructuras** por lo cual, me permito informarle que después de una revisión cuidadosa de dicha tesis, concluyo que el trabajo se caracteriza por el establecimiento de objetivos académicos pertinentes y una metodología adecuada para su logro. Además construye una estructura coherente y bien documentada, por lo cual considero que los resultados obtenidos contribuyen al conocimiento del tema tratado.

Con base en los argumentos precedentes me permito expresar mi **VOTO APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que el estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría de Investigación y Posgrado tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

Atentamente
Por una humanidad culta
Una universidad de excelencia

Dr. Enrique Arturo Carrillo Delgado
Investigador
Instituto de Física UNAM



Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ENRIQUE ARTURO CARRILLO DELGADO | Fecha: 2020-12-16 09:53:15 | Firmante
Q4lgrjoX58AS1t1PutaoVK34VqCK89mIJTspwiPuG7ThQwU9DwjbTPeBLwz3s5lilVLFaze/d4Rjk2Lbs7mBlqXKsRq1WmgJzdLeEHGfwrXhLH65FhwvKQIwWBP76PKpsLhDrjvYL
WsxArrNpuHo6vIMZlgFjk7VW9W3Ntk2spooQ0994ud4/avYZDFzOwegN66CQQ+PnzegOnzViDbE/dlojFFhnCcQkQJUaSeLGcNmJktuZ8xl6Ain1n052QtKmYoZyPx+d+C/Yah4YB
KtlxStzNkiEQrAgoJE10bnwWyyYgRHhQPgbesq1LOtgw1V9Dni5Qfn/J4YwHgnyoKqJg0w==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



DJ8LIY

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/1sjJAeKT8RXvue4QXcDN3mevOg3CUdsJ>



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



FACULTAD DE CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

Cuernavaca, Morelos a 11 de diciembre del 2020.

DR. AUGUSTO RENATO PÉREZ MAYO
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FCAeI
PRESENTE

En mi carácter de revisor de Tesis, hago de su conocimiento que he leído con interés la tesis para obtener el grado de la Maestría en Optimización y Cómputo Aplicado, del estudiante **Ivonne Miranda Soto**, con matrícula **10023094** con el título **Análisis Fractal de Fitoestructuras** por lo cual, me permito informarle que después de una revisión cuidadosa de dicha tesis, concluyo que el trabajo se caracteriza por el establecimiento de objetivos académicos pertinentes y una metodología adecuada para su logro. Además, construye una estructura coherente y bien documentada, por lo cual considero que los resultados obtenidos contribuyen al conocimiento del tema tratado.

Con base en los argumentos precedentes me permito expresar mi **VOTO APROBATORIO** por lo que de mi parte no existe inconveniente para que el estudiante continúe con los trámites que esta Secretaría de Investigación y Posgrado tenga establecidos para obtener el grado mencionado.

Atentamente
Por una humanidad culta
Una universidad de excelencia

José Alberto Hernández Aguilar
Profesor- investigador
Facultad de Contaduría, Administración e Informática

Av. Universidad 1001 Chamilpa Cuernavaca Morelos México C.P. 62209, Edificio 19
Tel. (777) 329 7917, Ext. 3038, 3039/ posgrado.fcaei@uaem.mx



Una universidad de excelencia

RECTORÍA
2017-2023

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

JOSE ALBERTO HERNANDEZ AGUILAR | Fecha:2020-12-12 19:57:01 | Firmante
UT/i/GWLmfbS4pkQN3GvmPAObYawsCoT9YLcnK+OpT2FwmB9Wx9ilyq4eax879VTWt9dqD7KH1PgXqSnq5AG/GyCEHDOUv8XmJeq2e9uPt2eVmSmJiv6T9wnSoKRooahBCv
qdFHeT6hbPr46AehgSKGngmtrih3KIkdaJO9jatuATdAb+ujpz8zixLIVpgH7rNqllNwVkjHR5TZGqksA6lQTRx1DxxRfbYHjw0SQyoRH9GJLaMDM0ayJ2RMbfZJrHhQzXCODUK4fV
zMY8nz1YIdENK5uxeYXdoGtJ6RFg50LMRyug+yHtPo2cTMRQwfmjsMKHoOkOL/On7dM5lVnb5w==



Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:

[PAgJOD](#)

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/BCS3GQJ8UojzXgDSLCSkTMGsdRtUHxUSE>

Cuernavaca, Morelos, a 11 de Diciembre de 2020

CERTIFICACIÓN DE AUTORÍA

Yo, **Ivonne Miranda Soto**, certifico que la Disertación titulada, **Análisis Fractal de Fitoestructuras**, la cual presento como requisito para optar por el grado de Maestro en Optimización y Cómputo Aplicado en la Facultad de Contaduría, Administración e Informática de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos en el país México, es el producto de mi labor investigativa.

Asimismo, doy fe de que este trabajo ha observado las normas establecidas en el Reglamento de la Universidad y del posgrado de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos para su realización.

Con lo anterior, deslindo a la institución de toda acción que genere plagios y asumo toda responsabilidad.



Ivonne Miranda Soto
10023094

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor de Tesis el **Dr. Luis Manuel Gaggero Sager** por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento científico, así como también haberme tenido toda la paciencia del mundo para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis.

También agradezco al **Dr. Dan Sidney Diaz** y al **Dr. Oscar Sotolongo** por los aportes en la elaboración del presente proyecto, así como al compañero y amigo **Victor Hugo Pacheco** quien me apoyo dándome ánimo y clases en el área computacional.

Agradezco a todos los que fueron mis **compañeros de clase**, ya que gracias al compañerismo, amistad y apoyo moral han aportado en un alto porcentaje a mis ganas de seguir adelante en el ámbito profesional.

DEDICATORIA

Alexander Miranda y Rodrigo Miranda, si nos los tuviera, mi vida seguramente sería un desastre, y cada vez que los veo siento ganas de seguir esforzándome y seguir con el objetivo de alcanzar mis metas. Ustedes son mi principal motivación.

Los amo más que a nadie en el mundo...

Carlos Ivarra Gallegos, tú ayuda ha sido fundamental, has estado conmigo en los momentos más turbulentos. Este proyecto no fue fácil, pero estuviste motivándome y ayudándome hasta donde tus alcances lo permitían.

Te lo agradezco muchísimo, amor.

A mis **padres**, porque muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que se incluye este. Me formaron con reglas y con algunas libertades, pero al final de cuentas me motivaron constantemente para alcanzar mis anhelos.

Gracias madre y padre...

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
CAPITULO I.....	3
1. INTRODUCCIÓN.....	3
<i>1.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA</i>	<i>5</i>
<i>1.3 OBJETIVO GENERAL</i>	<i>6</i>
<i>1.4 OBJETIVOS PARTICULARES</i>	<i>6</i>
CAPITULO II.....	7
2. CONCEPTOS GENERALES.....	7
2.1 BOTÁNICA SISTEMÁTICA.....	7
2.2 CONCEPTO DE ESPECIE.....	8
2.3 GÉNERO BOUGAINVILLEA	8
2.3.1 CLASIFICACIÓN TAXONÓMICA DE BOUGAINVILLEA	10
2.4 FISIOLOGÍA DE LAS HOJAS	10
2.4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS HOJAS SEGÚN SUS NERVADURAS	12
2.5 ESTRÉS EN PLANTAS.....	14
2.6 GEOMETRIA FRACTAL	16
2.6.1 FRACTAL.....	18
2.6.2 DIMENSIÓN FRACTAL.....	18
2.6.3 APLICACIONES DE LOS FRACTALES.....	21
2.7 IMAGEJ.....	23
2.7.1 FRALAC.....	25

2.7.2 <i>RECuento DE CAJAS</i>	26
2.8 <i>PROCESAMIENTO DE IMAGENES</i>	27
2.9 <i>ESTADO DEL ARTE</i>	30
CAPITULO III	32
3. METODOLOGÍA	32
3.1 <i>SITIOS DE COLECTA DE HOJAS</i>	32
3.2 <i>COLECTA Y MANEJO DE HOJAS</i>	33
3.3 <i>CAPTURA DE FOTOGRAFÍAS Y TRATAMIENTO DE IMAGEN</i>	35
3.4 <i>MEDICIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL</i>	38
3.5 <i>ANÁLISIS ESTADÍSTICO</i>	40
3.6 <i>VALIDACIÓN DE LAS MEDICIONES</i>	41
4. RESULTADOS	41
5. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN	46
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48

RESUMEN

La Dimensión Fractal se define prácticamente como una medida matemática que puede ser calculada y que permite cuantificar la irregularidad de los objetos fractales, sin contemplar números enteros y si fraccionarios, caso contrario a la geometría Euclidiana clásica. En la naturaleza existen patrones geométricos que podemos observar frecuentemente, y cuya estructura se encuentra fragmentada, con detalles repetitivos que pueden ser observados a cualquier nivel de escala. Por ejemplo, los árboles, que crecen de forma por así decir desordenada, con decenas de ramas y estas a su vez con cientos o miles de hojas, y que estas a su vez presentan diferentes formas de nervaduras, presentando en conjunto o de forma independiente formas irregulares. Al visualizar y analizar, la forma irregular que tienen las nervaduras de algunos tipos de hojas de planta (refiriéndose a cualquier tipo de crecimiento tal como árbol, arbusto o hierba), surge la idea de poder establecer una relación botánica a través de la dimensión fractal de fitoestructuras, la cual generaría diversas utilidades biológicas, siendo que la dimensión fractal (DF) es una herramienta poderosa que permite caracterizar la irregularidad de los objetos. Llevar a cabo un análisis fractal de hojas de Bugambilia pertenecientes a dos sitios con características diferentes cada uno, nos permite establecer una relación botánica la cual podría generar diversas utilidades biológicas, tal como la caracterización morfológica de las hojas a través de la complejidad de las fitoestructuras.

Palabras clave: *Dimensión fractal, Fitoestructuras, Irregularidad.*

ABSTRACT

The Fractal Dimension is in practice defined as a mathematical measure that allows to quantify the irregularity of the objects. Fractal dimensions can be integer which is the opposite case to the classic Euclidean geometry. In nature there are geometrical patterns that we can frequently observe, and whose structure is fragmented, with repetitive patterns that can be observed at any scale level. For example, the trees, which grow in a so to speak disorderly manner, with dozens of branches and these in turn with hundreds or thousands of leaves, and these in turn present different forms of ribs, presenting as a whole or independently irregular forms. When visualizing and analyzing the irregular shape of the ribs of some types of plant leaves (referring to any type of growth such as tree, bush or grass), the idea arises of being able to establish a botanical relationship through the fractal dimension of phytostructures, which would generate diverse biological utilities, being that the fractal dimension (FD) is a powerful tool that allows to characterize the irregularity of the objects. Carrying out a fractal analysis of Bugambilia leaves belonging to two sites with different characteristics each one, allows us to establish a botanical relationship which could generate diverse biological utilities, such as the morphological characterization of the leaves through the complexity of the phytostructures.

Keywords: *Fractal dimension, Phytostructures, Irregularity*

CAPITULO I

1. INTRODUCCIÓN

La Taxonomía Sistemática o Botánica Sistemática se trata de la ciencia de la clasificación que incluye identificación y nomenclatura de las plantas, por lo tanto la sistemática se define como el estudio y descripción de la diversidad botánica para producir sistemas de clasificación, en tanto, la Taxonomía queda restringida al estudio de la clasificación, sus principios y prácticas (Martínez, M.L. 2002), y que han sido y siguen siendo hasta el día de hoy, usados como sinónimos, siendo la clasificación parte fundamental del método científico en Botánica.

Un sistema de clasificación nos permite generalizar y restringir información según sea la categoría taxonómica utilizada, es decir, en un orden descendente de *Reino* a *Especie* aumentan los detalles ya que se procede de lo general a lo particular, por tal motivo la clasificación es un medio útil para almacenar y proporcionar información. Sin embargo, en la naturaleza para llevar a cabo las clasificaciones se hecha mano de los *Caracteres taxonómicos*, que son atributos de los organismos que permiten distinguir los miembros de un taxón de los de otro taxón, (Maryr y Ashlock, 1991) y son de interés aquellos caracteres heredables.

En la naturaleza existen patrones geométricos que podemos observar frecuentemente, y cuya estructura se encuentra fragmentada, con formas repetitivas que pueden ser observadas a cualquier nivel de escala, y los llamamos Fractales. Por ejemplo, los *árboles*, que crecen de forma por así decir desordenada, con decenas de ramas y estas a su vez con cientos o miles de hojas, y que estas a su vez presentan diferentes formas de nervaduras, presentando en conjunto

o de forma independiente formas irregulares, con autosimilitud (propiedad de un objeto en el que el todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo) a diferentes escalas, a lo cual llamamos Fractal Natural. Al observar tan variadas formas irregulares en las plantas, es necesario recurrir a la geometría Fractal. Dicho de otra manera, la propiedad clave de un objeto fractal es un número no entero.

La Dimensión Fractal se define prácticamente como una medida matemática que puede ser calculada y que permite cuantificar la irregularidad de los objetos fractales, sin contemplar números enteros y si fraccionarios, caso contrario a la geometría Euclidiana clásica, donde la dimensión 1 es una recta, dimensión 2 es un plano y dimensión 3 es un objeto con volumen, tal como lo menciona Ewaldo H. y Gutiérrez P. (2004).

Las Hojas de las plantas por ejemplo son órganos generalmente de color verde que salen del tallo y que poseen funciones básicas (como la fotosíntesis), y que presentan a su vez otras estructuras llamadas *Nervaduras*, que se trata nada más y nada menos de la disposición de los tejidos conductores sobre el limbo foliar y que su forma asemejaría a una raíz o quizás a las ramificaciones del árbol. Al visualizar y analizar la forma irregular que tienen las nervaduras de algunos tipos de plantas (llámese árbol, arbusto o hierba), surge la idea de poder establecer una relación botánica a través de la dimensión fractal de fitoestructuras, la cual podría generar diversas utilidades biológicas, siendo que la dimensión fractal (DF) es una herramienta poderosa que permite caracterizar la irregularidad de los objetos, entonces, utilizarla para caracterizar la complejidad de la estructura morfológica de las hojas. Según dijo H.P. Kosch, la teoría fractal puede ser considerada como una herramienta valida y útil para el estudio de fenómenos complejos en su ausencia de linealidad existente. De acuerdo con Țălu, Ș. (2012), la similitud entre los fractales y los objetos naturales sugiere que propiedades fractales, tales como la DF, se puede usar como un clasificador en la biología, esto en colaboración, entre el conocimiento de los especialistas y las herramientas computacionales.

1.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El Estado de Morelos, pese a ser uno de los más pequeños del país, posee una gran diversidad ambiental, la cual ha dado lugar al establecimiento de siete tipos de vegetación; siguiendo el criterio de Rzedowski (1978), en esta entidad se reconocen los siguientes tipos de vegetación: bosque de coníferas, bosque de *Quercus*, bosque mesófilo de montaña, bosque tropical caducifolio, pastizal, zacatonal, bosque de galería y vegetación acuática. Esta última, a otras escalas, se divide a su vez en seis grandes unidades, basadas en las formas de vida dominantes (Bonilla-Barbosa *et. al*, 2000). Morelos ocupa tan sólo el 0.25% del territorio mexicano y sin embargo, en él registran en la actualidad el 10% de plantas vasculares reportadas para el país, por ello, y además se encuentra entre los nueve estados con elevado endemismo de flora (CONABIO, 1998; Bonilla-Barbosa y Villaseñor, 2003). Riqueza que enfrenta varias amenazas resultantes de las diferentes actividades y necesidades de la población, entre las que destaca la pérdida de la cobertura vegetal, la presencia de especies invasoras, incendios forestales, extracción ilegal de vida silvestre y el cambio climático. En algunas ocasiones también el entorno de las plantas dista enormemente de ser el ideal, provocándoles estrés y, como consecuencia, llevándolas al límite de sus recursos para poder sobrevivir. Tales actividades ponen en riesgo a la vegetación.

En este sentido, el empleo de herramientas computacionales para identificación, caracterización y establecimiento de relaciones biológicas en plantas, serían de gran aporte en los diferentes ámbitos de la conservación biológica. Como, por ejemplo, un análisis fractal de fitoestructuras tales como las nervaduras de las hojas podrían ayudar a complementar

información relevante sobre aspectos fisonómicos de la vegetación, tales como, su distribución, abundancia, características del hábitat, entre muchas otras más.

1.3 OBJETIVO GENERAL

- ✱ Establecer una relación biológica entre las fitoestructuras (contorno y nervaduras) del género *Bougainvillea* y la dimensión fractal de las mismas.

1.4 OBJETIVOS PARTICULARES

- Caracterizar la morfometría de las nervaduras de las hojas, utilizando tratamiento digital de imágenes.
- Estandarizar un procedimiento del algoritmo de conteo de cajas mediante el complemento de FracLac.
- Determinar una metodología en el tratamiento de imágenes digitales correspondientes a las hojas.
- Identificar valores de dimensión fractal de las hojas de *Bougainvillea*.

CAPITULO II.

2. CONCEPTOS GENERALES

2.1 BOTÁNICA SISTEMÁTICA

La Sistemática es la ciencia que se encarga del estudio de la diversidad de organismos, así como de las relaciones que existen entre ellos. Esto incluye el descubrimiento, la descripción e interpretación de la diversidad biológica, así como la síntesis de la información sobre diversidad en la forma de sistemas de clasificación predictivos. La Sistemática no es precisamente una ciencia descriptiva, sino que tiene por objetivo descubrir las relaciones evolutivas y las entidades evolutivas reales que han resultado del proceso de evolución. La información sobre la secuencia de eventos evolutivos es obtenida desde la Sistemática, quien ha reconstruido la filogenia, es decir la crónica evolutiva de los organismos (C. Benítez *et al.*, 2006).

La Sistemática incluye la disciplina de Taxonomía, un término ligado a la palabra taxón. Esta disciplina trata del estudio de la clasificación, incluyendo en ésta sus bases, principios, métodos y leyes. El nombre de un taxón dado permite el acceso a la información que existe sobre él, y esto es especialmente valioso en especies de importancia para la humanidad. La aplicación de los nombres científicos es campo de la nomenclatura biológica; en el caso de las plantas, la aplicación de los nombres se hace de acuerdo con el Código Internacional de Nomenclatura Botánica.

2.2 CONCEPTO DE ESPECIE

La especie ha sido reconocida como la unidad básica en biología, porque ella se refiere a una entidad biológica distinta y representa un nivel importante de integración en la naturaleza (Mayr, 1957). Este reconocimiento es fundamental en biología y sus subdisciplinas, porque cada biólogo, independientemente de su área de especialización está tratando con especies, y sus hallazgos están influidos por la selección de especies. En la taxonomía de plantas y animales, la especie es fundamental porque todas las otras categorías son definidas en relación con ella. Así, un género es un grupo de especies, y una subespecie o una variedad es parte de una especie.

Una especie entonces es “un grupo de poblaciones que actual o potencialmente se reproducen entre sí y que están reproductivamente aisladas de otros grupos similares”.

2.3 GÉNERO BOUGAINVILLEA

El género *Bougainvillea* pertenece a la familia de las Nyctaginaceae, recibe diferentes nombres dependiendo de la región, en México, Guatemala, Cuba y Filipinas es nombrada como *Bugambilia* / *Bugamvilia*, (Lim, 2014), *flores de papel*, en Indonesia y Malasia, *Veranera*, en Colombia, Nicaragua, El Salvador, Costa Rica y Panamá y así muchas más formas de ser nombrada. La *Bougainvillea* es nativa de América del Sur, lleva el nombre del explorador francés, soldado y amigo de Napoleón, el Almirante Louis-Antoine de Bougainville, que fue el primer capitán de barco francés que cruzó el Océano Pacífico alrededor de 1768 (Argueta, 1994). Y se ha introducido en áreas cálidas y tropicales de Asia, el sur de África, Australia, la región del Mediterráneo, Islas del Pacífico y todo el continente americano (Lim, 2014).

El género *Bougainvillea* pueden ser arbustos leñosos, enredaderas o árboles pequeños, con tallos lisos o con espinas. Hojas alternadas y pecioladas, ovaladas anchas, elípticas, verde brillante, lisas o pubescentes. Flores blancas, rosadas o amarillas; con tres a ocho estambres desiguales, las características distintivas del tallo, las hojas, la flores (ver Figura 1) y las brácteas dependen de la variedad (Cabrera *et al.*, 2006).



Figura 1. Hojas de *Bougainvillea* con inflorescencias y brácteas

Las spp de *Bougainvilleas* en un hábitat natural se comportan tanto como perennes en zonas lluviosas, como caducifolias en aquellas que poseen una estación muy seca. En el caso de su uso en jardinería, puesto que son atendidas con riegos puntuales, no suelen perder sus hojas en ninguna época del año. Mucho menos en los viveros durante su cultivo, que son sometidas a crecimiento constante durante todo el año. Las raíces de las *Bougainvillea* son fasciculadas, muy rústicas y se desarrollan casi sobre cualquier terreno. Por supuesto, en aquellos que son fértiles y bien drenados se desarrollan mucho mejor, imprimiendo a la planta una mayor velocidad de desarrollo si bien, reducen notablemente su cantidad de flores.

2.3.1 CLASIFICACIÓN TAXONÓMICA DE BOUGAINVILLEA

La Familia de las Nyctaginaceae cuenta con 30 géneros y cerca de 400 especies (Nelson, 2011), de las cuales tres son hortícolamente importantes: *Bougainvillea spectabilis* Willdenow, *Bougainvillea glabra* Choise, y *Bougainvillea peruviana* Humboldt and Bonpland (Kobayshi *et al.*, 2007). En el Cuadro 1 se muestra la clasificación botánica.

Cuadro 1. Clasificación botánica de *Bougainvillea*

TAXONOMÍA	
Reino	Plantae
División	Magnoliophyta
Clase	Magnoliopsida
Orden	Caryophyllales
Familia	Nyctaginaceae
Tribu	Bougainvilleae
Género	Bougainvillea

2.4 FISIOLÓGÍA DE LAS HOJAS

Las hojas son órganos generalmente aplanados derivados de un meristemo caulinar apical. Son los órganos fotosintéticos por excelencia de las plantas gracias ala enorme cantidad de cloroplastos que poseen sus células. Además, las hojas son las principales responsables de controlar la transpiración para evitar la pérdida excesiva de agua.

Las hojas realizan la fotosíntesis, la respiración y la transpiración. En el primer proceso hace uso del anhídrido carbónico o dióxido de carbono (CO₂) y se libera oxígeno; en la

respiración se utiliza el oxígeno y libera anhídrido carbónico y en la transpiración se desprende vapor de agua, todo a través de las estomas.

Existen dos tipos de hojas: Simples y Compuestas.

La hoja simple tiene una única lámina o limbo, entera o recortada, pero los recortes nunca forman piezas independientes. La hoja compuesta es aquella en que la lámina se ha recortado formando numerosas piezas independientes (folíolos). Las hojas se pueden dividir anatómicamente en dos partes: limbo y peciolo. El limbo es la parte de la hoja encargada de realizar la fotosíntesis y regular la transpiración. Aquí se encuentran la mayoría de los estomas y del parénquima clorofílico de la planta. El limbo posee dos superficies, una superior, denominada haz o superficie adaxial y otra inferior, denominada envés o superficie abaxial. La superficie que normalmente queda expuesta al Sol es el haz, mientras que el envés es la superficie que queda oculta, (Ver Figura 2).

El tamaño de las hojas es variable y en general una hoja pequeña se asocia a lugares con una mayor altitud, poca lluvia, pocos nutrientes en el suelo, y a lugares calientes y secos. La exposición a la luz solar es otro factor importante que afecta al tamaño y grosor de las hojas, incluso en una misma planta. Las hojas con más exposición solar son más pequeñas y más gruesas, sobre todo por el desarrollo del parénquima, pero también tienen un sistema vascular y una epidermis más desarrollados que las hojas denominadas de sombra.

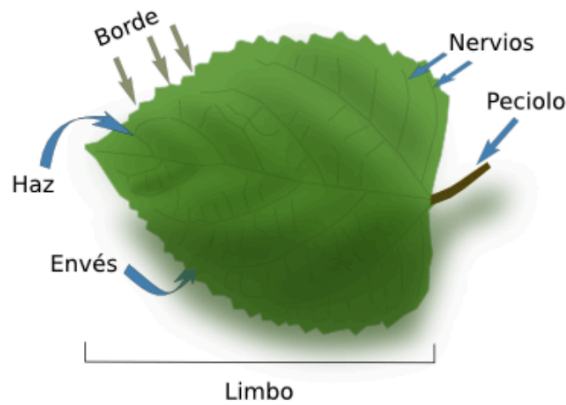


Figura 2. Partes de la hoja

2.4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS HOJAS SEGÚN SUS NERVADURAS

La nervadura es la distribución de los nervios que componen el tejido vascular de la hoja de una planta. Se ubican en el estrato esponjoso del mesófilo de la hoja; a través de ellos circula la savia, comunicando los órganos de la hoja con el resto de la planta. La nervadura o nerviación de las hojas varía dependiendo de las especies, aunque las más comunes son las de nervadura paralela o paralelinervias, en que las nervaduras se extienden paralelamente desde su base; y las de nervadura reticular, en las que existen nervios principales, de los que salen, a modo de red, otros nervios secundarios o menores en disposición de retículo.

El tipo de nervadura es una de las variables usuales en la descripción de las plantas. Las nervaduras se clasifican *según el alcance de las venas principales* (Ver Figura 3), en:

Craspedódromas, aquellas en que las venas principales llegan hasta el margen de la hoja;

Camptódromas, aquellas en que las venas principales se tuercen antes de llegar hasta el margen de la hoja;

según la disposición de los nervios, en:

Reticulada o plumosa, en la que los nervios principales se ramifican en una multitud de nervículos; las hojas nervadas reticuladamente son típicas de las Magnoliopsida, y se dividen a su vez en:

de ***nervadura pennada*** (o pinnatinervias), en las que hay una nervadura principal central, y una red delgada de nervaduras secundarias que nacen de ésta; un ejemplo de nervadura pennada es el de las hojas del manzano (*Malus domestica*);

de ***nervadura palmada*** (o palmatinervias), con más de un nervio principal que nace de la base foliar, junto a la inserción del peciolo, radiando hacia los márgenes; un ejemplo de nervadura palmada es el de las hojas del arce (*Acer* spp.);

trinervias, con tres nervios principales que nacen de la base de la lámina foliar; un ejemplo es el de las hojas de *Ceanothus* spp.;

paralela, en la que los nervios principales corren paralelos entre sí a lo largo de la hoja, desde el extremo basal hasta el distal, unidas a veces por nervículos conmisurales; las hojas nervadas paralelamente son típicas de las *Liliopsida*;

dicotómica, en la que no hay haces vasculares principales, sino una retícula de nervículos que se dividen binariamente a intervalos regulares; las hojas de nerviación dicotómica se encuentran en el *Ginkgo biloba* y algunos helechos.

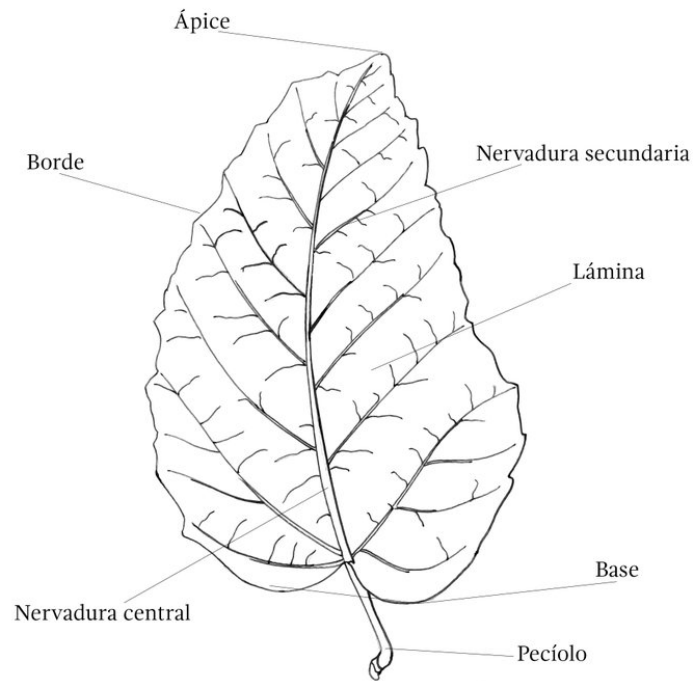


Figura 3. Nervadura central y secundarias

2.5 ESTRÉS EN PLANTAS

El estrés se identifica como una desviación significativa de las condiciones óptimas para la vida. Dichas condiciones ocasionan cambios en todos los niveles funcionales de los organismos. Desde un punto de vista biológico, el estrés tiene una connotación amplia, refiriéndose a los cambios ambientales que alteran al estado fisiológico de las plantas (Larcher, 1995). Ocasionalmente es difícil distinguir entre aquellas condiciones que repercuten negativamente en la planta y aquellas que poseen un efecto benéfico. Nilsen y Orcutt (1996) señalan que algunos factores pueden tener ambos efectos simultáneamente. Por ejemplo, la marchitez producida por déficit hídrico, si bien tiene un efecto negativo en la tasa de asimilación de CO_2 , también puede ser positiva para la planta, ya que colabora en la menor

absorción de energía lumínica al cambiar el ángulo de exposición, evitando el daño permanente en la hoja por altas temperaturas.

En general el estrés vegetal puede ser clasificado, en físico, químico y biótico, siendo los dos primeros agrupados bajo el termino de ‘estrés abiótico’. Entre los factores físicos se pueden mencionar el estrés por déficit o exceso de agua, altas-bajas temperaturas y radiación UV. Entre los factores químicos son ampliamente estudiados la contaminación atmosférica metales pesados, toxinas, salinidad etc. Finalmente, entre los factores bióticos pueden mencionarse la competencia, la herbivoría, la alelopatía y patógenos en general (Tambussi, E.A., 2006).

Sin embargo, algunos otros autores, como por ejemplo Basurto S. M. (2008), hace mención de algunos tipos de estrés específicos en plantas, tales como:

- ⇒ **Estrés Ambiental:** dentro de esta categoría se encuentran ubicados el estrés hídrico, estrés por alta y baja temperatura, estrés por alta y baja irradiación, estrés por alta y baja radiación ultravioleta (UV), estrés por salinidad, estrés nutrimental y estrés por toxicidad de metales pesados.
- ⇒ **Estrés Fisiológico:** que incluye al estrés hormonal (ABA, fitocromo, etileno, AG, etcétera), cambios en las estructuras celulares (estomas, cloroplastos, mitocondrias, etcétera), respuestas estomáticas, tasas de asimilación de CO₂ y tasas de fotorrespiración.
- ⇒ **Estrés Bioquímico:** Estrés por factores abióticos, acumulación de metabolitos nitrogenados, síntesis de polioles, absorción y compartimentalización de iones, cambios en la permeabilidad del agua, estrés por factores bióticos, genes de resistencia, resistencia sistemática adquirida (SAR), resistencia sistemática inducida (RSI), choque oxidativo, y aumento del fenotipo resistente al estrés oxidativo.

Las plantas en zonas urbanas crecen en un ambiente de estrés continuo. En las ciudades se crea un microclima más cálido y más seco y menudo las plantas tienen un espacio muy limitado para las raíces y el suelo está muy compactado, a causa del sellado con asfalto. Como consecuencia, las plantas no pueden absorber toda el agua que necesitan y padecen estrés hídrico. Además, hay una elevada concentración de contaminantes en el aire, el agua y el suelo, así como la polución del tráfico, entre otras condiciones ambientales, que generan en las plantas estrés oxidativo y disminuyen su crecimiento y su vigor.

Por lo tanto, el estudio de las plantas urbanas puede ayudar a comprender cómo responden las plantas a un ambiente de estrés continuo (elevadas concentraciones de CO_2 , calor y contaminación) para poder planear y aplicar estrategias de mejoramiento y manejo de las mismas.

Las plantas de las ciudades aportan muchos beneficios de salud, ambientales, sociales y estéticos. Por ejemplo: Amortiguan los cambios del clima propio de las ciudades, disminuyen los contaminantes del aire y el CO_2 , contribuyen a generar un ambiente más fresco y húmedo, mediante la transpiración y la sombra, reducen la contaminación acústica de la ciudad, etcétera.

2.6 GEOMETRÍA FRACTAL

Los elementos de la geometría euclidiana son puntos, líneas, curvas, etc., ideales concebidos por el hombre para modelar fenómenos naturales y cuantificarlos, midiendo longitudes, áreas o volúmenes. Sin embargo, estos fenómenos u objetos pueden ser tan complejos e irregulares que la medición usando la geometría euclidiana deja de tener sentido. Es decir, hay una manera de medir el grado de complejidad e irregularidad, evaluando cuán rápido aumenta la longitud, la superficie o el volumen, si lo medimos en escalas cada vez más

pequeñas. Este enfoque fue el adoptado por Mandelbrot, matemático polaco, que en 1980 acuñó el término fractal para caracterizar objetos irregulares y autosemejantes.

La geometría Euclidianas es una herramienta adecuada para estudiar las estructuras regulares y la dinámica de Newton, pero al describirse estructuras algebraicas, como lo son la curva de *Cantor* y la curva de *Peano*, con un gran número de irregularidades y que además eran capaces de llenar la porción del plano donde se encuentran, surge el impulso y la creación de describir y medir estas nuevas estructuras, conocidas como *Fractales*.

El término *Fractal* fue introducido por Benoit Mandelbrot y procede del adjetivo latino *fractus* que significa fragmentado e irregular. Es decir, consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. Los detalles de un fractal a cierta escala son semejantes a los de las estructuras visibles a escala mayor o menor.

Mandelbrot mencionaba que todos los fractales poseen la propiedad interna de parecerse a sí mismos a diferentes escalas, propiedad que recibe el nombre de *Autosimilitud*. Debido a esta propiedad la longitud del fractal depende de la escala y resolución del instrumento de medición. Conforme aumente la resolución del instrumento de medida, la longitud del fractal irá creciendo.

La esencia del mensaje de Mandelbrot es que muchas estructuras naturales con una aparente complejidad (tales como nubes, montañas, costas marinas, fallas tectónicas, sistemas vasculares, superficies fracturadas de distintos materiales, etc.), están caracterizadas por una invariancia de escala geométrica cuya dimensión fractal provee una adecuada descripción matemática del fenómeno en cuestión.

Pero en la naturaleza los *Fractales naturales* no son exactamente autosemejantes, sino tan solo al azar, en forma estadística o estocástica. La forma irregular observada en una escala guarda únicamente una similitud aproximada con la obtenida en otra escala. Poseen

dimensiones fraccionarias, es decir no coinciden con las dimensiones euclidianas que se miden con números enteros.

2.6.1 FRACTAL

La mejor manera de definir un fractal es a través de sus atributos: un fractal es rugoso, lo que significa que no es suave en ningún sitio; es autosemejante, es decir, sus partes tienen el aspecto del todo; se desarrolla mediante iteraciones, lo que significa que se obtiene por aplicaciones sucesivas; es complejo, pero se puede describir mediante algoritmos (lo que significa también que detrás de muchos objetos naturales rugosos hay cierto orden).

En los fractales se puede observar la propiedad de autosimilitud. En principio esta autosimilitud es infinita, pero solo en el caso de los fractales matemáticos. Los fractales naturales solo presentan un número finito de “grados o niveles” autosimilares. Además, aunque parecidos, no poseen una semejanza totalmente exacta. A esta propiedad de invariancia estadística del escalado se le denomina autosimilitud estadística (Cattaneo, C. A. *et al.*, 2009).

2.6.2 DIMENSIÓN FRACTAL

El concepto de dimensión en los fractales (DF) como consecuencia de la recursividad o autosimilitud a cualquier escala que poseen es algo muy complejo y juega un papel fundamental en la geometría fractal. La dimensión en la mayoría de los fractales no se ajusta a los conceptos tradicionales de la dimensión Euclidiana o dimensión topológica.

La dimensión definida por Felix Hausdorff en 1919, y perfeccionada más tarde por Besicovitch esta basada en la definición de fractal que propone Benoit B. Mandelbrot: “Un

fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica”. Es decir, la DF en cierto modo es un número que indica el grado de irregularidad de un objeto.

Un objeto fractal X mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L . Esta dimensión se representa por la siguiente fórmula:

$$S = L^D$$

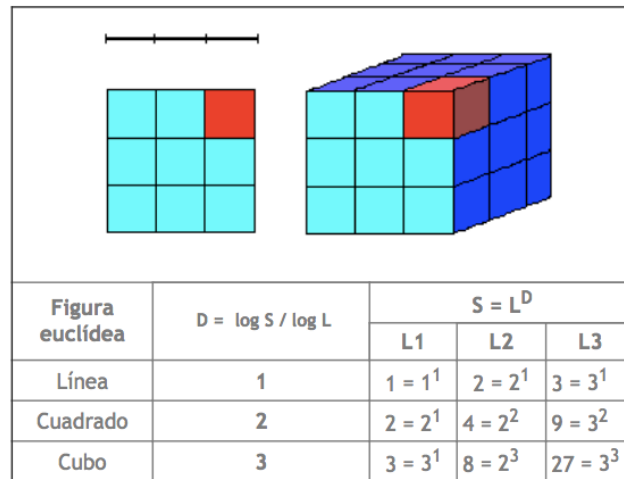
Donde S es el tamaño del fractal, L la escala de medición D es la dimensión fractal y al despejar D :

$$\log S = D \log L \rightarrow D = \log S / \log L$$

La DF es una generalización de la dimensión euclidiana, que con carácter general tiene valores enteros e iguales a la dimensión topológica para las líneas, polígonos y sólidos y valores fraccionarios y superiores a su dimensión topológica en los fractales.

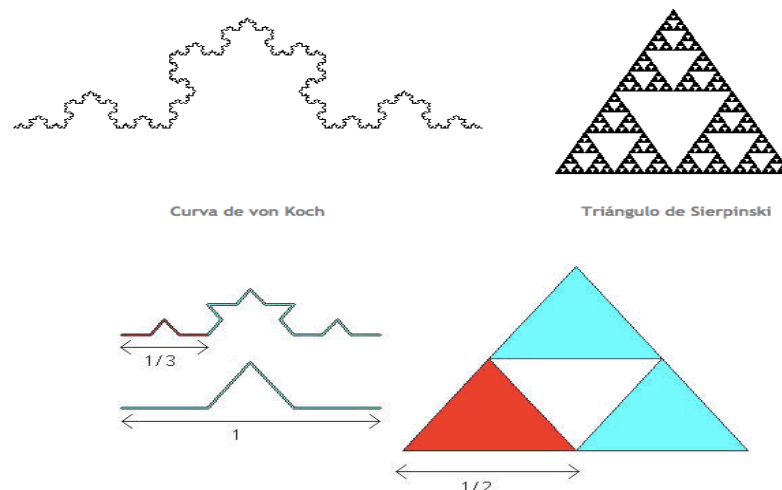
Ejemplos:

Objetos de dimensión topológica euclidiana: una recta, un cuadrado y un cubo. Con escalas de dimensión $L_1 = 1$ $L_2 = 2$ y L_3 , la longitud S y la dimensión de D tienen sucesivamente los siguientes valores:



La línea, el cuadrado y el cubo que son 1, 2 y 3, tienen valores enteros y coinciden con la dimensión de Hausdorff- Besicovitch. Los valores son exactamente iguales que la dimensión topológica correspondiente a la recta, al cuadrado y al cubo, por tanto, es evidente que no son fractales ya que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch no es estrictamente mayor que su dimensión topológica, y además tiene valores enteros.

La curva de Koch y el Triángulo de Sierpinski como objetos Fractales de DF con valor fraccionario.



$$D = \log S / \log L$$

$$S = 4 \text{ y } L = 1/3$$

$$D = \log 4 / \log (1/3) = \log 4 / \log 3 = \mathbf{1,262}$$

$$S = 3 \text{ y } L = 1/2$$

$$D = \log 3 / \log (1/2) = \log 3 / \log 2 = \mathbf{1,585}$$

La DF en el caso de la curva de Koch es 1, 262, por tanto, es mayor que su dimensión topológica. Cumple los requisitos para clasificarla como fractal, de acuerdo con la definición de Benoit Mandelbrot que su dimensión topológica.”. En el caso del triángulo de Sierpinski el valor de la DF es 1,585, un valor fraccionario, pero menor que su dimensión topológica, que al ser un polígono es 2, por tanto, no cumpliría estrictamente la condición de la definición de Mandelbrot. Aunque el triángulo de Sierpinski es uno de los fractales mas conocidos y una de las excepciones (otras son el polvo de Cantor, la curva de Peano por mencionar algunas), ya que la definición de fractal es compleja y controvertida. El mismo Mandelbrot reconoce que no incluye algunos conjuntos que por otras razones deben incluirse en la categoría de fractales.

2.6.3 APLICACIONES DE LOS FRACTALES

Ciertos objetos naturales poseen un número finito de grados de autosimilitud, y pueden ser considerados como fractales naturales. Bajo esta premisa, la geometría fractal ha ayudado enormemente a explicar diversos fenómenos naturales tales como el curso de los ríos, la formación de nubes, el crecimiento de las plantas, las cordilleras, la evolución de las galaxias, el crecimiento poblacional, el funcionamiento de los huracanes, el ruido electrónico y los atractores caóticos (Pérez, P. M., 2005).

También los fractales pueden ser usados como modelos de sistemas en evolución, que permiten visualizar la situación real del sistema y prever su evolución. Un ejemplo de esto es la dinámica de poblaciones: donde se visualiza la situación actual y las previsiones de crecimiento.

Otras aplicaciones importantes de los fractales son:

- ✿ Evolución de los mercados bursátiles.
- ✿ Estudio de la relación entre la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial.
- ✿ Análisis del nacimiento de los planetas.
- ✿ Medición de fronteras y costas.
- ✿ Análisis y predicción de condiciones meteorológicas, terremotos y volcanes.
- ✿ Análisis espectroscópico.
- ✿ Análisis estructural y morfológico en polímeros.
- ✿ Caracterización de agregados.
- ✿ Análisis de fenómenos caóticos, como el movimiento browniano o la formación de nebulosas siderales.

La fractalidad observada en diversos sistemas, es consecuencia de muchos factores, pero en la actualidad recién estamos pasando de la etapa descriptiva a una de comprensión.

En fin, la historia de la geometría fractal está llena de descubrimientos inesperados, actualmente se puede decir que la geometría fractal puede ser abordada plenamente por la comunidad científica, gracias a los avances que oportunamente brinda la tecnología computacional, aportando a diversas disciplinas, tales como: la Ingeniería, Comunicación, Medicina, Economía, Informática, Geología, Industria, Biología, Ámbito militar y Música.

2.7 IMAGEJ

ImageJ es un programa informático de tratamiento digital, originalmente enfocado al ámbito de las ciencias de la salud. Es un software de dominio público y de código abierto desarrollado en el lenguaje Java en las instituciones del grupo National Institutes of Health de Estados Unidos. Se puede ejecutar en forma de applet, como aplicación ejecutable y en general en cualquier plataforma que disponga de Java (versión 5 o superior). Se distribuye de forma gratuita para sistemas operativos de las familias Windows, MAC OS y Linux desde el apartado correspondiente de su sitio web.

ImageJ proporciona una gran cantidad de herramientas de edición, procesamiento y análisis de imagen aplicables a imágenes de tipo 8-bit, 16-bit y 32-bit, y de multitud de formatos (jpg, bmp, png, gif, tiff, dicom, fits, raw, etc.). En cuanto a la edición, ImageJ permite convertir imágenes de un tipo a otro, hacer ajustes avanzados, gestionar características específicas de las imágenes a color e indexadas, transformaciones geométricas, crear y gestionar recubrimientos sobre la imagen, etc. Provee multitud de filtros espaciales y del dominio de la frecuencia, capaz de hacer convoluciones y transformadas de Fourier. Proporciona herramientas para eliminar o añadir varios tipos de ruido. Realiza operaciones matemáticas y lógicas con los píxeles de las imágenes, entre otras muchas cosas. ImageJ se trata de un programa multiproceso.

Como se puede observar en la Figura 4, ImageJ consta de una sencilla interfaz de usuario con una barra de menús y una barra de herramientas, además de una barra de estado.

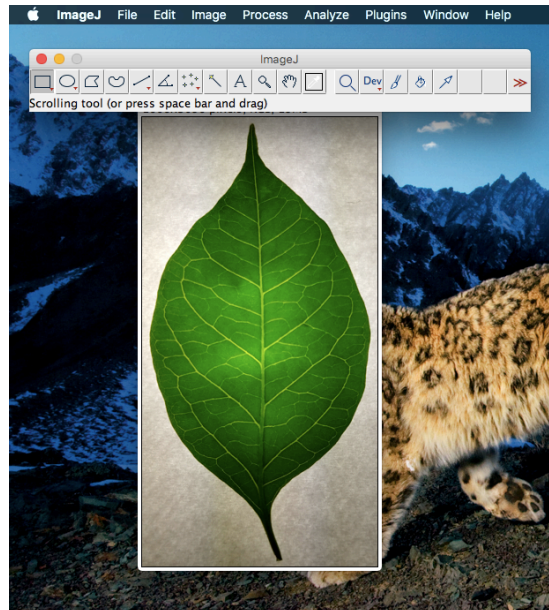


Figura 4. Interfaz de usuario de ImageJ junto a una ventana con imagen.

En el menú Plugins se encuentra todo lo relacionado con la extensibilidad de ImageJ, que son fundamentalmente, todas las herramientas relacionadas con los macros, los scripts y los plugins (Ver Figura 5).

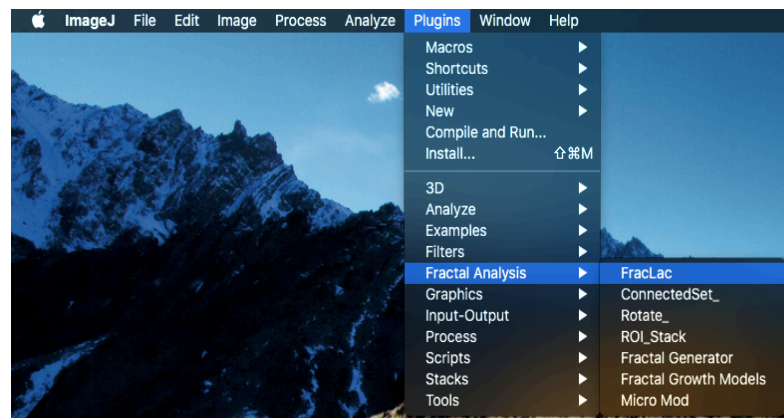


Figura 5. Plugins (ver FracLac)

ImageJ al parecer es lo suficientemente amplio y potente para ser utilizado en el tratamiento de imágenes en general, ya que ha sido especialmente utilizado en trabajos de carácter científico y técnico.

2.7.1 FRALAC

FracLac es un complemento para ImageJ. Es un software de análisis de imágenes desarrollado como complemento para ImageJ y de libre acceso, creado y mantenido por el laboratorio de la Escuela de Salud Comunitaria de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Charles Sturt, Australia.

FracLac se utiliza para analizar objetivamente la complejidad y heterogeneidad, así como algunas otras medidas de imágenes digitales binarias.



Usado para medir formas geométricas difíciles de describir donde los detalles del diseño son tan importantes como la morfología general.



Es adecuado para imágenes de células y otras estructuras biológicas, incluidas estructuras y texturas ramificadas, así como fractales conocidos.



Los patrones pueden ser fácilmente extraídos de muchos tipos de imágenes y convertirse en imágenes digitales binarias que se pueden analizar con FracLac.

Este complemento realiza diferentes tipos de análisis para generar datos y gráficos con respecto a la dimensión fractal, lacunaridad y datos multifractales, así como la forma y el

tamaño de imágenes binarias. Escaneando imágenes de diferentes formas, tal como: conteo y/o recuento de cajas, sub escaneo, lacunaridad de caja deslizante y escaneo multifractal (Ver Figura 6).

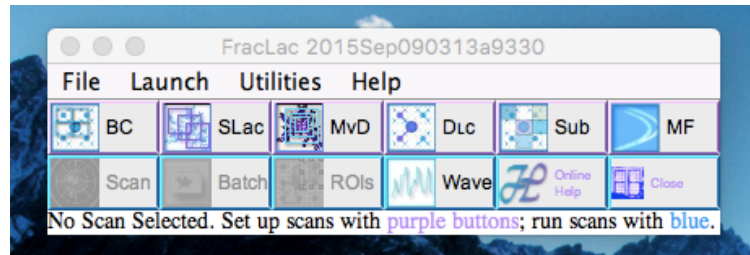


Figura 6. Tipos de escaneo de dentro de FracLac

2.7.2 RECUENTO DE CAJAS

El recuento de cajas es un método de recopilación de datos para analizar patrones complejos al dividir un conjunto de datos, objeto, imagen, etc. en piezas cada vez más pequeñas, normalmente en forma de caja, y analizar las piezas en cada escala más pequeña.

El procedimiento básico consiste en colocar sistemáticamente una serie de cuadrículas de calibre decreciente (las cajas) sobre una imagen y registrar datos (el recuento) para cada calibre sucesivo. Es decir, contar cuántos de los cuadros en cada cuadrícula tienen parte de detalle importante en la imagen (Ver Figura 7).

Las dos características clave del recuento de cajas son:

1. El recuento de cada elemento de muestreo, que se refiere al número de elementos de muestreo (cuadros u óvalos) de un tamaño de cuadro particular

que contiene píxeles significativos en primer plano en un escaneo de recuento de cajas.

2. El tamaño de caja, que se refiere al diámetro, generalmente especificado en píxeles, de las cajas individuales u óvalos utilizados para muestrear un objeto con recuento de cajas.

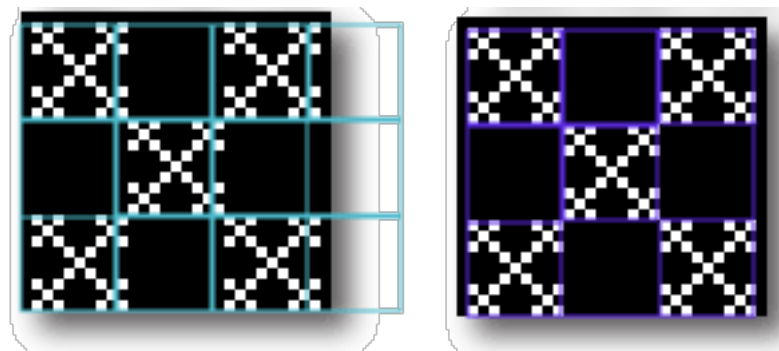


Figura 7. Recuento y tamaño de caja

El detalle (N) y la escala (ε) son factores críticos en la determinación de la DF, ya que N se aproxima por el recuento y ε por el calibre.

Recientemente se han aplicado algoritmos informáticos para realizar el recuento de cajas a patrones en espacios de 1, 2 y 3 dimensiones. Dichas técnicas generalmente se implementan en software para usar en patrones extraídos de medios digitales y se utiliza en el análisis fractal.

2.8 PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

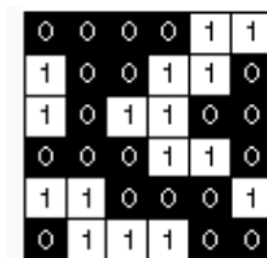
Es un proceso que transforma una imagen en otra más adecuada para facilitar su posterior interpretación de forma más simple y más fiable (Branch y Olague, 2001). Tiene

como objetivo mejorar la información gráfica para la interpretación humana y el procesamiento de los datos de la escena para la percepción automática por computadora.

Una *Imagen Digital* es una función de intensidad bidimensional $f(x,y)$ donde x e y son las coordenadas espaciales y el valor de f en cualquier punto (x,y) es proporcional a la intensidad o nivel de gris de la imagen en ese punto. Cada pixel que conforma la imagen tiene un color específico y mientras más resolución o más pixeles tengan, será de mejor calidad.

Dependiendo del rango de valores en cada pixel se pueden distinguir los siguientes tipos de imágenes:

Imágenes binarias: es una imagen digital que tiene únicamente dos valores posibles para cada píxel. Normalmente, los colores utilizados para su representación son negro y blanco, aunque puede usarse cualquier pareja de colores. Uno de los colores se emplea como fondo y el otro para los objetos que aparecen en la imagen. En un caso simple, los pixeles simplemente toman los valores 0 o 1. Tales pixeles constituyen una imagen binaria. Usualmente, los valores 1 y 0 representan regiones claras y oscuras o el objeto y su fondo.



0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0

Imágenes de intensidad: también conocidas como imágenes en niveles de gris, en la que cada pixel se dibuja usando un valor numérico individual que representa su luminancia, en

una escala que se extiende entre blanco y negro. Se aplica al modo de color en el que cada elemento (píxel) se describe dentro de una serie limitada de valores de un mismo tono neutro. En el caso de imágenes con una profundidad de 8 bits, los valores posibles teóricos son 256.

68	124	0	170	86	0
234	187	68	251	10	236
76	124	218	132	201	66
124	16	118	183	32	255
126	191	198	251	141	56
41	255	243	162	212	152

Imágenes de color: son aquellas cuando la codificación de la imagen contiene información sobre tres o más componentes de color. Ya sea las componentes RGB (Rojo, Verde y Azul), HSI (Croma o Tono, Saturación e Intensidad), CMY (Cyan, Magenta, Amarillo), CMYK (Cyan, Magenta, Amarillo y Negro) u otras. La expresión matemática de la imagen en color, en el espacio RGB, es la combinación de tres funciones bidimensionales, cada una de ellas correspondientes a cada uno de los componentes principales del color (Rojo, Verde y Azul):

$$F(x,y) = f_R(x,y) \cdot f_G(x,y) \cdot f_B(x,y)$$

1	5	3	2	2	4
5	2	4	2	5	1
5	5	5	5	3	3
2	1	2	4	1	3
4	4	4	1	1	3
2	4	2	1	3	3

2.9 ESTADO DEL ARTE

La Geometría Fractal también llamada “Geometría de la Naturaleza” es aquella que trasciende de los puntos, las rectas y los planos de Euclides para atrapar y describir las formas de los árboles, las montañas y las nubes, entre otros. Complejidad y simplicidad son partes complementarias de su todo (McGuire, 1991). Sin embargo, las formas naturales son tan irregulares y fragmentados que, en comparación con la geometría Euclidiana, la naturaleza presenta un grado superior de complejidad, evaluando cuan rápido aumenta la longitud, la superficie o el volumen a diferentes escalas. Donde el número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos, infinito.

Una de las características importantes de la geometría fractal es que permite la caracterización de irregularidades que no pueden tratarse mediante la geometría Euclidiana. Por tanto, se han desarrollado diversos métodos para estimar la dimensión fractal en el análisis de imágenes (Cattaneo, C. A. *et al.*, 2009).

Pentland (1984) propuso un método para estimar la dimensión fractal usando la transformada de Fourier aplicada al espectro de potencia de la superficie de intensidad de la imagen suponiendo que eran modeladas como superficies de movimiento browniano fractal.

Peleg *et al.*, (1984) adoptaron la idea de Mandelbrot del método ϵ -blanket y la extendieron al cálculo de superficie de un área.

Clarke (1986) calculó la dimensión fractal de superficies topográficas usando el concepto de un área de superficie formada por prismas triangulares.

El método de conteo de cajas fue desarrollado por Gangepain y Roques-Carmes (1986) y mejorado posteriormente por Voss (1986) al incorporar la teoría de la probabilidad. Más tarde, en 1989, Keller *et al.*, contribuyeron con un refinamiento por medio de la interpolación lineal.

Sarkar y Chaudhuri (1992, 1994) propusieron el método diferencial de conteo de cajas para calcular la dimensión fractal además de comparar diferentes métodos.

En 1992, Jin *et al.*, proponen una mejora a los trabajos de Sarkar y Chaudhuri y lo aplican al análisis de imágenes digitales.

Pastor y Broschart (1990) utilizan el análisis fractal para examinar la distribución espacial de varias especies latifoliadas en rodales de Minnesota.

Solé y Manrubia (1995) describen el comportamiento de los claros en ambientes de bosque tropical a través de un modelo autómatas celular simple al que llaman “El juego del bosque”.

Sztojánov, I., (2009) introducen las nociones necesarias para la definición de los fractales y su evaluación cuantitativa y un algoritmo para el cálculo de la dimensión fractal basado en contornos biofractales.

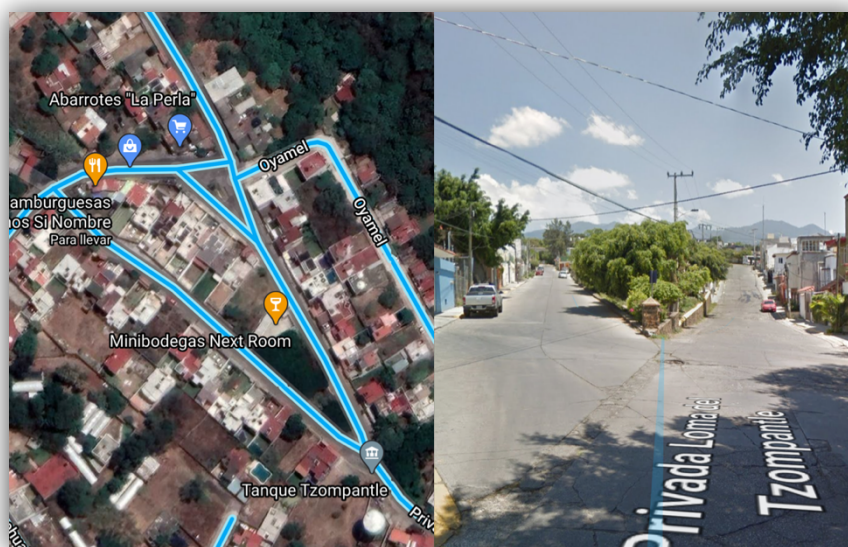
No son abundantes los trabajos sobre geometría fractal que se realizan para describir y simular comportamientos naturales aparentemente caóticos. La diversidad de especies vegetales hacen que las técnicas tradicionales sean difíciles, lentas y altamente especializadas ya que la mayoría son manuales y, por lo tanto, incapaces de mantenerse el ritmo de las necesidades de investigación y registro de la flora (Judd *et al.*, 1999 ; Collinson, M. E., *et al.*, 1999) con lo que se evidencia la necesidad de sistemas y herramientas para identificar y clasificar especies vegetales (Bruno, O. M., *et al.*, 2008).

CAPITULO III.

3. METODOLOGÍA

3.1 SITIOS DE COLECTA DE HOJAS

Las muestras de hojas de Bugambilia fueron recolectadas en dos sitios diferentes localizados en Lomas de Tzompantle, colonia perteneciente al municipio de Cuernavaca, Morelos. El primer sitio caracterizado por localizarse en el núcleo de la zona urbana de Tzompantle, cuya particularidad principal es pobre en suelo y alta circulación vehicular así, como moderada circulación de peatones; el segundo sitio caracterizado por localizarse a la entrada de la zona boscosa de Tzompantle, con suficiente suelo, escaso tráfico vehicular y poca circulación de peatones.



Sitio 1. Lomas de Tzompantle



Sitio 2. Lomas de Tzompante

3.2 COLECTA Y MANEJO DE HOJAS

Una colecta se refiere al conjunto de todos los ejemplares de herbario, así como las muestras tomadas en un solo árbol o una sola planta. Una colecta siempre debe acompañarse con datos acerca de la colecta (por ejemplo, descripción del sitio).

Material de colecta:

- ⇒ Una prensa botánica con hojas de papel periódico y cartón para prensar
- ⇒ Plumón indeleble
- ⇒ Tijeras de podar de mano



Para llevar a cabo la colecta de las hojas se procedió en cada uno de los sitios anteriormente descritos a identificar la variedad de *Bougainvilleas* a utilizar, tomando en consideración que se tratará de plantas de tamaño considerable y de abundante ramificación. Una vez identificadas las plantas a utilizar para la colecta de hojas, se cortaron de cada sitio aquellas que fueran hojas completas, es decir que no tuvieran algún tipo de daño laminar, que fueran en la manera de lo posible del mismo tamaño y del mismo grado de madurez, el número de hojas colectadas por sitio fue de 50 muestras.

Posteriormente se colocaron las hojas dentro de una prensa botánica de cartón para transportarlas sin causar ningún daño a las mismas. Al realizar este prensado las hojas eliminan el agua y se conservan sin perder sus características principales, permitiendo conservar su aspecto lo más similar posible al que tienen en la naturaleza. Al prensar las hojas se respetó su dirección, es decir se acomodaron con el haz hacia arriba.

La siguiente secuencia es la que se llevo a cabo al colocar las muestras en la prensa:

- a. Cartón
- b. Papel periódico
- c. Hojas de *Bougainvilleas*

- d. Papel periódico
- e. Cartón

Al concluir el prensado de las hojas se realizaron las anotaciones correspondientes, tal como sitio de colecta, número de hoja y fecha (día, mes y año).

Posteriormente las hojas se lavaron con agua corriente para retirar impurezas, colocándolas inmediatamente en una prensa nueva de la misma forma que fue descrito con anterioridad, con la excepción de que aquellas que fueron colectadas en el sitio 1 fueron etiquetadas como “Hojas con estrés” y las colectadas en el sitio 2 fueron etiquetadas como “Hojas sin estrés” dada a las características de cada lugar.

3.3 CAPTURA DE FOTOGRAFÍAS Y TRATAMIENTO DE IMAGEN

Una vez realizado el procedimiento de colecta de hojas, inmediatamente después se llevó a cabo la captura de fotografías. Las imágenes se capturaron bajo la luz negra, también conocida como luz UV-A o simplemente luz ultravioleta para resaltar el contorno de las nervaduras, usando la cámara principal de Moto G6 Plus de 12 mega píxeles. La distancia focal se mantuvo constante y perpendicular entre la cámara y las hojas. A la primera fotografía se colocó una regla usando la escala en mm (Ver Figura 8) para calibrar el análisis digital de las imágenes y, fueron guardadas en formato jpg.

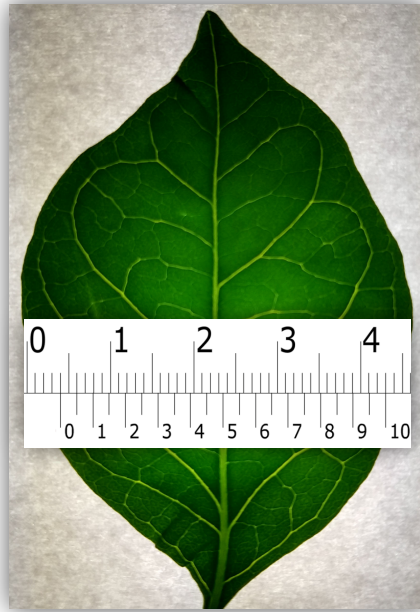


Figura 8. Escala en mm

Las imágenes fueron sometidas a tratamiento digital utilizando Adobe Photoshop CS6 para MAC, editor de imágenes y video de alta versatilidad de la siguiente manera:

Con el objetivo de quitar el fondo y dejar solo la imagen (la hoja), se convierte la imagen a *objeto inteligente* y se hace una *selección rápida*, ambas herramientas simplifican el proceso al seleccionar un solo objeto sin alterar el gráfico original. Se selecciona la *capa* utilizada y se *vectoriza* para pulsar sobre *inverso* y *suprimir*, logrando el efecto deseado (Ver Figura 9).

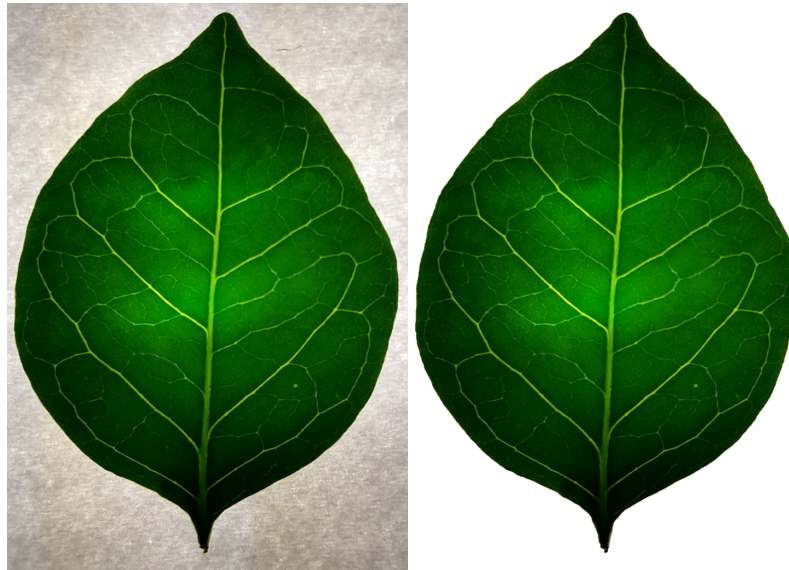


Figura 9. Misma imagen con fondo y sin fondo

Utilizando la herramienta de *borrado mágico*, se selecciona sobre la imagen los distintos tonos de la lamina de la hoja para eliminarlos. posteriormente se ajusta el *brillo* y *contraste* según sea necesario. Usando *rango de color* y *binarizando* la imagen obtenemos el esqueleto de la hoja, es decir solo el contorno y las nervaduras de la hoja (Ver Figura 10).

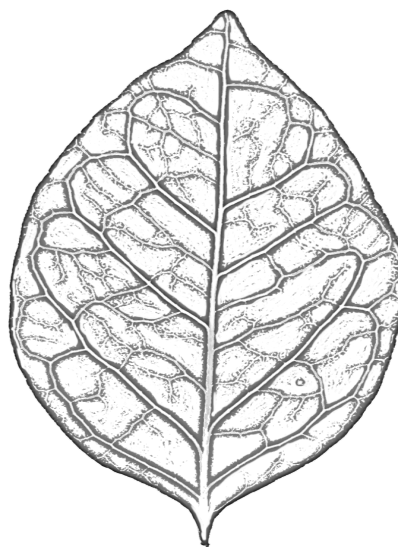


Figura 10. Imagen con contorno y nervaduras

3.4 MEDICIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

La medición de la Dimensión Fractal de cada una de las Hojas de *Bougainvilleas* (50 de cada sitio), se calculó mediante el complemento FracLac de ImageJ, misma que cuenta con la función de recuento de cajas para realizar la medición. Las imágenes binarizadas y utilizadas contenían contorno y nervaduras. La medida de DF consistió en colocar sistemáticamente una serie de cuadrículas de calibre decreciente (a lo que llamamos cajas) sobre una imagen (hojas) y registrar datos (el recuento) para cada calibre sucesivo. Dicho método se basa en el concepto matemático de cubrir un objeto dentro de una imagen con rejillas de tamaños diferentes, contando cada orificio como una caja.

A continuación, se describe el procedimiento general:

En la barra de herramientas abrir la imagen a medir, abrir FracLac haciendo clic en *Plugins* → *Análisis fractal* → *FracLac*, seleccionar *BC* (recuento de cajas). En la configuración de diseño de cuadrícula, se establecen las opciones para el tipo de imagen utilizada, diseño de cuadrícula, tipo de escaneo, opciones de gráfico y procesamiento de datos (Ver Figura 11). Una vez establecidos los parámetros de la configuración solo se selecciona *OK*.

La configuración de FracLac se realiza una vez por sesión ya que una vez introducidos los ajustes estos quedan almacenados y disponibles en el botón Scan. Al seleccionar el botón Scan se ejecuta una exploración del recuento de cajas en la imagen seleccionada (Ver Figura 12). El análisis generará tres ventanas con salidas de datos: resultado de casco y círculo, resumen de archivo (BC) y tipos de análisis.

En la ventana de resumen de archivo (BC) obtenemos los datos deseados, es decir la Dimensión Fractal misma que se utiliza en el análisis estadístico posterior.

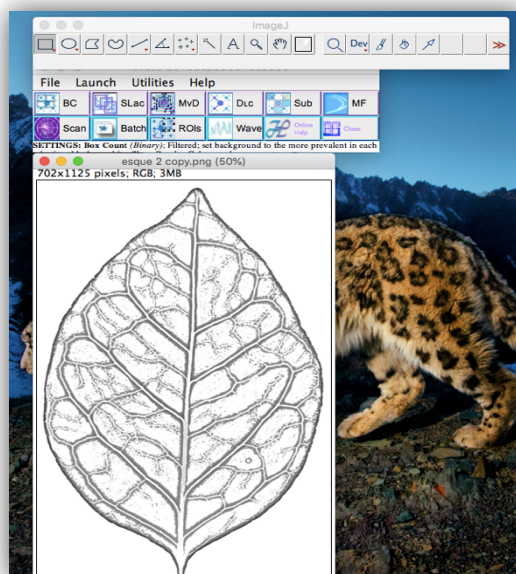


Figura 11. Barra de herramientas del complemento FracLac

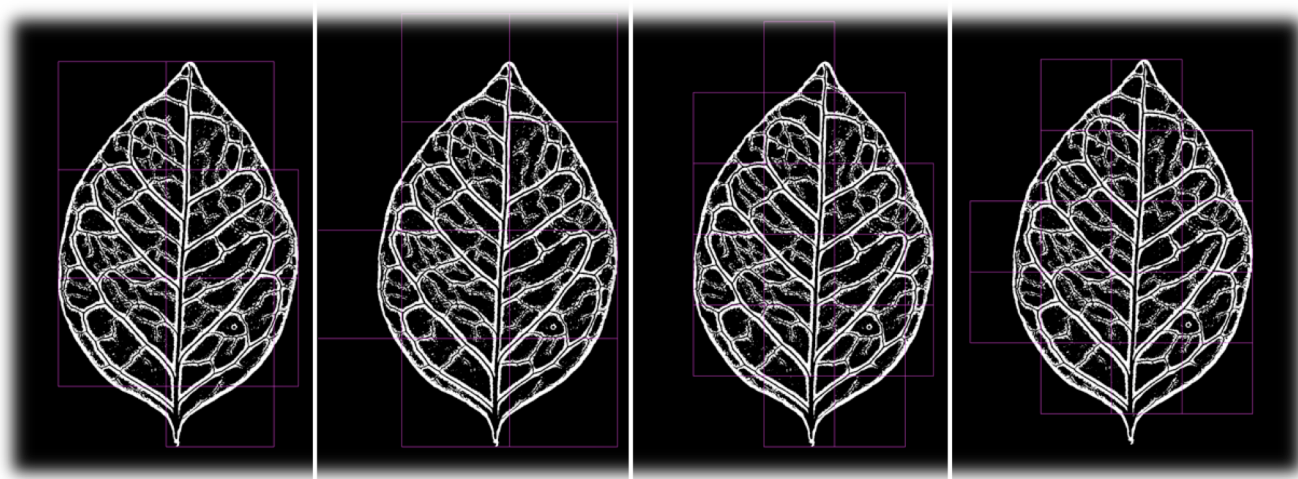


Figura 12. Cuadriculas utilizadas durante el escaneo

3.5 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Los valores resultantes de FracLac para cada una de las 100 hojas, fueron analizados con ayuda del programa Excel para análisis estadístico (Promedio, desviación estándar y error típico). Se empleo una prueba paramétrica (t-student) para evaluar diferencias significativas entre hojas de un sitio y otro (con estrés y sin estrés) con un grado de confiabilidad del 95%.

Mediciones de la Dimensión Fractal para cada uno de los Sitios:

DIMENSIÓN FRACTAL		
N	SIN ESTRÉS	CON ESTRÉS
1	1.7185	1.4746
2	1.7421	1.5598
3	1.7742	1.1712
4	1.7682	1.5176
5	1.7092	1.7521
6	1.6987	1.6496
7	1.7421	1.6537
8	1.7139	1.7753
9	1.6915	1.7564
10	1.7645	1.6414
11	1.6987	1.6793
12	1.6538	1.5863
13	1.7053	1.6875
14	1.7531	1.5086
15	1.6900	1.7643
16	1.8023	1.7463
17	1.6974	1.6297
18	1.7459	1.5532
19	1.7290	1.4995
20	1.8024	1.7267
21	1.7764	1.6752
22	1.8345	1.7150
23	1.7782	1.6834
24	1.8163	1.5867
25	1.6974	1.6778

DIMENSIÓN FRACTAL		
N	SIN ESTRÉS	CON ESTRÉS
26	1.7354	1.7412
27	1.7564	1.6898
28	1.6432	1.6597
29	1.7208	1.7456
30	1.7135	1.6645
31	1.7285	1.2178
32	1.7321	1.4279
33	1.7842	1.3894
34	1.7572	1.3720
35	1.7745	1.4678
36	1.6964	1.7026
37	1.7255	1.6745
38	1.6333	1.6933
39	1.7389	1.5891
40	1.7791	1.5573
41	1.7848	1.6214
42	1.6985	1.2683
43	1.7952	1.3390
44	1.6836	1.4968
45	1.8056	1.6324
46	1.7934	1.6388
47	1.8179	1.5937
48	1.7499	1.6025
49	1.7993	1.6926
50	1.8232	1.6280

3.6 VALIDACIÓN DE LAS MEDICIONES

Se planteo y llevo a cabo una forma de validar los resultados que se obtuvieron de la DF con la finalidad de tener una mayor confiabilidad al usar FracLac de ImageJ. Dicho procedimiento consistió en realizar las mediciones de objetos con DF conocida, tal como se realizo el procedimiento en las hojas, las imágenes de los objetos que se usaron para validar, fueron una *línea recta* donde la dimensión conocida es 1, un *cuadrado* donde la dimensión es 2 y la *curva de Koch* donde la dimensión conocida es de 1,26.

4. RESULTADOS

Análisis Estadístico:

Con respecto al análisis estadístico (Tabla 1) podemos observar una diferencia en las medias de cada sitio de 0.1479. El sitio correspondiente al etiquetado con la leyenda *Con Estrés* muestra una dimensión fractal máxima de 1.77 y una mínima de 1.17, y el sitio etiquetado *Sin Estrés* observamos que la dimensión fractal máxima es de 1.83 y la mínima de 1.63. La distribución de los datos para el primer sitio (Ver Fig. 13) muestra una distribución sesgada a la izquierda, mientras que para el segundo sitio (Ver Fig. 14) muestra una distribución normal. También podemos observar que el grado de dispersión (desv. std) es mayor para en el primer sitio, por lo que nos indica que los datos están más alejados de la media en comparación al segundo sitio.

Tabla 1. Datos estadísticos para cada sitio

	PROMEDIO	DESV ST	MAX	MIN
Sin Estrés	1.74348	0.048093434	1.8345	1.6333
Con Estrés	1.59554	0.142781256	1.7753	1.1712

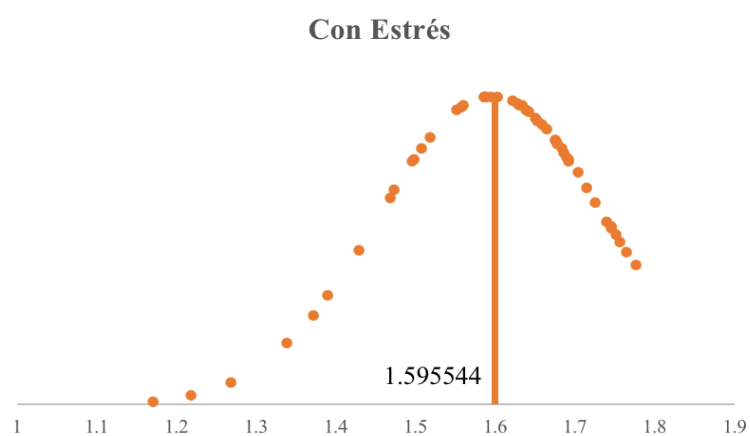


Figura 13. Distribución de los datos correspondientes al sitio *Con Estrés*

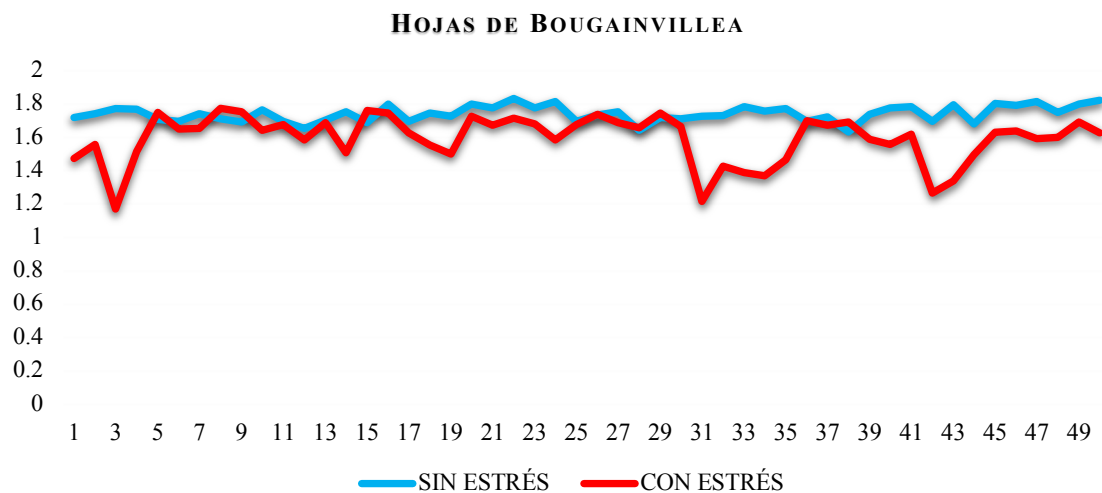


Figura 14. Distribución de los datos correspondientes al sitio *Sin Estrés*

El siguiente gráfico (1) se muestran todas las medidas obtenidas en FracLac para cada uno de los sitios (con estrés y sin estrés), en la cual podemos observar que aquellos datos que corresponden a las hojas con estrés presentan varios puntos pronunciados (valles), sobre todo por debajo de la media, mientras los que corresponden a las hojas sin estrés se mantienen muy de cerca a la media.

Grafico 1. Dimensión Fractal de hojas sin estrés y con estrés.

N para cada sitio = 50



Prueba paramétrica t-student:

Con respecto a la prueba paramétrica t-student aplicada a los datos (Tabla 2), notamos que, para un número de 50 observaciones por sitio, el *estadístico t* y el *valor p* (de dos colas) corresponden a 6.9430 y 0.0000000004212, este ultimo indicando la probabilidad de aceptar o rechazar la hipótesis nula. Para determinar si había diferencia entre las medias se comparo el *valor p* con el nivel de significancia (0.05), que indica un riesgo del 5% de concluir que existe una diferencia cuando no hay una diferencia real. En el presente análisis el *valor p* es menor

al nivel de significancia, lo que nos hace concluir que si hay diferencias significativas en las medias. Finalmente, el uso de la prueba de t-student, constituye una herramienta analítica para la toma de decisiones en la comparación de muestras.

Tabla 2. Valores de la prueba t-student

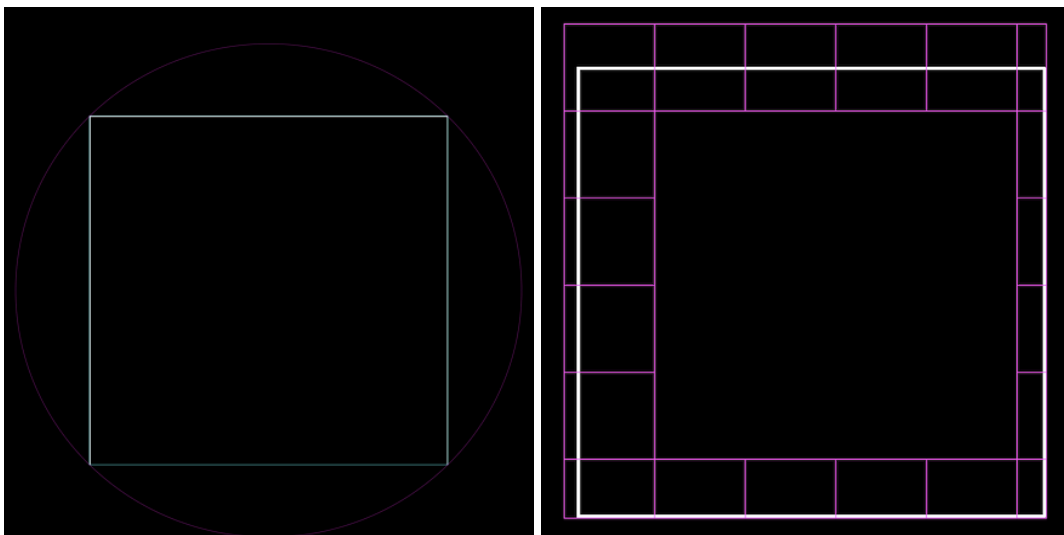
<i>PARAMETROS</i>	<i>VARIABLE 1</i>	<i>VARIABLE 2</i>
Media	1.74348	1.59554
Varianza	0.002312978	0.020386487
Observaciones	50	50
Varianza agrupada	0.011349733	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	98	
Estadístico t	6.943062259	
P(T<=t) una cola	0.0000000002106	
Valor crítico de t (una cola)	1.660551217	
P(T<=t) dos colas	0.0000000004212	
Valor crítico de t (dos colas)	1.984467455	

Validación:

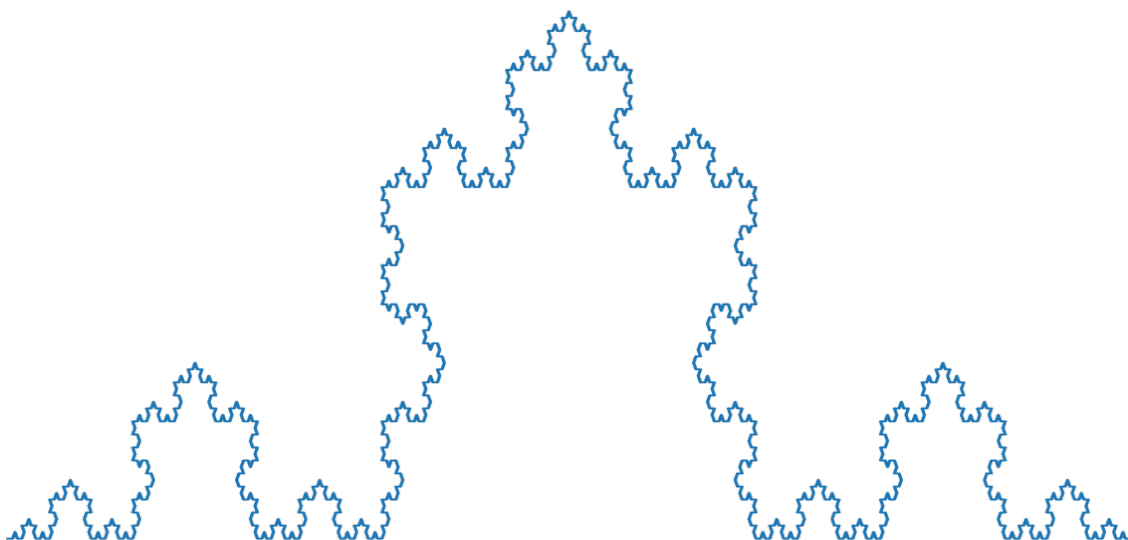
Las mediciones realizadas con FracLac a imágenes de objetos cuya dimensión fractal es conocida, dio como resultado medidas muy similares a las originales, lo cual nos permite tener mayor confianza a los resultados de las mediciones realizadas para el presente trabajo.

A continuación, se muestran las imágenes usadas, al igual que las medidas obtenidas con FracLac y las reportadas en la literatura:

Línea recta
DF = 0,9747
DF reportada = 1



Cuadrado
DF = 2.0
DF reportada = 2.0



Curva de Koch

$$DF = 1.32$$
$$DF \text{ reportada} = 1.26$$

5. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Con respecto al presente trabajo realizado, podemos concluir que mediante la medición de fitoestructuras de Spp. *Bougainvillea* se consiguió estandarizar una metodología para determinar la Dimensión Fractal en hojas, mediante el programa de procesamiento de imágenes ImageJ y su complemento FracLac. Es decir que la metodología puede ser utilizada en cualquier especie de plantas con cualquier tipo de hoja (simples o compuestas).

El algoritmo recuento de cajas ofrece dos ventajas principales, es fácil de comprender e implementar en caso de utilizar un ordenador y puede ser aplicada a imágenes.

De igual manera se estableció un procedimiento funcional para la captura de fotografías y tratamiento de imágenes de las mismas, este ultimo usando como herramienta principal el programa de Photoshop CS6.

Y que haber logrado una estandarización y un procedimiento con programas de acceso libre, ofrece ventajas tales como el bajo costo, contribución a la formación de profesionales, acceso rápido, entre muchas otras.

Teniendo en cuenta que el estrés vegetal hace referencia a cualquier factor ambiental biótico o abiótico, reduciendo la tasa de algún proceso fisiológico (como por ejemplo el crecimiento), podemos concluir también que al estudiar una especie en dos situaciones diferentes (hábitat), pueden presentarse diferencias significativas en su biología. Y que en base a los resultados obtenidos, la Dimensión Fractal puede ser una herramienta eficaz para determinar algún tipo de estrés (físico, químico o biótico) en especies vegetales.

Se comprobó también que al igual que la mayoría de los objetos de la naturaleza, las hojas de las plantas presentan una geometría irregular. Y que el análisis fractal puede ser una herramienta muy útil para entender diferentes procesos entorno a los fractales naturales e incluso para complementar los estudios de identificación y caracterización de los mismos.

Podemos creer que, en un futuro no muy lejano, el estudio de la Geometría Fractal ayudará a modelar correctamente los patrones y procesos observados en la naturaleza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Branch, J. W. y Olague, G. 2001. La visión por computador: una aproximación al estado del arte. *Dyna* (133): pp. 1-16.
- Argueta, V., Cano, L. M., & Rodarte, M. E. (1994). Atlas de las plantas de la medicina tradicional mexicana: Instituto Nacional Indigenista. Vol. II. México, 559.
- Basurto, S. M., Núñez, B. A., Pérez, L. R. R., & Hernández, R. O. A. (2008). Fisiología del estrés ambiental en plantas. Facultad de Ciencias Agrotecnológicas, Universidad Autónoma de Chihuahua-México. *Synthesis-Aventuras del pensamiento*, 1-5.
- Benítez de Rojas, C., Cardozo, A., Hernández, L., Lapp, M., Rodríguez, H., Ruiz, T., & Torrecilla, P. (2006). Botánica sistemática: fundamentos para su estudio.
- Bonilla-Barbosa, J. R., & Ríos, J. L. V. (2003). Catálogo de la flora del estado de Morelos. Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Centro de Investigaciones Biológicas.
- Bonilla-Barbosa, J. R., Viana-Lases, J. A., & Salazar-Villegas, F. (2000). Flora acuática de Morelos (Vol. 20). UNAM.
- Branch, J., & Olague, G. (2001). La visión por computador: Una aproximación al estado del arte. *Revista Dyna*, 133.
- Bruno, O. M., de Oliveira Plotze, R., Falvo, M., & de Castro, M. (2008). Fractal dimension applied to plant identification. *Information Sciences*, 178(12), 2722-2733.
- Cabral, T. M., & Rangayyan, R. M. (2012). Fractal analysis of breast masses in mammograms. *Synthesis Lectures on Biomedical Engineering*, 7(2), 1-118.

- Cabrera, R. J., Armas, F., & Granada, L. (2006). Producción de Bugambilia Bougainvillea spp. en Morelos. Ficha Técnica, 24.
- Cattaneo, C. A., Biasoni, E. M., Larcher, L. I., Ruggeri, A. I., & Khairallah, A. O. G. (2009). Aplicación de dimensión fractal al estudio de sistemas naturales. *Mecánica Computacional*, 28(24), 2021-2038.
- Cattaneo, C. A., Biasonia, E. M., Larchera, L. I., Ruggeria, A. I., & Gómez Khairallaha, A. O. (2009). Aplicación de dimensión fractal al estudio de sistemas naturales. *Mecánica Computacional*, 28, 2021-2038.
- Clarke, K. C. (1986). Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method. *Computers & Geosciences*, 12(5), 713-722.
- Collinson, M. E., Kurmann, M. H., & Hemsley, A. R. (1999). Evolution of angiosperm fruit and seed morphology and associated functional biology: Status in the late Cretaceous and Palaeogene. *The Evolution of Plant Architecture*: Royal Botanic Gardens, Kew, UK, 331-357.
- CONABIO [Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad]. 1998. La Diversidad Biológica de México: Estudio de País. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad, México D.F.
- Gagnepain, J. J., & Roques-Carmes, C. (1986). Fractal approach to two-dimensional and three-dimensional surface roughness. *wear*, 109(1-4), 119-126.
- Jiménez, J., Estrella, A. L., Esteban, F. J., Navas, J., Villoslada, P., & de Miras, J. R. (2013). La dimensión fractal en Imagen Médica: Desarrollos y nuevos retos. In *Proyectos de*

- investigación, 2010-2011 [Archivo de ordenador] (pp. 225-238). Servicio de Publicaciones.
- Jin, X. C., & Ong, S. H. (1995). A practical method for estimating fractal dimension. *Pattern Recognition Letters*, 16(5), 457-464.
- Judd, W. S., Campbell, C. S., Kellogg, E. A., Stevens, P. F., & Donoghue, M. J. (1999). Plant systematics: a phylogenetic approach. *ecologia mediterranea*, 25(2), 215.
- Keller, J. M., Chen, S., & Crownover, R. M. (1989). Texture description and segmentation through fractal geometry. *Computer Vision, Graphics, and image processing*, 45(2), 150-166.
- Larcher, W. (1995). *Physiological Plant Ecology*. Berlin, Heidelberg & New York.
- Lim K. T. 2014. *Edible Medicinal and Non-Medicinal Plants, Volume 8, Flowers*. Springer. New York. pp 483-489.
- Mayr, E. (1969). *Principles of systematic zoology*. Principles of systematic zoology.
- Nilsen, E. T., & Orcutt, D. M. (1996). *Physiology of plants under stress. Abiotic factors*. Physiology of plants under stress. Abiotic factors.
- Pastor, J., & Broschart, M. (1990). The spatial pattern of a northern conifer-hardwood landscape. *Landscape Ecology*, 4(1), 55-68.
- Peleg, S., Naor, J., Hartley, R., & Avnir, D. (1984). Multiple resolution texture analysis and classification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (4), 518-523.

- Machine Intell. 6, 661-674, 1984. Pentland, A. P. (1984). Fractal-based description of natural scenes. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, (6), 661-674.
- Pérez, P. M. (2005). Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal.
- Sarkar, N., & Chaudhuri, B. B. (1992). An efficient approach to estimate fractal dimension of textural images. Pattern recognition, 25(9), 1035-1041.
- Sarkar, N., & Chaudhuri, B. B. (1994). An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics, 24(1), 115-120.
- Solé, R. V., & Manrubia, S. C. (1995). Are rainforests self-organized in a critical state? Journal of Theoretical Biology, 173(1), 31-40.
- Sztojánov, I., Crisan, D., Mina, C. P., Voinea, V., & Chen, Y. (2009). Image processing in biology based on the fractal analysis. Image Proc. InTech, 323-344.
- Tambussi, E. A. (2005). Fotosíntesis, fotoprotección, productividad y estrés abiótico: algunos casos de estudio. Universitat de Barcelona.
- Voss, R. (1986). Random fractals: characterization and measurement Scaling Phenomena in Disordered Systems eds A Skjeltorp and R Pynn.