



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

“Caracterización de partituras desde la perspectiva de los sistemas complejos”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

JOSÉ ALFREDO GONZÁLEZ ESPINOZA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GUSTAVO MARTÍNEZ MEKLER

CUERNAVACA, MORELOS

AGOSTO, 2018



## LISTA DE JURADO

Los integrantes del jurado de revisión del presente trabajo fueron los siguientes:

- Presidente:  
Dr. Hernán Larralde Ridaura
- Secretario:  
Dr. Markus Müller Bender
- Vocales:  
Dr. Rubén Fossion  
Dr. Pablo Padilla Longoria  
Dr. Enrique Hernández Lemus
- Suplentes:  
Dr. Federico Vázquez Hurtado  
Dr. Gustavo Martínez Mekler



## LISTA DE PUBLICACIONES

Del presente trabajo se desprenden las siguientes publicaciones:

1. A. González-Espinoza, H. Larralde, G. Martínez-Mekler and M. Mueller. Multiple scaling behavior and nonlinear traits in music scores. *Royal Society Open Science*, 4(12), 2017.
2. A. González-Espinoza, H. Larralde and G. Martínez-Mekler. Identifying "meaningful" blocks in music scores. *En preparación*.



## RESUMEN

**E**n esta tesis se presenta un trabajo en su mayor parte empírico, sobre el análisis de partituras musicales desde la perspectiva de los sistemas complejos. El trabajo se resume en dos estudios con diferentes herramientas de análisis para caracterizar estadísticamente partituras de diferentes compositores y periodos.

En el primer estudio, se realiza una descripción detallada de la estructura de partituras de diferentes compositores mediante un análisis de fluctuaciones. Al representar las partituras como series temporales numéricas se calcula la invarianza de escala en sus fluctuaciones, encontrando perfiles caracterizados por sus correlaciones lineales que reflejan propiedades estructurales de las piezas, los cuales varían entre obras de diferentes épocas y de diferentes compositores. Después el estudio se extiende a explorar evidencia sobre correlaciones de naturaleza no lineal, algo que no se había reportado en la literatura previamente. Encontrando que además de que las correlaciones lineales aportan estructura necesaria para que una pieza sea agradable ante su audiencia, la existencia de correlaciones no lineales también podría jugar un papel importante en la percepción estética de las piezas musicales.

En el segundo estudio que se presenta en la tesis, se plantea una analogía entre el lenguaje musical y el lenguaje natural escrito. El lenguaje escrito ha sido caracterizado estadísticamente desde hace muchos años, la música a pesar de ser considerada un lenguaje universal no se ha reportado que muestre algunas de las propiedades estadísticas que en el lenguaje escrito se hacen presentes (p.e. ley de Zipf). Con base en esto, dentro de la analogía que se plantea, se propone una forma de identificar grupos de notas en las partituras, construyendo así un vocabulario que logra reproducir cualitativamente propiedades estadísticas del lenguaje escrito. Posteriormente se construye un modelo de "juguete", en el cual se propone una asociación entre estos bloques constitutivos, usándolos como ideas o conceptos musicales y se construye un mecanismo capaz de generar nuevas melodías que conservan propiedades de las piezas originales. Se intenta emular, en una primera aproximación, un elemento del proceso de composición musical.



## ABSTRACT

In this thesis, an analysis of music scores from a complex systems perspective is presented. The work is divided in two studies using different tools to analyze and characterize music scores from different composers and periods of time.

In the first part, a detailed description of the structure of different pieces with fluctuation analysis is done. Representing the music scores as numerical time series, a statistical analysis from different composers using detrended fluctuation analysis is presented. Different fluctuation profiles are found, these profiles correspond to distinct auto-correlation structures of the musical pieces. Further, evidence for the presence of nonlinear auto-correlations is revealed by estimating the detrended fluctuation analysis of the magnitude series, a result validated by a corresponding study of appropriate surrogate data. The amount and the character of nonlinear correlations vary from one composer to another. Finally, a simple experiment is presented in order to evaluate the pleasantness of the musical surrogate pieces in comparison with the original music and find that the structure given by the nonlinear correlations could play an important role in the aesthetic perception of a musical piece.

In the second part, an analogy between natural language and musical language is presented. Using the rank-frequency distribution of intervals in a pitch sequence, a variation of the visibility graph algorithm to identify motifs in a time series is proposed. The motifs (or blocks of intervals) reproduce qualitatively statistical properties of written text (Zipf and Heaps laws). Finally, using the motifs as concepts or ideas represented as nodes in a network, a reinforced random walk model for generating new melodies is presented. These generated melodies preserve statistical properties of the original melody. The model proposed attempts to emulate, in a first approximation, an element in the creative process of musical composition.



## AGRADECIMIENTOS

Antes que todos quiero agradecer a mis padres que siempre me han apoyado académicamente, gracias a ellos nunca me ha hecho falta nada y son los principales en mi motivación para seguir adelante en mi vida personal y académica.

A mi asesor y amigo Gustavo, quien a pesar de que sabía que el tema de mi doctorado no iba a ser sencillo, decidió aventurarse y siempre tuvo confianza en mi y en el proyecto.

A mi comité tutorial, en particular a los doctores Hernán Larralde y Markus Müller por todos los consejos, las discusiones y su paciencia en nuestras reuniones de trabajo, sus aportaciones fueron vitales para la consolidación de esta tesis.

A los doctores Rubén Fossion, Enrique Hernández, Pablo Padilla y Federico Vázquez por aceptar ser parte del jurado de mi tesis, por sus valiosos comentarios y correcciones.

A mis compañeros Daniel y Martín, siempre aportando excelentes comentarios en nuestras discusiones de grupo y de café.

A CoNaCyT por otorgarme la beca No.258226 durante mis estudios de doctorado.

Finalmente, quiero agradecer a la comunidad del Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM campus Morelos, difícilmente puedo imaginar un mejor ambiente de trabajo. A la máquina de café que casi siempre estuvo disponible todos estos años cuando quería despertar o simplemente disfrutar de un buen espresso.



# ÍNDICE

|   | <b>Página</b> |
|---|---------------|
| <b>1 Introducción</b>   | <b>1</b>      |
| <b>2 Conceptos preliminares</b>   | <b>5</b>      |
| 2.1 Leyes de potencia . . . . .   | 5             |
| 2.1.1 Universalidad en las leyes de potencia . . . . .                                  | 6             |
| 2.1.2 Distribución rango-frecuencia . . . . .   | 6             |
| 2.2 Procesos estocásticos . . . . .   | 7             |
| 2.2.1 Caminatas aleatorias y procesos de Markov . . . . .                               | 9             |
| 2.2.2 Grafos (redes) . . . . .  | 11            |
| 2.3 Análisis de series de tiempo . . . . .  | 13            |
| 2.3.1 Función de correlación . . . . .  | 13            |
| 2.3.2 Espectro de potencias . . . . .   | 14            |
| 2.3.3 Análisis de fluctuaciones . . . . .   | 14            |
| 2.3.4 Algoritmo de visibilidad . . . . .  | 17            |
| <b>3 Escalamiento y no linealidad en partituras</b>                                     | <b>19</b>     |
| 3.1 Partituras como series de tiempo . . . . .  | 20            |
| 3.1.1 Selección de partituras . . . . .   | 22            |
| 3.2 Escalamiento en correlaciones lineales . . . . .                                    | 22            |
| 3.2.1 Invarianza de escala en la función $F(s)$ . . . . .                               | 25            |
| 3.2.2 <i>Crossover</i> en la función $\log(F(s))$ . . . . .                             | 26            |
| 3.3 Correlaciones no lineales . . . . .   | 29            |
| 3.3.1 Prueba de no linealidad . . . . .   | 29            |
| 3.3.2 El gusto por la regularidad no lineal . . . . .                                   | 32            |
| <b>4 Identificación de bloques constitutivos y construcción de melodías con memoria</b> | <b>37</b>     |
| 4.1 Bloques constitutivos . . . . .   | 37            |
| 4.1.1 Serie de intervalos . . . . .   | 38            |
| 4.1.2 Algoritmo de visibilidad en serie de rangos . . . . .                             | 39            |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.1.3    | Distribuciones de bloques . . . . .                   | 40        |
| 4.2      | Melodías con memoria . . . . .                        | 47        |
| 4.2.1    | Caminatas aleatorias con memoria . . . . .            | 48        |
| 4.2.2    | Caminata sobre <i>ideas musicales</i> . . . . .       | 49        |
| <b>5</b> | <b>Conclusiones</b>                                   | <b>55</b> |
| 5.1      | Sobre leyes de potencia y no linealidad . . . . .     | 55        |
| 5.2      | La música y el lenguaje natural . . . . .             | 56        |
| 5.3      | Perspectivas y trabajo a futuro . . . . .             | 57        |
| <b>A</b> |   | <b>59</b> |
| A.1      | Escalamiento y no linealidad . . . . .                | 59        |
| A.1.1    | Construcción de las series de tiempo . . . . .        | 60        |
| A.2      | Espectro de potencias de la serie de rangos . . . . . | 65        |
| A.3      | Bloques constitutivos . . . . .                       | 65        |
| <b>B</b> | <b>Definiciones musicales</b>                         | <b>71</b> |
|          | <b>Bibliografía</b>                                   | <b>75</b> |

## INTRODUCCIÓN

**E**l arte y la ciencia están más relacionados de lo que posiblemente piensa la mayoría de las personas. Las dos disciplinas comparten algo en común, utilizan la curiosidad como motivación y el objetivo de las dos puede ser interpretado como el mismo: describir y entender la naturaleza, interpretar la realidad o lo que conocemos como ésta. Tal vez tengan metodologías, lenguaje y audiencia diferentes, pero la motivación y el objetivo son similares. Un ejemplo en el que la ciencia y el arte describen de forma precisa un fenómeno natural es el de la turbulencia, algunos cuadros de Vincent Van Gogh de principios del siglo XX lo describen exitosamente[1], fenómeno caótico que la ciencia no pudo describir con precisión hasta la década de 1960. El hecho de que el conocimiento artístico pudiese preceder al conocimiento científico no es extraño, el arte islámico en las mezquitas o la pintura de *la gran ola* de Hokusai describían propiedades fractales presentes en la naturaleza mucho antes de que la ciencia pudiera hacerlo. El caso de la música no es la excepción, puesto que J.S. Bach en sus piezas describía propiedades de elementos fractales[2] en el siglo XVII. Los conceptos de fractalidad y caos surgieron desde las matemáticas en sistemas dinámicos y son propiedades que suelen estar presentes en los sistemas complejos.

No existe una definición formal de un sistema complejo, sin embargo es posible identificarlo a través de características propias de éste. Comúnmente un sistema complejo está conformado por un gran número de elementos, éstos elementos pueden estar estructurados de manera jerárquica (tener estructuras a diferentes escalas). Generalmente las interacciones entre sus componentes son de naturaleza no lineal, es decir, el efecto en las interacciones no es proporcional a su causa. A pesar de que éstas interacciones puedan ser expresadas de manera sencilla, en conjunto, el sistema presenta propiedades emergentes que no son triviales o no podrían ser explicadas a partir de la descripción de comportamientos individuales, las propiedades emergentes son producto de un

sistema que se organiza, de un conjunto de componentes que actúan colectivamente. Finalmente, una de las características más importantes que suelen identificarse en un sistema complejo es la multifactorialidad, la dependencia de un proceso de múltiples causas que incluso pueden provenir de diferentes niveles de organización, aunque no cuestiona la causalidad, si puede dar lugar a comportamientos totalmente inesperados. Definir y entender las "leyes de organización" que están detrás de éstos fenómenos es el objetivo principal de los sistemas complejos.

Algunos ejemplos puntuales de sistemas complejos son las bases que en algún momento se organizaron para formar la estructura de doble hélice en el ADN, el conjunto de células en el corazón que se organizan para bombear sangre al cuerpo, un grupo grande de peces o aves que se mueve colectivamente formando patrones globales, un grupo de personas que se organiza para formar una sociedad, grupos de planetas o estrellas que se organizan para conformar galaxias. Las propiedades emergentes son expresiones de auto organización dentro de los sistemas complejos, las cuales se manifiestan a muchas escalas.

Dentro de este contexto, el arte, en particular la música, es un fenómeno emergente que se manifiesta a diferentes escalas: cultural, social e individual. El estudio de la música desde la perspectiva de los sistemas complejos es muy importante porque puede ayudarnos a comprender comportamientos colectivos relacionados con la ejecución, interpretación o percepción musical, así como aportar al entendimiento de cómo funciona uno de los sistemas complejos menos entendidos: el cerebro. Se sabe que el cerebro está conformado por neuronas que interactúan por medio de enlaces químico-eléctricos conocidos como sinapsis y que este órgano, constituido por millones de neuronas conectadas, genera fenómenos como el del pensamiento, la conciencia, las emociones, la creatividad o el arte. Definir y entender los fenómenos como el pensamiento o la creatividad directamente del sistema es una de las fronteras actuales de la ciencia. La música a diferencia de otros fenómenos, tiene propiedades que pueden medirse y caracterizarse cuantitativamente. Esto la convierte en un objeto de estudio de gran interés, puesto que entender mejor las propiedades estadísticas de la música puede acercarnos a vislumbrar características de procesos cognitivos y ayudarnos a tener una mejor comprensión de éstos.

La música a nivel individual también involucra muchos factores, por esto, esta tesis no se enfoca en el fenómeno musical individual completo, se enfoca en lo que se puede considerar lo más cercano a las ideas que un compositor genera, que son sus partituras. En una partitura se encuentra representada toda la información que un compositor quiso expresar para que después sea interpretada musicalmente.

La estructura de la tesis está conformada por cuatro capítulos: un capítulo de conceptos preliminares, en donde se explican y se describen algunos conceptos de física estadística y sistemas complejos que se utilizan a lo largo de la tesis. Después se continúa con dos capítulos, en cada uno de ellos se presenta un estudio de caracterización de partituras con diferentes enfoques.

En el primer estudio, se realiza una descripción detallada de la estructura de partituras de diferentes compositores mediante un análisis de fluctuaciones. Al representar las partituras como

---

series temporales numéricas se calcula la invarianza de escala en sus fluctuaciones, encontrando perfiles caracterizados por sus correlaciones lineales que reflejan propiedades estructurales de las piezas, los cuales varían entre obras de diferentes épocas y de diferentes compositores. Después el estudio se extiende a explorar evidencia sobre correlaciones de naturaleza no lineal, algo que no se había reportado en la literatura previamente. Encontrando que además de que las correlaciones lineales aportan estructura necesaria para que una pieza sea agradable ante su audiencia, la existencia de correlaciones no lineales también podría jugar un papel importante en la percepción estética de las piezas musicales.

En el segundo estudio que se presenta en la tesis, se plantea una analogía entre el lenguaje musical y el lenguaje natural escrito. El lenguaje escrito ha sido caracterizado estadísticamente desde hace muchos años, la música a pesar de ser considerada un lenguaje universal no se ha reportado que muestre algunas de las propiedades estadísticas que en el lenguaje escrito se hacen presentes (p.e. ley de Zipf). Con base en esto, dentro de la analogía que se plantea, se propone una forma de identificar grupos de notas en las partituras, construyendo así un vocabulario que logra reproducir cualitativamente propiedades estadísticas del lenguaje escrito. Posteriormente se construye un modelo de "juguete", en el cual se propone una asociación entre estos bloques constitutivos, usándolos como ideas o conceptos musicales y se construye un mecanismo capaz de generar nuevas melodías que conservan propiedades de las piezas originales. Se intenta emular, en una primera aproximación, un elemento del proceso de composición musical.

En el último capítulo se presentan las conclusiones de todo el trabajo contenido en la tesis, junto con una perspectiva a futuro.



## CONCEPTOS PRELIMINARES

**E**n el presente capítulo se revisan algunos conceptos que serán utilizados en el desarrollo de la tesis, entre los temas están: leyes de potencia, análisis de series de tiempo y procesos estocásticos, con el propósito de contribuir a una mejor comprensión de los siguientes capítulos.

## 2.1 Leyes de potencia

Las *leyes de potencia* son relaciones funcionales entre dos cantidades que se pueden expresar de la forma:

$$(2.1) \quad f(x) = cx^\alpha,$$

donde  $c$  y  $\alpha$  son constantes. Una de las propiedades de las leyes de potencia es que presentan invarianza de escala (escalamiento), es decir, si se multiplica el argumento por una constante, la función resultante es directamente proporcional a la función original:

$$f(ax) = c(ax)^\alpha = a^\alpha f(x) \propto f(x).$$

Este tipo de relación resulta más sencilla de identificar si se construye su gráfica en una escala log-log, ya que su comportamiento se vuelve lineal:  $\log(cx^\alpha) = a \log(cx)$ , con  $a$  como su pendiente (ver fig 2.1)

La invarianza de escala también se presenta como auto-similitud, propiedad de objetos abstractos conocidos como *fractales*, en los cuales el objeto completo es exactamente o aproximadamente similar a una parte del mismo.

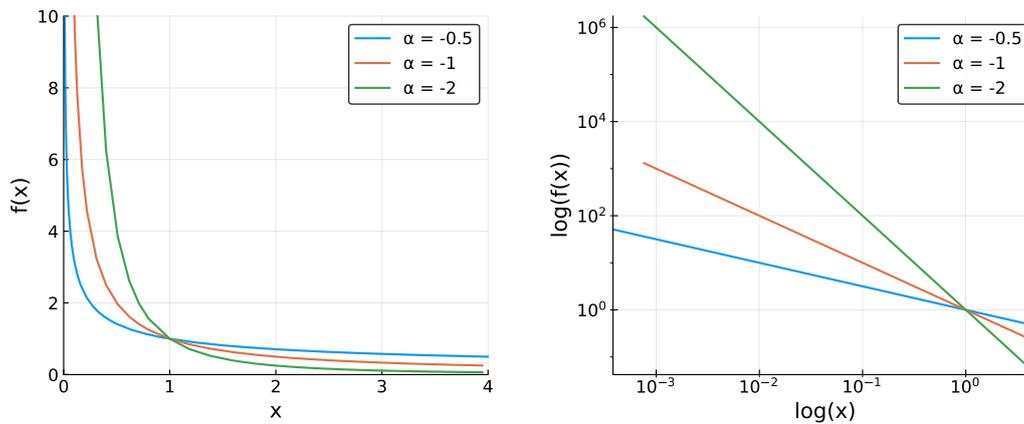


Figura 2.1: Ejemplos de leyes de potencia con diferentes valores para el exponente  $\alpha$ . La gráfica izquierda es lineal, mientras que la gráfica derecha es log-log.

### 2.1.1 Universalidad en las leyes de potencia

Esta relación matemática en forma de ley de potencia se presenta en muchos sistemas de la naturaleza. En física estadística uno de los ejemplos más conocidos es el de la magnetización de un material ferromagnético. En este caso, el sistema presenta una transición de fase (de no magnetizado a magnetizado), cambia sus propiedades de forma dramática ante la modificación de un parámetro. Cuando el sistema alcanza cierta temperatura  $T_c$  conocida como temperatura crítica, se dice que el sistema se encuentra en un *punto crítico*, un punto "intermedio" en el que las dos fases coexisten, y alrededor de este punto, el comportamiento de algunas de sus propiedades físicas sigue leyes de potencia. En el material ferromagnético la propiedad física que se comporta como una ley de potencia en la temperatura crítica es la función de correlación ( $C(r)$ ) de los espines de sus átomos (ver figura 2.2).

Si bien es cierto que los sistemas que se encuentran en un punto crítico exhiben leyes de potencia, esto no siempre sucede al revés, la evidencia de una ley de potencia en propiedades de un sistema no necesariamente indica éste se encuentre cerca o en un punto crítico.

Existe una gran cantidad de ejemplos empíricos que presentan leyes de potencia en sistemas muy diversos de física, biología y ciencias sociales (ver fig 2.3).

### 2.1.2 Distribución rango-frecuencia

La distribución rango-frecuencia(o tamaño) de un conjunto es el ordenamiento decreciente en rango contra el número de apariciones (frecuencia) o el tamaño de sus elementos. El rango mayor se representa con 1 (siendo el elemento con más apariciones o el de mayor tamaño) y el último rango con  $N$  (número de elementos diferentes en el conjunto). Uno de los primeros estudios y quizá el ejemplo más conocido es el realizado por el lingüista George Zipf en 1935 [4], quien

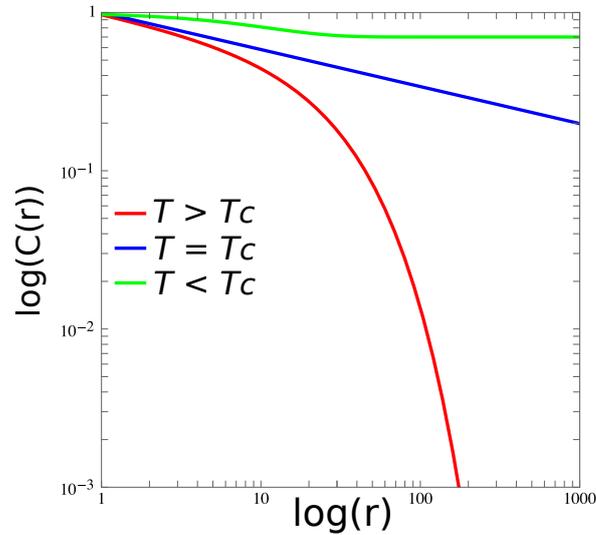


Figura 2.2: Gráfica log-log de la función de correlación de los espines con respecto a su distancia  $r$ . Se muestran tres diferentes casos para la temperatura:  $T > T_c$ ,  $T = T_c$  y  $T < T_c$ .

encontró que la distribución rango-frecuencia de palabras en un *corpus*<sup>1</sup> de texto seguía una ley de potencia  $F(r) \sim r^\alpha$  con  $\alpha \approx -1$  (ver fig. 2.4-(a)). La ley de potencia encontrada por Zipf se cumple para todos los lenguajes naturales (incluso para algunos "artificiales" como el esperanto) y es conocida como *ley de Zipf*. Un gran número de distribuciones rango-frecuencia de diferentes sistemas exhiben leyes de potencia similares a la ley de Zipf (ver fig. 2.4).

Como se puede observar en la figura 2.4, la ley de Zipf no siempre se cumple sobre todos los valores de rango, además de un problema de tamaño finito, existen diferentes supuestos que intentan explicar esta falta de ley de potencia, así como variantes en la forma de la distribución rango-frecuencia, como lo son la de Mandelbrot[6]:  $F(r) = \left[ \frac{V+\rho}{r+\rho} \right]^{1+\epsilon}$ , donde  $V$  es el *vocabulario* (número de elementos diferentes) y  $\rho$  y  $\epsilon$  son parámetros ajustables. Otra variante es la propuesta mencionada por Popescu [7] y generalizada o extendida por Miramontes et al.[8]:  $F(r) = K \frac{(N+1-r)^\beta}{r^\alpha}$  donde  $K$  es una constante de normalización,  $N$  es el número de elementos diferentes (vocabulario) y  $\alpha$  y  $\beta$  dos parámetros ajustables. En ésta última, se plantea un balance entre eventos comunes (muy frecuentes) y eventos raros (poco frecuentes) dando origen dos exponentes diferentes  $\alpha$  y  $\beta$  [9].

## 2.2 Procesos estocásticos

En probabilidad y estadística, una variable aleatoria o variable estocástica  $X$  es una variable (discreta o continua) que puede obtener valores dentro de un conjunto de forma *azarosa*. Ejemplos sencillos de variables aleatorias discretas son tirar una moneda o un dado, en el caso de la

<sup>1</sup>Corpus se refiere al cuerpo, en este caso es a la muestra, ya sea una obra completa o varias obras.

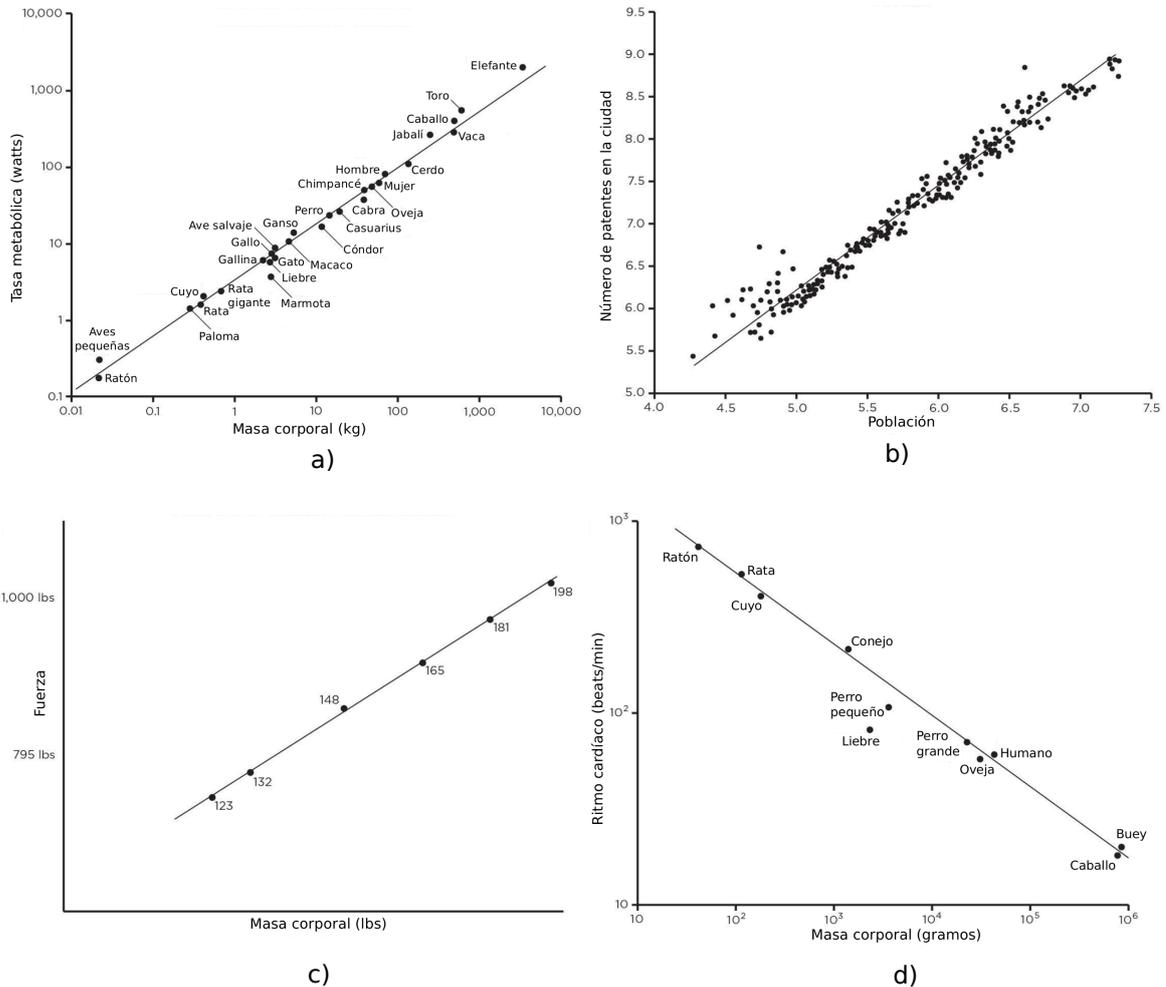


Figura 2.3: Gráficas log-log de ejemplos de leyes de potencia en diferentes sistemas. a) Masa corporal vs tasa metabólica en animales, b) Población vs número de patentes en la ciudad, c) masa corporal vs fuerza de los campeones mundiales en levantamiento de pesas, d) masa corporal vs ritmo cardíaco en animales. Imágenes adaptadas del libro [3].

moneda, ésta puede obtener su valor dentro del conjunto  $\{cara, cruz\}$  y en el caso del dado su valor estaría dentro del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . En estos casos la distribución es uniforme, es decir, la probabilidad de que  $X$  tome cualquier valor es la misma  $p = 1/N_s$ , con  $N_s$  el número de estados.

Un proceso estocástico es definido como una colección ordenada de variables aleatorias  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Tomando como ejemplo una moneda, un proceso estocástico sería tirar la moneda  $N$  veces (proceso de Bernoulli). Los procesos estocásticos han sido utilizados ampliamente en la física estadística y sistemas complejos para la modelación de diversos sistemas debido a su efectividad al reproducir su comportamiento. Esto nos da una idea de que la estocasticidad juega un papel importante en muchos procesos de la naturaleza.

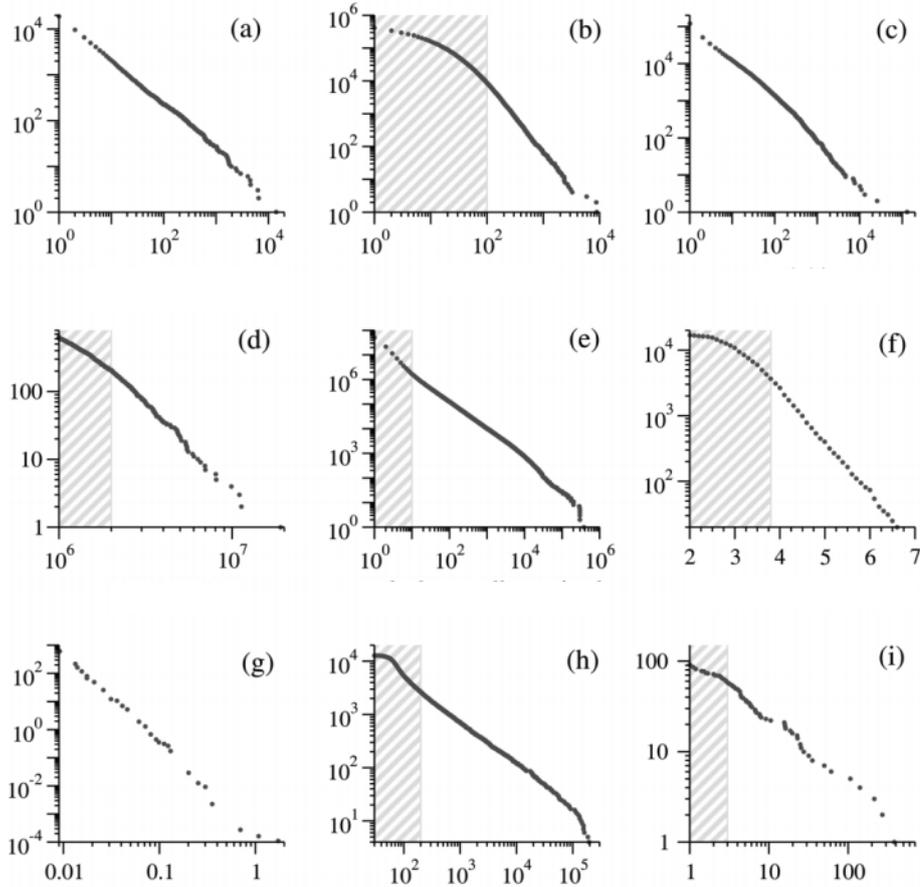


Figura 2.4: Gráficas log-log de ejemplos de leyes de potencia en distribuciones rango-frecuencia de diferentes sistemas. (a) Frecuencia de palabras en la novela *Moby Dick* de Hermann Melville, (b) número de citas en artículos científicos publicados de 1981 a 1997, (c) número de visitas de sitios web por 60,000 usuarios del servicio americano de internet el día 1 de Diciembre de 1997, (d) número de copias vendidas de libros *bestseller* en US entre 1895 y 1965, (e) número de llamadas recibidas por clientes telefónicos de AT&T en un sólo día, (f) magnitud de terremotos ocurridos en California entre 1910 y 1992, (g) diámetro de los cráteres en la luna, (h) intensidad máxima de rayos gamma de las erupciones solares en conteos por segundo, medidos desde la órbita terrestre entre febrero de 1980 y noviembre de 1989, (i) intensidad de las guerras desde 1816 hasta 1980, medida como muertes de batalla por cada 10000 habitantes de la población de los países participantes. Las zonas grises no son tomadas en cuenta a la hora de estimar la ley de potencia. Gráficas modificadas de [5]

### 2.2.1 Caminatas aleatorias y procesos de Markov

Otro ejemplo de proceso estocástico es el de una caminata aleatoria, éste proceso describe un camino que consiste en la sucesión de "pasos" aleatorios. El ejemplo más sencillo es una caminata aleatoria en una dimensión, donde los estados son el conjunto de números enteros  $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Tomando  $X_n = x_1, \dots, x_n$  como una secuencia de variables aleatorias con

$P(x_i = 1) = p$  y  $P(x_i = -1) = 1 - p$ , se define la caminata como  $Y_n = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Un ejemplo de este proceso se muestra en la figura 2.5, donde se construye la gráfica de una sola realización de  $Y$ . Desde luego este ejemplo no es el más interesante dentro de las caminatas aleatorias, con diferentes dinámicas y en mayores dimensiones, las caminatas aleatorias han servido para modelar desde el movimiento de moléculas (movimiento Browniano) hasta el movimiento de algunos organismos multicelulares (caminatas persistentes, vuelos de Lévy).

Un proceso de Markov es un proceso estocástico para el cual su principal característica es la

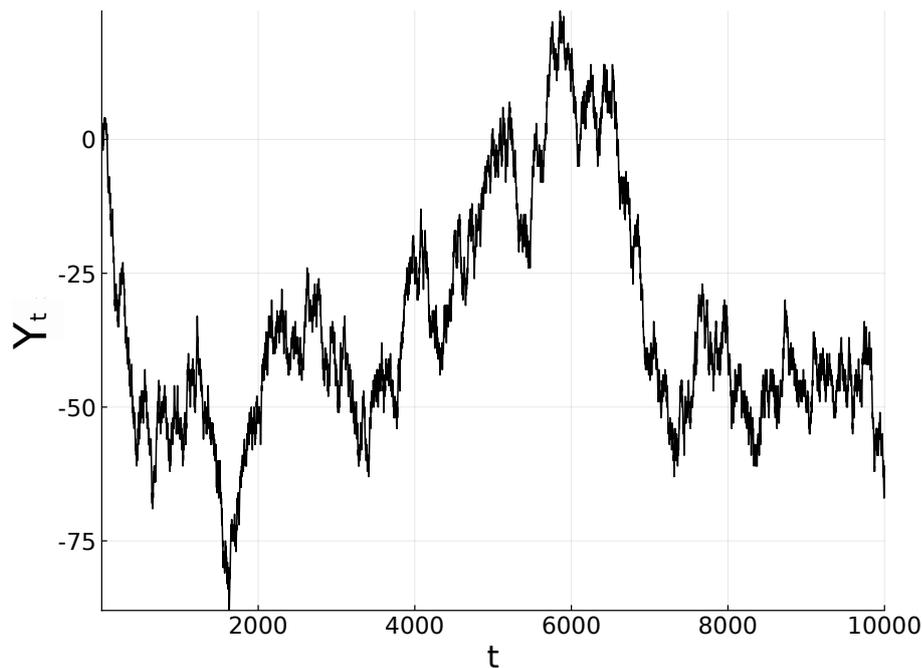


Figura 2.5: Ejemplo de una realización de una caminata aleatoria de 10000 pasos, con  $p = 1/2$  y la condición inicial  $Y_0 = 0$ .

"falta de memoria", es decir, para saber el estado  $Y_{t+1}$  basta con saber el estado anterior  $Y_t$ , no es necesario saber todo el historial  $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_t\}$ . Bajo esta descripción, la caminata aleatoria mencionada previamente es un proceso de Markov, donde la probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$  se escribe como:

$$p(j|i) = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1, \\ q, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

así, sólo basta con saber el estado  $i$  para conocer la probabilidad de estar en el estado  $j$  al siguiente paso de tiempo.

De forma general, un proceso de Markov se representa con una matriz de transición  $P$  y un vector de estados  $\vec{x}$ . La matriz de transición generalmente está normalizada (sus renglones suman 1) y

sus entradas  $P_{ij}$  contienen la probabilidad de ir del estado  $i$  al estado  $j$ .

La expresión algebraica para la distribución de probabilidad de los estados al tiempo  $t + 1$  se escribe como:

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{x}_t P,$$

por su definición, sabemos que  $\vec{x}_t = \vec{x}_{t-1} P$ , sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos la expresión  $\vec{x}_{t+1} = \vec{x}_{t-1} P^2$ , esto quiere decir que teniendo una condición inicial  $\vec{x}_0$  podemos saber la distribución de probabilidad de estados elevando la matriz de transición al tiempo que nos interesa:  $\vec{x}_n = \vec{x}_0 P^n$ . La aplicación de los procesos de Markov es muy amplia en el desarrollo de modelos y simulaciones de diversos sistemas de mecánica estadística, reacciones químicas, macroeconomía, biología matemática, ciencias sociales, teoría de juegos y composición algorítmica en música.

### 2.2.2 Grafos (redes)

Diversos sistemas pueden ser representados a través de un grafo, formalmente un grafo está definido como una pareja ordenada  $G = (V, E)$ , en la que  $V$  es un conjunto no vacío de vértices (o nodos) y  $E$  es un conjunto de aristas (o enlaces). Su versatilidad en representación y aplicación han hecho que la teoría de grafos se utilice mucho en los últimos años para caracterizar y modelar sistemas naturales. La forma de construir un grafo asociado a un sistema puede llegar a ser muy arbitraria debido a que el criterio para conectar nodos depende del tipo de relación que se pretende estudiar. Un ejemplo sencillo de una construcción de un grafo a partir de un sistema real es el de una red de cómputo local, en este caso los nodos representan a las computadoras y enlaces (aristas) del grafo representan a los cables de red que conectan una computadora con otra. La forma expresar formalmente como está conectado el grafo es mediante una matriz de adyacencia  $A$ , la cual tiene como entradas 0's y 1's, si el nodo  $i$  está conectado con el nodo  $j$  entonces  $A_{ij} = 1$ , si no están conectados  $A_{ij} = 0$ . Cuando los enlaces no tienen una dirección se conoce como una red no dirigida, esto hace que su matriz de adyacencia sea simétrica ( $A_{ij} = A_{ji}$ ), caso opuesto a la red dirigida, la cual su matriz no necesariamente es simétrica y es importante la dirección del enlace (ver figura 2.6). El mapeo de un proceso markoviano a un grafo dirigido es directo ya que basta con saber la matriz de transición para utilizarla como una matriz de adyacencia de los nodos del grafo, los estados del proceso representados por nodos y sus transiciones por vértices (ver figura 2.7). En otras palabras, una caminata aleatoria sobre los nodos de un grafo es un proceso markoviano (definida una matriz de transición independiente del tiempo).

Al número de enlaces que tiene un nodo se le conoce como grado ( $k$ ), la distribución de grado ( $P(k)$ ) es una de las principales características de los grafos. En grafos construidos a partir de sistemas reales también se han encontrado leyes de potencia, en este caso en las distribuciones de grado  $P(k) \sim k^\gamma$ , donde generalmente  $2 < \gamma < 3$ , estos grafos que presentan una ley de potencia

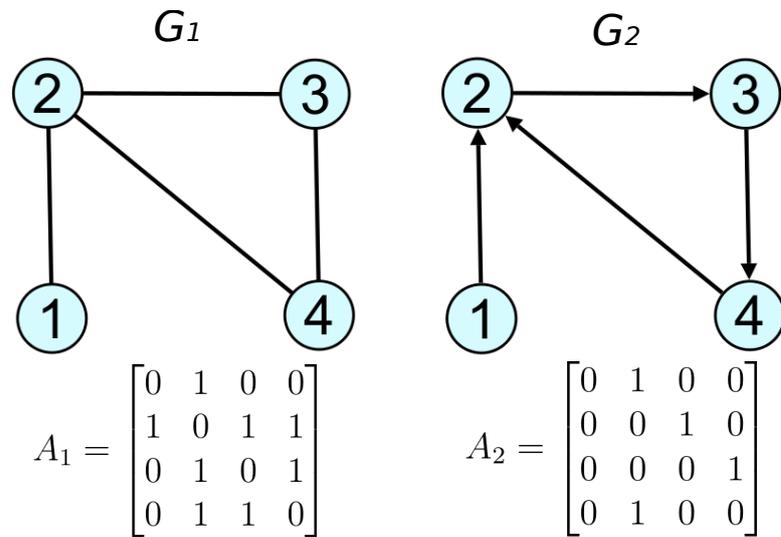


Figura 2.6: Dos ejemplos de grafos,  $G_1$  es un grafo no dirigido con su matriz de adyacencia  $A_1$  (símtrica por definición),  $G_2$  es un grafo dirigido y su matriz de adyacencia  $A_2$  la cual no necesariamente es simétrica.

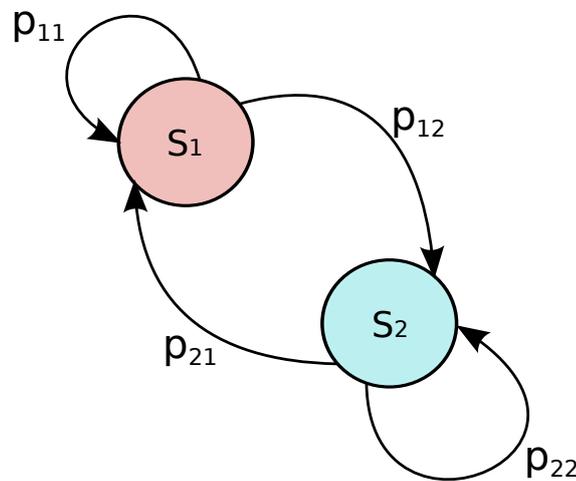


Figura 2.7: Representación en un grafo de un proceso de Markov de 2 estados, con una matriz de transición  $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ .

en su distribución de grado son conocidos como grafos (redes) libres de escala.

## 2.3 Análisis de series de tiempo

Una serie de tiempo es un conjunto de datos ordenados temporalmente ( $X(t) = \{x_{t=1}, x_{t=2}, \dots, x_{t=N}\}$ ), los datos pueden ser simbólicos o numéricos. El estudio de series de tiempo es de gran importancia en la ciencia debido a que muchos de los datos empíricos que podemos obtener para estudiar la naturaleza se encuentran en forma de series temporales, tales como señales o mediciones en un laboratorio o de campo. El entendimiento de las propiedades de las series contribuye no sólo a una clasificación si no también a la identificación y comprensión del proceso involucrado en la generación de los datos, así como la posibilidad de hacer predicciones (valores de datos a futuro). Al ser tan extensa la teoría para análisis de series de tiempo, esta sección sólo tratará de correlaciones y fractalidad en una serie de tiempo que es lo utilizado en gran parte de esta tesis.

### 2.3.1 Función de correlación

El concepto de correlación en estadística suele ser interpretado como dependencia o asociación entre dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . La medida de correlación comúnmente utilizada es la del coeficiente de Pearson, definido como la covarianza de las dos variables sobre el producto de sus desviaciones estándar:

$$(2.2) \quad \rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

es posible calcular la correlación entre dos series de tiempo en función de un retraso  $\tau$ , su forma discreta es expresada como:

$$(2.3) \quad C_{X,Y}(\tau) = \sum_{i=1}^{n-\tau} \frac{(X_i - \mu_X)(Y_{i+\tau} - \mu_Y)}{(n-\tau)\sigma_X\sigma_Y},$$

donde  $\mu_X$  y  $\mu_Y$  son las medias de  $X$  y  $Y$  respectivamente. Cabe mencionar que la función de correlación para dos variables aleatorias (también llamada *correlación cruzada*) no necesariamente es simétrica, la dirección en la que se calcula es importante. Si bien, la dependencia o asociación no es estrictamente interpretada como causalidad, la interpretación de la función de correlación cruzada puede entenderse como "similitud". La función de correlación cruzada  $C_{X,Y}(\tau)$ , por su definición, puede tomar valores de  $-1$  a  $1$ . Cuando  $C_{X,Y}(\tau) > 0$  las series están correlacionadas positivamente, "se parecen" o "se comportan de forma similar" en el retraso  $\tau$ . En el caso de que  $C_{X,Y}(\tau) < 0$  las series están correlacionadas negativamente (anti-correlacionadas), se comportan de forma opuesta en el retraso  $\tau$ , mientras que en el caso en que  $C_{X,Y}(\tau) = 0$  las series de tiempo no están correlacionadas (descorrelacionadas) al retraso  $\tau$ .

La función de correlación ( $C_{X,Y}$ ) para el caso en el que  $X = Y$  se conoce como auto-correlación y también es de utilidad para estudiar series de tiempo ya que su valor es indicativo de la existencia de patrones o regularidades. Por su definición, para  $\tau = 0$ , siempre se cumple que  $C_{X,X}(0) = 1$  (la serie es idéntica a ella misma), con forme  $\tau$  aumenta el valor de la función disminuye. En caso en el que la función de correlación sea invariante de escala, ésta sigue una ley de potencia de la forma  $C(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$ .

### 2.3.2 Espectro de potencias

El espectro de potencias de una señal (o serie) es una función matemática que describe la forma en la que está distribuída la "relevancia" de la señal sobre las distintas frecuencias de las que está formada. El espectro de potencias de una serie de tiempo  $X(t)$  se define como:

$$(2.4) \quad S(f) = |\hat{X}(f)|^2,$$

donde  $\hat{X}(f)$  es la transformada de Fourier de la serie de tiempo  $X(t)$ :

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f t} X(t) dt,$$

al computar la transformada de Fourier de una serie de datos ( $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ ), se utiliza su forma discreta:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

El espectro de potencias tiene una amplia aplicación en diferentes disciplinas, en el caso de series de tiempo es útil para identificar patrones que se repiten a lo largo de esta.

El espectro de potencias y la función de autocorrelación pueden relacionarse por medio del teorema de Wiener-Khinchin[10]:

$$(2.5) \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau,$$

Esto quiere decir que si la función de autocorrelación sigue una ley de potencias, el espectro de potencias también lo hace:  $S(f) \sim f^{-\beta}$ , con los dos exponentes relacionándose de la forma:

$$\gamma = 1 - \beta.$$

### 2.3.3 Análisis de fluctuaciones

Así como existe la auto-similitud en objetos abstractos, ésta también puede ser identificada en series de tiempo. Un proceso dependiente del tiempo  $y(t)$ , es auto-similar si se cumple que

$$y(t) \stackrel{d}{=} a^\alpha y\left(\frac{t}{a}\right),$$

donde  $\stackrel{d}{=}$  indica que las propiedades estadísticas de los dos lados de la ecuación son idénticas, es decir, un proceso auto-similar  $y(t)$  con un parámetro  $\alpha$  tiene una distribución de probabilidad idéntica al proceso re-escalado  $a^\alpha y(t/a)$ . El exponente  $\alpha$  es un *parámetro de auto-similitud*.

En la práctica es imposible determinar si dos procesos son estadísticamente idénticos (todos los momentos de la distribución tienen que ser iguales), sin embargo se puede establecer un criterio menos estricto al comparar sólo los dos primeros momentos (media y varianza). Tomando como ejemplo la serie de tiempo en la figura 2.8, podemos estimar el parámetro  $\alpha$  considerando dos escalas en los dos ejes, siendo  $s_1$  el tamaño en el tiempo de la magnificación (cambio de

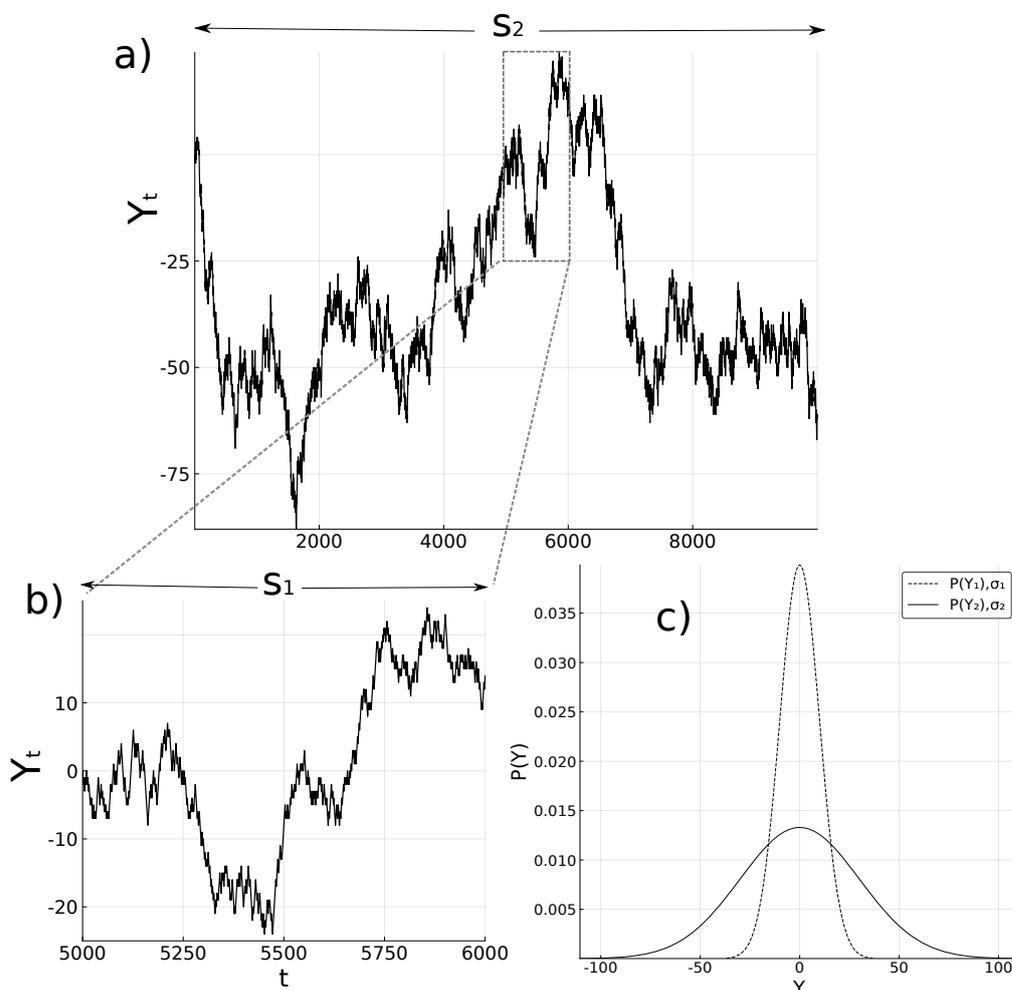


Figura 2.8: Ejemplo de la magnificación de una serie de tiempo  $Y_t$ : a) serie de tiempo original de tamaño  $s_2$ , b) ventana de la serie de tiempo original de tamaño  $s_1$ , c) distribuciones de probabilidad de los valores de  $Y_t$  en las diferentes ventanas  $s_1$  y  $s_2$ .

escala) y  $s_2$  el de la serie original. Las distribuciones de estas dos ventanas pueden compararse mediante sus desviaciones estándar ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). Para estimar  $\alpha$  se construye la gráfica en log-log de la varianza en función del tamaño de ventana (ver figura 2.9), siendo  $\alpha$  la pendiente de la recta:

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{\log(\sigma_2) - \log(\sigma_1)}{\log(s_2) - \log(s_1)}.$$

Por supuesto que dos puntos son suficientes para construir una recta. Para una estimación del parámetro  $\alpha$  en casos reales, la serie se divide en ventanas de igual tamaño  $s$  y se promedian sus varianzas, modificando el tamaño de  $s$  para cada estimación de varianza se obtiene un comportamiento de ésta en función del tamaño de las ventanas, si las desviaciones estándar siguen una ley de potencia se comporta de la forma:  $\sigma(s) \sim s^\alpha$ .

El problema de la forma de estimar  $\alpha$  como se mencionó previamente, es que para un proceso

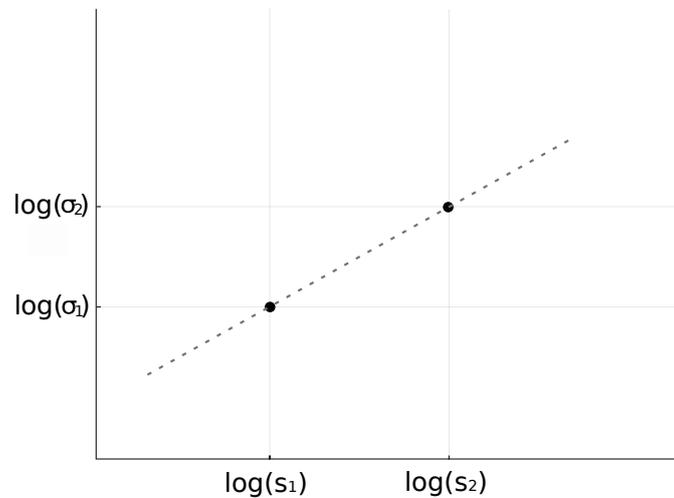


Figura 2.9: Gráfica log-log de las varianzas  $(\sigma_1, \sigma_2)$  con respecto al tamaño de ventanas  $(s_1, s_2)$ , la pendiente corresponde al valor de  $\alpha$  en la ecuación 2.6

auto-similar (cuando  $\alpha > 0$ ), las fluctuaciones (varianza) crecen con respecto al tamaño de la ventana en forma de ley de potencia. Esto indica que la serie de tiempo no debe ser acotada, sin embargo esto no pasa en la práctica ya que la mayoría de las series de tiempo en el mundo real (p.e. señales fisiológicas) son acotadas. La solución a este problema consiste en estudiar las propiedades fractales de la acumulada de la serie de tiempo (la serie integrada o su caminata aleatoria asociada), en lugar de la serie original.

El método "*detrended fluctuation analysis*" (DFA) fue desarrollado por Peng et al.[11] para estudiar la fractalidad o correlaciones de largo alcance en secuencias de ADN, después su aplicación se extendió a muchos otros sistemas. El método es similar a la estimación del exponente  $\alpha$  mencionada previamente y se puede resumir en los siguientes pasos:

1. La serie de tiempo  $x(t)$  se integra de la forma:  $y(j) = \sum_{i=1}^j [x(i) - \langle x \rangle]$ , donde  $\langle x \rangle$  es la media.
2. La serie integrada  $y(j)$  se divide en ventanas de igual tamaño  $s$ .
3. Dentro de cada una de las ventanas se ajusta un polinomio  $y_m(j)$  de grado  $m$ , el objetivo de este ajuste es el de eliminar tendencias locales que pueden ser generadas por artefactos.
4. Se calcula la función  $F(s)$

$$(2.7) \quad F(s) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [y(j) - y_m(j)]^2},$$

la cual computa las fluctuaciones con respecto al polinomio  $y_m$ .

5. La función  $F(s)$  se calcula para diferentes tamaños de  $s$  y al igual que en ejemplo pasado, si sigue una ley de potencia se comporta como  $F(s) \sim s^\alpha$ .

El exponente de auto-similitud  $\alpha$  es también conocido como exponente de Hurst y su valor indica el tipo de correlaciones de largo alcance que existen en la serie de tiempo que se estudia. Cuando  $\alpha = 0.5$  la serie esta completamente descorrelacionada, es equivalente a ruido blanco, en el caso en que  $0.5 < \alpha < 1$  la serie está correlacionada positivamente, cuando  $\alpha = 1$  la serie está correlacionada en forma de ruido rosa, conocido también como ruido  $1/f$  debido a que el espectro de potencias se comporta como  $S(f) \sim 1/f$ . Para el caso en el que  $\alpha = 1.5$  la serie de tiempo está correlacionada como ruido Browniano. El exponente de Hurst también se relaciona con los exponentes de la función de auto-correlación ( $\gamma$ ) y el espectro de potencias ( $\beta$ ) de la forma:  $\gamma = 2 - 2\alpha$  y  $\beta = 2\alpha - 1$ .

### 2.3.4 Algoritmo de visibilidad

Lucas Lacasa et al.[12] desarrollaron un método para construir un grafo a partir de una serie de tiempo. La principal característica del método es que el grafo resultante conserva las correlaciones de largo alcance o la fractalidad de la serie de tiempo, la cual se evidencia en que la distribución de grado del grafo sigue una ley de potencia  $P(k) \sim k^\gamma$ .

La forma de construir el grafo es tomando cada paso de tiempo  $t$  como un nodo, y estos nodos conectan dependiendo de sus valores en  $x(t)$ . La forma más sencilla de explicar el método es representándolo de forma ilustrativa como en la figura 2.10, donde se muestran los valores de una serie periodica en forma de barras verticales. Dos nodos (barras) se conectan si los nodos "se ven entre ellos", esto es, si es posible trazar una línea recta que conecte las dos barras (líneas grises de la figura).

Formalmente se puede definir el criterio de visibilidad de la siguiente manera: dos valores arbitrarios  $(t_a, x(t_a))$  y  $(t_b, x(t_b))$  tendrán visibilidad, y por tanto estarán conectados si para cualquier valor  $(t_c, x(t_c))$  tal que  $t_a < t_c < t_b$  se cumple la desigualdad:

$$x(t_c) < x(t_b) + (x(t_a) - x(t_b)) \frac{t_b - t_c}{t_b - t_a}.$$

Es fácil notar que el grafo obtenido con esta construcción es no dirigido.

El mapeo de una serie de tiempo a un grafo es atractivo ya que amplía el número de herramientas que se pueden utilizar para el estudio y caracterización del sistema. La teoría de grafos es muy extensa, estudiar la topología y dinámica del grafo asociado a la serie de tiempo puede revelar características que tal vez con métodos tradicionales de análisis de series de tiempo no son tan evidentes.

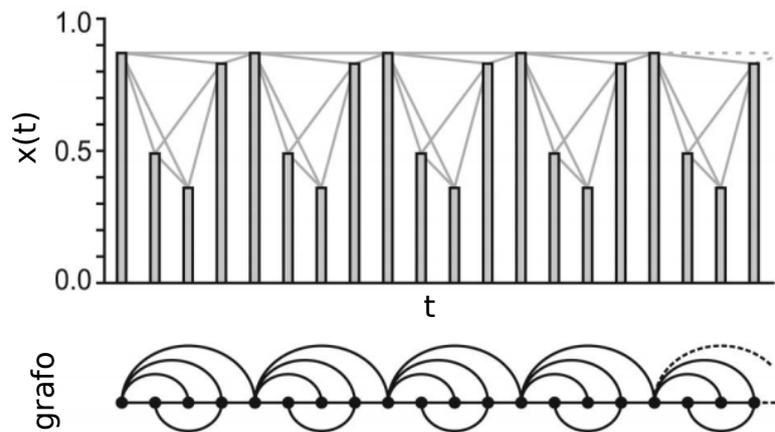


Figura 2.10: Ejemplo de una serie de tiempo de 20 valores (arriba) y su grafo asociado (abajo). En el grafo, cada nodo corresponde a un valor de la serie ordenados temporalmente. Las líneas grises definen los enlaces entre nodos, los cuales también se muestran en el grafo. Imagen tomada y modificada de [12].

## ESCALAMIENTO Y NO LINEALIDAD EN PARTITURAS

La música es un ejemplo de sistema complejo, el cual involucra muchos factores culturales, propiedades acústicas, técnicas de interpretación y percepción musical. Por esto, la presencia de leyes de potencia en algunas de sus propiedades no resulta una sorpresa. La primera evidencia en música data del año 1978, cuando Voss y Clarke[13] estimaron la densidad espectral de las fluctuaciones en voltaje de señales de audio (ver figura 3.1), encontrando una ley de potencia cercana a  $1/f$ .

En este caso el valor de  $\beta \approx 1$ , ha sido interpretado como un balance entre predictabilidad y sorpresa [14, 15], sin embargo, diversos estudios han explorado las propiedades de escalamiento de la música [15–21] encontrando valores para el exponente  $\beta$  dentro del rango  $1 < \beta < 2$ . Pocos de estos estudios se han enfocado en partituras [14, 22, 23], y ninguno de ellos ha hecho un análisis detallado de los comportamientos de escalamiento entre diferentes compositores. Es necesario mencionar que, a diferencia del estudio de Voss y Clark, no siempre se encuentra un solo exponente de invarianza de escala en las piezas musicales, se ha encontrado evidencia de que existen exponentes que corresponden a diferentes escalas de tiempo [17, 23]. En vista de estos resultados, en este capítulo se presenta un estudio detallado de los tipos de escalamiento en partituras de diferentes compositores, explorando qué tipo de propiedades estructurales son reflejadas en éstos. Así como se busca evidencia de correlaciones no lineales en las partituras y se explora si su existencia y forma aportan a la caracterización o entendimiento estructural de las piezas.

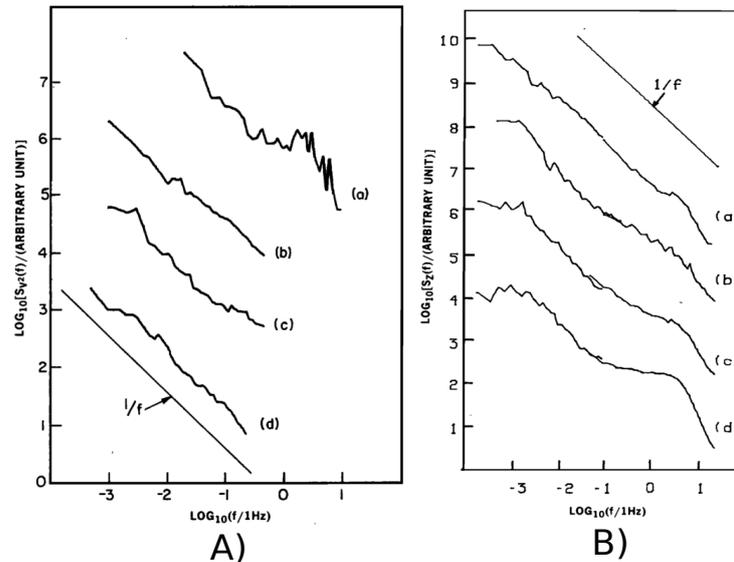


Figura 3.1: Densidades espectrales de fluctuaciones de voltaje de audio. A) Ejemplos de los audios: a) piano rags de Scott Joplin, b) estación de radio de música clásica, c) estación de rock, d) estación de noticias. B) a) música clásica, b) jazz y blues, c) rock, d) noticias. Imagen editada de [13]

### 3.1 Partituras como series de tiempo

Una nota musical se puede representar matemáticamente como un vector en tres dimensiones: altura, duración e intensidad  $\vec{n} = \{a, d, i\}$ . Una melodía es una colección de notas musicales  $M = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_N\}$ . En esta representación una melodía ya es propiamente una serie de tiempo, sin embargo resulta ser una representación poco práctica para un análisis estadístico de partituras debido a su alta dimensionalidad (tres dimensiones por nota) y que en la mayoría de las piezas musicales contienen más de un instrumento o voz. La primera reducción que hacemos es eliminando el componente de intensidad, así sólo tenemos altura y duración.

Para simplificar la representación de la altura y tiempo, las notas se *subdividen* en notas de menor duración, utilizando como unidad de tiempo la duración mínima de las notas en la partitura. Esto se ejemplifica en la figura 3.2, donde se muestra la partitura original y la subdivisión de sus primeros ocho compases. En este caso la duración mínima es un octavo (o corchea), así una negra se divide en dos corcheas, una blanca en cuatro, etc. Definida la dimensión temporal, sólo queda por definir la de la altura de las notas, para esto las notas se asignan a un número que sirve como notación en una interfaz llamada MIDI<sup>1</sup>. La asignación es en una escala lineal (0 – 127) y las unidades representan semi tonos<sup>2</sup> como se muestra en la figura 3.3 con el Do central (C4) en 60. Con la asignación de altura y tiempo se puede construir una serie de tiempo (altura vs tiempo)

<sup>1</sup>Musical Instrument Digital Interface

<sup>2</sup>Mitad de un tono, unidad mínima en la escala de la música occidental.

**Canones diversi**  
super thema regium.

**Canon a 2.**

a)

b)

Figura 3.2: Partitura del canon a 2 voces (canon del cangrejo) de J.S. Bach (BWV 1079). a) La pieza original, una voz se lee de izquierda a derecha y la segunda de derecha a izquierda simultáneamente. b) Primeros ocho compases de la pieza subdivididos en octavos (corcheas).

Nota y número

| Octava | C   | C#  | D   | D#  | E   | F   | F#  | G   | G#  | A   | A#  | B   |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| -1     | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  |
| 0      | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  |
| 1      | 24  | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  | 33  | 34  | 35  |
| 2      | 36  | 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  | 46  | 47  |
| 3      | 48  | 49  | 50  | 51  | 52  | 53  | 54  | 55  | 56  | 57  | 58  | 59  |
| 4      | 60  | 61  | 62  | 63  | 64  | 65  | 66  | 67  | 68  | 69  | 70  | 71  |
| 5      | 72  | 73  | 74  | 75  | 76  | 77  | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 83  |
| 6      | 84  | 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  |
| 7      | 96  | 97  | 98  | 99  | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 |
| 8      | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 |
| 9      | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 |     |     |     |     |

Figura 3.3: Asignación de números a las doce notas de la escala musical, empezando desde  $C_1 = 0$ , hasta  $G_9 = 127$  con el Do central  $C_4 = 60$ .

para una voz o en dado caso una serie multivariable para dos o más voces como se muestra en la figura 3.4.

Una justificación por la que se utiliza la notación MIDI para las series de tiempo es la accesibilidad a archivos de formato MIDI, estos archivos contienen la misma información que una partitura pero codificada de forma más sencilla para analizar estadísticamente, mientras que una partitura contiene una codificación simbólica, los archivos MIDI (.mid) pueden convertirse

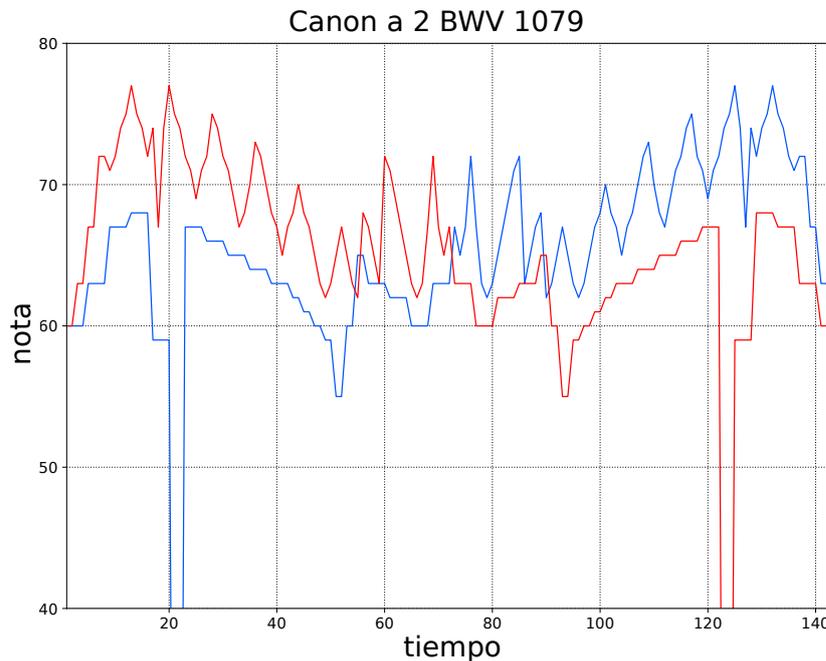


Figura 3.4: Serie de tiempo construida de la partitura del canon a 2 voces de J.S. Bach (BWV 1079, figura 3.2). El color indica la voz: la línea azul es la primer voz (la que va de izquierda a derecha en la partitura original), la línea roja es la segunda voz (derecha a izquierda).

en archivos de texto (.csv<sup>3</sup>) los cuales se pueden manipular más fácil para extraer la información necesaria (notas y tiempo).

### 3.1.1 Selección de partituras

Se seleccionaron 304 partituras<sup>4</sup> (archivos MIDI) de diferentes compositores (ver tabla 3.1), el criterio de selección que se usó es que los compositores fueran de diferentes periodos musicales desde renacimiento hasta el periodo moderno para poder identificar propiedades estadísticas y hacer una caracterización.

## 3.2 Escalamiento en correlaciones lineales

Se implementó el método de DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*) a las 304 piezas, buscando caracterizar el tipo de correlaciones de largo alcance (escalamiento en las correlaciones) por medio del exponente de Hurst estimado en la función de fluctuaciones  $F(s) \sim s^\alpha$ . El cálculo de DFA multivariable se realizó vectorialmente como en estudios anteriores[22, 24] esto es calculando

<sup>3</sup>comma separated values, archivos de texto con una estructura de columnas separadas por comas.

<sup>4</sup>La lista completa de las piezas puede ser consultada en el apéndice

| Compositor   | nacimiento-muerte | número de piezas |
|--------------|-------------------|------------------|
| Palestrina   | 1525-1594         | 21               |
| Bach         | 1685-1750         | 63               |
| Haydn        | 1732-1809         | 48               |
| Mozart       | 1756-1791         | 36               |
| Beethoven    | 1780-1827         | 63               |
| Dvorak       | 1841-1904         | 25               |
| Shostakovich | 1906-1975         | 48               |

Tabla 3.1: Nombre del compositor, año de nacimiento y muerte y número de piezas analizadas. La lista está en orden cronológico de arriba hacia abajo.

$F(s)$  de la ecuación 2.7 de la forma:

$$F(s) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\vec{Z}(j) - \vec{Z}_m(j)]^2},$$

donde  $\vec{Z}(j) = \{x(j), y(j), \dots\}$  contiene cada una de las voces y  $\vec{Z}_m(j) = \{x_m(j), y_m(j), \dots\}$  los polinomios ajustados a cada voz.

Se encontró que la mayoría de las piezas no seguían una ley de potencia en la función de fluctuaciones  $F(s)$  (ver figura 3.5), sin embargo, observando la forma de las funciones  $\log(F(s))$  se encontraron perfiles característicos: invarianza de escala, dos regiones invariantes de escala y no invarianza aparente. En la figura 3.5, se pueden observar los cinco diferentes perfiles que se lograron identificar, la clasificación se realizó mediante una meticulosa revisión visual de cada una de las 304 funciones  $\log(F(s))$ . Los perfiles encontrados describen forma y magnitud en las auto correlaciones de la pieza, las cuales se pueden interpretar como forma estructural en la pieza.

El primer perfil, ejemplificado por Palestrina en la figura 3.5, muestra dos regiones con escalamiento diferente en  $\log(F(s))$ , la primer región tiene una magnitud mayor en sus correlaciones (pendiente mayor), esto es indicativo de que sus correlaciones de corto alcance no escalan a todo el tamaño de la pieza, es decir, en estas piezas la memoria de motivos de corta duración se pierde a escalas mayores de tiempo de tal forma que la auto similitud disminuye y la irregularidad incrementa.

De forma contra intuitiva, el segundo perfil (ejemplificado en este caso por una fuga de Shostakovich) muestra un comportamiento opuesto al primero: las correlaciones aumentan en magnitud a escalas grandes de tiempo, esto indica que en escalas cortas de tiempo hay mucha irregularidad, sin embargo a escalas mayores la pieza tiene recurrencia en patrones largos, aportando regularidad e incrementando la magnitud de su auto correlación.

El tercer perfil en la figura 3.5, en la pieza de Mozart se observa una invarianza en la función  $F(s)$  a todas las escalas, mientras que los dos ejemplos restantes son más complicados de caracterizar ya que tienen cambios de curvatura y esto muestra una alternancia en la magnitud de sus correlaciones, no se puede hablar de uno o dos exponentes de Hurst.

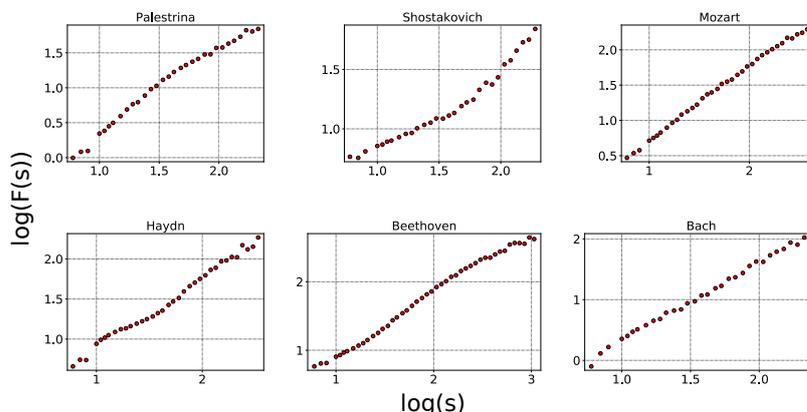


Figura 3.5: Gráfica log-log de  $F(s)$  de seis diferentes piezas que exhiben comportamientos cualitativamente diferentes en sus funciones de fluctuaciones. Las piezas son: motet hodie christus natus est de Palestrina, preludio No. 8 de Shostakovich, piano sonata No. 10 de Mozart, cuarteto de cuerdas No.2 3rd mov de Haydn, cuarteto de cuerdas No.13 6th mov. de Beethoven y la fuga No.12 de Bach..

En la tabla de la figura 3.6 se muestran las piezas clasificadas por perfil de su función  $\log(F(s))$ .

| Perfil       |  |  |  |  |  |
|--------------|---|---|---|---|---|
| Palestrina   | 15  | 0   | 5   | 0   | 1   |
| Bach         | 30  | 2   | 24  | 7   | 0   |
| Haydn        | 25  | 2   | 14  | 2   | 5   |
| Mozart       | 22  | 1   | 11  | 0   | 2   |
| Beethoven    | 17  | 7   | 35  | 3   | 1   |
| Dvorak       | 4   | 8   | 10  | 2   | 1   |
| Shostakovich | 15  | 14  | 17  | 2   | 0   |

Figura 3.6: Clasificación de las 304 piezas analizadas. El primer renglón muestra cualitativamente la forma del perfil de la función  $\log(F(s))$ , los siguientes renglones corresponden al compositor y el número de piezas que se lograron identificar en cada perfil.

Mientras que hay una clara preferencia por la mayoría de los compositores en los perfiles 1 y 3, también se pueden identificar algunas tendencias que nos permiten diferenciar cualitativamente compositores o periodos.

Una observación interesante es la tendencia que sigue la segunda columna de la tabla (segundo perfil), el número de piezas incrementa de Palestrina a Shostakovich, tendencia mostrada también a lo largo del tiempo (por el orden cronológico). Esta tendencia está relacionada con la evolución de las reglas de composición: a escalas cortas de tiempo las reglas armónicas han

evolucionado del periodo renacentista al moderno en el sentido de que la restricción en el uso de notas vecinas (o intervalos) ha ido disminuyendo, esto le da al compositor más alternativas y la variabilidad en notas vecinas crece y esto se ve reflejado en la magnitud de las correlaciones de corto alcance, la cual disminuye. La variabilidad en estructura también se hace evidente cronológicamente ya que Dvorak y Shostakovich son los compositores con una distribución más homogénea de sus piezas en los perfiles.

### 3.2.1 Invarianza de escala en la función $F(s)$

En la figura 3.7 se muestra una selección de seis piezas con invarianza de escala en su función  $F(s)$ , cada función tiene su ajuste lineal con el exponente de Hurst correspondiente. En este caso también se puede identificar una tendencia en el valor de  $\alpha$ , ya que de Palestrina a Beethoven el valor de  $\alpha$  disminuye (de  $\alpha = 1.43$  a  $\alpha = 0.96$ ) y vuelve a aumentar con Shostakovich ( $\alpha = 1.33$ ), la disminución en el valor del exponente de Hurst tiene una interpretación similar en la tendencia en el segundo perfil de la figura 3.6, las reglas de composición evolucionan para ser menos restrictivas y esto se refleja en la magnitud de sus correlaciones. Una posible explicación al aumento de  $\alpha$  para Shostakovich es que la *forma musical* de la pieza es una fuga, y una característica de las fugas es la imitación entre voces, esta imitación implica la existencia de patrones similares en las voces a lo largo de la pieza los cuales contribuyen a la magnitud de la correlación.

El comportamiento de los exponentes también se puede observar en sus distribuciones acumu-

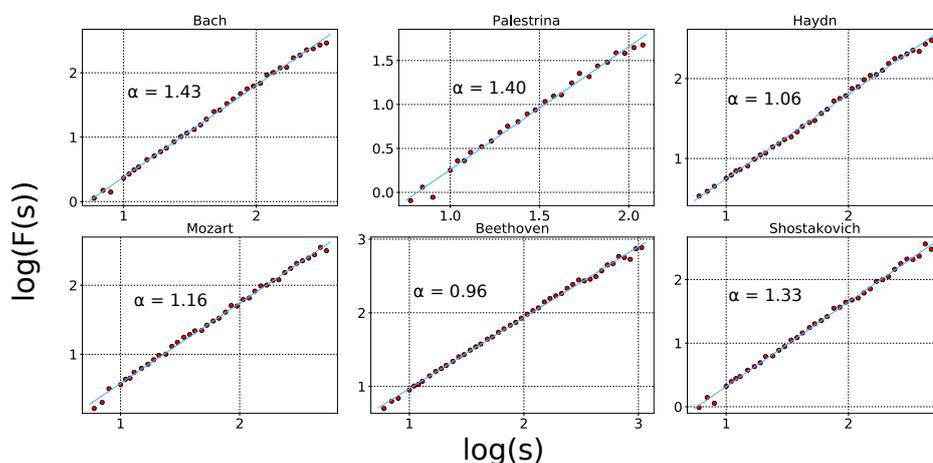


Figura 3.7: Gráfica log-log de  $F(s)$  de seis diferentes piezas que exhiben invarianza de escala y en las cuales se puede asignar un exponente de Hurst. Las piezas son: Fuga no. 4 del clave bien temperado de J.S.Bach, motet oh bone jesu de Palestrina, cuarteto de cuerdas Opus 76 4to mov de Haydn, cuarteto de cuerdas No.16 3er mov de Mozart, cuarteto de cuerdas No.15 5to mov. de Beethoven y la fuga No.16 de Shostakovich.

ladas (ver figura 3.8). La tendencia de la figura 3.7 es confirmada en la figura 3.8, donde las distribuciones con un valor mayor de  $\alpha$  son de Palestrina y Bach siguiendo un decrecimiento hasta

Dvorak para regresar a valores altos con Shostakovich. Cualitativamente se puede observar que Palestrina y Bach se separan de Haydn, Mozart y Beethoven, mientras que Dvorak se despega de todos en valores menores de  $\alpha$  (0.75 – 1.1). Bajo este criterio, Shostakovich debería estar más cerca de Dvorak, sin embargo esto no se observa debido a la forma musical de las piezas, las piezas de Shostakovich que se analizaron fueron los 24 preludios y fugas inspirados en el clave bien temperado de J.S. Bach, obra que también forma parte del conjunto de piezas analizadas.

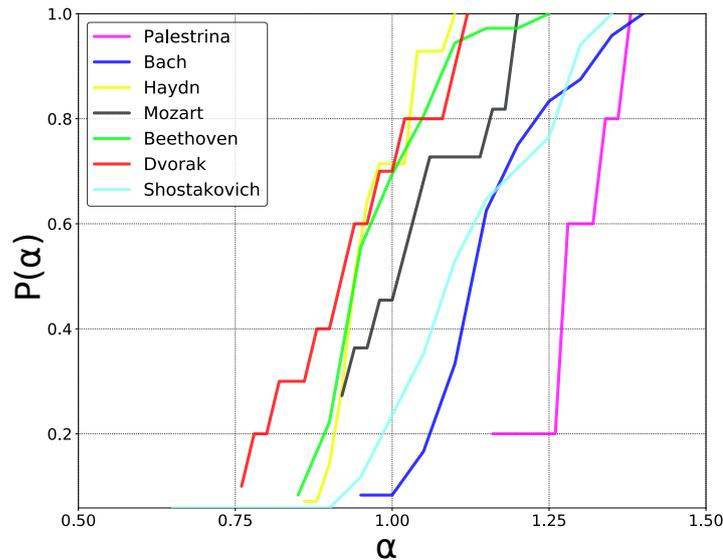


Figura 3.8: Distribución acumulada de los exponentes  $\alpha$  para los diferentes compositores en el caso de escalamiento en la función  $F(s)$

### 3.2.2 Crossover en la función $\log(F(s))$

La existencia de un crossover en la función  $\log(F(s))$  de secuencias de notas ha sido reportada previamente en el trabajo de Dagdug et al.[23], donde encuentran dos regiones de invarianza de escala en partituras de piezas palindrómicas de Mozart. En este caso se puede asignar dos diferentes exponentes de Hurst, uno a cada una de las regiones que muestran invarianza de escala, en el estudio de Dagdug et al. encontraron una relación entre exponentes de la forma  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

En la figura 3.11 se muestran seis ejemplos de piezas que exhiben un crossover en su función  $\log(F(s))$ , en estos ejemplos la mayoría de las piezas tienen una relación entre exponentes de la forma  $\alpha_1 > \alpha_2$ , siendo diferente la pieza de Shostakovich ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), relación previamente observada en la tabla 3.6 y figura 3.5.

La presencia del crossover y los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se pueden entender mejor observando con detalle fragmentos de las series de tiempo originales. En las figuras 3.9 y 3.10 se muestran extractos de dos series de tiempo con diferente relación de sus exponentes, una de J.S. Bach

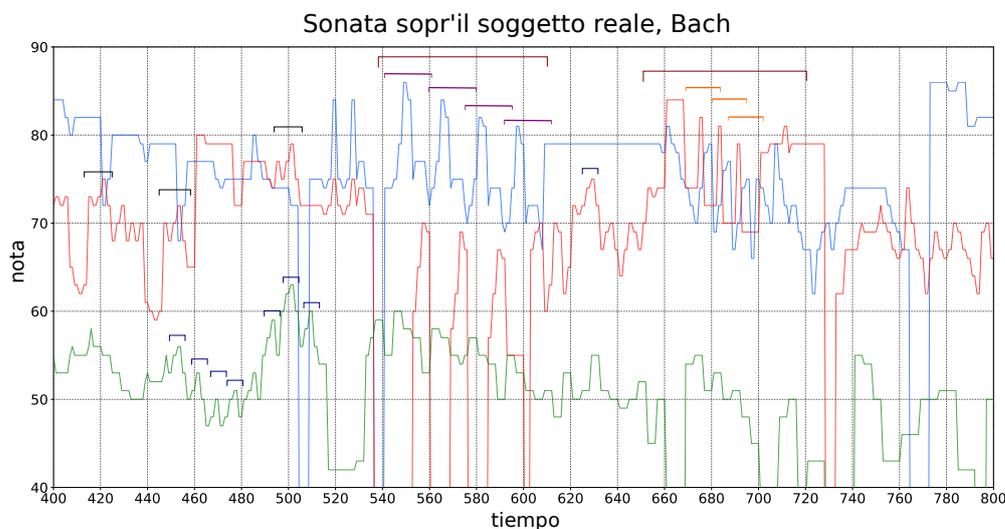


Figura 3.9: Fragmento de la serie de tiempo original de la sonata de Bach. Las divisiones en el eje temporal corresponden al tamaño de  $s_c = 20$  en donde se encuentra el punto del crossover. Es posible observar patrones dentro y fuera de este tamaño identificados con las líneas de colores en la parte superior de la serie. El número de patrones cuando  $s < 20$  es mayor que cuando  $s > 20$ , es una de las razones por las que  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

( $\alpha_1 > \alpha_2$ ) y la otra de Shostakovich ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ). En el caso de la pieza de Bach, es posible identificar patrones muy similares en el rango  $0 < s < 20$ , estos patrones se repiten mucho y aparecen en todas las voces, la aportación de regularidad de estos patrones hace que la magnitud de las correlaciones en el rango  $0 < s < 20$  sea mayor ( $\alpha_1 = 1.4$ ). El valor del exponente disminuye para valores de  $s > 20$  ( $\alpha_2 = 0.9$ ), rango en el que encontrar patrones similares es menos común y la correlación disminuye.

En el caso de Shostakovich se observa lo contrario (ver fig 3.10), la magnitud de las correlaciones a escalas de tiempo cortas es menor que en escalas grandes, el exponente cambia de  $\alpha_1 = 0.6$  a  $\alpha_2 = 0.9$  en  $s_c \approx 32$ . A escalas de tiempo menores al crossover ( $s < 32$ ), las fluctuaciones en las notas son muy irregulares y su comportamiento se aproxima al de ruido blanco (descorrelacionado,  $\alpha = 0.5$ ), esto significa que hay poca regularidad y resulta más difícil predecir patrones a esta escala. Sin embargo, para valores  $s > 32$  se pueden identificar patrones similares en todas las voces, aportando así regularidad y magnitud en las correlaciones de largo alcance.

En la figura 3.12 se presenta una gráfica de las distribuciones de  $\alpha_1$  contra  $\alpha_2$  de todas las piezas en las que se pueden identificar dos regiones de escalamiento en  $F(s)$ . Las distribuciones son representadas con elipses, el centro de cada elipse está dado por la media de las distribuciones de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , mientras que los ejes están definidos por las desviaciones estándar de las distribuciones de cada exponente respectivamente. Una primera observación en esta gráfica es que el rango de variación de  $\alpha_1$  es considerablemente mayor al de  $\alpha_2$ , esto es evidencia de que las correlaciones de largo alcance están más restringidas que las de corto, en otras palabras, en general hay más

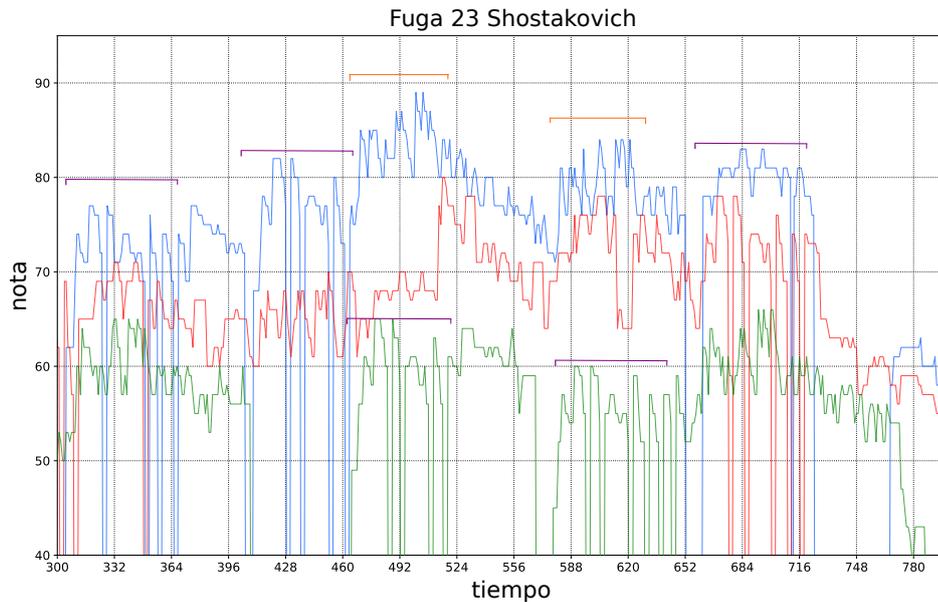


Figura 3.10: Fragmento de la serie de tiempo original de la fuga 23 de Shostakovich. Las divisiones en el eje temporal corresponden al tamaño de  $s_c = 32$  en donde se encuentra el punto del crossover. En este caso resulta más complicado identificar patrones cuando  $s < 32$ , pero para valores  $s > 32$  si es posible encontrar patrones, los cuales están marcados con las líneas de colores.

variabilidad en patrones o motivos de corto alcance mientras que la estructura global o la forma musical de las piezas tiene menos variación, las reglas de composición de la estructura global de las piezas se preserva más en todos los compositores.

Al igual que la gráfica 3.8 de distribuciones acumuladas, el traslape entre distribuciones hace que sea difícil de distinguir completamente a los compositores, sin embargo de nuevo es posible identificar tendencias en la posición y forma de las elipses. La primer tendencia clara y de manera similar a la gráfica 3.8, es que la posición de los centros con respecto a  $\alpha_1$  disminuye de la forma Palestrina  $\rightarrow$  Bach  $\rightarrow$  Mozart  $\rightarrow$  Haydn  $\rightarrow$  Shostakovich  $\rightarrow$  Beethoven  $\rightarrow$  Dvorak, siendo consistente con lo observado anteriormente. En el eje de  $\alpha_2$  no existe una tendencia clara, pero se puede observar que las medias de las distribuciones de Haydn y Mozart son muy similares, además de ser las medias con magnitud menor. La mayoría de las piezas de Mozart y Haydn son cuartetos de cuerdas, además de que son compositores del periodo clásico que fueron contemporáneos, esto podría ser parte de la explicación de la similitud en sus distribuciones.

En cuanto a la dispersión y excentricidad de las elipses, se puede observar que Bach y Beethoven parecen carecer de excentricidad, en sus distribuciones no se observa una preferencia en variabilidad por alguno de los dos exponentes, a diferencia de los demás compositores, quienes la mayoría tienen una dispersión mayor en el exponente  $\alpha_1$ . El caso de Palestrina es particular, ya que su dispersión en  $\alpha_2$  es mayor que en  $\alpha_1$ , además de ser el de menor dispersión en los dos exponentes, en otras palabras es el más restringido o menos variado en sus patrones y estructura.

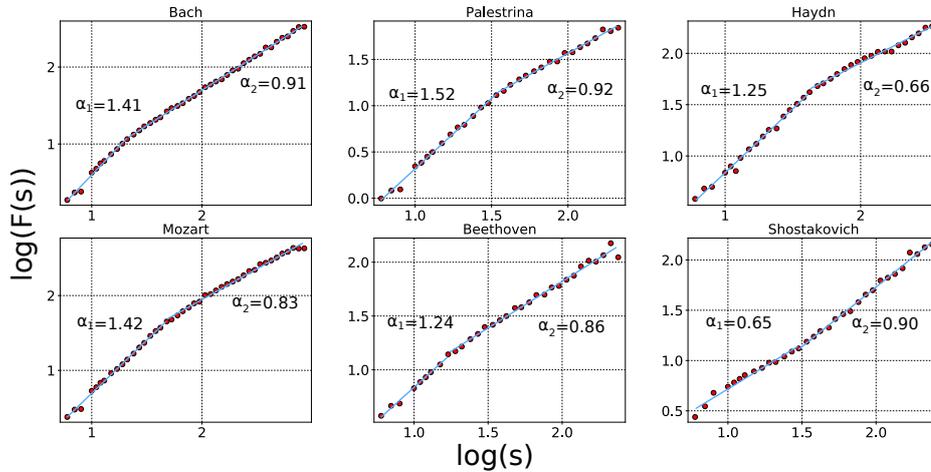


Figura 3.11: Gráfica log-log de  $F(s)$  de seis diferentes piezas con un crossover, donde pueden ser identificadas dos regiones con diferente escalamiento. Las piezas son: 1er mov de la Sonata sopríl Soggetto Reale de Bach, motet hodie christus natus est de Palestrina, cuarteto de cuerdas No. 1 5to mov. de Haydn, cuarteto de cuerdas No. 18 4to mov. de Mozart, cuarteto de cuerdas No. 2 2do mov. de Beethoven y la fuga No. 23 de Shostakovich.

Los compositores con mayor variabilidad en motivos, frases y estructura global son Dvorak y Shostakovich, cuyas dispersiones son las más grandes de todos. Estos resultados también son consistentes con la interpretación anterior de que las correlaciones están relacionadas con las reglas de composición, la alta dispersión indica una variabilidad mayor en los esquemas de composición.

### 3.3 Correlaciones no lineales

La música, así como el lenguaje, suelen ser ejemplos de sistemas complejos, los cuales frecuentemente contienen relaciones no lineales. La no-linealidad de una serie de tiempo se ha sido relacionada con su multifractalidad[25] y existen estudios previos a este en los que se reportan propiedades multifractales de secuencias de notas[20, 26, 27]. En base a estos resultados, se decidió buscar evidencia de correlaciones no lineales en las partituras y explorar si éstas correlaciones contienen información importante que contribuyan al entendimiento y caracterización de las piezas.

#### 3.3.1 Prueba de no linealidad

Ashkenazy et al.[28] desarrolló una variante del método *detrended fluctuation analysis* que permite detectar correlaciones no lineales en una serie de tiempo. En este método, para una serie de tiempo  $x(i)$  se define la serie de incrementos  $\Delta x(i) \equiv x(i+1) - x(i)$ . La serie de incrementos se descompone en dos series, una serie de magnitudes y otra de signos:  $\Delta x(i) = \text{sgn}(\Delta x(i)) |\Delta x(i)|$ .

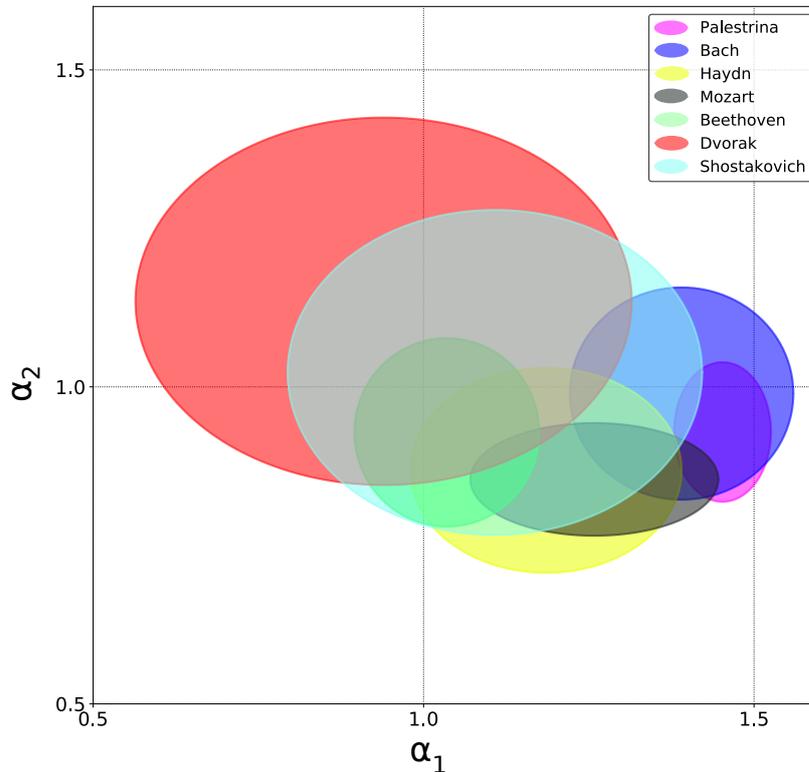


Figura 3.12: Gráfica de  $\alpha_1$  contra  $\alpha_2$  de las 162 piezas que exhiben dos regiones con invarianza de escala en la función  $F(s)$ . Cada elipse representa a un compositor, están centradas en las medias de los valores de sus distribuciones de exponentes  $\alpha_1, \alpha_2$ .

A cada una se le resta su media para eliminar posibles tendencias y se integra de tal forma que las nuevas series integradas estén correlacionadas positivamente. Finalmente el método de DFA es implementado en las series integradas, estimando las funciones de fluctuaciones de la forma  $F(s)/s$  (el factor  $1/s$  es para compensar la integración previa) y en el caso de que exista una ley de potencias las funciones de fluctuaciones se comportan de la forma  $F(s)/s \sim s^{\alpha-1}$ . Se ha mostrado que la serie de tiempo que contiene información sobre correlaciones no lineales es la serie de magnitudes ( $|\Delta x(i)|$ ).

Para validar los resultados del DFA en la serie de magnitudes, se requiere compararlos con datos "sustitutos" apropiados. Los datos sustitutos son datos que se construyen de forma que éstos conserven una propiedad de interés en los datos originales. Los datos sustitutos representan la hipótesis nula de falta de correlaciones no lineales, estos datos son aquellos que conservan sólo las correlaciones lineales de los datos originales.

Toda la información correspondiente a las correlaciones lineales en una serie de tiempo se encuentra en su espectro de potencias, en la distribución de las amplitudes de sus coeficientes. Por otro lado, las correlaciones no lineales son inherentes de la distribución de las fases de Fourier. Siendo así, los datos sustitutos que se utilizan en este estudio fueron generados de tal forma que

el espectro de potencias y su distribución de amplitudes fueran iguales (o lo más similar posible) a las de los datos originales, mientras que sus fases de Fourier fueron reemplazadas por números aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y  $2\pi$ . El método se hace de forma univariable e iterativa y es conocido como IAAFT, la generación de datos sustitutos en este estudio se realizó con el software TISEAN [29], disponible de forma gratuita en internet.

Una prueba de que los datos sustitutos preservan las correlaciones lineales es comparar su cálculo de DFA con el de las series originales. En principio el DFA detecta sólo correlaciones lineales, por esta razón las funciones  $F(s)$  de la serie original con la de sus sustitutos deben ser estadísticamente indistinguibles. En la figura 3.13 se muestra el DFA para piezas originales (puntos rojos) y para sus respectivos datos sustitutos (19 datos representados con el área sombreada). Que la función  $F(s)$  de los datos originales se encuentre dentro de la región de los datos sustitutos valida la construcción de los datos sustitutos.

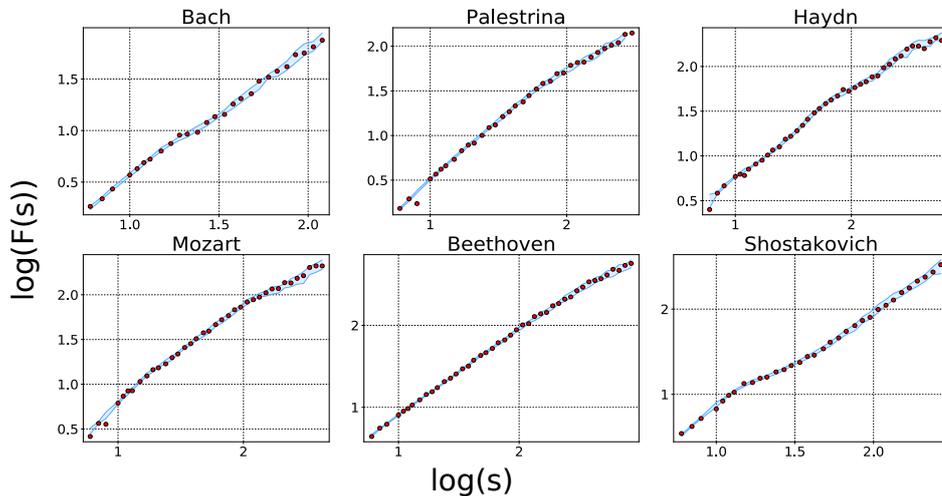


Figura 3.13: Gráficas log-log de funciones  $F(s)$  de seis diferentes piezas y las funciones  $F(s)$  de sus respectivos 19 datos sustitutos. Los datos sustitutos son representados por el área coloreada de azul y los puntos rojos es el resultado de la pieza original.

Se implementó el cálculo del DFA en las series de magnitudes de todas las piezas y en 19 datos sustitutos de cada una de las series, esto para tener una significancia del 5% en los resultados. Se encontró una evidencia clara de correlaciones no lineales en la mayoría de las piezas, algunos ejemplos de los resultados se muestran en la figura 3.14. Los resultados muestran que las funciones  $F(s)/s$  de los datos reales son diferentes a las de los sustitutos de forma muy diversa. En las tres piezas de Bach, se muestra un comportamiento consistente, donde la existencia de correlaciones no lineales se observa a escalas de tiempo cortas y se pierde a escalas más largas. Con Palestrina ocurre algo similar, de forma consistente las correlaciones no lineales se hacen evidentes en escalas cortas y desaparecen a escalas largas, con la diferencia de que decaen más lentamente. Estas correlaciones no lineales tienen mayor alcance que en el caso

de Bach. Haydn muestra un comportamiento diferente en sus correlaciones no lineales, una pieza contiene correlaciones a corto alcance, la segunda tiene más correlaciones a largo y la tercera sus correlaciones se hacen evidentes en todas las escalas. El caso de Mozart resulta muy peculiar ya que la evidencia de correlaciones no lineales ocurre a escalas cortas y escalas largas, careciendo en escalas intermedias. Beethoven no sólo es consistente en la existencia de correlaciones no lineales, sus funciones  $F(s)/s$  también presentan una invarianza de escala. Dvorak y Shostakovich de nuevo muestran variedad en sus perfiles, a pesar de que la muestra es mucho más reducida, los tres ejemplos son diferentes.

Debido a variedad en el comportamiento de las funciones  $\log(F(s)/s)$  no se lograron establecer parámetros que ayudaran a caracterizar estadísticamente las piezas, sin embargo, en los ejemplos puntuales que se mostraron en la figura 3.14 se puede observar que las correlaciones no lineales parecen tener diferentes comportamientos para cada compositor.

### 3.3.2 El gusto por la regularidad no lineal

Desde el trabajo de Voss y Clarke[13] sobre escalamiento en el espectro de frecuencias en audio, muchos estudios se refieren al ruido  $1/f$  como el más placentero para el oído humano[14, 22, 23, 30]. En este caso, las fluctuaciones a diferentes escalas se preservan con un comportamiento de ley de potencias, así mismo su espectro de potencias muestra invarianza de escala. Este tipo de ruido (con  $\beta = 1$ ) se encuentra entre ruido descorrelacionado ( $\beta = 0$ ) y ruido muy correlacionado ( $\beta = 2$ ), esto hace muy atractivo explicar el resultado de Voss y Clarke en el sentido de que es necesario un "balance" entre regularidad e irregularidad en la música para que su apreciación sea positiva. Por otro lado, Schoenberg[31] argumentaba que para que una pieza sea apreciada positivamente, necesitaba tener regularidad (ser predictiva) y sorpresa (variaciones). Si bien, el escalamiento en las correlaciones lineales parece jugar un papel importante en este argumento, la regularidad de una pieza podría no ser necesariamente producida sólo por auto similitud en su estructura, las correlaciones no lineales pueden aportar un tipo de estructura no trivial con propiedades interesantes. Sin embargo, no se encontró estudio previo en el que se mencione sobre correlaciones no lineales en música o partituras, es por esto que resulta complicado dar una interpretación directa. Para poder tener una idea de como interpretar la presencia de las correlaciones no lineales en las piezas se diseñó un pequeño experimento en el que se pudiera relacionar la existencia de estas correlaciones con su aceptación o apreciación estética ante una audiencia. Se seleccionaron dos diferentes piezas y una serie sustituta para cada una, el criterio de selección fue que una pieza debía casi nula evidencia de correlaciones no lineales, mientras que la segunda pieza debía contar con una evidencia clara de éstas. Las piezas seleccionadas fueron el preludio número 6 del clave bien temperado de Bach y el último movimiento del cuarteto número 13 de Beethoven. Como se puede verificar en la figura 3.15, la pieza de Bach prácticamente carece de correlaciones no lineales, mientras que la pieza de Beethoven contiene estas correlaciones a

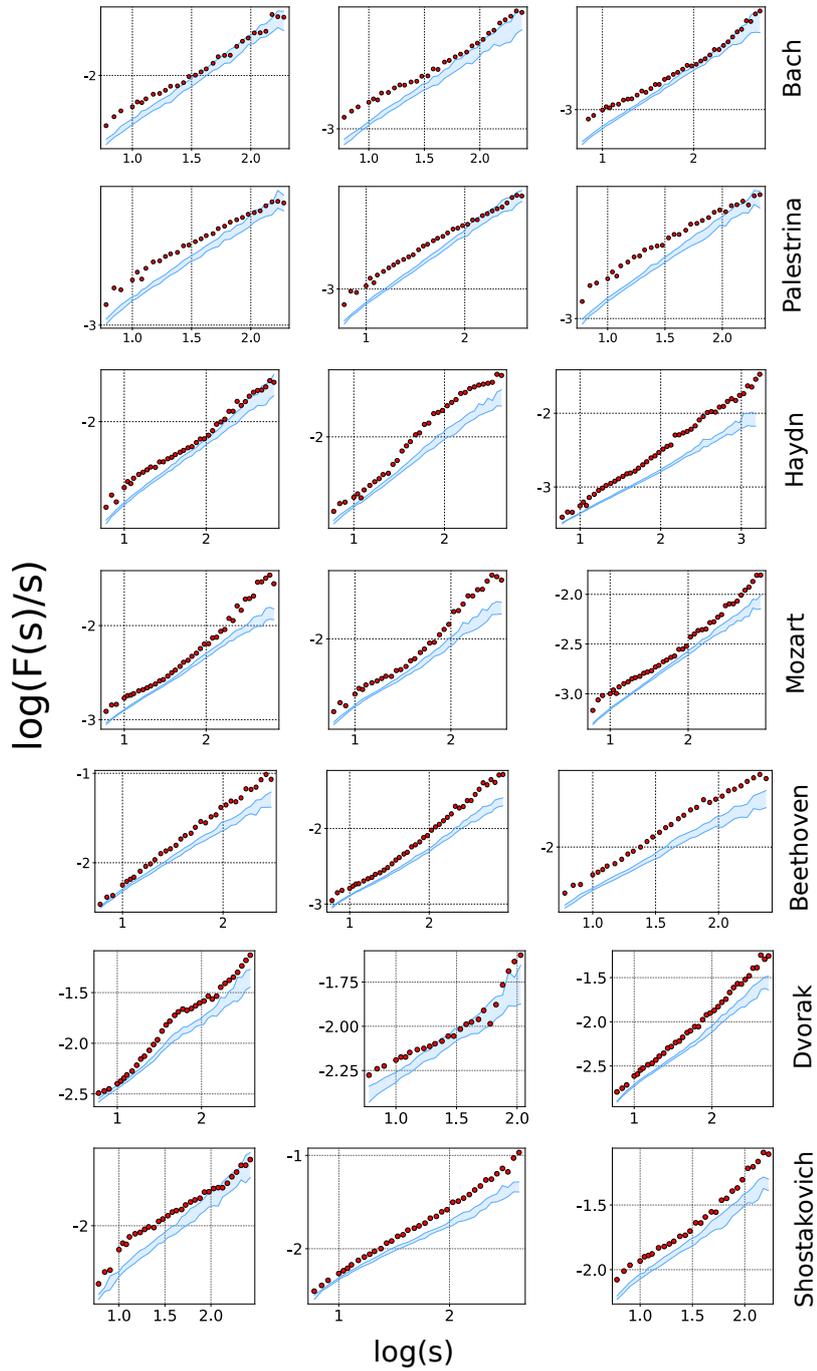


Figura 3.14: Gráficas log-log de funciones  $F(s)/s$  de tres diferentes piezas para cada compositor. La región azul representa al resultado de los 19 datos sustitutos y los puntos rojos a los datos originales. Los nombres de las piezas se encuentran en el apéndice A

todas las escalas.

Se construyeron audios de las dos series de datos sustitutos para después realizar una en-

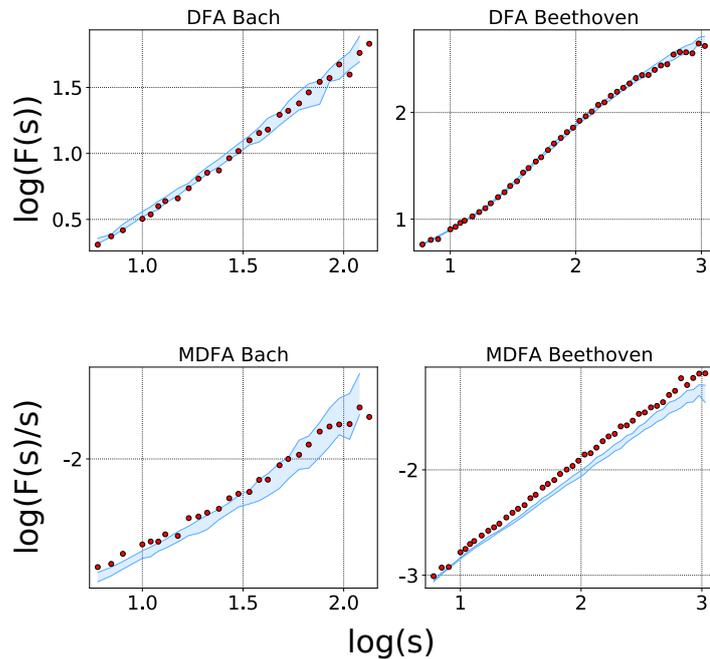


Figura 3.15: Gráficas de las funciones  $F(s)$  y  $F(s)/s$  para las dos piezas utilizadas en la encuesta. Se puede observar que la pieza de Bach carece de correlaciones no lineales prácticamente a todas las escalas de  $s$ , caso contrario a la pieza de Beethoven.

cuesta en la que pudieramos tener resultados cuantitativos en cuanto a apreciación musical. Participaron en total 1281 personas a las que se les consultó su sexo, edad, tiempo que llevaron entrenamiento musical y finalmente evaluar estéticamente del 1 (muy desagradable) al 10 (muy agradable) los cuatro audios, dos piezas originales y sus dos respectivos datos sustitutos.

El resultado principal de la encuesta se puede observar en la figura 3.16, en ambos casos, se muestra una calificación positiva en las piezas originales (valores altos entre 8 y 10). Sin embargo, el resultado más interesante sin duda es el de las calificaciones a las piezas sustitutas, ya que a pesar de que en los dos casos la calificación es baja, sus distribuciones son muy diferentes. En el caso de la pieza sustituta de Bach, su calificación es considerablemente más alta, siendo más aceptada por los encuestados, mientras que la de Beethoven si tiene un número grande de participantes que optaron por calificar con 1 (muy desagradable). La falta de correlaciones no lineales en la pieza de Bach significa que la mayor parte de las correlaciones se encuentran en el espectro de potencias, los motivos o fluctuaciones que presentan invarianza de escala son conservados al conservar el espectro de potencias de la serie original. De este modo, el audio construido a partir de los datos sustitutos conserva gran parte de la estructura de la pieza original y es posible que esta sea una explicación a la calificación benévola de los participantes.

La situación con Beethoven es muy diferente, su pieza original mostró tener una cantidad importante de correlaciones no lineales las cuales no se conservan en los datos sustitutos. Bajo estas

condiciones el espectro de potencias por si solo ya no conserva la regularidad ni la variabilidad completa de la pieza original. Al parecer las correlaciones no lineales juegan un papel importante que hace que el audio original sea mucho más diferente al audio sustituto. A pesar de que este pequeño experimento es puntual y que es necesario hacer más experimentos de manera sistemática, por los resultados obtenidos se puede concluir que las correlaciones no lineales también aportan estructura a la pieza, la cual también es importante en la apreciación estética de la música. Una observación importante es que por la forma de generar los datos sustitutos muchos de los acordes o de la armonía original de la pieza podrían perderse, sólo se conservan en gran medida las correlaciones lineales, esto también puede tener un efecto importante al momento de la evaluación de las piezas. Este planteamiento experimental no es conclusivo pero si es un buen punto de partida para explorar de manera sistemática la implicación de la existencia de las correlaciones no lineales.

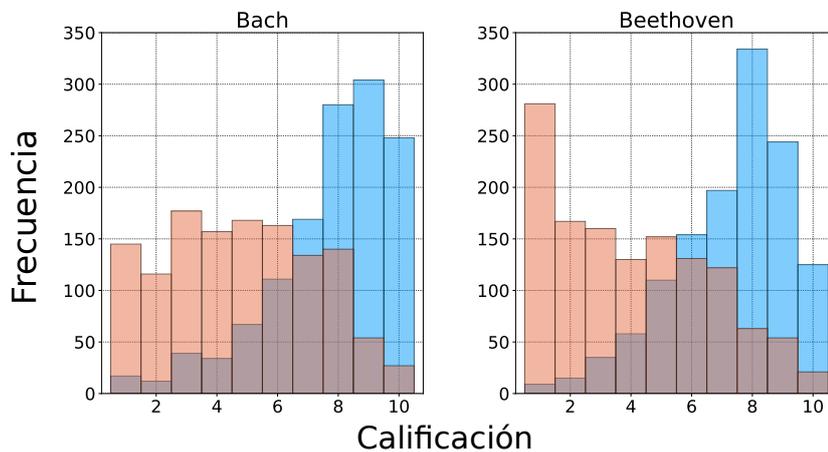


Figura 3.16: Distribuciones de los resultados de la encuesta, las barras azules representan la distribución de la pieza original, mientras que las barras rojas son de la distribución de la pieza generada con los datos sustitutos.



## IDENTIFICACIÓN DE BLOQUES CONSTITUTIVOS Y CONSTRUCCIÓN DE MELODÍAS CON MEMORIA

La música ha sido considerada un lenguaje natural debido a su similitud estructural de frases. En la música una idea puede ser muy abstracta o subjetiva al momento de interpretar su significado. Sin embargo, diversos estudios han intentado relacionar a la música con el lenguaje hablado [32–34], además de que existe evidencia de que las regiones que el cerebro utiliza para procesar el lenguaje son las mismas que utiliza para el procesamiento musical [35]. Estos resultados han motivado al replanteamiento de la pregunta sobre si la música debe ser o no considerada un lenguaje natural. En el presente capítulo, más que encontrar una respuesta a esta pregunta, se plantea una primera aproximación en la que se propone una construcción que nos permita hacer analogía con el lenguaje natural escrito, comparando sus propiedades estadísticas. Posteriormente se propone un modelo de caminante aleatorio con memoria, utilizando bloques de intervalos y teoría de grafos, con la finalidad de construir líneas melódicas que reproduzcan características estadísticas de un corpus dado.

### 4.1 Bloques constitutivos

Una de las principales diferencias entre el lenguaje natural escrito y la música es la ausencia de la ley de Zipf en la distribución de notas de las piezas musicales. Sin embargo, si analizamos la forma de la distribución rango frecuencia en las letras en un texto obtenemos lo mostrado en la figura 4.1. Al comparar cualitativamente la distribución de letras con la de notas se pueden observar cierta similitud en su forma, esto nos lleva a pensar que tal vez las notas son análogas a las letras (o sílabas) y no a las palabras. Esta observación genera la pregunta: ¿cuáles son los elementos en la música que pueden ser comparados con palabras en el lenguaje escrito?. Si bien,

la estructura del lenguaje escrito y el musical es similar en cuanto a la existencia de enunciados<sup>1</sup> y frases, no queda claro si existe un equivalente de "palabra" en la música.

Para encontrar estos bloques constitutivos que podrían relacionarse con lo que representan las palabras en el lenguaje escrito, se propone una metodología a partir de una secuencia de notas  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , como primera aproximación y por simplicidad sólo se consideran series univariadas en las que la duración e intensidad de las notas son ignoradas.

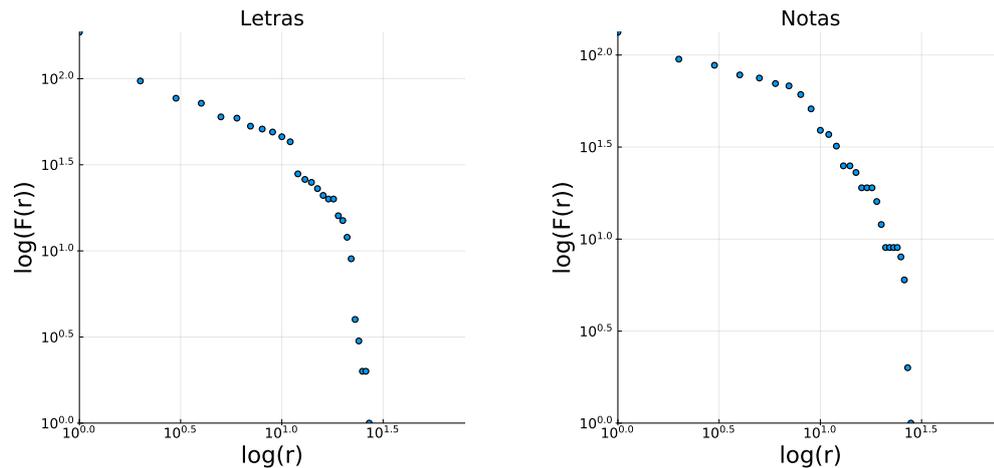


Figura 4.1: Distribuciones rango frecuencia de un letras en un texto y notas en una pieza musical. El texto es el primer capítulo de Moby Dick en inglés, la pieza es la alemana de la partita para flauta de J.S. Bach

#### 4.1.1 Serie de intervalos

Una nota individualmente no contiene significado *contextual* hasta que se coloca al lado de una segunda nota, esto quiere decir que el "significado" de un patrón de notas está dado por su secuencia de intervalos<sup>2</sup>. Analizar la secuencia de intervalos en lugar de la secuencia original reduce el alfabeto<sup>3</sup>, ya que diferentes secuencias de notas pueden tener la misma secuencia de intervalos (mediante una operación de traslación se puede ir de una a otra secuencia de notas). Por ejemplo, la secuencia (en notación MIDI)  $S_1 = \{60, 62, 64, 60\}$  tiene la misma serie de intervalos que la secuencia  $S_2 = \{74, 76, 78, 74\}$ , en este sentido  $S_1$  y  $S_2$  tienen el mismo "significado" o son "sinónimos" bajo el criterio de su secuencia de intervalos  $I = \{2, 2, -4\}$ . De forma general, la serie de intervalos se define como  $I_t = x_{t+1} - x_t$ . Una de las ventajas de trabajar con la serie de intervalos es que al reducir el alfabeto de los datos, la dispersión en las distribuciones disminuye y la estadística mejora de manera significativa.

<sup>1</sup>En música se utiliza el término semi-frase.

<sup>2</sup>El intervalo es la distancia entre dos notas, medida en medios tonos en la escala tradicional de la música occidental.

<sup>3</sup>Número de elementos diferentes en la secuencia.

### 4.1.2 Algoritmo de visibilidad en serie de rangos

El algoritmo de visibilidad desarrollado por Lacasa[12] para construir un grafo a partir de una serie de tiempo también ha sido utilizada para la identificación de patrones en éstas series[12, 36, 37]. Sin embargo, a pesar de los resultados positivos que se han obtenido con el algoritmo de visibilidad, la forma de construir el grafo ha generado controversia ya que el valor de  $x(t)$  es determinante para la conexión de ese nodo. Se ha mostrado que a pesar de que el algoritmo identifica patrones en la serie de tiempo, en algunas ocasiones sólo los logra identificar en los valores altos de la serie [38], es decir, el algoritmo falla en identificar patrones que estén dados por sus valores mínimos. Esto dificulta que el algoritmo sea efectivo en la serie de intervalos (por sus valores positivos y negativos). Para evitar este problema, se propone una alternativa a la serie de intervalos la cual consiste en tratar a los intervalos como símbolos y asignarles un valor relacionado con su frecuencia de aparición.

La distribución rango frecuencia  $F(r)$  de la serie  $I_t$  contiene información sobre las veces que es utilizado cada intervalo en la pieza. A cada intervalo de la serie  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$  es posible re-etiquetarlo con su respectivo rango. Esta asignación nos lleva a una serie de rangos  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ . De esta forma se introduce una importancia *contextual* en la serie, suponiendo que un intervalo muy poco usado tendrá correlaciones a mayor alcance que un intervalo muy frecuente o la aparición de intervalos poco frecuentes influye en los intervalos siguientes. Por su forma de construcción, la serie de rangos parece ser adecuada para la implementación del algoritmo de visibilidad.

En la figura 4.2 se resume el proceso de re-etiquetado de la serie original de notas a su serie de rangos:  $S = \{s_1, \dots, s_N\} \rightarrow I = \{i_1, \dots, i_{N-1}\} \rightarrow R = \{r_1, \dots, r_{N-1}\}$ , por la derivación en la serie de intervalos el número final de elementos es  $N - 1$ . Para ejemplificar esta re-etiquetación se toma en cuenta la serie de notas  $S = \{60, 62, 64, 65, 62, 63, 65\}$ , la serie de intervalos correspondiente sería  $I = \{2, 2, 1, -3, 1, 2\}$ . La distribución rango-frecuencia  $F(r)$  de la serie de intervalos está representada en la tabla de la figura 4.3, así como la serie de rangos construída a partir de la serie de intervalos ( $R = \{1, 1, 2, 3, 2, 1\}$ ). La forma en la que se propone construir los patrones, que llamaremos *bloques constitutivos*, es utilizando el algoritmo de visibilidad de Lacasa definido en la sección 2.3.4 con una pequeña modificación. Los bloques son definidos tomando en cuenta todos los valores que se incluyen en la región hasta donde la desigualdad  $r(t_c) < r(t_b) + (r(t_a) - r(t_b)) \frac{t_b - t_c}{t_b - t_a}$  se cumple. En la figura 4.4 se ejemplifica la construcción de forma ilustrativa en una serie de diez rangos ( $R = \{1, 6, 5, 6, 5, 6, 1, 6, 10, 3\}$ ) en la que se pueden construir cinco bloques. El primer bloque se conforma por los primeros dos valores ya que los valores 1 y 3 de la serie no cumplen con la desigualdad, al no cumplir se inicia de nuevo el algoritmo desde donde terminó el bloque anterior ( $t = 2$ ), desde el cual la desigualdad se cumple hasta el valor 4, teniendo un bloque de tres valores. El proceso se repite hasta terminar con la serie, construyendo así los cinco bloques  $B = \{\{1, 6\}, \{6, 5, 6\}, \{6, 5, 6\}, \{6, 1, 6\}, \{10, 3\}\}$ .

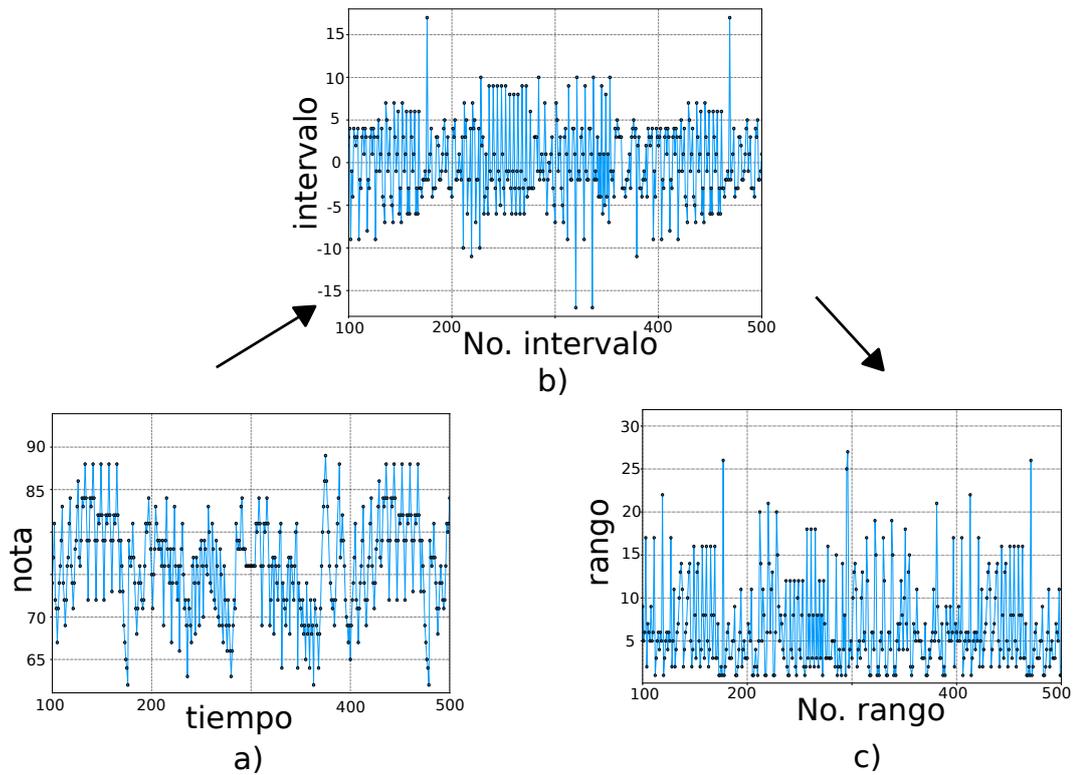


Figura 4.2: Ejemplo del mapeo desde la serie original de notas hasta la serie de rangos. La pieza es la alemana de la partita para flauta de J.S.Bach. a) Serie original de notas  $S_t$ , b) serie de intervalos  $I_t$ , c) serie de rangos  $R_t$ .

### 4.1.3 Distribuciones de bloques

Como se mencionó anteriormente, la ley de Zipf es una de las referencias más utilizadas cuando se mencionan propiedades de lenguaje natural, donde la distribución rango frecuencia de palabras en un texto sigue la forma  $F(r) \sim r^{-\alpha}$ . Otra de las leyes empíricas observadas en el análisis estadístico de texto es la ley de Heaps, la cual describe el comportamiento del vocabulario (número de palabras diferentes) en función del tamaño del texto, este comportamiento generalmente sigue una ley de potencia de la forma  $V_R(n) \sim n^\beta$ .

Se construyeron bloques con el algoritmo de visibilidad modificado para tres diferentes casos: 1) serie de notas, 2) serie de rangos de notas (construída a partir de las notas, con su distribución de rango-frecuencia) y 3) serie de rangos de intervalos (construída a partir de la serie de intervalos y su distribución de rango-frecuencia).

Considerando los bloques obtenidos en cada serie como elementos, se estimaron las leyes de Zipf y de Heaps para el Clave bien temperado de J.S. Bach. En las figuras 4.5 y 4.6, se comparan los resultados en las distribuciones de bloques y funciones de vocabulario para los tres diferentes casos. En el caso de las distribuciones de bloques (o palabras), se observa una separación entre

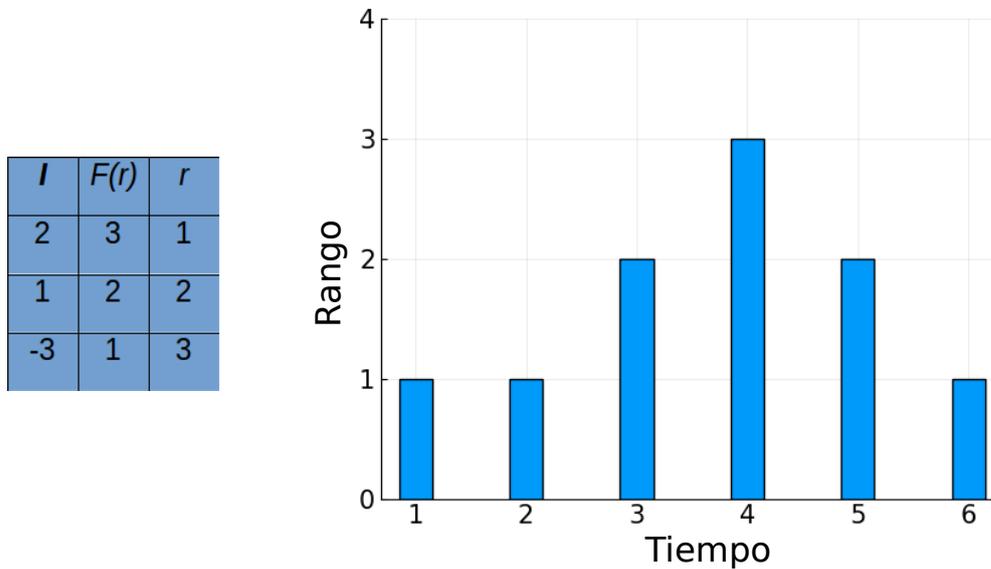


Figura 4.3:

las originadas por la serie de notas y de rango de notas con respecto a las de intervalos y de los textos. Esta separación es notoria en los primeros rangos (1 – 50) y evidencia la ausencia de una ley de potencias. En el caso de la ley de Heap, a pesar de que todos los ejemplos siguen una ley de potencias, la separación entre el vocabulario en la serie de notas y de rango de notas con respecto al de rango de intervalos es evidente. De nuevo la ley de Heap de los bloques en la serie de intervalos se asemeja más a las de las palabras en los textos. Estas dos observaciones refuerzan la propuesta de construir bloques sobre la serie de rango de intervalos, ya que, a pesar de no mostrar resultados idénticos a los del texto, se asemejan más que los otros dos casos.

En las figuras 4.7 y 4.8 se compara con la serie de rango de intervalos aleatorizada<sup>4</sup>, donde los resultados son similares a los ejemplos pasados, en el sentido que la serie de rangos de intervalos aleatorizada tiene un vocabulario mayor y sus resultados se despegan de los resultados de los textos y de la serie sin aleatorizar.

El hecho de que la serie aleatorizada tenga un vocabulario mayor se debe a que al aleatorizar, el orden de los datos se rompe y esto provoca que muchos de los patrones que identifica el algoritmo de visibilidad también se rompan y no se logren agrupar de la misma manera. Este efecto en la aleatorización de los datos se hace evidente también para otras piezas, como se muestra en las figuras 4.9 y 4.10, donde se comparan las distribuciones de dos obras originales con sus respectivas aleatorizadas y los comportamientos de cada caso coinciden. En la distribución de rango-frecuencia se observa una clara separación de las series originales con respecto a las

<sup>4</sup>Esto es, hacer un *random shuffle* en la serie original.

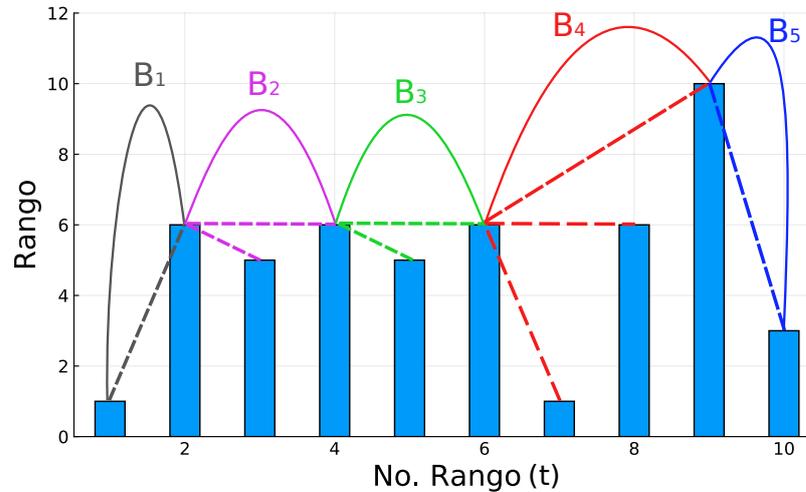


Figura 4.4: Ejemplo del algoritmo de construcción de bloques constitutivos. Las líneas rectas punteadas son los enlaces generados con el criterio del algoritmo de visibilidad de Lacasa, mientras que las líneas curvas representan el bloque completo. Cada color corresponde a un bloque diferente.

aleatorizadas en un intervalo grande de rangos, también en la función del vocabulario, donde en tamaños pequeños la separación no es tan clara, pero a tamaños grandes los valores de los originales coinciden entre si y se distinguen de los aleatorizados.

Que la serie de rangos dependa de la distribución rango frecuencia de la obra deja en duda si esta distribución induce un sesgo en la construcción de los bloques. En la figura 4.11 se observan las distribuciones rango frecuencia de los bloques en el clave bien temperado. Estas distribuciones se construyeron a partir de tres diferentes muestras, la primera consta de toda la obra (24 preludios y fugas), la cual contiene 12 preludios y fugas en tonalidades mayores y 12 en menores. Las otras dos distribuciones de bloques son del clave bien temperado dividido por tonalidades, una distribución representa a los 12 preludios y fugas en tonalidad mayor y la otra a los de tonalidad menor. La principal diferencia que existe entre una tonalidad mayor y una menor es su distribución de intervalos, los intervalos usados en cada escala son diferentes, sin embargo la construcción de los bloques muestra ser consistente ya que sus distribuciones rango frecuencia se sobrelapan a tal grado que es prácticamente imposible distinguirlas, incluso son indistinguibles respecto a la obra completa. Así, se puede afirmar que el método es independiente de la tonalidad. Cuando se extiende la construcción de bloques a más obras y se construye la gráfica de sus distribuciones rango frecuencia (Zipf) y el vocabulario en función del tamaño de la muestra (Heaps) se obtiene un comportamiento universal al igual que en el caso de los textos como se puede observar en las figuras 4.12 y 4.13. En los dos casos el comportamiento no es universal en valores pequeños (rango, tamaño), pero si hay una incidencia consistente de todos los compositores en el comportamiento de la función para valores mayores.

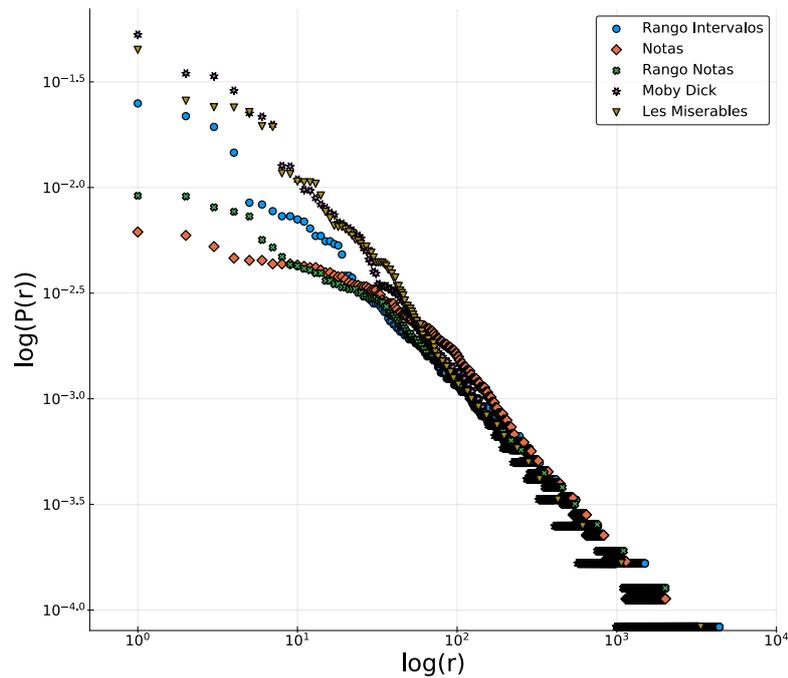


Figura 4.5: Distribución rango frecuencia en log-log. Se muestran las distribuciones de bloques en el clave bien temperado de J.S.Bach en tres casos diferentes: serie de notas, serie de rango de notas y serie de rango de intervalos. También se muestran las distribuciones de palabras en los textos Moby Dick (inglés) y Les Miserables (francés).

Las principales diferencias entre la estadística de los bloques y la de los textos son exhibidas a los primeros rangos (en el caso de Zipf) o los primeros tamaños de muestra (en el caso de Heaps). Una explicación para esto puede ser el tamaño de la muestra, ya que a pesar de que las obras analizadas son extensas, resultan no ser lo suficientemente grandes para compararlas con un libro (en número de palabras) y menos con la obra de todo un escritor.

CAPÍTULO 4. IDENTIFICACIÓN DE BLOQUES CONSTITUTIVOS Y CONSTRUCCIÓN DE MELODÍAS CON MEMORIA

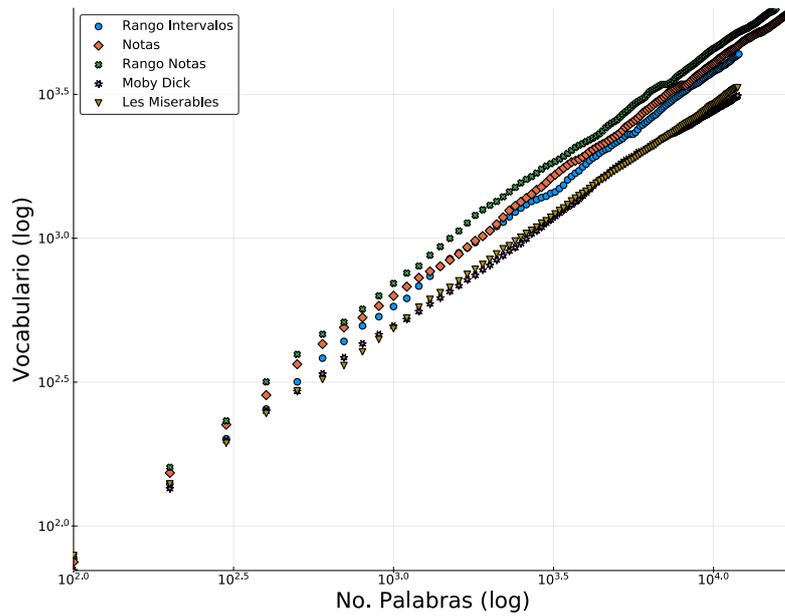


Figura 4.6: Función de vocabulario con respecto al tamaño del texto en log-log. Se muestran las funciones de bloques en el clave bien temperado de J.S.Bach en tres casos diferentes: serie de notas, serie de rango de notas y serie de rango de intervalos. También se muestran las distribuciones de palabras en los textos Moby Dick (inglés) y Les Miserables (francés).

| Bach      | Mozart  | Beethoven      | Schubert |
|-----------|---------|----------------|----------|
| 1,-1      | 2,2     | 2,-2,2         | -4,-3,-4 |
| 2,-2,2    | 2,1     | -1,1,-1        | -1,1     |
| 1,-1,1    | 2,1,2   | -1,1           | 4,3      |
| 0,0       | 1,-1,1  | -1,-2,-2,-2,-1 | -1,1,-1  |
| -3,1      | 1,-1    | -1,-2,-2,-1    | 12,-12   |
| 1,2,1     | -3,3,-3 | -5,5           | -12,0,12 |
| -1,-2,2,1 | 1,1     | 1,2            | 4,-4     |
| -1,-2,3   | 2,-2,2  | 0,0            | 4,-4,4   |
| 1,2,2     | -4,5    | -1,-2,2,1,-1   | 0,0      |
| 3,-2,-1   | -3,1,-3 | 1,2,1          | -5,5     |

Tabla 4.1: Primeros 10 bloques de intervalos más usados por compositor para las obras: libro I del clave bien temperado de J.S. Bach, cuartetos de cuerda de Mozart, sinfonía 5 de Beethoven y sinfonía 9 de Schubert.

Una diferencia a considerar del lenguaje musical con el lenguaje escrito es que el lenguaje escrito es más restrictivo en cuanto a la aparición de letras o sílabas juntas, es decir, no es común encontrar en un texto una palabra que se comporte como la misma sílaba repetida varias veces (ejemplo: "rarara"), mientras que en la música este tipo de patrón si es posible de observar (tres

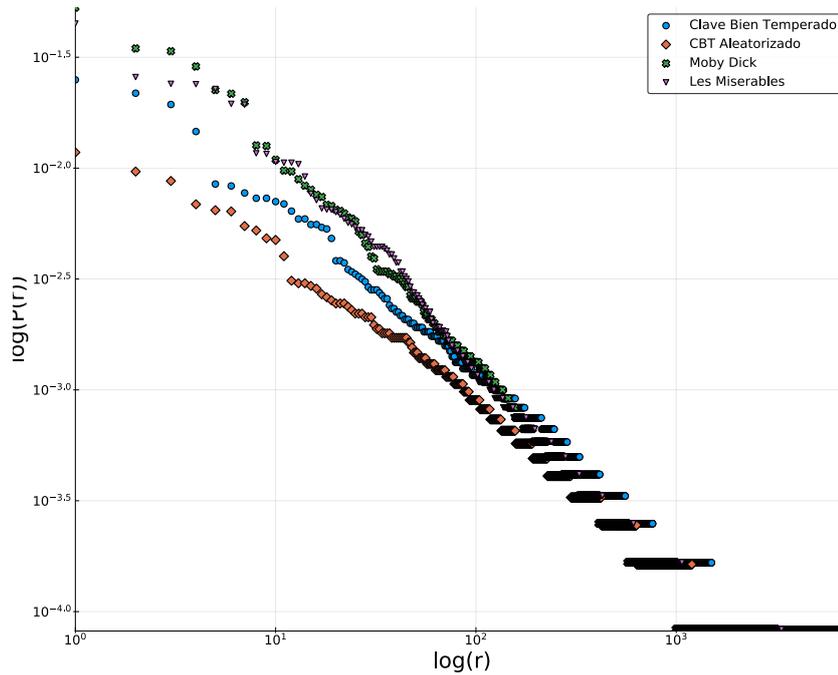


Figura 4.7: Distribuciones rango frecuencia en log-log. Se muestran las distribuciones de bloques en el clave bien temperado de J.S.Bach de dos series diferentes: serie de rango de intervalos y la serie aleatorizada de rango de intervalos. También se muestran las distribuciones de palabras en los textos Moby Dick (inglés) y Les Miserables (francés).

intervalos iguales seguidos), esta podría ser una segunda explicación de porque el vocabulario en la música es mucho más amplio que en los textos, el número de combinaciones de intervalos consecutivos que puede .

Otro tipo de información importante que se puede obtener a partir de esta aproximación, es la "preferencia" de los compositores ante algún tipo de patrón de intervalos. En las tablas 4.1 y 4.2 se enlistan los primeros 10 bloques de intervalos usados por cada compositor para las obras analizadas en este capítulo. En ellas es posible observar que existen secuencias de intervalos en común, como lo es en el caso de  $\{2, -2, 2\}$ , secuencia que se utiliza mucho para conectar melodías u otras secuencias de intervalos, en analogía con el lenguaje hablado la función de este tipo de bloques correspondería a una función similar a la de los artículos o pronombres. También se puede observar la aparición de "nuevas" secuencias en los intervalos más usados, esto para el caso del bloque  $\{4, -4\}$ , que aparece en Schubert y se mantiene en los compositores posteriores. A pesar de que sólo se muestran los primeros 10 bloques de intervalos más usados, es posible identificar similitudes y diferencias que pueden ser analizadas más detalladamente desde la perspectiva de teoría musical. También esta aproximación aporta herramientas para poder implementar un análisis estadístico que caracterice a cada compositor, o que caracterice la evolución personal del compositor a través de su preferencia de bloques, o incluso caracterizar la evolución general de bloques en la música a través de un análisis de diversidad de vocabulario

CAPÍTULO 4. IDENTIFICACIÓN DE BLOQUES CONSTITUTIVOS Y CONSTRUCCIÓN DE MELODÍAS CON MEMORIA

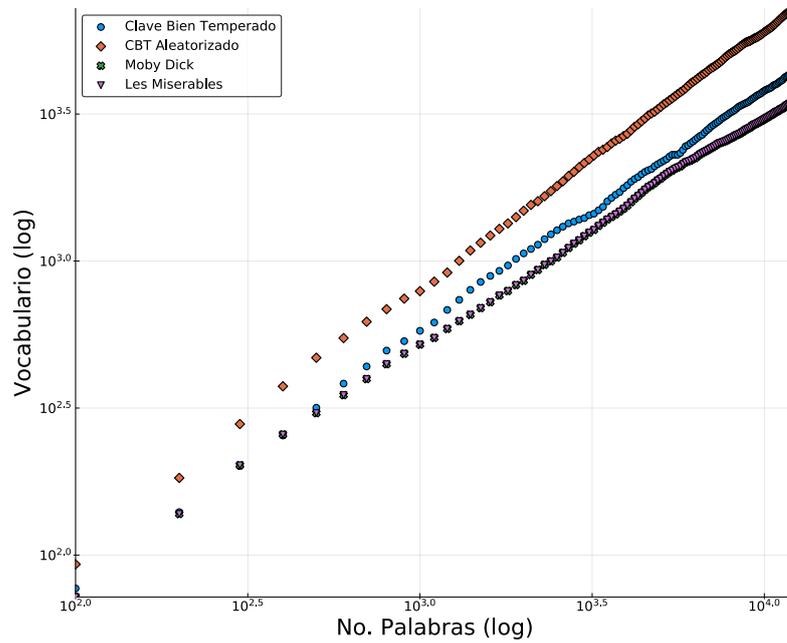


Figura 4.8: Función de vocabulario con respecto al tamaño del texto en log-log. Se muestran las funciones de bloques en el clave bien temperado de J.S.Bach en dos casos diferentes: serie de rango de intervalos y la serie aleatorizada de rango de intervalos. También se muestran los casos de los textos Moby Dick (inglés) y Les Miserables (francés).

como en estudios previos de lenguaje [39, 40].

| Mendelssohn | Chopin    | Shostakovich |
|-------------|-----------|--------------|
| 0,0         | 0,0       | -12,12,-12   |
| 1,0,1       | 1,1       | 1,-1         |
| 2,1         | 2,-2,2    | 0,0          |
| 1,1         | 1,-1,1    | 0,-2,0       |
| -1,0,-1     | 2,-2,-1,1 | 1,-1,1       |
| 4,-4        | 1,2       | 1,2,2        |
| 1,0,2       | 0,-17,16  | 0,-1,0       |
| 1,0,-3      | 21,22     | 1,-2,2,1     |
| 1,-1,-2     | -4,5      | -5,5         |
| 2,0,1       | 5,0,-15   | 4,-4         |

Tabla 4.2: Primeros 10 bloques de intervalos más usados por compositor para las obras: sinfonía 4 de Mendelssohn, Mazurkas de Chopin y 24 preludios y fugas de Shostakovich.

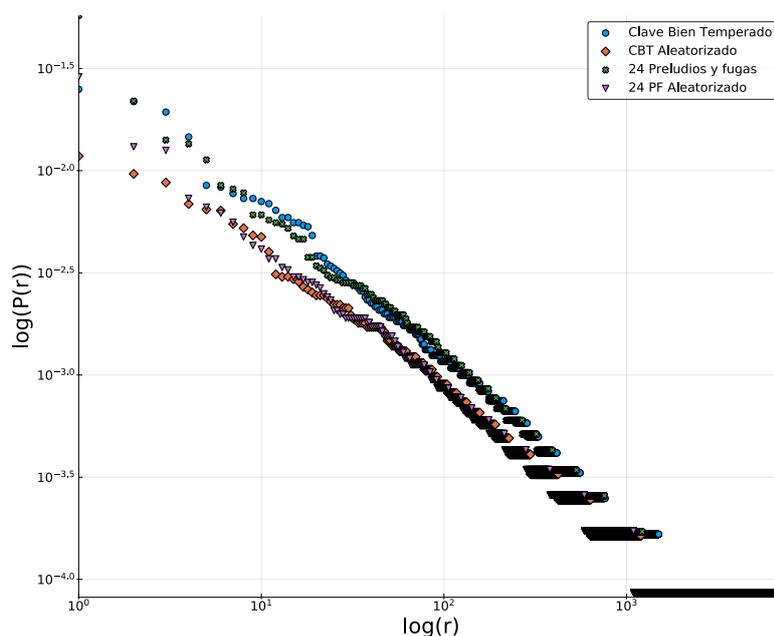


Figura 4.9: Distribución rango frecuencia en log-log. Se muestra el clave bien temperado de J.S.Bach de los bloques de dos series diferentes: serie de rango de intervalos y la serie aleatorizada de rango de intervalos. También se muestran los 24 preludios y fugas de Shostakovich en las dos mismas variantes.

## 4.2 Melodías con memoria

Una de las aplicaciones que se han desarrollado mediante el estudio estadístico de obras musicales es la de generar mecanismos para composición algorítmica. Desde el punto de vista computacional y de tecnología musical, la composición algorítmica representa un gran reto por su similitud con el lenguaje natural, lograr que una máquina componga una pieza musical por si sola sería prácticamente pasar la prueba de Turing. Ya existen algoritmos que hacen muy bien este trabajo, incluso en piezas polifónicas [41] o en imitación de estilos como el caso de *Flow Machines* [42], un proyecto que a través de machine learning logró componer<sup>5</sup> una canción con estilo similar a los Beatles.

Desde la perspectiva de los sistemas complejos la motivación del análisis de piezas y composición algorítmica es diferente. Una de las grandes interrogantes es qué tipo de mecanismos se ven involucrados en el proceso que un compositor realiza al generar una melodía (proceso cognitivo, proceso creativo), pregunta que incluso a los mismos compositores se les dificulta responder [43].

<sup>5</sup>No compuso la canción de forma completamente autónoma, requirió una revisión y modificación humana posterior a la generación de la pieza.

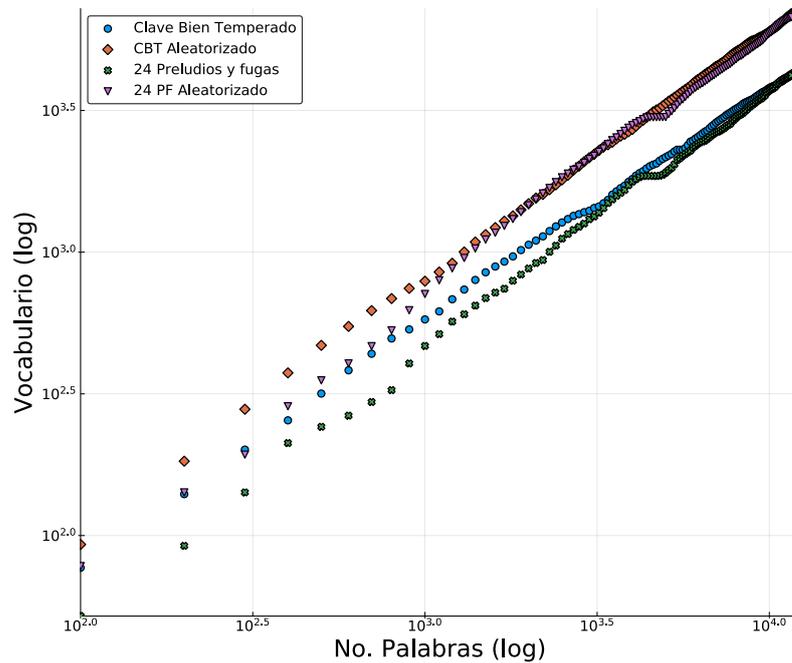


Figura 4.10: Función de vocabulario con respecto al tamaño del texto en log-log. Se muestra el clave bien temperado de J.S.Bach de los bloques de dos series diferentes: serie de rango de intervalos y la serie aleatorizada de rango de intervalos. También se muestran los 24 preludios y fugas de Shostakovich en las dos mismas variantes.

#### 4.2.1 Caminatas aleatorias con memoria

Tal vez no se podrá dar una respuesta inmediata a la pregunta planteada sobre el proceso cognitivo involucrado en la generación de nuevas melodías, sin embargo, existen propuestas de modelos basados en procesos estocásticos con memoria que reproducen comportamientos similares a los observados empíricamente en los procesos de creatividad e innovación [44]. Modelos de caminantes aleatorios han mostrado ser eficientes en reproducir procesos de innovación en artículos científicos [45]. En este último modelo se plantea un grafo  $G = (V, E)$  donde cada nodo (vértice) corresponde a una idea o concepto y el enlace  $(i, j)$  denota la existencia de una relación directa entre los conceptos  $i$  y  $j$ .

La matriz de pesos del grafo está dada por  $W^t$  (inicialmente esta matriz corresponde a la matriz de adyacencia), mientras que su matriz de probabilidad  $P^t$ , siendo las dos matrices dependientes del tiempo. Formalmente la probabilidad de ir del nodo  $i$  al nodo  $j$  al tiempo  $t$  se escribe como:

$$(4.1) \quad P_{ij}^t = \frac{W_{ij}^t}{\sum_l W_{il}^t},$$

donde la matriz de transición  $P^t$  depende de la matriz de los pesos de los enlaces al tiempo  $t$  y satisface la normalización  $\sum_j P_{ij}^t = 1 \forall j, t$ . El paso que agrega la memoria o la no markovianidad

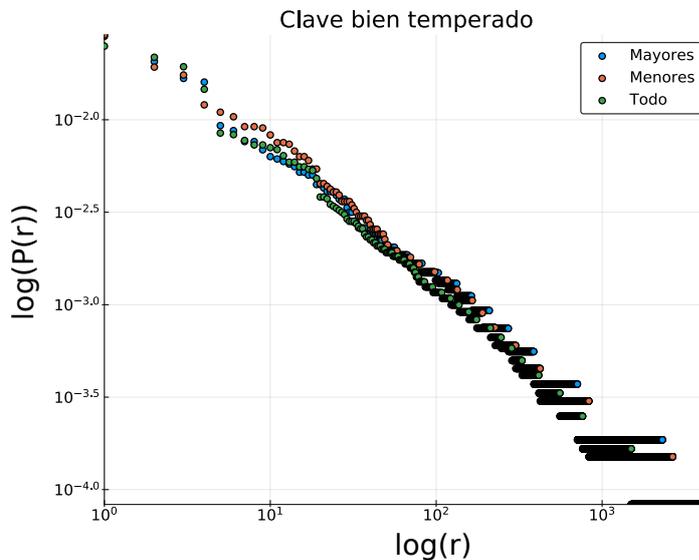


Figura 4.11: Distribuciones rango frecuencia normalizadas en escala log-log, para el Clave bien temperado de J.S. Bach en tres diferentes casos: tonalidades mayores, tonalidades menores y obra completa.

es al momento que el caminante transita sobre el enlace  $(i, j)$ , en este caso su peso aumenta por una cantidad  $\delta w > 0$ . Este tipo de mecanismo imita el hecho de que la relación entre dos ideas o conceptos se "refuerza" cada vez que son asociados por un proceso cognitivo. En otras palabras, cada vez que un enlace es transitado, el peso asociado al enlace se refuerza de la forma:

$$W_{ij}^{t+1} = W_{ij}^t + \delta w.$$

Así el refuerzo  $\delta w$  es considerado como un parámetro del modelo. La co-evolución de los pesos de la red con el movimiento del caminante induce una memoria a largo plazo en las trayectorias que reproduce observaciones empíricas de correlaciones en la dinámica de innovaciones [45]

### 4.2.2 Caminata sobre *ideas musicales*

En física estadística los modelos que se han desarrollado para la generación de melodías son variantes de procesos markovianos [46] (de diferentes órdenes) o modelos de máxima entropía basados en interacciones por pares [47]. El problema con modelos markovianos, además de que no generan memoria, si se quiere hacer que dependa de  $n$  pasos anteriores se necesita de una buena estadística y generalmente los corpus musicales son reducidos en datos. El modelo propuesto por Sakellariou [47], basado en maximización de entropía de interacciones por pares, obtiene mejores resultados que un modelo markoviano sin necesidad de un corpus grande, el problema con este modelo es que el proceso de parametrización es muy costoso, además de que plantea

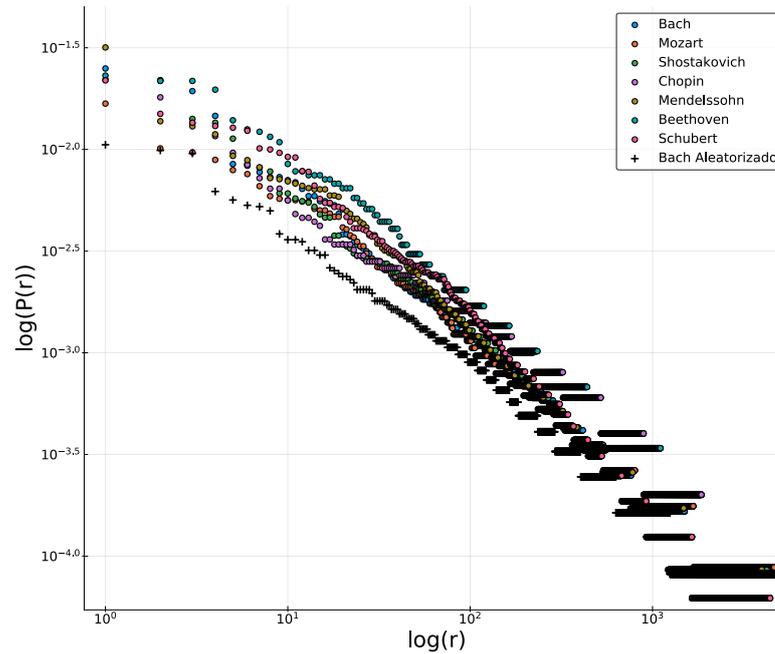


Figura 4.12: Distribuciones rango frecuencia normalizadas para diferentes compositores en escala log-log. Las obras son: libro I del clave bien temperado de J.S. Bach, cuartetos de cuerda de Mozart, 24 preludios y fugas de Shostakovich, Mazurkas de Chopin, sinfonía 4 de Mendelssohn, sinfonía 5 de Beethoven y sinfonía 9 de Schubert.

interacciones entre notas enfocándose principalmente en el resultado y no en el planteamiento de una analogía con procesos cognitivos.

En esta sección se propone un modelo sencillo, de bajo costo, basado en caminatas aleatorias con memoria. El modelo consiste en un grafo, en el que cada nodo representa un concepto o idea musical, estas ideas serán los bloques constitutivos que se definieron en la sección anterior. Así la propuesta es que cuando un compositor genera una nueva melodía no piensa en notas, si no en secuencias de notas o intervalos, generando memoria cada vez que relaciona una idea  $i$  con una idea  $j$ , reforzando el enlace  $i \rightarrow j$  con un peso  $\delta w$ .

A diferencia del modelo de Latora [45], el grafo de ideas musicales es dirigido, ya que existe una dirección temporal en las piezas. La red de conceptos del modelo se construye como una red de mundo pequeño, topología que ha mostrado ser eficiente al momento de modelar y representar estructura sobre conceptos que favorece a la creatividad [48, 49]. El criterio de conexión entre dos conceptos musicales  $B_i \rightarrow B_j$  es que tienen que pertenecer a la misma pieza ( $B_i, B_j \in I_t$ ), además de que el último valor de  $B_i$  tiene que ser igual al primer valor de  $B_j$  ( $B_i(N_i) = B_j(N_j)$ ). Este último traslape asegura que todos los intervalos generados en la caminata existan en la distribución inicial de intervalos.

Para la implementación de la caminata con memoria, se construye un grafo de ideas musicales

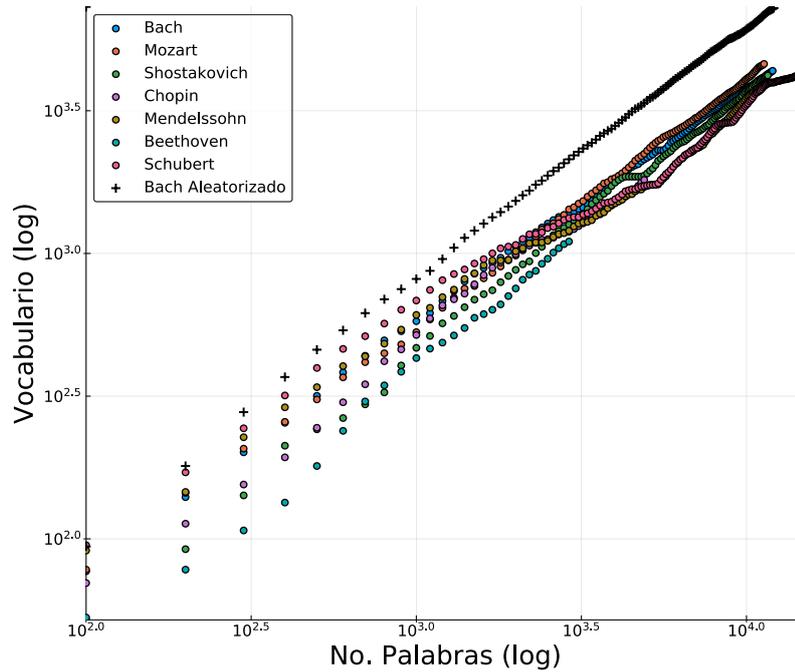


Figura 4.13: Función del vocabulario con respecto al tamaño de la muestra en escala log-log. Las obras son: libro I del clave bien temperado de J.S. Bach, cuartetos de cuerda de Mozart, 24 preludios y fugas de Shostakovich, Mazurkas de Chopin, sinfonía 4 de Mendelssohn, sinfonía 5 de Beethoven y sinfonía 9 de Schubert. Se utiliza como referencia el Clave bien temperado aleatorizado.

obtenidas de un corpus, el grafo se inicializa conectando las ideas musicales (nodos) con el criterio previamente mencionado, de tal forma que todos los nodos tengan dos conexiones cada uno, una de entrada y otra de salida, sin tener transiciones a ellos mismos (es decir el valor  $W_{ii} = 0$ ), asegurando así que no existan nodos sin conectar y que todos se puedan visitar, después para cada nodo del grafo se genera una nueva conexión de forma aleatoria con probabilidad  $\epsilon$ . En la figura 4.14 se muestra una representación ilustrativa de la inicialización del grafo junto con su matriz de pesos inicial.

Una vez inicializada la matriz de transición (o de pesos)  $W$ , se normaliza como en la ecuación 4.1, y se escoge un nodo aleatoriamente sobre el cual empezar la caminata. La evolución del caminante es como se describe en la sección 4.2.1, y su serie final de intervalos se integra para obtener una serie de notas.

Para evaluar los resultados de las caminatas con memoria se construyó un modelo nulo markoviano cuya matriz de transición corresponde a como están conectados los bloques en la pieza original. En la figura 4.15, se muestra el resultado del DFA ( $\log(F(s))$ ) de 100 realizaciones (zona sombreada) para tres diferentes tipos de caminante y la pieza original (Alemanda de la partita para flauta de J.S.Bach). Los dos caminantes con  $\delta w = 0$  y  $\delta w = 10$  tuvieron el mismo grafo, es

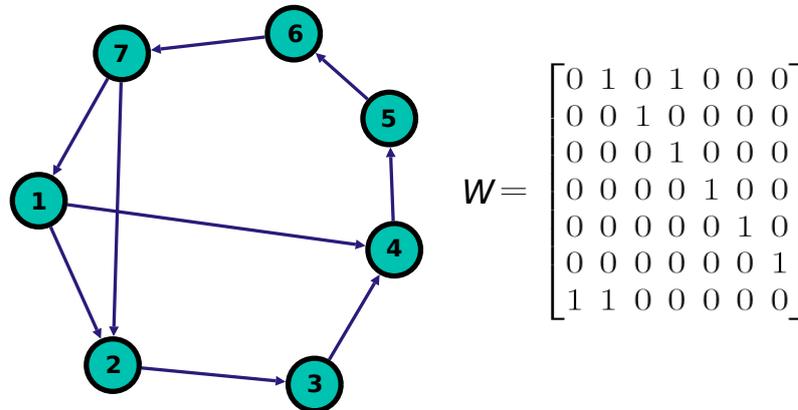


Figura 4.14: Ilustración de un grafo de mundo pequeño y su matriz inicial de pesos, de manera similar se inicializa el grafo para el caminante aleatorio reforzado.

decir sólo se inicializó una vez el grafo y sobre ese grafo se simularon las 100 realizaciones para cada parámetro. Es posible observar una diferencia del grafo de mundo pequeño con respecto al modelo markoviano, éste último muestra valores por debajo de la pieza original, esto quiere decir que en general las realizaciones con el modelo markoviano están menos correlacionadas.

El resultado interesante es que bajo la misma condición inicial de topología del grafo, el caminante con refuerzo ( $\delta w = 10$ ) muestra menor magnitud en sus correlaciones con respecto al caminante sin refuerzo. Pero a su vez, el caminante con refuerzo es el que en general muestra mayor similitud con la pieza original, ya que la pieza original cae dentro del rango del caminante con refuerzo. En la figura 4.16 se muestra la gráfica de 100 realizaciones para refuerzos de  $\delta w = 0$  y  $\delta w = 10$  pero con diferentes condiciones iniciales de grafo, cada realización se inicializó el grafo con los criterios mencionados y se simuló la caminata aleatoria. La dispersión en los valores de la función  $\log(F(s))$  de los dos caminantes deja en evidencia lo sensible que es el modelo a la construcción inicial del grafo. Este resultado no es malo precisamente, ya que la variación en estructura puede resultar interesante al momento de evaluar estéticamente las melodías generadas. Sin embargo, el hecho de que la dispersión sea grande genera dudas sobre el criterio de inicialización del grafo, que podría necesitar algún tipo de refinamiento.

Por último, se realizó una prueba con los caminantes para ver si eran consistentes en la construcción de las leyes de Zipf y Heaps. Para esto, en cada pieza de la obra completa se generó una realización de un caminante con memoria  $\delta w = 10$ . En el caso del clave bien temperado, donde hay 24 preludios y fugas (48 piezas), se generaron 48 caminantes, uno para cada voz de cada pieza. Estos caminantes representan una obra sintética generada con el modelo propuesto, en la figura 4.17 se muestran los resultados de las leyes de Zipf y Heaps para la obra de caminantes y para la obra original donde las dos obras resultan prácticamente indistinguibles en los dos casos. Estas dos pruebas muestran que el tipo de modelo propuesto es consistente y reproduce

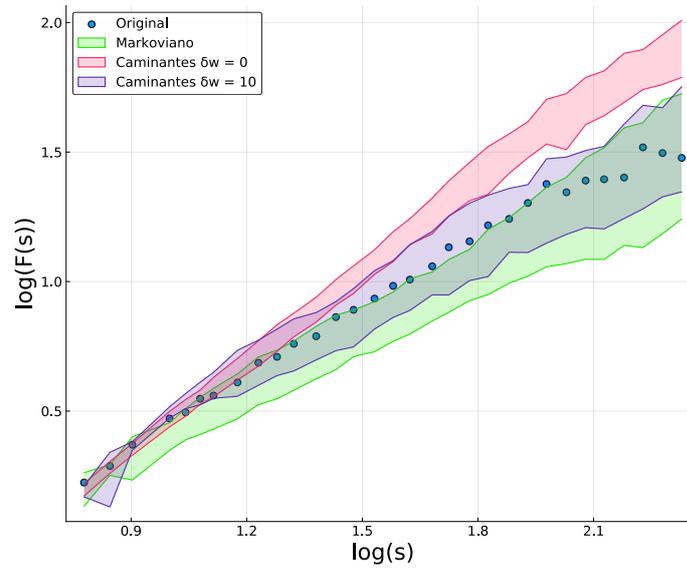


Figura 4.15: Función  $F(s)$  para la pieza original (puntos) y para caminantes sobre la red con topología de mundo pequeño, sin refuerzo  $\delta w = 0$ , con refuerzo de  $\delta w = 10$  y caminantes markovianos. El área sombreada representa 100 diferentes realizaciones de cada caminante.

propiedades estadísticas del corpus seleccionado, evidenciando que el modelo es una buena primera aproximación dejando trabajo para futuro en cuanto a su refinamiento y validación, tal vez la prueba más rigurosa sería la de evaluar su aceptación frente a una audiencia, experimento que queda propuesto para futuras investigaciones.

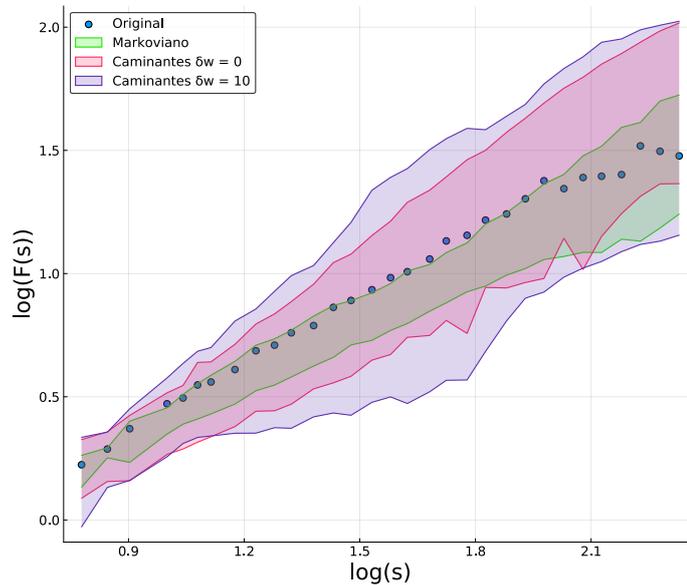


Figura 4.16: Funcion  $F(s)$  para la pieza original (puntos) y para caminantes sobre la red con topología de mundo pequeño, sin refuerzo  $\delta = 0$  y con refuerzos de  $\delta = 5$  y  $\delta = 10$ . El área sombreada representa 50 diferentes realizaciones de cada caminante.

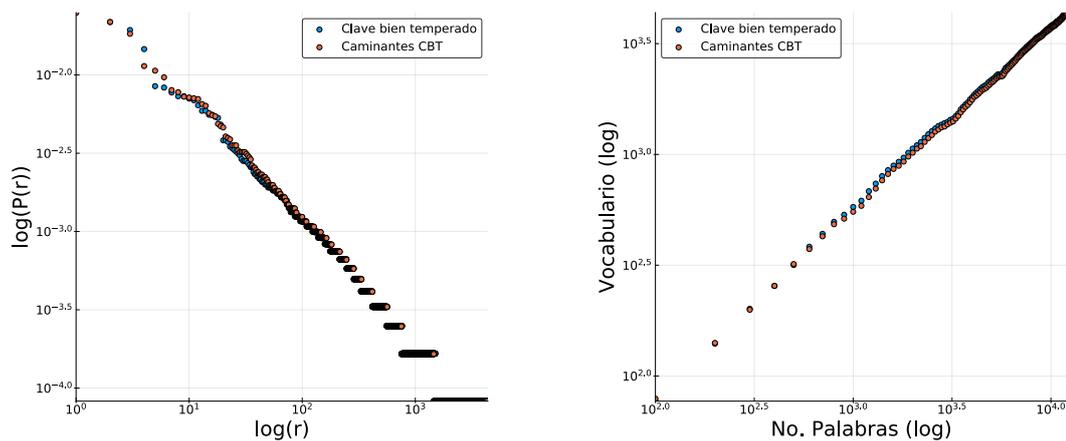


Figura 4.17: Izquierda: Distribución rango frecuencia para una realización de caminantes ( $\delta w = 10$ ) en cada una de las piezas del clave bien temperado comparando con la distribución del clave bien temperado. Derecha: Relación log-log del vocabulario con respecto al tamaño, en los casos de una realización de caminantes con  $\delta w = 10$  y el corpus original del clave bien temperado.

## CONCLUSIONES

**E**n esta tesis se presentó un análisis detallado de partituras utilizando diferentes herramientas de física estadística y sistemas complejos. Se presentaron dos estudios con resultados novedosos y promisorios. En el presente capítulo se mencionan los resultados más relevantes y las conclusiones a las que llevan.

### 5.1 Sobre leyes de potencia y no linealidad

A pesar de que un porcentaje grande (38%) de las piezas analizadas mostraron una clara ley de potencia sobre todas las escalas de tiempo, se encontró que el perfil dominante (53%) muestra dos regiones con leyes de potencia a diferentes escalas de tiempo. Este resultado contrasta con el de algunos estudios previos donde sólo se encuentra una ley de potencia a todas las escalas de tiempo[13–15, 22]. La existencia de dos regiones con invarianza de escala se había reportado anteriormente[23], pero el análisis de un mayor número de partituras y compositores reveló más variantes de este perfil no reportadas previamente. El análisis detallado de las series de tiempo permitió identificar el origen de estas dos regiones.

Con la estimación de las funciones  $F(s)$  se observaron tendencias en el comportamiento de los valores del exponente de Hurst entre los compositores y a través de las épocas. Esta tendencia puede relacionarse con las formas y las reglas de composición, en el caso de escalamiento único, la distribución acumulada de los exponentes muestra que las piezas con exponentes mayores (mayor correlación) son las piezas que corresponden a los autores de periodos de tiempo más antiguos. La magnitud de los exponentes decrece hacia los compositores modernos con la excepción de Shostakovich, quien muestra valores altos en sus exponentes, resultado que es atribuido a la forma musical de sus piezas estudiadas (fuga), la cual está basada en una estructura musical

antigua.

Para los casos con dos exponentes  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , la tendencia en los exponentes  $\alpha_1$  es similar al caso de escalamiento único, ya que en promedio disminuye hacia compositores modernos. La dispersión sobre  $\alpha_1$  es mucho mayor que la dispersión en  $\alpha_2$ , mostrando que tal vez las reglas armónicas en notas a escalas de tiempo cortas son menos restrictivas que las de escalas de tiempo largas. La variación de notas a escalas cortas de tiempo crece a través de los periodos musicales, mientras que la variación de estructura en escalas grandes de tiempo es más conservada. Es decir, las reglas de composición a escalas cortas de tiempo han evolucionado mucho, mientras que las reglas en estructura a escalas grandes de tiempo se siguen conservando en gran medida.

Al implementar el método de DFA sobre la serie de magnitudes se identificaron correlaciones no lineales, las cuales mostraban perfiles diferentes sin alguna propiedad evidente para poder caracterizarlos estadísticamente. La interpretación de los perfiles y magnitudes de las funciones  $F(s)/s$  es complicada ya que una asociación de la naturaleza de estas correlaciones con la serie de tiempo original es una tarea no trivial. Sin embargo, los resultados del experimento realizado sugieren que las correlaciones no lineales también aportan estructura a la pieza. Su presencia influye sobre la aceptación o valoración estética de las piezas por parte de la audiencia. Este resultado, sin ser conclusivo, plantea muchas preguntas y problemas que por medio de un enfoque transdisciplinar de sistemas complejos y neurociencias.

## 5.2 La música y el lenguaje natural

La construcción de bloques constitutivos propuesta en esta tesis, mediante el algoritmo de visibilidad de Lacasa, logró capturar cualitativamente propiedades estadísticas que se observan comúnmente en las palabras del lenguaje natural escrito. La consideración de intervalos en lugar de notas parece ser un elemento importante al momento de construir los bloques. Pero tal vez el elemento más trascendente es utilizar la distribución rango frecuencia para el re-etiquetamiento de la serie de intervalos. Los resultados obtenidos con esta forma de re-etiquetar en comparación con los resultados de la series original de notas y de la serie de notas re-etiquetada por sus rangos mostraron una mayor similitud con textos al reproducir las leyes de Zipf y Heaps. Este último resultado sugiere que considerar los eventos menos comunes como elementos relevantes es determinante para la construcción de los bloques. Es importante mencionar que ésta no necesariamente es la única forma de agrupación de notas que pueda reproducir propiedades estadísticas de textos, sin embargo es una buena propuesta que valdría la pena seguir explorando y modificando para mejorar los resultados.

Los bloques construidos a partir de las piezas musicales se consideraron como nodos que representan "ideas musicales" dentro de un grafo de mundo pequeño en el cual se realizaron caminatas aleatorias con reforzamiento para generar melodías. Al comparar las funciones de fluctuaciones (DFA) con la de la pieza original se evidenció que este procedimiento captura la estructura de la

pieza original mejor que caminatas aleatorias sin reforzamiento. Las melodías generadas con este procedimiento cumplen con las leyes de Zipf y Heaps presentes en el corpus musical original. Estos resultados sugieren que este tipo de modelo de caminatas con reforzamiento en grafos de mundo pequeño pueden ser un buen punto de partida para estudiar procesos de generación de nuevas melodías.

### **5.3 Perspectivas y trabajo a futuro**

En esta tesis se presentaron resultados promisorios que generan muchas preguntas y abren la posibilidad de plantear nuevas líneas de investigación. Entender el origen y las propiedades de las correlaciones no lineales en una serie de tiempo es un tema abierto. Comprender la implicación de la existencia de este tipo de correlaciones a nivel artístico y perceptual también es un tema de frontera en neurociencias, para esto se necesita una exploración experimental sistemática acorde a los planteamientos de esta tesis.

Presentar una analogía entre el lenguaje natural y la música abre puertas a investigaciones de problemas nuevas. Los estudios sobre lenguaje en textos son extensos y se han desarrollado muchas herramientas para analizar diferentes comportamientos de lenguaje. Este antecedente sugiere que utilizar los bloques contruídos como palabras y hacer análisis estadísticos similares a los ya realizados en textos, permita vislumbrar nuevas propiedades dentro de la música e incorporar su análisis al área de estudio del lenguaje.





**E**n este apéndice se incluyen datos complementarios, junto con la explicación de detalles técnicos y pruebas realizadas para validar algunos resultados presentados en los capítulos 3 y 4.

## **A.1 Escalamiento y no linealidad**

La lista completa de las piezas analizadas en el capítulo 3 es la siguiente:

- 21 Motets de Palestrina: *adoramus te christe, animea mea turbata, ave maria, choral crux fidelis, o bone jesu, pie jesu domine, confitemini domino, dies sanctificatus, gloriosi principes, hodie christus natus est, in diebus illis, innocentes, jesu dulcis memoria, jesu rex admirabilis, o admirabile commercium, o beata et gloriosa trinitas, sicut cervus, sitivit anima mea, super flumina babilonis, tantum ergo and veni sposa.*
- La ofrenda musical completa (15 piezas) y el primer libro del Clave bien temperado (48 piezas) de J.S. Bach.
- Cuartetos de cuerda Op. 76 and Op. 33 (48 piezas) de Haydn.
- Sonatas para piano No.7,8,11,12 y 13 (12 piezas), cuartetos de cuerda No.14,15,16,17,18 y 19 (24 piezas) de Mozart.
- 21 fugas: Hess 236,237 y 238, cuartetos de cuerda No.1,2,3,4,12,13,14,15 y 16 (42 piezas) de Beethoven.
- 8 Humoresques y 12 Silhouettes para piano, Serenade para cuerdas (25 piezas en total) de Dvorak.
- 24 preludios y fugas para piano (48 piezas) de Shostakovich.

### A.1.1 Construcción de las series de tiempo

Para la construcción de las series de tiempo, primero los archivos MIDI se convierten a archivos de texto tipo .csv con el software libre midicsv [50], estos archivos .csv tienen una estructura como la que se muestra en la figura A.1.

```

0, 0, Header, 1, 2, 480
1, 0, Start_track
1, 0, Title_t, "Close Encounters"
1, 0, Text_t, "Sample for MIDICSv Distribution"
1, 0, Copyright_t, "This file is in the public domain"
1, 0, Time_signature, 4, 2, 24, 8
1, 0, Tempo, 500000
1, 0, End_track
2, 0, Start_track
2, 0, Instrument_name_t, "Church Organ"
2, 0, Program_c, 1, 19
2, 0, Note_on_c, 1, 79, 81
2, 960, Note_off_c, 1, 79, 0
2, 960, Note_on_c, 1, 81, 81
2, 1920, Note_off_c, 1, 81, 0
2, 1920, Note_on_c, 1, 77, 81
2, 2880, Note_off_c, 1, 77, 0
2, 2880, Note_on_c, 1, 65, 81
2, 3840, Note_off_c, 1, 65, 0
2, 3840, Note_on_c, 1, 72, 81
2, 4800, Note_off_c, 1, 72, 0
2, 4800, End_track
0, 0, End_of_file
    
```

Figura A.1: Ejemplo del archivo .csv que se obtiene del MIDI, la estructura del archivo es de columnas separadas por comas.

La información dada por las columnas del archivo .csv corresponde al 1) número de pista, refiriéndose al canal o instrumento del archivo MIDI, 2) tiempo, es el tiempo en milisegundos cuando una "acción" se ejecuta, 3) el evento o acción que se ejecuta, puede ser que se prenda o apague una nota, que es el caso que se busca para la construcción de la serie de tiempo, 4) la nota en código MIDI, correspondiendo a una nota en la escala temperada de la música occidental, escala que va de 0-127.

Con la función `csvtoserie(file.csv)` del repositorio `InfoSeries.jl`, se construye una serie de tiempo multivariable como la de la figura 3.4.

### Las funciones $\log(F(s))$

Todas las gráficas de las funciones  $\log(F(s))$  estimadas en el capítulo 3, se pueden encontrar en el repositorio[51] o en la dirección <https://github.com/spiralizing/SI>, las gráficas se encuentran como en el formato de la figura A.2, también se encuentran todos los ajustes lineales para los exponentes  $\alpha$  en los casos de invarianza,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en los casos de crossover como se ejemplifica en la tabla A.1.

Para asegurar que la existencia de dos regiones invariantes de escala no es un artefacto del método de cálculo (en este caso la forma vectorial del DFA), se estimaron las funciones  $F(s)$  individualmente (DFA) y de forma vectorial ( $n$ -DFA) para diferentes piezas. En la figura A.3

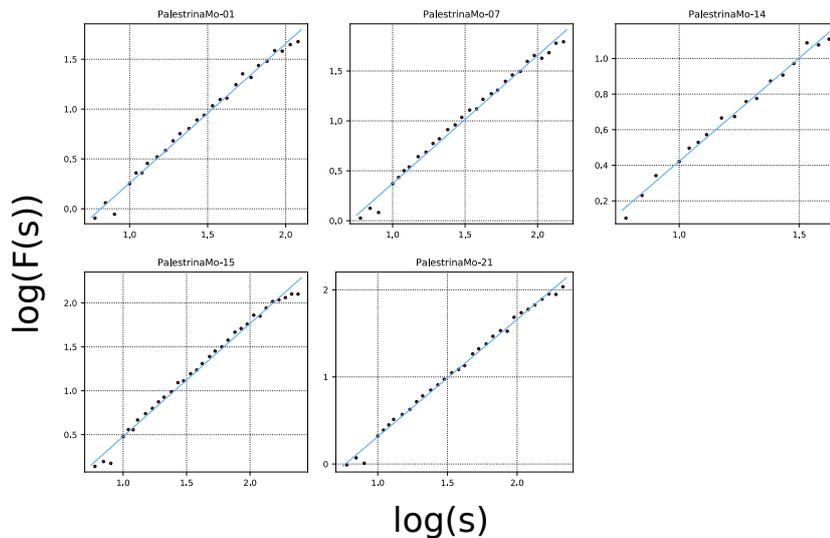


Figura A.2: Gráficas log-log del conjunto de piezas con invarianza de escala para el caso de Palestrina.

| Pieza    | $\alpha$ | $R^2$ |
|----------|----------|-------|
| PalMo-01 | 1.39     | 0.991 |
| PalMo-07 | 1.28     | 0.990 |
| PalMo-14 | 1.16     | 0.991 |
| PalMo-15 | 1.28     | 0.990 |
| PalMo-21 | 1.34     | 0.994 |

Tabla A.1: Piezas de Palestrina que presentan invarianza de escala, valor del exponente de Hurst con ajuste lineal y el  $R^2$  para cada ajuste.

se muestran los resultados de tres piezas diferentes (arriba), donde se puede observar que las dos regiones que se presentan en el  $n$ -DFA también se hacen evidentes en los DFA individuales, confirmando que es algo propio de la serie de tiempo y no depende del método. En la parte de abajo están las series de tiempo aleatorizadas, prueba nula en donde las dos regiones que se mostraban antes desaparecen y queda sólo una región con un exponente de  $\alpha = 0.5$  correspondiente a ruido blanco (ruido descorrelacionado). También se corroboró la relación entre los exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  mencionada en el capítulo 2 ( $\beta = 2\alpha - 1$ ). Esta relación se conserva también los casos de la existencia de un crossover, como se puede observar en la figura A.4, donde se muestran las gráficas del espectro de potencias y el DFA de la primer voz de tres piezas diferentes.

### Piezas de la figura 3.14

De arriba a abajo y de izquierda a derecha por renglones, las piezas de la figura son: 2do mov. de la sonata sopr'il soggetto reale, fuga No.3 y preludio No.13 del clave bien temperado de J.S. Bach. Motets *anima mea turbata, in diebus illis* y *innocentes* de Palestrina. 2do mov. del cuarteto

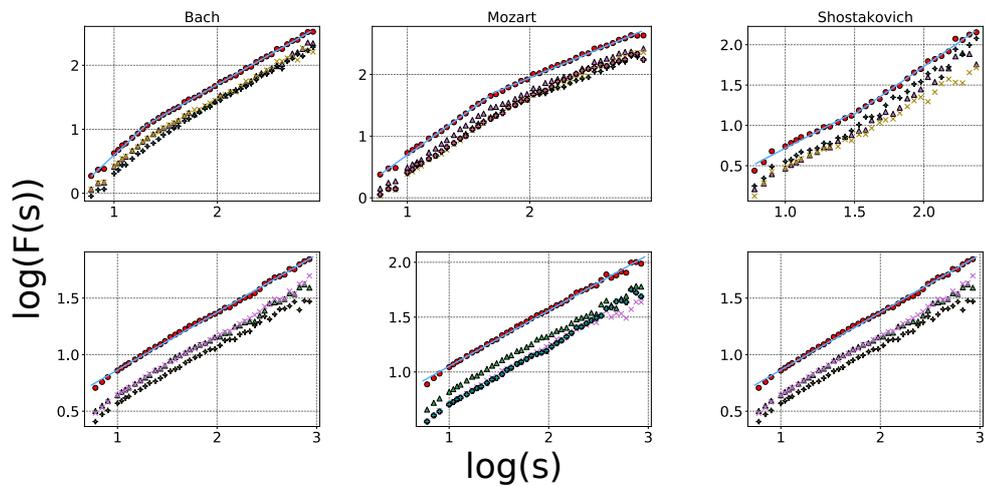


Figura A.3:  $n$ -DFA y DFA de tres diferentes piezas. En la parte de arriba, la primera de izquierda a derecha corresponde a la Sonata sop'ril Soggetto Reale de Bach, la segunda gráfica es el 4to movimiento del cuarteto de cuerdas No. 18 de Mozart y la fuga 23 de Shostakovich.

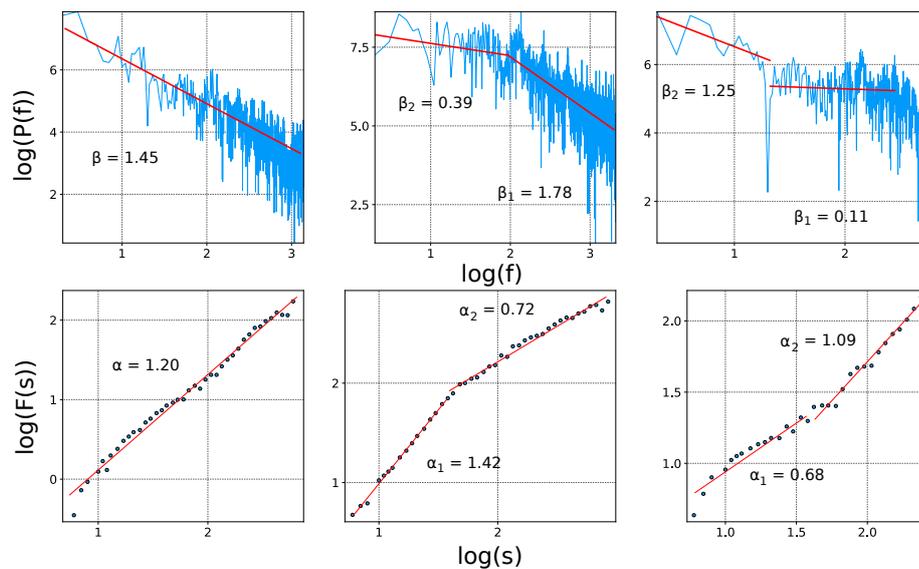


Figura A.4: Tres diferentes ejemplos del espectro de potencias y el DFA de una sola voz de la pieza. Las piezas son: Fuga no. 12 del clave bien temperado de Bach, 2do movimiento del cuarteto de cuerdas No. 18 de Mozart y la fuga no.23 de Shostakovich.

de cuerdas No.5 Op.76, 3er mov. del cuarteto de cuerdas No.5 Op.33 y 1er mov. del cuarteto de cuerdas No.6 Op.33 de Haydn. 1er y 3er movimiento del cuarteto de cuerdas No.17 y 4to mov. del cuarteto de cuerdas No.20 by Mozart. 3er mov.del cuarteto de cuerdas No.13, 4to mov. del cuarteto de cuerdas No.14 y 4th mov. del cuarteto de cuerdas No.15 de Beethoven. Humoresque No.5, silhouette No.9 y 3er mov. de la serenata para cuerdas de Dvorak. Fuga No.2, preludio No.6

y fuga No.21 de los 24 preludios y fugas de Shostakovich.

### **Encuesta de evaluación estética**

La encuesta presentada en el capítulo 3 para evaluar la aportación que podrían tener las correlaciones no lineales en la percepción estética de las piezas consistía en las siguientes preguntas:

- Sexo
- Edad
- ¿Cuánto tiempo has llevado clases de música?
  - 0 años
  - 1-2 años
  - 2-5 años
  - 5-10 años
  - más de 10 años
- Califica los siguientes audios en una escala de 1 (muy desagradable) hasta 10 (muy agradable)

Los audios no contaban con algún título, y fueron cambiados en orden continuamente de tal forma que el orden no pudiera tener alguna influencia en las calificaciones. La encuesta puede ser consultada en la siguiente dirección:<https://goo.gl/forms/sxBHsQvq8c6h2M592>. Los cuatro audios, 2 originales y 2 sustitutos se encuentran en la siguiente dirección:

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLoD70c-VwZn3ZfB5GIORbmmTI1sHsoQZy>.

Además de los resultados mencionados en el capítulo 3, también se obtuvieron un par de resultados en la encuesta que llaman la atención. En la figura A.5 se muestran los resultados para cada uno de los audios separados por tiempo de entrenamiento musical. Para el caso de las piezas originales, la calificación no cambia considerablemente con respecto al tiempo de entrenamiento musical, en donde si se observa una diferencia significativa es para el caso de los sustitutos, ya que hay una tendencia a calificaciones mayores conforme el número de años de entrenamiento musical es mayor. Este resultado se puede interpretar en la forma de que las personas con más entrenamiento musical tienen una mejor "aceptación" de la música que personas con poco o nulo entrenamiento. Otro resultado interesante es el mostrado en la figura A.6, donde se separan por sexo las calificaciones de los cuatro audios.

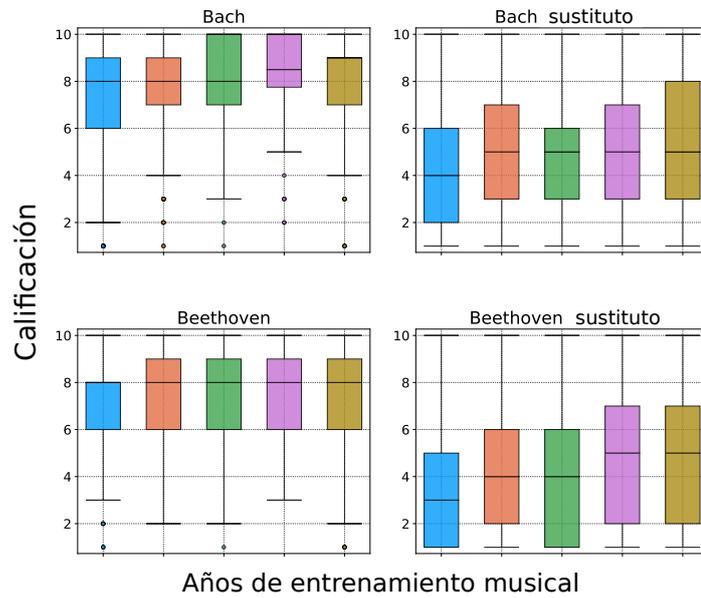


Figura A.5: Distribuciones de la calificación asignada a cada pieza. Los colores representan el tiempo de entrenamiento musical de las personas: azul: 0 años, rojo: 1-2 años, verde: 3-5 años, rosa: 5-10 años, amarillo: más de 10 años.

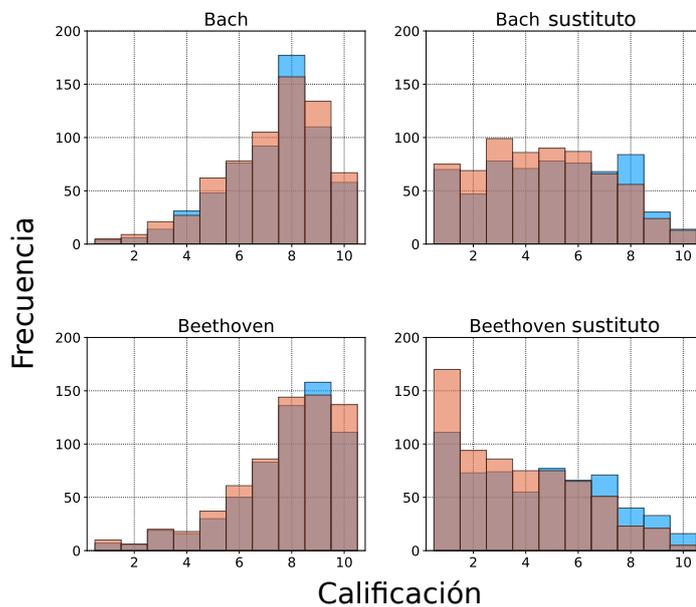


Figura A.6: Distribuciones de calificación para cada una de las piezas de la encuesta. Las distribuciones en azul representan a las calificaciones de personas de sexo masculino, mientras que las rojas a las de sexo femenino.

## A.2 Espectro de potencias de la serie de rangos

En la figura A.7 se muestra el espectro de potencias de la serie de intervalos y de la serie de rangos, así como su función de autocorrelación. En el caso del espectro de potencias, en las dos series se observa una similitud en forma, los valores no coinciden exactamente pero la forma global es similar. Algo que no sucede en la función de autocorrelación, donde lo único que se observa como coincidencia es el valor más alto alrededor de  $\tau \approx 290$ , este lugar corresponde a una repetición en la pieza. La razón por la que la serie de intervalos es prácticamente plana en su función de autocorrelación, es que la serie de intervalos es, por su definición, la derivada de la serie original y al derivar una serie ésta se va descorrelacionando. Sin embargo, se observa una estructura muy clara en la función de autocorrelación de la serie de rangos.

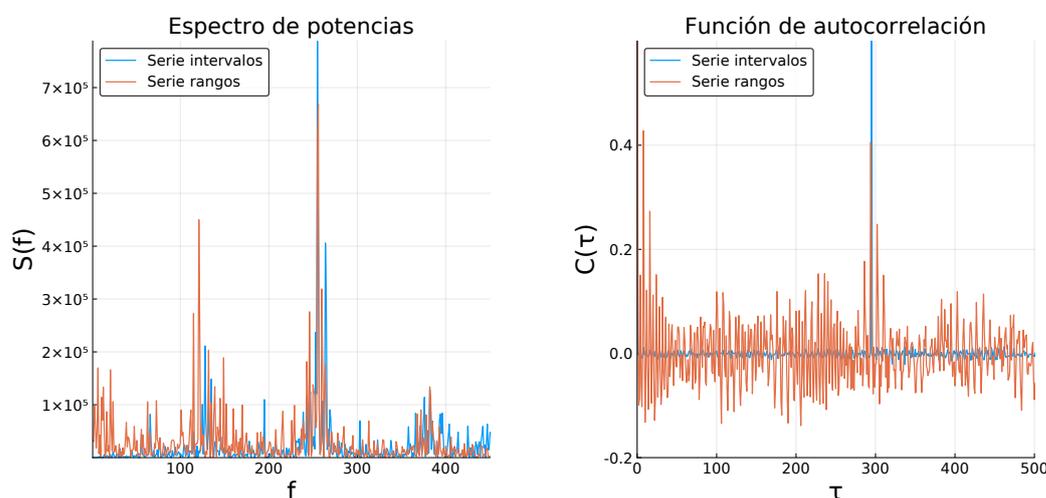


Figura A.7: Espectro de potencias y función de autocorrelación de las series de intervalos y de sus rangos de la alemanda de la partita para flauta de J.S. Bach.

## A.3 Bloques constitutivos

En el capítulo 4 se mencionó que el agrupamiento de notas generado a partir de la serie de rango de los intervalos ofrece una mejor aproximación que otros métodos al comportamiento estadístico de palabras en texto. En esta parte del apéndice se muestra una comparación de los resultados del algoritmo propuesto en la tesis con los de otro tipo de selección de bloques. En las figuras A.8 y A.9 se muestran los resultados para las leyes de Zipf y Heaps, en los casos de los bloques construidos a partir de la serie de intervalos  $I_t$  con diferentes métodos. En azul se representa el propuesto en la tesis (con la distribución rango frecuencia) con su respectiva serie aleatorizada, en verde y morado son dos casos con cortes de forma aleatoria. Éstos últimos fueron generados

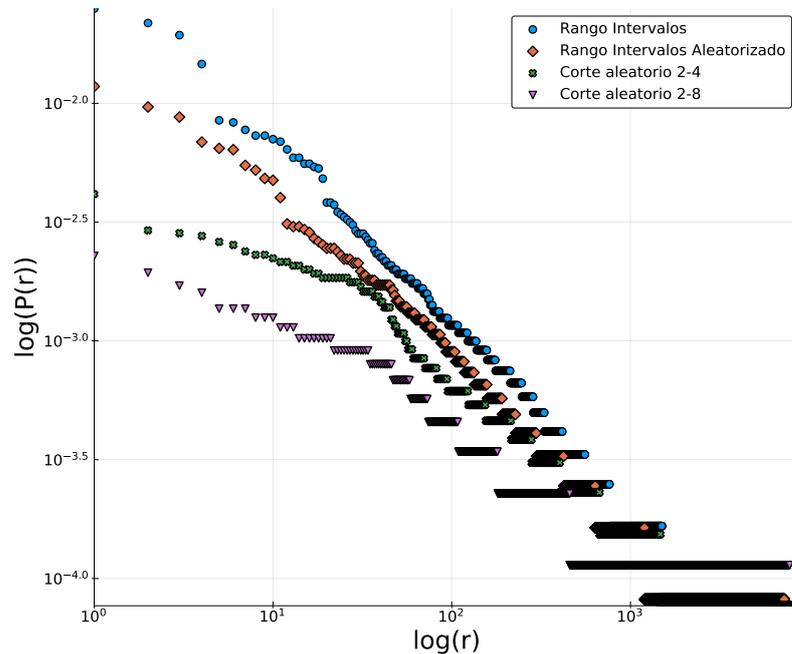


Figura A.8: Distribución de rango frecuencia en log-log. Se muestra la distribución de bloques construidos a partir del clave bien temperado de J.S. Bach con diferentes métodos: algoritmo de visibilidad en la serie de rangos de intervalos, en la serie aleatorizada de rangos de intervalos. Cortes aleatorios dentro del conjunto  $\{2, 3, 4\}$  y cortes aleatorios dentro del conjunto  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

tomando un número  $z$  de intervalos por cada bloque, siendo  $z$  una variable aleatoria dentro de los conjuntos  $\{2, 3, 4\}$  y  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . La gran diferencia entre los resultados de los diferentes métodos comprueba que el algoritmo de visibilidad empleado sobre la serie re-etiquetada es más efectivo para encontrar patrones que cortes realizados de forma aleatoria con el método mencionado previamente.

La propuesta de utilizar la distribución rango frecuencia de la serie de intervalos para su re-etiquetamiento puede sonar algo arbitraria, a pesar de que se muestra un buen resultado en los bloques generados, surge la pregunta de que tan diferente sería este resultado si el re-etiquetamiento fuera de la forma inversa. La forma inversa es darle importancia a los eventos más comunes, es decir, invertir el número de los rangos, si el rango del intervalo es 1 su rango invertido sería  $N$  (número de palabras diferentes). Formalmente sobre la serie de rangos  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$  se obtiene una serie de rangos invertidos con la función  $R_i(r) = -r + N + 1$ . En las figuras A.10 y A.11 se muestran los resultados de la leyes de Zipf y Heaps para los casos de los bloques construidos con la serie de rangos de intervalos y la de rangos invertidos de intervalos incluyendo como referencia el texto de Moby Dick. En las dos gráficas los resultados de la inversión de los rangos muestra propiedades similares a las del texto pero de características opuestas a las

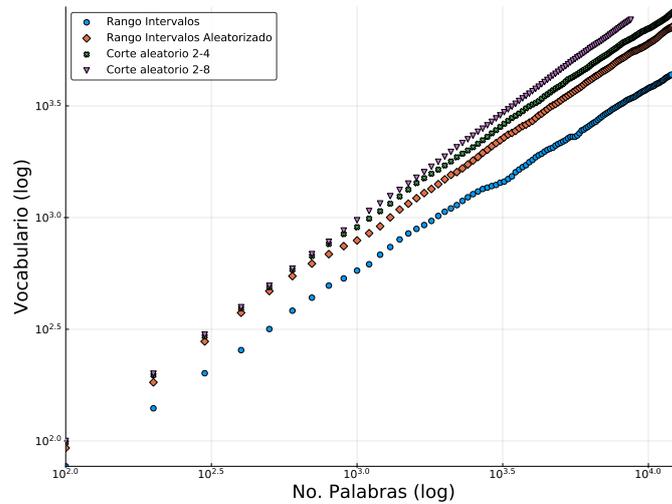


Figura A.9: Funcion de vocabulario con respecto al número de palabras en log-log. Se muestran las funciones de bloques construidos a partir del clave bien temperado de J.S. Bach con diferentes métodos: algoritmo de visibilidad en la serie de rangos de intervalos, en la serie aleatorizada de rangos de intervalos. Cortes aleatorios dentro del conjunto  $\{2, 3, 4\}$  y cortes aleatorios dentro del conjunto  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

del caso de rango de intervalos. Estos resultados sugieren que considerar más importantes los eventos más frecuentes otorga información redundante, evidenciado por la similitud de las distribuciones de la serie aleatorizada con respecto a la original en el caso de los rangos invertidos. A pesar de esto, tal vez la inclusión de la información que ofrece la serie de rangos invertida podría mejorar el método de construcción de bloques, este caso sigue en proceso, ya que esta inclusión no necesariamente podría ser de manera equitativa. Se requiere de una mayor exploración en esta dirección.

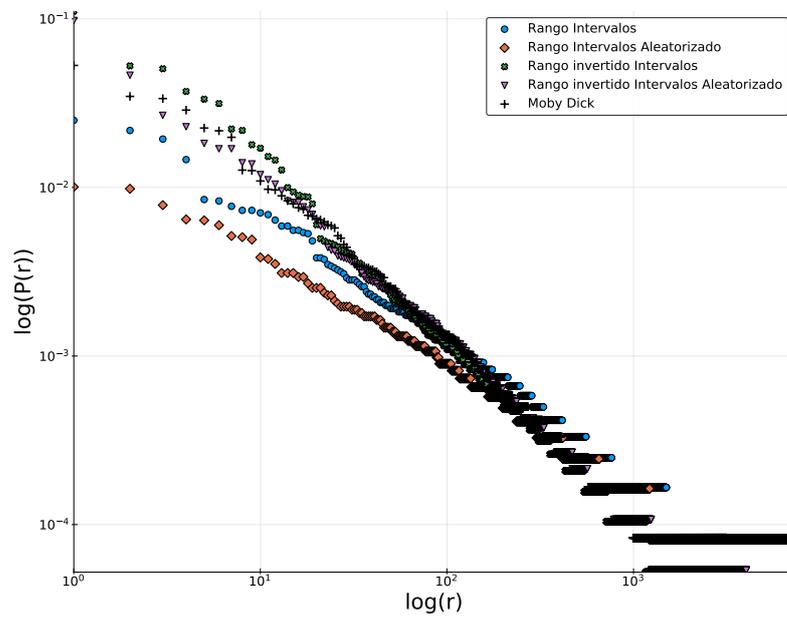


Figura A.10: Distribución de rango frecuencia en log-log. Se muestra la distribución de bloques contruidos a partir del clave bien temperado de J.S. Bach con diferentes métodos: algoritmo de visibilidad en la serie de rangos de intervalos, en la serie aleatorizada de rangos de intervalos. Algoritmo de visibilidad en la serie de rangos invertidos de intervalos y en la serie aleatorizada de rangos invertidos de intervalos. Se incluye como referencia el texto de Moby Dick.

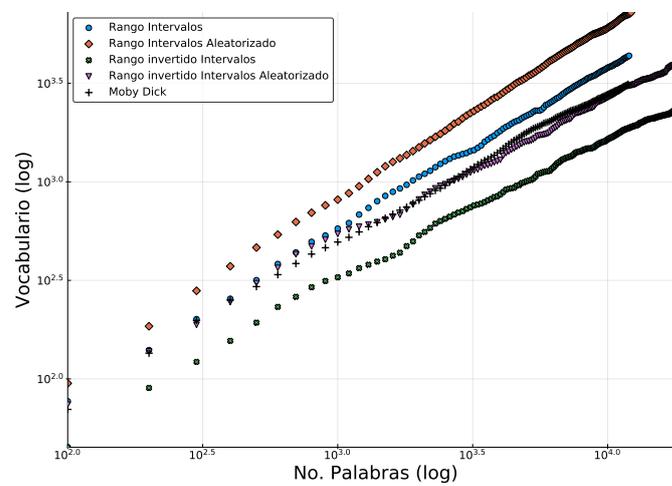


Figura A.11: Funcion de vocabulario con respecto al número de palabras en log-log. Se muestran las funciones de bloques construidos a partir del clave bien temperado de J.S. Bach con diferentes métodos: algoritmo de visibilidad en la serie de rangos de intervalos, en la serie aleatorizada de rangos de intervalos. Algoritmo de visibilidad en la serie de rangos invertidos de intervalos y en la serie aleatorizada de rangos invertidos de intervalos. Se incluye como referencia el texto de Moby Dick



## DEFINICIONES MUSICALES

**E**n el presente apéndice se hace referencia a definiciones musicales fundamentales, que se utilizan de manera informal en la tesis.

**Altura**

La altura es una cualidad subjetiva que nos da información de que tan agudo o grave es un sonido [52], independientemente del instrumento que lo produzca, y depende principalmente de la frecuencia fundamental de la onda sonora. Las ondas sonoras producidas por instrumentos musicales tienen la cualidad de poderse descomponer en diferentes contribuciones sinusoidales (parciales), cada una de las cuales tendrá una determinada frecuencia de oscilación y una amplitud. La frecuencia más baja del conjunto de parciales es conocida como la frecuencia fundamental y en muchas ocasiones es la que presenta la mayor amplitud entre todos los parciales.

**Nota**

Las notas se refieren a los símbolos con los cuales la música es escrita en un pentagrama [52] (ver figura B.1). Estos símbolos, junto con otros elementos de la partitura, sirven para determinar las duraciones específicas de cada altura. En muchas ocasiones el término *nota* es usado conjuntamente para describir tanto la duración de una altura, así como para designar a la altura misma, en este escrito se usa el término nota musical con el sentido dado por esta última definición.



Figura B.1: Representación de la nota *La* en un pentagrama en clave de *Sol*.

### Intervalo musical

El término intervalo musical hace referencia a la distancia que existe entre dos alturas [52]. Dicha distancia puede ser medida de diferentes maneras, una muy usada es mediante el número de unidades necesarias para cubrir la distancia correspondiente dentro de una determinada escala musical.

Cuando el par de alturas suena simultáneamente, el intervalo es conocido como intervalo armónico, mientras que cuando lo hace sucesivamente se conoce como intervalo melódico. Los intervalos melódicos a su vez pueden ser divididos en tres diferentes tipos: los ascendentes, en donde el primer sonido que se oye posee una altura más grave que el segundo; los descendentes, en los que el primer sonido es más agudo que el segundo; y los unísonos, en que tanto el primer sonido como el segundo tienen la misma altura.

### Ritmo

En el contexto de una obra musical, las alturas representadas en el pentagrama también contienen información sobre su duración (representación temporal). La forma de representar el valor de la duración de una nota se logra mediante el uso de las figuras rítmicas.

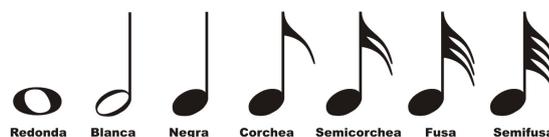


Figura B.2: Ejemplos de figuras rítmicas, disminuyendo en duración de izquierda a derecha.

### Acordes y melodías

Según el ordenamiento que realicemos de las alturas -con sus duraciones- en el pentagrama, obtendremos aquello que llamamos *melodías* o *acordes*. Por ejemplo, si disponemos un orden sucesivo de las alturas en el pentagrama, entonces obtendremos una estructura melódica. Por el

---

contrario, si disponemos un orden simultáneo, entonces obtendremos una entidad llamada acorde. Por ello, de esto se infiere que un ordenamiento *horizontal* es sinónimo de melodía. Mientras que un ordenamiento *vertical*, es sinónimo de acorde.



Figura B.3: Ordenamiento vertical y horizontal de notas en el pentagrama

## Armonía

La *armonía*, en su definición más básica, es aquella disciplina dentro de la música que estudia el enlace de los acordes. Ahora bien, en lo que a armonía se refiere, tenemos tres funciones principales: Iº o Tónica (reposo), IVº o Subdominante (incrementa la tensión) y Vº o Dominante (máxima tensión). Estas funciones armónicas, que expresan procesos de tensión y distensión a medida que el discurso musical transcurre, también se vinculan al aspecto formal o morfológico de una obra (un ejemplo de ello es la forma sonata típica del siglo XVIII).

## Tema y Motivo

Hablar de *tema* en música, no es total y completamente lo mismo que hablar de melodía. Es decir, un tema es una estructura melódico-rítmica que se construye de una determinada manera y que además está íntimamente relacionada a la noción de forma (forma sonata de los siglos XVIII y XIX). Asimismo, dejando de lado las particularidades y especificidades musicales del caso, un tema puede definirse como una melodía de ocho compases<sup>1</sup> que contempla ciertas regularidades en su construcción (sobre todo en la música del siglo XVIII; en el siglo XIX se tiende a jaquear dicha regularidad constructiva).

Un *motivo* es una estructura melódico-rítmica bastante más reducida que tiende a resaltar ciertos rasgos característicos fuertes y distintivos del tema (giros melódicos particulares, estructuras rítmicas, etc.). Esos rasgos tan marcados y distintivos, sirven para otorgar una cierta cohesión y lógica evolutiva a la obra, a la vez que sirve para que el compositor desarrolle la música de forma casi libre. Un ejemplo famoso es el inicio de la 5ta sinfonía de L. Van Beethoven; motivo sobre el cual se construirá el primer movimiento.

---

<sup>1</sup>Los ocho compases varían según las diferentes obras y compositores, pero por lo general esta es una extensión bastante habitual.

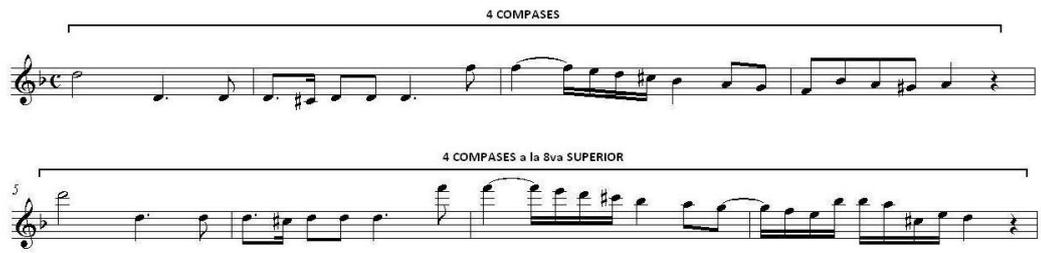


Figura B.4: Primer tema del cuarteto de cuerdas no. 15 en re menor K. 421 de W.A. Mozart.

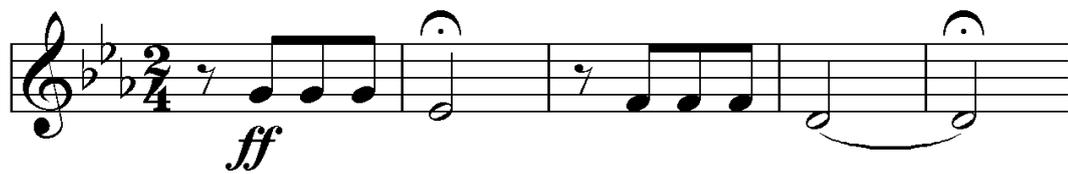


Figura B.5: Motivo del primer movimiento de la sinfonía no. 5 de L. Van Beethoven

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. L. Aragón, Gerardo G. Naumis, M. Bai, M. Torres, and P. K. Maini.  
Turbulent luminance in impassioned van gogh paintings.  
*Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 30(3):275–283, Mar 2008.
- [2] Harlan J. Brothers.  
Structural scaling in bach’s cello suite no.3.  
*Fractals*, 15(01):89–95, 2007.
- [3] Geoffrey West.  
*Scale*.  
Penguin Press, New York, 2017.
- [4] G. Zipf.  
*Human Behavior and the Principle of Least Effort*.  
Addison-Wesley, 1949.
- [5] Mark E. J. Newman.  
Power laws, pareto distributions and zipf’s law.  
46, 12 2004.
- [6] Benoit Mandelbrot.  
*The Fractal Geometry of Nature*.  
W. H. Freeman and Company, 1982.
- [7] I. Popescu.  
On a zipfs law extension to impact factores.  
*Glottometrics*, 6:83–93, 2003.
- [8] P. Miramontes, G. Cocho, E. Köpen, and R. Mansilla.  
On the behavior of journal impact factor rank-order distribution.  
*Journal of Infometrics*, 1:155–160, 2007.
- [9] Gustavo Martínez-Mekler, Roberto Alvarez Martínez, Manuel Beltrán del Río, Ricardo Mansilla, Pedro Miramontes, and Germinal Cocho.  
Universality of rank-ordering distributions in the arts and sciences.

- PLoS ONE*, 4(3), 2009.
- [10] Norbert Wiener.  
Generalized harmonic analysis.  
*Acta Mathematica*, 55(C):117–258, 1930.
- [11] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger.  
Mosaic organization of DNA nucleotides.  
*Physical Review E*, 49(2):1685–1689, 1994.
- [12] Lucas Lacasa, Bartolo Luque, Fernando Ballesteros, Jordi Luque, and Juan Carlos Nuño.  
From time series to complex networks: The visibility graph.  
*Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(13):4972–4975, 2008.
- [13] Richard F Voss.  
"1/f noise" in music: Music from 1/f noise.  
*The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(1):258, 1978.
- [14] Daniel J Levitin, Parag Chordia, and Vinod Menon.  
Musical rhythm spectra from Bach to Joplin obey a 1/f power law.  
*Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(10), 2012.
- [15] Dan Wu, Keith M. Kendrick, Daniel J. Levitin, Chaoyi Li, and Dezhong Yao.  
Bach is the father of harmony: Revealed by a 1/f fluctuation analysis across musical genres.  
*PLoS ONE*, 10(11):1–17, 2015.
- [16] M. Beltrán del Río, G. Cocho, and G. G. Naumis.  
Universality in the tail of musical note rank distribution.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(22):5552–5560, 2008.
- [17] Heather D Jennings, Plamen Ch Ivanov, Allan de M. Martins, P.C da Silva, and G.M Viswanathan.  
Variance fluctuations in nonstationary time series: a comparative study of music genres.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(3-4):585–594, may 2004.
- [18] Güngör Gündüz and Ufuk Gündüz.  
The mathematical analysis of the structure of some songs.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 357(3-4):565–592, 2005.
- [19] Holger Hennig, Ragnar Fleischmann, Anneke Fredebohm, York Hagmayer, Jan Nagler, Annette Witt, Fabian J. Theis, and Theo Geisel.  
The nature and perception of fluctuations in human musical rhythms.  
*PLoS ONE*, 6(10), 2011.

- [20] G R Jafari, P Pedram, and L Hedayatifar.  
Long-range correlation and multifractality in Bach's Inventions pitches.  
*Complexity*, 2007(04):18, 2007.
- [21] Gunnar A. Niklasson and Maria H. Niklasson.  
Non-Gaussian distributions of melodic intervals in music: The Lévy-stable approximation.  
*EPL (Europhysics Letters)*, 112(4):40003, 2015.
- [22] Luciano Telesca and Michele Lovallo.  
Analysis of temporal fluctuations in Bach's sinfonias.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(11):3247–3256, 2012.
- [23] Leonardo Dagdug, Jose Alvarez-Ramirez, Carlos Lopez, Rodolfo Moreno, and Enrique Hernandez-Lemus.  
Correlations in a Mozart's music score (K-73x) with palindromic and upside-down structure.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 383(2):570–584, 2007.
- [24] Erika E. Rodríguez, Enrique Hernández-Lemus, Benjamín A. Itzá-Ortiz, Ismael Jiménez, and Pablo Rudomín.  
Multichannel detrended fluctuation analysis reveals synchronized patterns of spontaneous spinal activity in anesthetized cats.  
*PLoS ONE*, 6(10), 2011.
- [25] Thomas Schreiber and Andreas Schmitz.  
Surrogate time series.  
*Physica D: Nonlinear Phenomena*, 142(3-4):346–382, 2000.
- [26] Zhi Yuan Su and Tzuyin Wu.  
Multifractal analyses of music sequences.  
*Physica D: Nonlinear Phenomena*, 221(2):188–194, 2006.
- [27] Zhi Yuan Su and Tzuyin Wu.  
Music walk, fractal geometry in music.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380(1-2):418–428, 2007.
- [28] Yosef Ashkenazy, Plamen Ch Ivanov, Shlomo Havlin, Chung K. Peng, Ary L. Goldberger, and H. Eugene Stanley.  
Magnitude and sign correlations in heartbeat fluctuations.  
*Physical Review Letters*, 86(9):1900–1903, 2001.
- [29] Nonlinear time series analysis.  
[www.mpipks-dresden.mpg.de/tisean/](http://www.mpipks-dresden.mpg.de/tisean/).

- [30] Yu. L Klimontovich and J.-P Boon.  
Natural Flicker Noise (“1/f Noise”) in Music.  
*Europhysics Letters (EPL)*, 3(4):395–399, 1987.
- [31] Arnold Schoenberg.  
*Theory of Harmony*.  
London: Faber & Faber, 1978.
- [32] L. Robert Slevc and Brooke M. Okada.  
Processing structure in language and music: a case for shared reliance on cognitive control.  
*Psychonomic Bulletin & Review*, 22(3):637–652, Jun 2015.
- [33] Aniruddh D. Patel.  
*Music, Language, and the Brain*.  
Oxford, University Press, 2007.
- [34] Siu-Lan Tan, P Pfordresher, and Harré R.  
*Psychology of Music, from sound to significance*.  
Psychology Press, New York, 2010.
- [35] L Jäncke.  
The relationship between music and language.  
*Frontiers in Psychology*, 3, 2012.
- [36] Giovanni Iacobello, Stefania Scarsoglio, and Luca Ridolfi.  
Visibility graph analysis of wall turbulence time-series.  
*Physics Letters A*, 382(1):1 – 11, 2018.
- [37] George Hloupis.  
Temporal pattern in corinth rift seismicity revealed by visibility graph analysis.  
*Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 51:13 – 22, 2017.
- [38] Uri Hasson, Ben Davis, Ryan Flanagan, Enzo Tagliazucchi, Helmut Laufs, and Lucas Lacasa.  
A combinatorial framework to quantify peak/pit asymmetries in complex dynamics.  
*Scientific Reports*, 8, 2018.
- [39] Germinal Cocho, Jorge Flores, Carlos Gershenson, Carlos Pineda, and Sergio Sánchez.  
Rank diversity of languages: Generic behavior in computational linguistics.  
*PLOS ONE*, 10(4):1–12, 04 2015.
- [40] Alexander M. Petersen, Tenenbaum J., Shlomo Havlin, and Eugene Stanley.  
Statistical laws governing fluctuations in word use from word birth to word death.  
2, 03 2012.

- 
- [41] G Hadjeres, F Pachet, and F Nielsen.  
Deepbach: a steerable model for bach chorales generation.  
*ArXiv*, 2017.
- [42] Sony’s flow machines project.  
<http://www.flow-machines.com/>.
- [43] Joel Douek.  
Music and emotion—a composer’s perspective.  
*Frontiers in Systems Neuroscience*, 7:82, 2013.
- [44] F Tria, V Loreto, V Servedio, and S Strogatz.  
The dynamics of correlated novelties.  
*Scientific Reports*, 4, 2014.
- [45] Iacopo Iacopini, Sta ša Milojević, and Vito Latora.  
Network dynamics of innovation processes.  
*Phys. Rev. Lett.*, 120:048301, Jan 2018.
- [46] Lu Liu, Jianrong Wei, Huishu Zhang, Jianhong Xin, and Jiping Huang.  
A Statistical Physics View of Pitch Fluctuations in the Classical Music from Bach to Chopin:  
Evidence for Scaling.  
*PLoS ONE*, 8(3):1–6, 2013.
- [47] Jason Sakellariou, Francesca Tria, Vittorio Loreto, and François Pachet.  
Maximum entropy models capture melodic styles.  
pages 1–25, 2016.
- [48] Mathias Benedek, Yoed N. Kenett, Konstantin Umdasch, David Anaki, Miriam Faust, and  
Aljoscha C. Neubauer.  
How semantic memory structure and intelligence contribute to creative thought: a network  
science approach.  
*Thinking & Reasoning*, 23(2):158–183, 2017.
- [49] Adilson E. Motter, Alessandro P. S. de Moura, Ying-Cheng Lai, and Partha Dasgupta.  
Topology of the conceptual network of language.  
*Phys. Rev. E*, 65:065102, Jun 2002.
- [50] miditocsv software.  
<http://www.fourmilab.ch/webtools/midicsv/>.
- [51] A González-Espinoza, H Larralde, G Martínez-Mekler, and M Mueller.  
Data from: Multiple scaling behavior and nonlinear traits in music scores.

- [52] W. Apel.  
*Harvard Dictionary of Music.*  
Harvard Press University, 1974.
- [53] Yosef Ashkenazy, Shlomo Havlin, Plamen Ch Ivanov, Chung K. Peng, Verena Schulte-Frohlinde, and H. Eugene Stanley.  
Magnitude and sign scaling in power-law correlated time series.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 323:19–41, 2003.
- [54] Eduardo R. Miranda.  
*Composing Music with Computers.*  
Focal PElsevier, 2002.
- [55] T Schreiber and a Schmitz.  
Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests.  
*Physical review letters*, 77(4):635–638, 1996.
- [56] Jason Sakellariou, Francesca Tria, Vittorio Loreto, and François Pachet.  
Maximum Entropy Model for Melodic Patterns.  
*Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning*, 37, 2015.
- [57] Gaëtan Hadjeres and François Pachet.  
DeepBach: a Steerable Model for Bach chorales generation.  
pages 1–20, 2016.
- [58] Johanna Sängér, Viktor Müller, and Ulman Lindenberger.  
Intra- and interbrain synchronization and network properties when playing guitar in duets.  
*Frontiers in human neuroscience*, 6(November):312, 2012.
- [59] Gerhard Nierhaus.  
*Algorithmic Composition: Paradigms of Automated Music Generation.*  
Springer, 2009.
- [60] Xiao Fan Liu, Chi K. Tse, and Michael Small.  
Complex network structure of musical compositions: Algorithmic generation of appealing music.  
*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1):126–132, 2010.
- [61] M. Bigerelle and A. Iost.  
Fractal dimension and classification of music.  
*Chaos, solitons and fractals*, 11(14):2179–2192, 2000.
- [62] Wosuk Ro and Younghun Kwon.

- 1/f Noise analysis of songs in various genre of music.  
*Chaos, Solitons and Fractals*, 42(4):2305–2311, 2009.
- [63] Petrucci music library.  
<http://imslp.org/>.
- [64] The largest classical music resource in .mid files.  
<http://www.kunsterfuge.com/>.
- [65] Per Bak.  
*How Nature Works: The Science of self-organized criticality*.  
Springer, 1996.
- [66] Stuart Kauffman.  
*At Home in the Universe: The search for laws of self-organization and complexity*.  
Oxford University Press, 1995.
- [67] Dante R. Chialvo.  
The brain near the edge.  
*AIP Conference Proceedings*, 887:1–12, 2007.
- [68] Manfred Schroeder.  
*Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise*.  
W. H. Freeman and Company, 1991.
- [69] Detrended fluctuation analysis (dfa).  
<https://www.physionet.org/tutorials/fmnc/node5.html>.
- [70] Leonard C Manzara, Ian H Witten, and Mark James.  
On the entropy of music: An experiment with Bach chorale melodies.  
*Leonardo Music Journal*, pages 81–88, 1992.
- [71] Thomas D Rossing, F Richard Moore, and Paul A Wheeler.  
*The Science of Sound*, volume 2.  
Addison-Wesley Reading, MA, 1990.
- [72] G. Gündüz and U. Gündüz.  
The mathematical analysis of the structure of some songs.  
*Physica A*, 357:565–592, 2005.
- [73] Alfredo González-Espinoza, Hernán Larralde, Gustavo Martínez-Mekler, and Markus Müller.  
Multiple scaling behaviour and nonlinear traits in music scores.  
*Royal Society Open Science*, 4(12), 2017.

