



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE
MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y
APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Caracterización Combinatoria de la equivalencia de matrices casi Cartan

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias

Presenta:

MC. CLAUDIA PÉREZ RUISÁNCHEZ

Director de Tesis:

Dr. Antonio Daniel Rivera López

Cuernavaca, Morelos

noviembre, 2018

Esta tesis fue revisada por el siguiente jurado:

Presidente: Dr. Markus Mueller Bender

Secretario: Dr. Juan Manuel Rendón Mancha

Vocal: Dra. Gabriela Hinojosa Palafox

Vocal: Dra. Liudmila Sabinina

Vocal: Dr. Jorge Rivera Noriega

Suplente: Dr. Gilberto Calvillo Vives

Suplente: Dr. Antonio Daniel Rivera López

“A ti mi amor”

Agradecimientos

Decía Fito Páez, lo importante no es llegar lo importante es el camino. Cuanta verdad del maestro si es que existe la verdad, pues la inmensa alegría del trabajo terminado no se compara con el carrusel de emociones experimentado durante estos años.

He tenido la dicha de conocer a varias personas que han marcado mi vida, una de ellas sin dudas es mi asesor el Dr. Daniel Rivera, profe no tengo palabras para expresar lo afortunada de soy de haberlo conocido, he aprendido de su bondad, paciencia y el amor que transmite a sus seres queridos pero también de su empeño infinito por hacer las cosas de manera correcta. Gracias por darme un tema de investigación que me ha hecho tan feliz y por compartir conmigo esos pequeños momentos de dicha que nos hacen querer estar horas desvelados amando a las matemáticas. Con usted he crecido profesionalmente y hoy sé que además de un asesor tengo un gran amigo.

Quiero agradecer al Dr. Markus Muller por su apoyo incondicional y por seguir haciendo de la ciencia algo puro. A los miembros de mi comité tutorial; la Dra. Liudmila Sabinina, la Dra. Larissa Svitneva y el Dr. Jorge Rivera y al Dr. Gilberto Calvillo por su ayuda en la revisión de este documento.

A Yanet, Claudia, Damiris, Nolberto, Ernesto, Elisa y Esley por hacer de esta etapa algo inolvidable, en especial a Francis por compartir conmigo cada momento de tristeza, alegría y café; sin dudas tenerte como amiga es uno de los mayores regalos que me ha dado este Doctorado. A Hans y Miriela por ayudarme emprender este camino y a Yuyi y Olguita por sus consejos maternos. A CONACyT por apoyar esta investigación mediante la beca número 575151. Hoy no sé si soy lo que esperaba de mi al comenzar este proyecto pero definitivamente soy mejor persona y eso en gran parte se lo debo al gran anfitrión de esta aventura que es México. No importa que tan lejos me lleve el destino para tí siempre tendré reservada una parte muy especial de mis pensamientos. La dicha no son los buenos momentos vividos; son las grandes personas con las que vives esos momentos. Hoy, aunque lejos mi corazón dividido está con

ustedes mis eternos amores. Mami quiero agradecerte por escucharme aún sin entender una palabra de lo que digo, por tus duros regaños que recayeron en mi como el mas tierno de los consejos y sobretodo por alimentar los sueños de esa niña pequeña que amaba a las matemáticas. Papa gracias por confiar siempre en mí y por impulsarme a amar la vida a plenitud mas allá de la ciencia. Wasi, gracias por tu paciencia y por ser un segundo padre para mí, nunca tendré como agradecerte todo lo que has hecho. Mi tata bella gracias por tu mirada protectora y por enfrentarte a los problemas con tanta alegría, no tengo más que palabras de amor y de orgullo hacia ti. Si logro algún día ser para Clau la mitad del ejemplo que tu has sido para mí seguro habré hecho un buen trabajo. Mi abu, gracias por soportar la distancia, por no derramar nunca una lágrima al despedirte, por pensar siempre primero en los demás y por tus palabras sabias y objetivas; gracias por tanto amor, mucho de lo que soy te lo debo a ti. Jacinta y Dieguito gracias por romper los paradigmas de lo que deben ser unos suegros, por quererme y cuidarme como si fuera una hija. Enano, gracias por cuidar de los viejos y por trabajar tanto por un mejor futuro para todos , saber que siempre podré contar contigo me reconforta y alegra. Susana, Yuseidy y Lisandra gracias por estos 15 años de consejos, apoyo y pijamadas es un verdadero orgullo tenerlas como amigas.

Me gustaría dedicar este trabajo a la persona que ha estado conmigo en todo momento, que ha sufrido con mis errores y que ha sido testigo de cada una de mis victorias, mi esposo Yasel Garcés. Mi amor qué te puedo decir que no sepas, has sido mi fuerza en momentos de debilidad, la calma para mi locura y mi sabio consejero. No creo en las almas gemelas, creo en el apoyo, la confianza, el amor y la pasión que me transmites cada día. Un día decidimos alejarnos de nuestra amada patria y no sé dónde acabe esta historia pero sé que todo comenzó contigo. Gracias por apoyarme en cada uno de mis sueños y ser el mejor de mis pretextos para despertar.

Índice general

Agradecimientos	3
Índice	5
Lista de Figuras	7
1. Álgebras de Lie	3
1.1. Conceptos Básicos	3
1.2. Subálgebra de Cartan	5
1.3. Sistema de Raíces	6
1.4. Descomposición de Cartan	7
1.4.1. Matrices de Cartan	9
2. Matrices casi Cartan no-simétricas definidas positivas	17
2.1. Matrices casi Cartan	17
2.2. Equivalencia de matrices casi Cartan definidas positivas	19
2.2.1. Formas cuadráticas enteras	20
2.2.2. El método de las Inflaciones	22
2.3. Bigráficas.	24
2.4. Operaciones sobre bigráficas	27
2.4.1. Suma de bigráficas	27
2.4.2. Flaciones sobre matrices casi Cartan no simétricas posi- tivas.	27
2.5. Matrices casi Cartan de tipo \mathbb{B}_n	29
2.5.1. Construcción de bigráficas de tipo \mathbb{B}_n	29
2.5.2. Demostración del resultado principal para \mathbb{B}_n	32
2.5.2.1. Raíces de la forma cuadrática asociada a \mathbb{B}_n	35
2.6. Bigráficas de tipo Dynkin \mathbb{C}_n	36
2.6.1. Raíces de la forma cuadrática asociada a \mathbb{C}_n	37

2.7. Bigráficas de tipo Dynkin \mathbb{F}_4	38
3. Algoritmo para determinar el tipo Dynkin de una matriz casi Cartan positiva	42
3.1. El Algoritmo de las Inflaciones es polinomial	43
3.2. Algoritmo de las Inflaciones modificado	44
3.2.1. Resumen del algoritmo propuesto	46
3.2.2. Preprocesado de A	47
3.2.2.1. Filtrado de A	47
3.2.2.2. Búsqueda eficiente de aristas punteadas y múltiples	49
3.2.3. Inflaciones para el caso simétrico	50
3.2.4. Inflaciones para el caso no simétrico	51
3.2.5. Recuperando el tipo Dynkin	51
3.2.6. Análisis del algoritmo propuesto	52
4. Álgebras de Lie complejas semisimples asociadas a matrices casi Cartan positivas.	54
4.1. Transformaciones elementales	55
4.2. Ciclos sin cuerdas en matrices casi Cartan no simétricas definidas positivas	57
4.3. Verificación de las relaciones $R_1(A')$ - $R_4(A')$	58
4.4. Verificación de las relaciones $R_5(A')$	66
Bibliografía	72

Índice de figuras

2.1. Aplicando una inflación sobre la bigráfica G	28
2.2. A -bloque, B -bloque y C -bloque	29
2.3. Descomposición del B -ensamble G en bloques	30
2.4. Efectos de las flaciones sobre los B -bloques	31
2.5. Bigráficas de tipo Dynkin F_4	41
4.1. Tipo 1	66
4.2. Tipo 2	67
4.3. Tipo 3	68
4.4. Tipo 4	69
4.5. Tipo 5	70

Introducción

Con base en la teoría clásica de álgebras de Lie complejas semisimples, ver por ejemplo [1], se puede caracterizar la isomorfía de estas álgebras, a partir del espacio dual de la subálgebra de Cartan y una base del sistema de raíces asociado al espacio dual, mediante la cual se obtiene una matriz de Cartan. Mediante el clásico teorema de Serre [2] cada álgebra de Lie compleja y semisimple \mathfrak{g} es isomorfa a una álgebra $\mathfrak{g}_4(A)$, definida por generadores y relaciones en términos de la matriz de Cartan A asociada álgebra de Lie \mathfrak{g} . Este teorema fue extendido por Barot y Rivera [3] con el objetivo de asignar una representación a cada álgebra de Lie semisimple asociada a una matriz casi Cartan simétrica definida positiva. El resultado principal de [3] permite caracterizar la isomorfía de las álgebras de Lie complejas semisimples a partir de la equivalencia de matrices casi Cartan simétricas definidas positivas. Como parte de esta propuesta se desea extender este teorema para matrices casi Cartan definidas positivas no necesariamente simétricas. Es por ello, que otro de los objetivos de este trabajo es caracterizar la equivalencia de matrices casi Cartan definidas positivas.

Hasta el momento el método para saber si dos matrices casi Cartan definidas positivas A y A' son equivalentes es el siguiente:

- (a) Usando el método de las inflaciones (ver [4]) se puede transformar cada una de las matrices A y A' en su correspondiente matriz de Cartan asociada A_Δ y A'_Δ .

- (b) Se verifica que las bigráficas (árboles) asociados a la matrices de Cartan A_Δ y A'_Δ son isomorfos.

El método de las inflaciones resultó un avance a fin de determinar cuando dos matrices casi Cartan de $n \times n$ son equivalentes. La complejidad de este algoritmo usando un resultado de Ovsienko se puede acotar por $n7^n$ [ver además [5]], como resultado de esta tesis, se muestra que para el caso definido positivo, este algoritmo es polinomial ($O(n^6)$) y se propone un algoritmo para decidir si una matriz casi Cartan admisible es definida positiva y calcular su tipo Dynkin en $O(n^3)$ operaciones [6]. En [7], [5] a cada matriz casi Cartan simétrica y definida positiva se le asocia una bigráfica, en este trabajo se extiende el concepto de bigráfica de modo que esta pueda ser asociada a cada matriz casi Cartan definida positiva (simétricas y no simétricas). Mediante esta representación se busca caracterizar la equivalencia de matrices casi Cartan definidas positivas de forma combinatoria. Específicamente, las matrices casi Cartan que son equivalentes a matrices de Cartan no simétricas como las que se obtienen de las Álgebras de Lie \mathbb{B}_n , \mathbb{C}_n , \mathbb{F}_4 , y \mathbb{G}_2 .

Capítulo 1

Álgebras de Lie

En este capítulo serán mostrados los resultados teóricos necesarios para una mejor comprensión del problema de investigación. Los resultados y definiciones correspondientes a las álgebras de Lie fueron consultados en [1].

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1 (Álgebras de Lie). Sea \mathbb{K} un campo. Un álgebra g es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} con un producto $[X, Y]$ tal que es lineal en cada variable. El álgebra es un Álgebra de Lie si el producto satisface también:

- $[X, X] = 0$ para cada $X \in g$,
- la Identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

para todo $X, Y, Z \in g$.

Si a y b son subconjuntos de g se denotará como:

$$[a, b] = \text{span}\{[X, Y] \mid X \in a, Y \in b\}.$$

Se dirá que g es abeliana si y sólo si $[g, g] = \{0\}$.

Para cada álgebra de Lie g se tiene la aplicación lineal $ad : g \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}g$ dada por:

$$(adX)(Y) = [X, Y].$$

Sea g una \mathbb{K} -álgebra asociativa, si se define el corchete como el conmutador:

$$[X, Y] = XY - YX$$

se tiene que $(g, [-, -])$ es una álgebra de Lie.

Una subálgebra de Lie de g es un subespacio vectorial h de g tal que:

$$[h, h] \subseteq h.$$

De igual manera se define el ideal h de un álgebra de Lie g como el subconjunto de h de g tal que $[h, g] \subseteq h$.

Ejemplo 1. \mathbb{B}_n , $l \geq 2$, $(so(2l+1, \mathbb{K}))$, es el álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar,

$$o(2l+1, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{(2l+1) \times (2l+1)} : A + A^T = 0\}$$

los ideales en este caso son la propia álgebra y 0.

Definición 2. Sea la siguiente una sucesión de ideales de g , g^1, \dots, g^n tales que $g = g^1, g^{n+1} = [g^n, g^n]$. Se dirá que g es soluble si $\exists i$ tal que $g^i = 0$. De un modo similar si se toma la sucesión de ideales de g , g_1, \dots, g_n tales que $g = g_1, g_{n+1} = [g_n, g]$, g se denominará nilpotente si $\exists i$ tal que $g_i = 0$.

Toda álgebra de Lie admite un único ideal soluble maximal llamado radical (rad). Un álgebra de Lie se denomina semisimple si y sólo si $radg = 0$. De

manera general puede resultar complicado determinar si un álgebra de Lie es semisimple mediante este método. Por esta razón se introducirá la siguiente definición:

Definición 3 (Forma de Killing). Se denomina Forma de Killing B a la forma bilineal simétrica de g dada por:

$$B(X, Y) = \text{Tr}(adX, adY).$$

Esta resulta de gran importancia pues permite caracterizar las Álgebras de Lie semisimples de una manera práctica y sencilla como se puede apreciar en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Criterio de Semisimplicidad de Cartan). El Álgebra de Lie g es semisimple si y sólo si la Forma de Killing es no degenerada.

En general una forma bilineal $f(x, y)$ de g es no degenerada si la aplicación de g a g^* dada por $y \rightarrow (x \rightarrow f(x, y))$ es un isomorfismo. La no degeneración de la forma de Killing tiene consecuencias relevantes como la identificación canónica de g con g^* .

Asociado al concepto de álgebra semisimple se encuentra el de subálgebra de Cartan, a partir del cual se desprenden las matrices de Cartan, las cuales juegan un papel importante en este trabajo.

1.2. Subálgebra de Cartan

Definición 4 (Subálgebra de Cartan). Una subálgebra h de g se denomina subálgebra de Cartan de g si satisface las siguientes condiciones:

- h es nilpotente.
- El normalizador de h es todo h ; es decir,

$$h = n(h) = \{x \in g \mid [x, y] \in h, \forall y \in h\}$$

Es bien conocido que si un álgebra de Lie g es compleja semisimple, entonces g tiene una subálgebra de Cartan h y que en el espacio dual de h , siempre se puede definir un sistema de raíces $\Delta \subseteq h^*$.

Ejemplo 2. Sea $sp(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} : A^T J + J A^T = 0\}$ donde $J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix}$ el álgebra de Lie compleja simple de tipo C_n . Se tiene la siguiente subálgebra de Cartan $h = H \in sp(2n, \mathbb{C})$ de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & & \\ & \vdots & & & & 0 \\ & & h_n & & & \\ & & & -h_1 & & \\ & 0 & & & \vdots & \\ 0 & & & & & -h_n \end{pmatrix}$$

1.3. Sistema de Raíces

Definición 5 (Sistemas de Raíces). Un sistema de raíces en un espacio finito-dimensional V con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un conjunto finito Δ de elementos distintos de cero de V tales que:

- Δ genera a V ,
- Las transformaciones ortogonales $s_\alpha(\phi) = \phi - \frac{2\langle \phi, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \alpha$, para $\alpha \in \Delta$, tiene la siguiente propiedad $s_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta$
- $\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$ es un entero cualesquiera que sean α y β en Δ .

Si para todo α en Δ se tiene que α es una raíz y $\frac{1}{2}\alpha$ no lo es, entonces se dirá que el sistema de raíces Δ es reducido.

Definición 6 (Raíz Simple). Una raíz α es simple si $\alpha > 0$ y α no puede ser descompuesta como $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ donde β_1, β_2 son raíces positivas, ver sección II.5 de [1].

Ejemplo 3. Sea h la subálgebra de Cartan definida en el ejemplo anterior y sean $e_j(H) = h_j$, entonces el siguiente es un sistema de raíces:

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2e_k : k = 1 \dots n\}$$

A partir de estas definiciones se puede introducir uno de los resultados más importantes de las álgebras de Lie conocido como la descomposición de Cartan. Sea $\alpha \in h^*$ donde h^* es el dual de la subálgebra de Cartan. Entonces se tiene que el conjunto:

$$g_\alpha = \{x \in g \mid [H, x] = \alpha(H)x \ \forall H \in h\}$$

es un subespacio vectorial g y $g_0 = h$.

1.4. Descomposición de Cartan

Teorema 2 (Descomposición de Cartan). Sea g un álgebra de Lie compleja Semisimple y sea h la subálgebra de Cartan. Entonces se tiene que:

$$g = h \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} g^\alpha.$$

Si Δ es un sistema de raíces, entonces existe una base de raíces simples $\Pi \subseteq \Delta$.

Definición 7 (Matriz de Cartan). Sea $\Pi \subseteq \Delta$ una base de raíces simples, enumerado como $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, donde $l = \dim V$. La matriz de $l \times l$, $A = (A_{ij})$ dada por:

$$A_{ij} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^2}$$

Se denomina matriz de Cartan de Δ y Π . La matriz A no depende de la elección de Π , ni de la elección de h y es única hasta isomorfía de matrices.

Si en la definición de matriz de Cartan dada anteriormente se considera una base arbitraria (no necesariamente de raíces simples) la matriz A_{ij} obtenida se denomina matriz casi Cartan. En [1] se presenta el siguiente resultado que permite asociarle a cada matriz de Cartan un álgebra de Lie compleja semisimple.

Teorema 3 (Serre). Sea g un álgebra de Lie compleja semisimple y sea A la matriz de Cartan A asociada a g . Sea $g_4(A)$ el álgebra de Lie generada por los $3l$ elementos $\{x_i, e_i, e_{-i} : 1 \leq i \leq l\}$ sujetos a las siguientes relaciones:

$$\text{R1- } [h_i, h_j] = 0, \quad \forall i, j$$

$$\text{R2- } [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j}, \quad \forall i, \varepsilon \in \{1, -1\}$$

$$\text{R3- } [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i \quad \forall i, \varepsilon \in \{1, -1\}$$

$$\text{R4- } (\text{ade}_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0, \text{ donde } n = \max\{0, -\varepsilon \delta A_{ij}\} \quad \forall \varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$$

Entonces $g_4(\Delta)$ es un álgebra de Lie compleja semisimple, isomorfa a g .

En [3] se propuso el Teorema 4 que generaliza las relaciones dadas por Serre para el caso de matrices casi-Cartan simétricas. Para presentar este resultado es necesario introducir una definición y un poco de notación.

Se dice que dos matrices simétricas A y A' son equivalentes si existe una matriz \mathbb{Z} -invertible T tal que $A' = T^t A T$.

Sea A una matriz casi Cartan definida positiva y simétrica, se denota como $g_5(A)$ al álgebra de Lie compleja definida por el conjunto de generadores $B_s = \{e_i, e_{-i}, h_i : i = 1, \dots, l\}$ y que satisface las relaciones $R1, R2, R3, R4$ y la siguiente relación:

$$\text{R5- } [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0, \text{ donde } (i_1, \dots, i_t) \text{ es un ciclo sin cuerdas en } A, \varepsilon_t \in \{1, -1\}, \varepsilon_l = -\varepsilon_{l+1}, \text{ si } A_{i_\delta i_{\delta+1}} > 0; \varepsilon_{l+1}, \text{ si } A_{i_\delta i_{\delta+1}} < 0, \text{ donde se usan}$$

corchetes múltiples, definidos inductivamente por

$$[x_1, x_2, \dots, x_t] = [x_1, [x_2, \dots, x_t]].$$

Teorema 4 (Relaciones de Serre Generalizadas (caso simétrico)). Sean A y A' matrices casi Cartan definidas positivas y simétricas. Entonces las matrices A y A' son equivalentes, si y sólo si las álgebras de Lie complejas $g_5(A)$ y $g_5(A')$ son isomorfas.

Uno de los aportes de este trabajo, es extender los resultados del Teorema 4 a las matrices casi Cartan definidas positivas no simétricas. De este modo, la isomorfía de las álgebras de Lie complejas $g_5(A)$ y $g_5(A')$ queda completamente definida por la equivalencia de matrices casi Cartan. Además como parte de este trabajo se realiza la caracterización combinatoria de esta equivalencia.

1.4.1. Matrices de Cartan

A lo largo de este trabajo $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ (respectivamente $M_n(\mathbb{K})$) denotará el conjunto formado por todas las matrices de tamaño $m \times n$ (respectivamente $n \times n$) con coeficientes en el anillo $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Sean $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ e $\mathcal{I}' = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ con $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n$ dos conjuntos de índices. La matriz $S \in M_{k \times l}(\mathbb{R})$ con entradas $S_{pq} = A_{i_p j_q}$ con $p \in \{1, 2, \dots, k\}$, $q \in \{1, 2, \dots, l\}$ es llamada una *submatriz* de A . Si $k = l$ y $j_r = i_r$ para $r \in \{1, 2, \dots, k\}$, S es llamada una *submatriz principal* de A . El k -ésimo *menor principal* es el determinante de la *submatriz principal* $A^{(k)} = (A_{ij}^{(k)})$ donde $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es *definida positiva* en \mathbb{R}^n si $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Existen matrices que son definidas positivas en \mathbb{R}^n y no son necesariamente simétricas, por ejemplo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ -2 - \alpha & 2 \end{bmatrix} \text{ para } \alpha \neq -1.$$

El siguiente resultado es considerado clásico por lo cual no se incluirá la demostración.

Teorema 5. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) La matriz A es definida positiva.
- (b) Los menores principales de A son todos positivos (Criterio de Sylvester).

Existen varias formas de definir una matriz de Cartan, en esta sección se iniciará con la definición dada en [1, páginas 157 y 158] y en la siguiente sección se mostrará que es equivalente a la dada en [3].

Una matriz diagonal $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ con $(D \in M_n(\mathbb{R}))$ es llamada positiva si $d_i > 0$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 8. [1, páginas 157 y 158] Una matriz de Cartan, es una matriz $A = (A_{ij})$ con $A \in M_n(\mathbb{Z})$ que cumple con lo siguiente:

- (a) $A_{ii} = 2$
- (b) $A_{ij} = 0$ si y sólo si $A_{ji} = 0$
- (c) $A_{ij} \leq 0$, para toda $i \neq j$
- (d) Existe una matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ positiva, tal que DAD^{-1} es simétrica y definida positiva.

El siguiente es un ejemplo sencillo de una matriz de Cartan.

Ejemplo 4. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz de Cartan y $D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lema 1. Sean $A, D \in M_n(\mathbb{R})$ con $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ una matriz diagonal positiva tal que DAD^{-1} es simétrica, entonces

- (a) $A_{ij} > 0$ si, y sólo si, $A_{ji} > 0$
- (b) $A_{ij} < 0$ si, y sólo si, $A_{ji} < 0$
- (c) $A_{ij} = 0$ si, y sólo si, $A_{ji} = 0$.

Demostración. Como la matriz DAD^{-1} es simétrica, entonces $d_i d_j^{-1} A_{ij} = d_j d_i^{-1} A_{ji}$. Por lo tanto A_{ij} tiene el mismo signo que A_{ji} y $A_{ij} = 0$ si, y sólo si, $A_{ji} = 0$. \square

Este lema demuestra que la Definición 8 es equivalente a la siguiente definición.

Definición 9. Una matriz de Cartan, es una matriz $A = (A_{ij})$ con $A \in M_n(\mathbb{Z})$ tal que:

- (a) $A_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $A_{ii} = 2$.
- (b) existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que DAD^{-1} es simétrica y definida positiva.

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, es llamada *simetrizable*, si existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que DA es simétrica. La matriz diagonal D es llamada un *simetrizador* de la matriz A .

Observación 1. El simetrizador de una matriz A no es único, si D es un simetrizador de A , entonces para todo número real $r > 0$, rD también es un simetrizador.

Lema 2. Sean $A \in M_n(\mathbb{R})$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que DAD^{-1} es simétrica.
2. A es simetrizable.

Demostración. Suponga que existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $DAD^{-1} = S$ donde S es una matriz simétrica, tome $D' = D \cdot D$ entonces $D'A = DSD$ y por lo tanto A es simetrizable. Ahora suponga que la matriz A es simetrizable entonces existe una matriz diagonal positiva $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ tal que $DA = S$ con S una matriz simétrica, se toma $D_1 = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$ entonces $D_1AD_1^{-1} = D_1SD_1^{-1}$ es simétrica. \square

A partir de el Lema 2 se obtiene que la Definición 9 es equivalente a la siguiente definición.

Definición 10. Una matriz de Cartan, es una matriz $A = (A_{ij})$ con $A \in M_n(\mathbb{Z})$ tal que:

- (a) $A_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $A_{ii} = 2$.
- (b) existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{R})$, tal que DA es simétrica y definida positiva.

Esta todavía no es la definición buscada, aún se necesita que la matriz D sea entera. Para obtener esta definición equivalente se introducen algunos resultados sobre las matrices de Cartan.

Proposición 1. [1] Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz de Cartan. Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$ entonces

$$(a) \ 0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$$

$$(b) \ A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$$

Demostración. (a) Sea D la matriz diagonal que satisface la propiedad (b) de la Definición 10 y suponga que $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Por corolario 2 se sabe que el determinante de la submatriz principal

$$\begin{bmatrix} 2d_i & d_i A_{ij} \\ d_j A_{ji} & 2d_j \end{bmatrix}$$

es positivo, entonces $4 - A_{ij}A_{ji} > 0$ y así $A_{ij}A_{ji} < 4$. Más aún, como $A_{ij} \leq 0$ y $A_{ji} \leq 0$ entonces $A_{ij}A_{ji} \geq 0$.

(b) Si $A_{ij} \neq 0$ entonces $A_{ji} \neq 0$. Ahora como $A_{ij}, A_{ji} \in \mathbb{Z}$ y $A_{ij} \leq 0$ y $A_{ji} \leq 0$ el resultado se sigue de (a). \square

Este resultado permite asociarle una bigráfica B_A a cada matriz de Cartan A . Siguiendo los resultados expuestos en [15] una *gráfica mixta* es una terna $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ que consiste en un conjunto $\mathcal{V} \neq \emptyset$ de vértices, un conjunto de aristas \mathcal{E} (no dirigidas) y un conjunto \mathcal{A} de flechas tales que $\mathcal{E} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

En este trabajo una bigráfica G es una gráfica mixta junto con una función $\omega : \mathcal{E} \cup \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ que asigna el peso a cada arista o flecha $e \in \mathcal{E} \cup \mathcal{A}$.

Aplicando esta nueva definición podemos asociar una bigráfica $B_A = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \omega)$ a cada matriz de Cartan A como sigue:

- $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_{ij} \mid i, j \in V \text{ con } i \neq j \text{ y } |A_{ij}| = |A_{ji}| \neq 0\}$
- $\mathcal{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in V \text{ con } i \neq j \text{ y } |A_{ij}| < |A_{ji}|\}$
- Para todo $e \in \mathcal{E} \cup \mathcal{A}$, $\omega(e) = A_{ji}$.

Una matriz de Cartan A es conexa si su bigráfica asociada B_A es conexa. El siguiente resultado establece una propiedad importante de las matrices de Cartan conexas.

Proposición 2. [1, Lema 2.56, página 160] Sea A una matriz de Cartan conexa. Entonces la matriz diagonal D tal que DA es simétrica y definida positiva es única hasta multiplicación por escalar.

Demostración. La demostración es en esencia la misma idea dada en [1], sólo se ha modificado con el fin de facilitar su entendimiento. Suponga que D y D' son matrices diagonales con entradas positivas en la diagonal tales que las matrices $P = DA$ y $P' = D'A$ son simétricas y definidas positivas. Entonces

$$d_i a_{ij} = d_j a_{ji}, \quad d'_i a_{ij} = d'_j a_{ji}$$

con lo cual $a_{ij} = a_{ji} = 0$ o $d_i (d'_i)^{-1} = (d'_j)^{-1} d_j$. Si se hace $d_i (d'_i)^{-1} = b_i$, como A es conexa, existe un camino (simple) entre los vértices 1 y N , sea $W = (1, i_1, \dots, N)$ ese camino en B_A , es decir, existe una sucesión de enteros $1 = i_0, i_1, \dots, i_{N-1} = N$ tales que $A_{i_{s-1}i_s} \neq 0$ para $1 \leq s < N$. De esto se obtiene

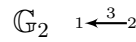
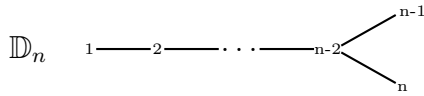
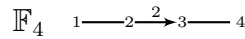
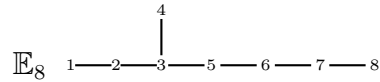
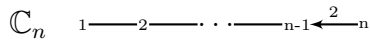
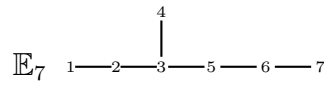
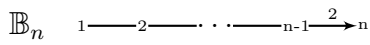
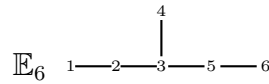
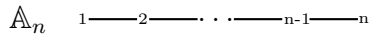
$$b_1 = b_{i_0} = b_{i_1} = \dots = b_{i_{N-2}} = b_N.$$

Así las entradas diagonales de D' son proporcionales a las entradas diagonales de D . □

Es fácil convencerse que después de una permutación adecuada de índices, cada matriz de Cartan se puede escribir como una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es una matriz de Cartan conexa, es decir, dada una matriz de Cartan A existe una matriz permutación P tal que $P^t A P$ es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es una matriz de Cartan conexa. Sin embargo este trabajo se centrará exclusivamente en las matrices de Cartan

conexas.

Las matrices de Cartan conexas están clasificadas (ver por ejemplo [1, páginas 170-184]), dada una matriz de Cartan conexa A , existe una matriz permutación P tal que la bigráfica B'_A asociada a la matriz $A' = P^tAP$ es una de las dadas en la siguiente lista, llamadas diagramas de Dynkin:



Sea A_Δ la matriz asociada al diagrama de Dynkin Δ . Si A_Δ es simétrica, entonces la matriz identidad es un simetrizador de A_Δ . Si $\Delta = \mathbb{B}_n$, entonces un simetrizador de A_Δ es $D_{\mathbb{B}_n} = \text{diag}(2, \dots, 2, 1)$, si $\Delta = \mathbb{C}_n$ tenemos que $D_{\mathbb{C}_n} = \text{diag}(1, \dots, 1, 2)$ es un simetrizador de A_Δ , finalmente si $\Delta = \mathbb{F}_4$ ($\Delta = \mathbb{G}_2$) entonces $D_{\mathbb{F}_4} = \text{diag}(2, 2, 1, 1)$ ($D_{\mathbb{G}_2} = \text{diag}(1, 3)$) es simetrizador de A_Δ .

Lema 3. Sea A una matriz de Cartan y sea D un simetrizador de A . Si A' es otra matriz de Cartan tal que $A' = P^tAP$ (donde P es una matriz de permutación), entonces $D' = P^tDP$ es un simetrizador de A' .

Demostración. Tomemos $D' = P^tDP$, entonces

$$\begin{aligned} D'A' &= P^tDPP^tAP \\ &= P^tDAP \end{aligned}$$

y la matriz $P^t D A P$ es simétrica y por el criterio de Sylvester también es definida positiva. \square

Así toda matriz de Cartan conexa tiene un simetrizador con entradas en los enteros positivos, usando esta esta observación y la Proposición 2 podemos concluir que la Definición 10 es equivalente a la siguiente definición, que es la dada en [3, 8].

Definición 11. Una matriz de Cartan, es una matriz $A = (A_{ij})$ con $A \in M_n(\mathbb{Z})$ tal que:

- (a) $A_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $A_{ii} = 2$.
- (b) existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{Z})$, tal que DA es simétrica y definida positiva.

Observación 2. Si a la matriz D de la definición anterior se le pide que tenga traza mínima, entonces por la Proposición 2, la matriz D es única y será llamada el simetrizador de A .

Capítulo 2

Matrices casi Cartan no-simétricas definidas positivas

2.1. Introducción a las matrices casi Cartan

En esta sección se generalizan algunos de los resultados presentados en el capítulo anterior a matrices casi Cartan.

Definición 12. [3, 8] Una matriz casi Cartan, es una matriz $A = (A_{ij})$ con $A \in M_n(\mathbb{Z})$ tal que:

- (a) $A_{ii} = 2$.
- (b) existe una matriz diagonal positiva $D \in M_n(\mathbb{Z})$, tal que DA es simétrica.

Se dice que una matriz casi Cartan A es definida positiva si y sólo si DA es definida positiva.

La siguiente proposición es análoga a la Proposición 1

Proposición 3. Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan definida positiva. Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$ entonces

$$(a) \ 0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$$

$$(b) \ A_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

Demostración. (a) Sea D la matriz diagonal que satisface la propiedad (b) de la Definición 12 y suponga que $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Por criterio de Sylvester, se tiene que el determinante de la submatriz principal

$$\begin{bmatrix} 2d_i & d_i A_{ij} \\ d_j A_{ji} & 2d_j \end{bmatrix}$$

es positivo, entonces $4 - A_{ij}A_{ji} > 0$ y así $A_{ij}A_{ji} < 4$. Más aún, como A_{ij} y A_{ji} tienen el mismo signo, entonces $A_{ij}A_{ji} \geq 0$.

(b) Si $A_{ij} \neq 0$ entonces $A_{ji} \neq 0$. Ahora como $A_{ij}, A_{ji} \in \mathbb{Z}$ el resultado se sigue de (a). \square

Al igual que para las matrices de Cartan, este resultado permite asociarle una bigráfica $B_A = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \omega)$ a cada matriz casi Cartan definida positiva A como sigue:

- $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_{ij} \mid i, j \in V \text{ con } i \neq j \text{ y } |A_{ij}| = |A_{ji}| \neq 0\}$
- $\mathcal{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in V \text{ con } i \neq j \text{ y } |A_{ij}| < |A_{ji}|\}$
- Para todo $e \in \mathcal{E} \cup \mathcal{A}$, $\omega(e) = A_{ji}$.

Una matriz casi Cartan A es conexa si su bigráfica asociada B_A es conexa. El siguiente resultado y su demostración son análogos a la Proposición 2.

Proposición 4. Sea A una matriz casi Cartan definida positiva y conexa. Entonces la matriz diagonal D tal que DA es simétrica es única hasta multiplicación por escalar.

Para cada matriz casi Cartan conexa y definida positiva A existe un único simetrizador $D \in M_n(\mathbb{Z})$ de traza mínima que cumple con la Definición 12.

2.2. Equivalencia de matrices casi Cartan definidas positivas

Dos matrices casi Cartan A y A' son equivalentes y se escribe $A \sim A'$ si existe una matriz T , \mathbb{Z} -invertible tal que $A' = D'^{-1}T^T(DA)T$, donde D y D' son matrices diagonales enteras con entradas positivas y conjugadas por una matriz de permutación tales que DA y $D'A'$ son simétricas. Considere la matriz elemental $E_{sr}^\sigma = I + \sigma e_s e_r^T$; entonces $T_{sr}^\sigma(A) = D'^{-1}(E_{sr}^\sigma)^T(DA)E_{sr}^\sigma$ será llamada *inflación* si $s \neq r$ y $\sigma < 0$, *deflación* si $s \neq r$ y $\sigma > 0$ y *cambio de signo* si $s = r$ y $\sigma = -1$. Además considere la *matriz de permutación* $P_{sr} = I - (e_s - e_r)(e_s - e_r)^T$. Se dirá que A y A' son \mathbb{G} -equivalentes ($A \sim_G A'$) si son equivalentes y T es una composición de inflaciones, deflaciones, permutaciones y cambios de signos.

Lema 4. Sea A una matriz casi Cartan conexa y definida positiva, D el simetrizador de A y $T \in \{I_r, P, E_{sr}^{-A_{sr}}\}$. Entonces $A' = (D')^{-1}T^T D A T$ es una matriz casi Cartan definida positiva con simetrizador $D' = \begin{cases} P^T D P, & \text{si } T = P; \\ D, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Demostración. Si $T = E_{sr}^{-A_{sr}}$ entonces:

$$D'A' = E_{rs}^{-A_{sr}} D A E_{sr}^{-A_{sr}}$$

de esto se obtiene:

$$\begin{aligned} d'_r A'_{rk} &= -A_{sr} d_s A_{sk} + d_r A_{rk} \\ &= d_r (-A_{rs} A_{sk} + A_{rk}) \end{aligned}$$

como A es conexa, existe $k \neq r$ tal que $A'_{rk} \neq 0$ y como $A'_{rk} = -A_{rs} A_{sk} + A_{rk}$, entonces $d'_r = d_r$.

De igual manera:

$$\begin{aligned} d'_k A'_{kr} &= -A_{sr} d_k A_{ks} + d_k A_{kr} \\ &= d_k (-A_{sr} A_{ks} + A_{kr}) \end{aligned}$$

implica que $d'_k = d_k$

Ahora para demostrar que $A' = D^{-1} E_{rs}^{-A_{sr}} D A E_{sr}^{-A_{sr}}$ es una matriz casi Cartan sólo resta probar que $A'_{ii} = 2$.

$$A'_{rr} = A_{rr} - A_{sr} A_{rs} - A_{rs} (A_{sr} - A_{sr} A_{ss}) = A_{rr}$$

si $i \neq r$ entonces $A'_{ii} = A_{ii}$.

Si $T = P$ entonces $D'A' = P^T D A P$ con lo cual $D' = P^T D P$. Si $T = I_r$ entonces $D = D'$. \square

2.2.1. Formas cuadráticas enteras

Se denomina *forma cuadrática entera* a una función $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ de la forma:

$$q(x) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$$

donde $q_i, q_{ij} \in \mathbb{Z}$ y $q_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se denomina *forma integral* a la forma cuadrática entera q tal que $\frac{q_{ij}}{q_i} \in \mathbf{Z}$. Si además se cumple que $q_i = 1$ entonces se denomina forma unitaria. A cada matriz casi Cartan A se le puede

asociar una forma cuadrática de la siguiente manera:

$$q_{DA}(x) = \frac{1}{2}x^T D A x.$$

Si A es simétrica entonces

$$q_i = \frac{a_{ii}}{2}, \quad q_{ij} = a_{ij}$$

en el caso de matrices casi Cartan no simétricas:

$$q_i = \frac{a_{ii}}{2}d_i, \quad q_{ij} = a_{ij}d_i.$$

Se dirá que $x \in \mathbf{Z}^n$ es una raíz de q_{DA} si $q_{DA}(x) = q_i$ para algún $1 \leq i \leq n$. Sea $A \in \mathfrak{qC}$ y D el simetrizador de A . Se define como *raíz positiva* a una raíz $x \neq 0$ de q_{DA} , tal que $x_i \geq 0$. Se denota por $\mathcal{R}(q_{DA}) \subseteq \mathbf{Z}^n$ al conjunto de todas las raíces de q_{DA} , y por $\mathcal{R}^+(q_{DA}) \subseteq \mathbf{N}^n$ al subconjunto de $\mathcal{R}(q_{DA})$ de las raíces positivas. Se denomina *raíz* de una forma cuadrática unitaria a los $x \in \mathbf{Z}^n$ tales que $q(x) = 1$. Esto se debe a que este conjunto constituye un sistema de raíces. En el caso de las formas cuadráticas enteras, asuma que Δ es uno de los diagramas de Dynkin $\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8, \mathbb{F}_4$, o \mathbb{G}_2 , $D \in \mathbb{M}_\times(\mathbf{Z})$ el simetrizador de la matriz de Cartan A_Δ , y $q_{DA_\Delta} : \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}$ la forma cuadrática asociada. A partir de los resultados propuestos en [9], [10], [11], [12] se obtiene que, para $\Delta \neq \mathbb{C}_n$, el conjunto $\mathcal{R}(q_{DA_\Delta})$ de raíces q_{DA_Δ} es un sistema de raíces reducido e irreducible y su diagrama de Dynkin asociado es Δ . Además, se cumple que para $\Delta = \mathbb{C}_n$, $n \geq 5$, el conjunto $\mathcal{R}(q_{DA_\Delta})$ no es un sistema de raíces de tipo \mathbb{C}_n .

Ejemplo 5. Considere la matriz de Cartan asociada al diagrama de Dynkin \mathbb{C}_5 ,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

es fácil mostrar que $\alpha = (0, 1, 0, 0, 0)$ y $\beta = (-1, -2, -3, -3, -2)$ son elementos de $R(q_{DC_5})$, pero:

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

De lo cual se obtiene que $R(q_{DC_5})$ no es un sistema de raíces.

En el Lema 11 se demuestra que el conjunto $\mathcal{R}^+(q_{DA_{C_n}})$ tiene cardinalidad $\frac{n}{4}(n^3 - 6n^2 + 15n - 6)$, mientras que el conjunto de raíces positivas de un sistema irreducible de tipo C_n tiene cardinalidad n^2 , ver [11].

2.2.2. El método de las Inflaciones

El Teorema 6 permite caracterizar la equivalencia de formas cuadráticas enteras y por ende de las matrices casi Cartan positivas a partir de su diagrama de Dynkin asociado. Este fue demostrado para formas cuadráticas por Ovsienko en [4] y también puede ser obtenido parcialmente a partir de resultados de Makuracki [13]. Como parte de los resultados propuestos en este trabajo se ha incluido una demostración inspirada en el Teorema 8.26 [14] para conveniencia del lector (vea además [10], ambas son demostraciones para formas cuadráticas unitarias).

Teorema 6 (Método de las inflaciones). Sea A una matriz casi Cartan definida positiva, entonces $A \sim A_\Delta$ donde A_Δ es una matriz de Cartan.

Demostración. Si existen s, r , $s \neq r$ tal que $A_{sr} > 0$, considere $q = q_{DA}$, donde q_{DA} es la forma cuadrática asociada a DA , $A' = T_{sr}^{-A_{sr}}(A)$ y $q' = q_{DA'}$. Entonces $T_{sr}^{A_{sr}}$ aplica el conjunto de raíces de q , $\mathcal{R}(q)$ biyectivamente en $\mathcal{R}(q')$ y el conjunto de raíces positivas $\mathcal{R}^+(q)$ inyectivamente en $\mathcal{R}^+(q')$. Como $e_r = T_{sr}^{A_{sr}}(e_r - A_{sr}e_s) \in \mathcal{R}^+(q')$ pero $e_r - A_{sr}e_s$ no está en $\mathcal{R}^+(q)$, existen menos elementos en $\mathcal{R}^+(q)$ que en $\mathcal{R}^+(q')$. Además dado que el número de raíces positivas puede ser aumentado siempre que existan s, r , $s \neq r$ tal que $A_{sr} > 0$, se cumple que $|\mathcal{R}^+(q')| < |\mathcal{R}^+(q_\Delta)| < |\mathcal{R}(q_\Delta)|$, el conjunto $\mathcal{R}(q_\Delta)$ es

finito ver [14] y siguiendo este procedimiento se obtiene una matriz de Cartan A_Δ . \square

El *tipo Dynkin* de la matriz casi Cartan definida positiva A queda determinado por el diagrama de Dynkin asociado a la matriz A_Δ del teorema anterior.

Sea A una matriz casi Cartan no-simétrica, para determinar el tipo Dynkin de A es necesario utilizar inflaciones sobre DA , donde D es el simetrizador de A el cual se demostró que es único. Sea $A' = D^{-1}E_{rs}^{-A_{sr}}(DA)E_{sr}^{-A_{sr}}$, entonces se puede reducir el número de operaciones en la expresión aplicando el siguiente resultado:

Proposición 5. Sea A una matriz casi Cartan positiva, D una matriz diagonal con entradas positivas tal que DA es simétrica. Entonces:

$$D^{-1}(E_{rs}^{-A_{sr}})D = E_{rs}^{-A_{rs}}$$

Demostración. En la expresión $D^{-1}(E_{rs}^{-A_{sr}})D$, los elementos de la diagonal serán iguales a 1 y el resto de los elementos a excepción de la entrada rs deben ser 0.

La entrada rs en el producto $D^{-1}(E_{rs}^{-A_{sr}})$ es modificada como sigue:

- la fila r de $E_{rs}^{-A_{sr}}$ es multiplicada por d_r^{-1} ,
- en la columna j multiplicando $D^{-1}(E_{rs}^{-A_{sr}})$ por d_j se obtiene $-A_{sr}d_s d_r^{-1}$,

pero $-A_{sr}d_s = -A_{rs}d_r$, de lo cual se obtiene $-A_{sr}d_s d_r^{-1} = -A_{rs}$. \square

Se define $T_{sr}^{-A_{sr}}(A) = E_{rs}^{-A_{rs}}AE_{sr}^{-A_{sr}}$. A partir de los resultados anteriores se obtiene el siguiente algoritmo:

El teorema siguiente permite caracterizar la equivalencia usual de matrices a partir de la equivalencia \sim_G definida anteriormente.

Algoritmo 2.2.1: Algoritmo de las Inflaciones

Entrada: Una matriz casi Cartan definida positiva A

- 1 **mientras** exista una entrada no diagonal $A_{sr} > 0$ **hacer**
 - 2 $A := E_{rs}^{-A_{rs}} A E_{sr}^{-A_{sr}};$
-

Teorema 7. Si A y A' son matrices casi Cartan positivas. Entonces $A' \sim A$ si y sólo si $A' \sim_G A$.

Demostración. Si $A' \sim_G A$ es claro que $A' \sim A$. Por el contrario si $A' \sim A$ entonces por Teorema 6 $A' \sim_G A'_\Delta$ y $A \sim_G A_\Delta$ donde A_Δ y A'_Δ son matrices de Cartan isomorfas. Luego $A' \sim_G A$. \square

2.3. Bigráficas.

Cada bigráfica $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \omega)$ puede representarse gráficamente con un diagrama D_G de puntos, líneas (sólidas y punteadas) y flechas (sólidas y punteadas) con pesos. Los puntos del diagrama D_G son representados por los vértices de G , cada arista es representada de la siguiente forma:

- Sea $e_{uv} \in \mathcal{E}$ si $\omega(e_{uv}) < 0$ ($\omega(e_{uv}) > 0$) se traza una línea sólida (punteada) entre los puntos u y v con peso $\omega = \omega(e_{uv})$, $u \xrightarrow{\omega} v$ ($u \xrightarrow{\omega} v$).
- Sea $a_{uv} \in \mathcal{A}$ si $\omega(a_{uv}) < 0$ ($\omega(a_{uv}) > 0$) se traza una flecha punteada (sólida), con peso $\omega(a_{uv})$ del vértice u al vértice v , $u \xrightarrow{\omega} v$ ($u \xrightarrow{\omega} v$).

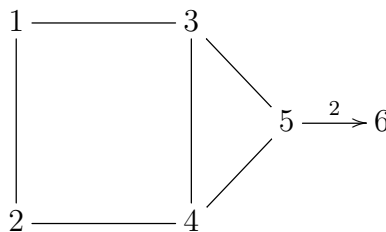
A lo largo de este trabajo no se hace distinción entre la bigráfica G y su diagrama D_G .

Ejemplo 6. Si la bigráfica G está dada por los siguientes conjuntos

- El conjunto de vértices es $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

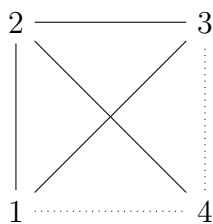
- El conjunto de aristas es $\mathcal{E} = \{e_{12}, e_{13}, e_{24}, e_{34}, e_{35}, e_{45}\}$
- El conjunto flechas es $\{a_{56}\}$
- $\omega(a_{56}) = -2$ y $\omega(e_{uv}) = -1$ si $\{u, v\} \in \mathcal{E}$.

Entonces el diagrama de G es



Si $u, v \in \mathcal{V}$ son tales que $e_{uv} \in \mathcal{E}$, o que $a_{uv} \in \mathcal{A}$, decimos que u y v son adyacentes. Un *camino* del vértice u al vértice v en una gráfica mixta G es una sucesión de vértices, $W : v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_n$, tal que para $j = 1, \dots, n$, los vértices v_{j-1} y v_j son adyacentes y $u = v_0$, $v = v_n$. El *vértice inicial* es v_0 , el *vértice final* es v_n , y los vértices v_1, \dots, v_{n-1} son llamados *vértices internos* del camino W ; la *longitud* de un camino W es el número de aristas y flechas en W (contando repeticiones).

Ejemplo 7. De camino, longitud y vértices intermedios.

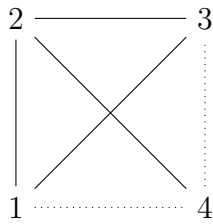


Un camino del vértice 1 al vértice 3 de longitud uno sería el 13, de longitud 2 tendríamos los caminos 123 y 143 en los cuales los vértices intermedios serían 2 y 4 respectivamente. Un camino de longitud 4 del vértice 1 al vértice 3 sería 12423.

Un camino es *cerrado* si el vértice inicial es también el vértice final. Un *ruta* es un camino donde las aristas y flechas no se repiten, un camino simple es

una ruta en la que sus vértices internos no se repiten; un *ciclo* es un camino simple cerrado de longitud al menos tres.

Ejemplo 8. Camino simple y ciclo



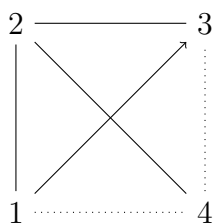
Un camino simple del vértice 1 al vértice 3 de longitud uno sería el 13, de longitud 2 tendríamos los caminos 123 y 143, de longitud 3 tendríamos el 1243, sin embargo se puede apreciar que no existe un camino simple de longitud 4. Un ejemplo de ciclo sería 12341.

Una bigráfica es *conexa* si entre cada par de vértices existe un camino. Es fácil demostrar que si existe un camino en G , entonces existe un camino simple en G . Un *camino trivial*, ruta trivial, o camino simple trivial, consiste de un sólo vértice sin aristas ni flechas.

Una *sub-bigráfica* de una bigráfica G es una bigráfica cuyo conjunto de vértices (respectivamente conjunto de aristas y conjunto de flechas) es un subconjunto del conjunto de vértices (respectivamente conjunto de aristas y conjunto de flechas) de G y ω se restringe al subconjunto. La sub-bigráfica de G *sub-bigráfica inducida* por el conjunto de vértices $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ es $S_G = (\mathcal{V}_S, \mathcal{E}_S, \mathcal{A}_S, \omega_{\mathcal{E}_S})$ donde \mathcal{E}_S (\mathcal{A}_S) consiste de cada arista (flecha) entre los vértices de \mathcal{V}_S . Un *ciclo sin cuerdas* es un ciclo $C : i_1, \dots, i_t, i_1$ tal que C es una sub-bigráfica inducida por el conjunto de vértices $\mathcal{V}_1 = \{i_1, \dots, i_t\}$.

Una bigráfica $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \omega)$ es llamada completa si $|\mathcal{E}| + |\mathcal{A}| = \binom{|\mathcal{V}|}{2}$.

Ejemplo 9. Ciclo inducido y bigráfica completa



La bigráfica que aparece en la figura es completa, en efecto basta comprobar que $|\mathcal{V}| = 4$, $|\mathcal{E}| + |\mathcal{A}| = 5 + 1 = 6 = \binom{4}{2}$.

2.4. Operaciones sobre bigráficas

Sea A una matriz casi Cartan no-simétrica definida positiva. El principal objetivo de esta sección es aplicar operadores de inflación en el proceso de determinar el tipo Dynkin de A directamente sobre la bigráfica asociada a A (vea, [16]). Estas transformaciones serán realizadas sin utilizar multiplicaciones de matrices y en términos de la suma de bigráficas que definiremos a continuación.

2.4.1. Suma de bigráficas

Definición 13. Sean $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \omega)$, $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}', \mathcal{A}', \omega')$. Entonces, la suma de G y G' se define como $G \oplus G' = (\mathcal{V} \cup \mathcal{V}', \mathcal{E}'', \mathcal{A}'', \omega'')$ donde:

$$\omega''(e) = \begin{cases} \omega(e), & \text{if } e \in (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}') \cup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}') \\ \omega'(e), & \text{if } e \in (\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}) \cup (\mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}) \\ \omega'(e) + \omega(e), & \text{if } e \in (\mathcal{E} \cap \mathcal{E}') \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{A}') \end{cases}$$

$\mathcal{E}'' = (\mathcal{E} \cup \mathcal{E}') \setminus \{e \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}' \mid \omega'(e) + \omega(e) = 0\}$ y $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \setminus \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \mid \omega'(e) + \omega(e) = 0\}$.

Nota 1. La operación \oplus es conmutativa y asociativa.

2.4.2. Flaciones sobre matrices casi Cartan no simétricas positivas.

Sea $b_{ri} = -A_{rs}A_{si}$ para todo $i \neq r$ y $G_{\{i,r\}}^{b_i}$ la bigráfica asociada a cada arista o flecha entre i y r . Si $b_{ir} = b_{ri} \neq 0$ entonces $G_{\{i,r\}}^{b_i} := i \xrightarrow{b_{ri}} r$ (respectivamente $i \xleftarrow{b_{ri}} r$) si $b_{ir} < 0$ ($b_{ir} > 0$). Si $|b_{ri}| > |b_{ir}|$, $G_{\{i,r\}}^{b_i} := i \xrightarrow{b_{ri}} r$ ($i \xleftarrow{b_{ri}} r$) si $b_{ir} < 0$ ($b_{ir} > 0$). Con $T_{sr}^{-A_{sr}}(G)$ denotamos la bigráfica asociada a la matriz

$A' = E_{rs}^{-A_{rs}} A E_{sr}^{-A_{sr}}$. Entonces toda inflación o deflación puede ser gráficamente interpretada como sigue:

Teorema 8. Sea A una matriz casi Cartan conexa y positiva definida, G la bigráfica asociada a A . Entonces se cumple que:

$$T_{sr}^{-A_{sr}}(G) = G \oplus \bigoplus_{i \neq r, b_i \neq 0} G_{\{i,r\}}^{b_i}$$

Demostración. Si realizamos el producto $T_{sr}^{-A_{sr}}(DA) = DA'$ se obtiene:

$$A'_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r, j \neq r \\ A_{rj} - A_{rs}A_{sj} & \text{if } i = r, j \neq r \\ A_{ir} - A_{sr}A_{is} & \text{if } i \neq r, j = r \end{cases}$$

el resto se obtiene directamente de las propiedades de la suma. □

Ejemplo 10. Sea G una bigráfica, note que aplicando la inflación T_{13}^- sobre G es equivalente al siguiente procedimiento:

$$G \oplus G_{\{1,3\}}^{b_1} \oplus G_{\{2,3\}}^{b_2} \oplus G_{\{4,3\}}^{b_4} \oplus G_{\{5,3\}}^{b_5}$$

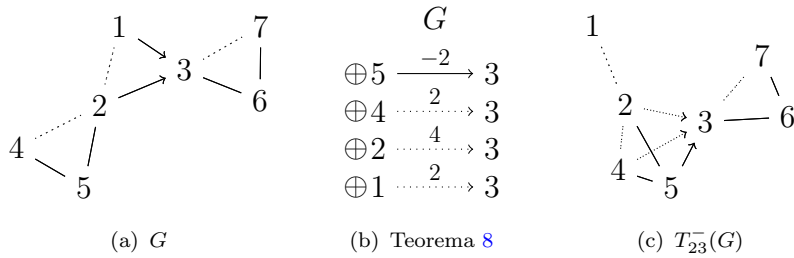


FIGURA 2.1: Aplicando una inflación sobre la bigráfica G

2.5. Matrices casi Cartan de tipo \mathbb{B}_n

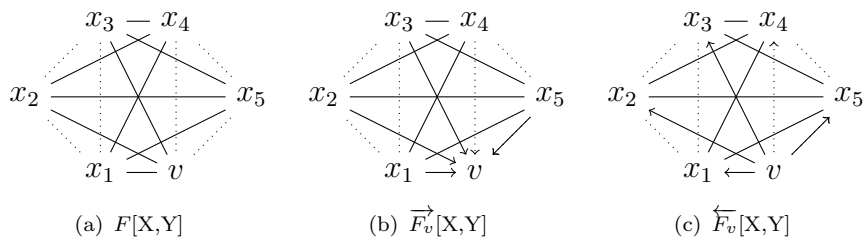
Se denota por $F[X, Y]$ y se denomina \mathbb{A} – bloque a la bigráfica completa de $|X| + |Y|$ vértices donde los conjuntos X, Y forman una partición de los vértices de $F[X, Y]$ y que posee las características de que si $v_1, v_2 \in X \vee v_1, v_2 \in Y$ entonces v_1 y v_2 están unidos por una arista punteada, en caso contrario si $v_1 \in X, v_2 \in Y$ entonces v_1 y v_2 están unidos por una arista sólida.

En [17] Barot demuestra que si $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ es una bigráfica completa asociada a una matriz casi Cartan definida positiva de tipo \mathbb{A}_n ; entonces este debe ser de tipo $F[X, Y]$ y tal que $|X| + |Y| = |\mathcal{V}| = n$.

2.5.1. Construcción de bigráficas de tipo \mathbb{B}_n

Sea $F[X, Y]$ un \mathbb{A} – bloque y sea v un vértice de $F[X, Y]$ se denota como $\vec{F}_v[X, Y]$ ($\overleftarrow{F}_v[X, Y]$) y se denomina como \mathbb{B} – bloque (\mathbb{C} – bloque) a la bigráfica obtenido de $F[X, Y]$ luego de sustituir cada arista sólida (punteada) incidente en v por una flecha sólida (punteada) que apunta a (saliendo de) v . Al vértice v se le nombrará vértice distinguido. Un vértice $v \in \mathcal{V}$ se denomina vértice fuente (respectivamente pozo) si para todo $a_{ij} \in \mathcal{A}$ el vértice i (respectivamente j) es igual a v y $e_{vj}, e_{iv} \notin \mathcal{E}$.

FIGURA 2.2: \mathbb{A} -bloque, \mathbb{B} -bloque y \mathbb{C} -bloque



En [17] es introducido el concepto de ensamble de \mathbb{A} –bloques. Abarca y Rivera [5] reinterpretaron este concepto para introducir el árbol de \mathbb{A} –bloques.

En este trabajo es presentado el ensamble de un modo mas general en términos de la suma de bigráficas.

Sean G_1, G_2, \dots, G_n bigráficas y G una bigráfica tal que:

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$$

entonces G es un ensamble de las bigráficas G_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ la bigráfica conexa compuesta por el ensamble de los \mathbb{A} -bloques G_2, G_3, \dots, G_n y el \mathbb{B} -bloque G_1 , tal que las componentes conexas de G son exactamente G_1, G_2, \dots, G_n , todo vértice de separación es la intersección de exactamente dos bloques y el vértice distinguido no es de separación. La bigráfica resultante será llamada \mathbb{B} -ensamble. Bajo las mismas hipótesis y reemplazando el \mathbb{B} -bloque por un \mathbb{C} -bloque es obtenida una definición similar para \mathbb{C} -ensamble.

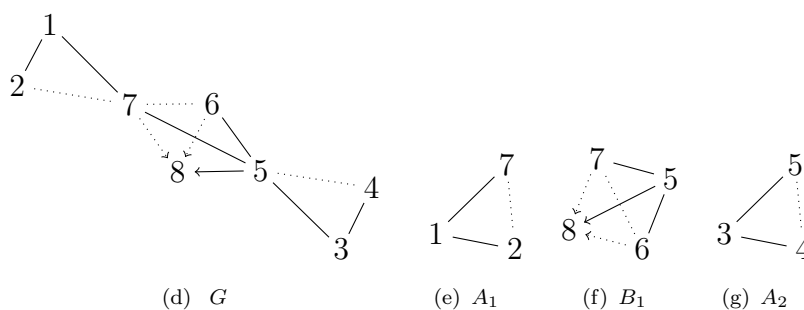
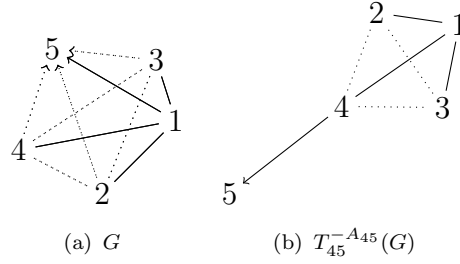


FIGURA 2.3: Descomposición del \mathbb{B} -ensamble G en bloques

Lema 5. Sea $G = \vec{F}_v[X, Y]$ un \mathbb{B} -bloque. Entonces para toda flación $T_{sr}^{-A_{sr}}$, $s, r \in X \cup Y$:

- (a) $T_{sr}^{-A_{sr}} G = (G - r) \oplus s \rightarrow r$ si $s, r \notin \{v\}$ y $A_{sr} > 0$,
 $T_{sr}^{-A_{sr}} G = (G - r) \oplus s \cdots r$ si $s, r \notin \{v\}$ y $A_{sr} < 0$.
- (b) $T_{sr}^{-A_{sr}} G = (G - r) \oplus s \rightarrow r$ si $r = v$ y $A_{sr} > 0$,
 $T_{sr}^{-A_{sr}} G = (G - r) \oplus s \cdots r$ si $r = v$ y $A_{sr} < 0$.

FIGURA 2.4: Efectos de las flaciones sobre los \mathbb{B} -bloques

$$(c) T_{sr}^{-A_{sr}}G = \vec{F}_v[X \cup \{r\}, Y \setminus \{r\}] \text{ si } s = v.$$

Demostración. (a) Sean $s \neq v$ y $r \neq v$. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que $v, r \in Y$ y $A_{sr} > 0$. Aplicando $T_{sr}^{-A_{sr}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} T_{sr}^{-A_{sr}}(G) &= G \oplus \bigoplus_{\substack{i \neq r \\ b_{ir} \neq 0}} G_{\{i,r\}}^{b_i}, \\ &= \vec{F}_v[X, Y] \oplus \bigoplus_{\substack{i \neq s, v \\ b_{ir} > 0}} i \cdots r \oplus \bigoplus_{\substack{i \neq s, v \\ b_{ir} < 0}} i \cdots r \oplus r \rightarrow v \oplus G_{\{s,r\}}^{b_s}, \\ &= \vec{F}_v[X, Y] \oplus \bigoplus_{i \in X} i \cdots r \oplus \bigoplus_{i \in Y \setminus \{r, s, v\}} i \cdots r \oplus r \rightarrow v \oplus s \xrightarrow{-2} r, \\ &= \vec{F}_v[X, Y \setminus \{r\}] \oplus s \cdots r \oplus s \xrightarrow{-2} r, \\ T_{sr}^{-A_{sr}}(G) &= (\vec{F}_v[X, Y] - r) \oplus s \cdots r. \end{aligned}$$

(b) Si $r = v$ y $A_{sr} > 0$, entonces aplicando el mismo procedimiento se obtiene:

$$T_{sr}^{-A_{sr}}(G) = \vec{F}_v[X, Y \setminus \{r\}] \oplus s \cdots r \oplus G_{\{s,r\}}^{b_s}. \quad (2.1)$$

(c) Si $s = v$ para toda arista o flecha entre los vértices i y r con peso ω existe una arista o flecha entre los mismos vértices con peso -2ω . Con lo cual el resultado se cumple. □

Lema 6. Sea $G = \vec{F}_v \oplus F$ un \mathbb{B} -ensamble, donde \vec{F}_v es un \mathbb{B} -bloque, F es un \mathbb{A} -bloque y s es el vértice de separación, entonces:

- si $r \neq v$, $T_{sr}^{-A_{sr}}(G) = (\vec{F}_v - r) \oplus F'$ donde $F' - r = F$,
- si $r = v$, $T_{sr}^{-A_{sr}}(G) = \vec{F}'_v \oplus F''$ donde $\vec{F}'_v - r = F$, $F'' = \vec{F}'_v - r$.

Demostración. Asuma que $\vec{F}_v = \vec{F}_v[X, Y]$, $F = F[X', Y']$, $r \in X \cup Y - \{v\}$, y $s \in X \cap X'$, entonces, si $A_{sr} < 0$:

$$\begin{aligned}
 T_{sr}^{-A_{sr}}(G) &= \vec{F}_v[X, Y] \oplus F[X', Y'] \oplus \bigoplus_{i \neq r, b_{ir} \neq 0} G_{\{i, r\}}^{b_i}, \\
 &= \vec{F}_v[X, Y] \oplus F[X', Y'] \oplus \bigoplus_{i \neq r, i \in X \cup Y} G_{\{i, r\}}^{b_i} \oplus \bigoplus_{j \in X' \cup Y'} G_{\{j, r\}}^{b_j}, \\
 &= (\vec{F}_v[X, Y] - r) \oplus \bigoplus_{j \in X' \cup Y'} G_{\{j, r\}}^{b_j} \oplus F[X', Y'], \\
 &= (\vec{F}_v[X, Y] - r) \oplus F[X' \cup \{r\}, Y'].
 \end{aligned}$$

de lo cual se puede elegir $F[X' \cup \{r\}, Y']$ como F' , note que si $A_{sr} > 0$ entonces $F' = F[X', Y' \cup \{r\}]$. Si $r = v$ escogiendo $F'' = \vec{F}'_v[X, Y] - r$ y $\vec{F}'_v = F[X' \cup \{r\}, Y']$ se obtiene el resultado deseado. \square

2.5.2. Demostración del resultado principal para \mathbb{B}_n

Resulta de interés conocer si los \mathbb{B} -ensambles son invariantes bajo flaciones, i.e. si G es un \mathbb{B} -ensamble, entonces $T_{sr}^\sigma G$ es también un \mathbb{B} -ensamble.

Lema 7. Sea A una matriz casi Cartan, B_A un \mathbb{B} -ensamble. Entonces $T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A)$ es un \mathbb{B} -ensamble (vea, [16]).

Demostración. Como B_A es un \mathbb{B} -ensamble, se tiene que:

$$B_A = G \oplus F[X', Y'] \oplus \vec{F}_v[X, Y],$$

donde $\vec{F}_v[X, Y]$ es el \mathbb{B} -bloque en B_A , $F[X', Y']$ es un \mathbb{A} -bloque, G y $G \oplus F[X', Y']$ son \mathbb{A} -ensambles, y $F[X', Y'] \oplus \vec{F}_v[X, Y]$ es un \mathbb{B} -ensamble. Si $s, r \in \mathcal{V}(G \oplus F[X', Y'])$ y $s \notin X \cup Y$, entonces se cumple:

$$T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A) = T_{sr}^{-A_{sr}}(G \oplus F[X', Y']) \oplus \vec{F}_v[X, Y].$$

A partir de los resultados propuestos en [17] y [5], $T_{sr}^{-A_{sr}}(G \oplus F[X', Y'])$ es un \mathbb{A} -ensamble. Como s no es un vértice de separación, entonces $T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A)$ es un \mathbb{B} -ensamble.

Si $s, r \in (X \cup Y)$ y $s \in X' \cup Y'$ es un vértice de separación, entonces:

$$T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A) = G \oplus T_{sr}^{-A_{sr}}(F[X', Y'] \oplus \vec{F}_v[X, Y]).$$

Asuma sin pérdida de generalidad que $s \in X'$ y $r \in Y$. A partir del Lema 6, si $A_{sr} < 0$ entonces

$$T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A) = G \oplus (F[X' \cup \{r\}, Y'] \oplus (\vec{F}_v[X, Y] - r)),$$

y por lo tanto $T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A)$ es un \mathbb{B} -ensamble. De un modo similar, si $s, r \in (X' \cup Y')$ y $s \in X \cup Y$ es un vértice de separación, entonces se tiene que $s \in X$ y $v \in Y'$.

$$T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A) = G \oplus ((F[X', Y'] - r) \oplus \vec{F}_v[X \cup \{r\}, Y]).$$

Si $s, r \in X \cup Y$ y s, r no son vértices de separación, aplicando el Lema 5 se cumple que $T_{sr}^{-A_{sr}}(B_A)$ es un \mathbb{B} -ensamble. \square

Teorema 9. Sea G un \mathbb{B} -ensamble, T una composición de flaciones. Entonces $T(G)$, es un \mathbb{B} -ensamble.

Demostración. La demostración se puede obtener fácilmente por inducción sobre el número de flaciones en la composición T . El caso base fue probado en el Lema 7. \square

Ya fue probada una implicación del resultado principal. Para probar la otra implicación será conveniente comenzar probando que todo \mathbb{B} -bloque tiene tipo Dynkin \mathbb{B} .

Lema 8. Todo \mathbb{B} -bloque no vacío $G = \vec{F}_v[X, Y]$ tiene tipo Dynkin \mathbb{B} .

Demostración. Suponga que $v \in Y$, y $X \neq \emptyset$, $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Aplicando $T_{x_2x_1}^{-1}$ sobre G es obtenido:

$$T_{x_2x_1}^{-1}(G) = \vec{F}_v[X \setminus \{x_1\}, Y] \oplus x_1 \text{---} x_2,$$

aplicando sucesivamente $T_{x_i x_{i-1}}^{-1}$ a G .

$$T_{x_k x_{k-1}}^{-1} \dots T_{x_2 x_1}^{-1}(G) = \vec{F}_v[\{x_k\}, Y] \oplus \bigoplus_{i \in [2 \dots k]} x_{i-1} \text{---} x_i.$$

si $|Y| > 1$ y tomando $Y = \{y_1, \dots, y_{k'}\}$ si se aplica un argumento similar,

$$T_{y_{k'} y_{k'-1}}^{-1} \dots T_{y_2 y_1}^{-1} T_{x_k x_{k-1}}^{-1} \dots T_{x_2 x_1}^{-1}(G),$$

$$= F[\{x_k\}, \{y_1\}] \oplus \bigoplus_{i \in [2 \dots k]} x_{i-1} \text{---} x_i \oplus \bigoplus_{j \in [2 \dots k']} y_{j-1} \text{---} y_j \oplus y_{k'} \text{---} v.$$

Si $X = \emptyset$ aplicando directamente $T_{y_{k'} y_{k'-1}}^{-1} \dots T_{y_2 y_1}^{-1}$ sobre G se obtiene el resultado deseado. Con lo cual $\vec{F}_v[X, Y]$ tiene tipo Dynkin \mathbb{B} . \square

Teorema 10. Sea G un \mathbb{B} -ensamble entonces existe una sucesión de flaciones con composición T tal que $T(G)$ es un \mathbb{B} -bloque.

Demostración. Sea

$$G = \bigoplus_{i \in [2 \dots k']} F[X_i, Y_i] \oplus \vec{F}_v[X, Y]$$

siguiendo los resultados obtenidos en [5] $\exists X', Y'$ y una sucesión de inflaciones con composición T tal que $F[X', Y'] = T(\bigoplus_{i \in \{2, \dots, k\}} F[X_i, Y_i])$, entonces:

$$T(G) = F[X', Y'] \oplus \overrightarrow{F_v[X, Y]}$$

Sea $s \in Y \cup Y'$ un vértice de separación, aplicando la transformación $T_{sx'}^1$:

$$T_{sx'}^1(G) = \overrightarrow{F_v[X, Y \cup \{x'\}]} \oplus F[X' - \{x'\}, Y']$$

Repetiendo este procedimiento para todo x' en $X' \cup Y'$ el \mathbb{B} -ensamble puede ser embebido en un sólo \mathbb{B} -bloque. El resto de la demostración puede ser deducido fácilmente del lema 8. \square

El siguiente teorema es una consecuencia directa de los resultados anteriores y es el principal resultado de esta sección.

Teorema 11. Sea G una bigráfica. Entonces, G tiene tipo Dynkin \mathbb{B} si y sólo si es un \mathbb{B} -ensamble.

2.5.2.1. Raíces de la forma cuadrática asociada a \mathbb{B}_n .

Sea q la forma cuadrática asociada a la matriz casi Cartan \mathbb{B}_n , entonces esta puede ser representada del siguiente modo:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j}^{n-1, n} (x_i - x_j)^2 + x_1^2$$

donde sus raíces conforman el siguiente conjunto:

$$\{x \in \mathbb{Z}^n : q(x) = 1 \text{ ó } 2\}.$$

Para el cálculo de las raíces positivas consideraremos sólo los $x \in \mathbb{N}^n$. Veamos primero para cuales valores de x se cumple que $q(x) = 2$. Claramente esto sólo se cumple si exactamente dos sumandos son iguales a 1, si $x_1 = 1$ entonces; $x_1 =$

$x_2 = \dots = x_i = 1$, $x_{i+1} = \dots = x_n = 0$ ó 2 ó $x_1 = 1$, $x_2 = \dots = x_n = 0$ ó 2 . Si $x_1 = 0$ entonces; $x_1 = x_2 = \dots = x_i = 0$, $x_{i+1} = \dots = x_k = 1$, $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ ó 2 . De igual manera para que se cumpla que $q(x) = 1$ exactamente un sumando debe ser 1 y el resto 0. Si $x_1 = 1$ entonces; $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, si $x_1 = 0$; $x_1 = x_2 = \dots = x_i = 0$, $x_{i+1} = \dots = x_n = 1$. Con lo cual las raíces de \mathbb{B}_n son las siguientes:

Raíces	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$
$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$	$(n-1)$
$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	$(n-1)$
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$	$(n-1)$
$(1, \dots, 1)$	1
Total	n^2

2.6. Bigráficas de tipo Dynkin \mathbb{C}_n

Lema 9. Sea A una matriz casi Cartan definida positiva tal que A^t es una matriz casi Cartan definida positiva, además:

$$A' = T_{sr}^{-A_{sr}}(A),$$

entonces, $(A')^t$ y A^t tienen el mismo tipo Dynkin.

Demostración.

$$\begin{aligned} (A')^t &= (E_{rs}^{-A_{rs}} A E_{sr}^{-A_{sr}})^t, \\ &= (E_{sr}^{-A_{sr}})^t A^t (E_{rs}^{-A_{rs}})^t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_{rs}^{-A_{sr}} A^t E_{sr}^{-A_{rs}}, \\
&= E_{rs}^{-A_{rs}^t} A^t E_{sr}^{-A_{sr}^t}, \\
&= T_{sr}^{-A_{sr}^t}(A^t),
\end{aligned}$$

con lo cual $(A')^t$ tiene el mismo tipo Dynkin que A^t . □

Lema 10. Si A y A^t son matrices casi Cartan definidas positivas y $\{T_{ij}^{\sigma_k}\}$ es una secuencia de flaciones con composición T tal que:

$$A' = T(A), \tag{2.2}$$

entonces, las matrices $(A')^t$ y A^t tienen el mismo tipo Dynkin.

Demostración. La demostración puede ser realizada aplicando inducción sobre el número de elementos en la sucesión $\{T_{ij}^{\sigma_k}\}$. El caso base puede ser obtenido del lema 9. □

Por el Teorema 10, toda matriz tiene tipo Dynkin \mathbb{B}_n si y sólo si su transpuesta tiene tipo Dynkin \mathbb{C}_n . Sea A una matriz casi Cartan y B_A un \mathbb{B} -ensamble. Entonces $(A^T)_{ij} = A_{ji} = A_{ij}$, $|(A^T)_{vj}| = |A_{jv}| = 1$ y $|(A^T)_{jv}| = |A_{vj}| = 2$. De lo cual B_{A^T} se mantiene igual a B_A , pero, con las flechas en dirección opuesta. El siguiente teorema es obtenido directamente de los resultados presentados anteriormente y es el teorema fundamental de esta sección.

Teorema 12. Sea G una bigráfica. Entonces G tiene tipo Dynkin \mathbb{C}_n si y sólo si es un \mathbb{C} -ensamble.

2.6.1. Raíces de la forma cuadrática asociada a \mathbb{C}_n

Lema 11. Sea $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ la forma cuadrática integral asociada a \mathbb{C}_n . Entonces q tiene $\frac{n}{4}(n^3 - 6n^2 + 15n - 6)$ raíces positivas.

Demostración. El conjunto de raíces positivas de \mathbb{C} está compuesto por los $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ tales que:

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i^2 - \sum_{1 \leq i < n-1} x_i x_{i+1} + 2x_n^2 - 2x_{n-1} x_n \in \{1, 2\}$$

o equivalentemente

$$x_1^2 + \sum_{1 \leq i < n} (x_i - x_{i+1})^2 + (x_{n-1} - 2x_n)^2 \in \{2, 4\} \quad (2.3)$$

Se calculan los vectores positivos $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ tales que el polinomio (2.3) toma el valor 2 ó 4. Usando un argumento similar que en el lema anterior se tiene que las n -uplas son las que aparecen en el Cuadro 2.1.

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa de [14, Prop. 8.25] y del cálculo de las raíces de las formas integrales asociadas a \mathbb{B}_n y \mathbb{C}_n .

Teorema 13. Sea q_{DA} una forma integral tal que B_A es un diagrama de Dynkin. Entonces $|\mathcal{R}^+(q_{DA})|$ es como se indica en la siguiente lista:

A_n	\mathbb{B}_n	\mathbb{C}_n	\mathbb{D}_n	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8	\mathbb{F}_4	\mathbb{G}_2
$\frac{n}{2}(n+1)$	n^2	$\frac{n}{4}(n^3 - 6n^2 + 15n - 6)$	$n(n-1)$	36	63	120	24	6

2.7. Bigráficas de tipo Dynkin \mathbb{F}_4

En [18] Kasjan y Simson estudiaron un enfoque diferente de la \mathbb{Z} -equivalencia de matrices casi Cartan en $\mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$. Una matriz casi Cartan definida positiva A (con simetrizador D) tiene tipo Dynkin \mathbb{F}_4 si y sólo si:

- (i) $D = P^t D_\Delta P$ con P una matriz de permutación y $D_\Delta = \text{diag}(1, 1, 2, 2)$.

Raíces	Conteo
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$
$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1)$	$(n-2)$
$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	$(n-1)$
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1)$	$(n-2)$
$(1, \dots, 1)$	1
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1)$	$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-6} (k+1)(n-5-k)(n-4-k)$
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1)$	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 2)$	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-5} (k+1)(n-4-k)(n-3-k)$
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1)$	$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-5} (n-4-k)(n-3-k)$
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 1)$	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 1)$	
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 2)$	
$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 2)$	
$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-4} (n-3-k)(n-2-k)$
$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$	
$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2)$	
$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1)$	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$
$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3, 1)$	
$(0, \dots, 01)$	1
Total	$\frac{n}{4} (n^3 - 6n^2 + 15n - 6)$

CUADRO 2.1: Raíces de la forma cuadrática asociada a \mathbb{C}_n

- (ii) $\mathbf{specc}_{G_\Delta} = \mathbf{specc}_{G_{\Delta'}}$ donde $\mathbf{specc}_{G_{\Delta'}}$ es el espectro de una matriz triangular superior $G_{\Delta'} = (g_{ij})$ dado por $g_{ii} = \frac{1}{2}(DA)_{ii}$ y $g_{ij} = (DA)_{ij}$ para todo $i < j$.

En esta sección nosotros presentamos una descripción completa de las bigráficas de tipo Dynkin \mathbb{F}_4 en términos de la \mathbb{Z} -equivalencia definida al inicio de este documento. Esta caracterización es constructiva y permite determinar si una bigráfica tiene tipo Dynkin \mathbb{F}_4 por inspección simple.

Lema 12. Sea G una bigráfica tal que $G = \mathbb{F}_4$. Entonces para toda sucesión de flaciones T , GT es una extensión por un vértice de una bigráfica de tipo Dynkin \mathbb{B}_3 o \mathbb{C}_3 .

Demostración. Sea A' la matrix casi Cartan asociada a $T(G)$. Dado que A' es una matriz casi Cartan conexa y definida positiva de tipo Dynkin \mathbb{F}_4 , toda submatriz principal conexa S de A' con $S \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ debe ser una matriz casi Cartan definida positiva de tipo Dynkin $\mathbb{A}_3, \mathbb{B}_3$ ó \mathbb{C}_3 . Para probar que existe una submatriz principal conexa S con tipo Dynkin \mathbb{B}_3 o \mathbb{C}_3 , suponga que toda S de A' con $S \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ tiene tipo Dynkin \mathbb{A}_3 . Como A' es una matriz no simétrica, existen dos vertices r, v de $T(G)$ tales que $\max\{|A_{rv}|, |A_{vr}|\} \neq 1$ y la submatriz principal conexa que contiene la fila y columna correspondiente a r y v respectivamente, claramente no posee tipo Dynkin \mathbb{A} . Con lo cual A' necesariamente tiene una submatrix principal conexa de tipo Dynkin \mathbb{B}_3 ó \mathbb{C}_3 y el resultado se cumple. \square

Lema 13. Sea G una bigráfica de tipo Dynkin \mathbb{B}_3 o \mathbb{C}_3 . Entonces una bigráfica tiene tipo Dynkin \mathbb{F}_4 si y sólo si es una extensión por un vértice y de G tal que:

- hay una arista entre v y y ,
- toda conexión entre y y cualesquiera de los vértices no distinguidos deberá ser por una flecha tal que esta apunta a (sale de) y si v es un pozo (fuente),
- condición de ciclo: todo ciclo sin cuerdas deberá tener un número impar de conecciones punteadas (aristas o flechas).

Demostración. Es fácil comprobar que las siguientes bigráficas tienen tipo Dynkin \mathbb{F}_4 .

Para probar que las únicas gráficas subyacentes de las bigráficas con tipo Dynkin \mathbb{F}_4 son las asociadas a estas bigráficas, asuma que x_1, x_2 son vértices no

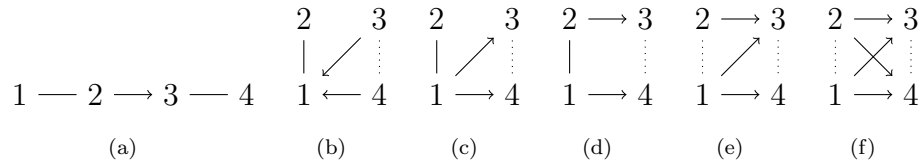


FIGURA 2.5: Bigráficas de tipo Dynkin \mathbb{F}_4

distinguidos. Si se adiciona una flecha entre v y y se tiene alguna de las siguientes subgráficas que no son definidas positivas:

$$x_2 \rightarrow v \rightarrow y \quad x_2 \rightarrow v \leftarrow y \quad x_2 \leftarrow v \rightarrow y \quad x_2 \leftarrow v \leftarrow y$$

Si se adiciona al menos una de las aristas e_{yx_i} y e_{vy} se obtiene una subgráfica no positiva:

$$\begin{array}{cccc} & y & & y & x_1 - y & x_1 - y \\ & / \quad | & & / \quad | & | \quad | & | \quad | \\ x_i \rightarrow v & & x_i \leftarrow v & & x_2 \leftarrow v & x_2 \rightarrow v \end{array}$$

Si se adicionan al menos una de las aristas e_{yx_i} o al menos una de las flechas a_{yx_i} entonces se tienen las siguientes posibilidades para la bigráfica resultante:

- tiene tipo Dynkin \mathbb{B}_4 ó \mathbb{C}_4 ,
- tiene como subgráfica una de las descritas anteriormente,
- tiene como gráfica subyacente una de las descritas a continuación:

$$y \rightarrow x_1 - x_2 \rightarrow v \quad y \rightarrow x_1 - x_2 \leftarrow v$$

□

Capítulo 3

Algoritmo para determinar el tipo Dynkin de una matriz casi Cartan positiva

Hasta el momento se ha mostrado que se puede calcular el tipo Dynkin de una matriz casi Cartan tanto simétrica como no simétrica utilizando el Algoritmo de la Inflaciones. La única cota superior conocida para el número de inflaciones es una exponencial, vea [7],[4],[5]. En este capítulo se mostrará que en realidad este algoritmo es polinomial ($\mathbf{O}(\mathbf{n}^6)$), vea [6]. Además se propone una modificación del mismo para decidir si una matriz casi Cartan es definida positiva y calcular su tipo Dynkin en $\mathbf{O}(\mathbf{n}^3)$ operaciones tomando una matriz entera como entrada.

3.1. El Algoritmo de las Inflaciones es polinomial

La demostración del teorema que enuncia el Método de las Inflaciones en el capítulo anterior implica que el máximo número de iteraciones no puede ser superior a $l(A) = |\mathcal{R}^+(q_\Delta)|$ donde Δ representa el tipo Dynkin de la matriz A asociada a q_Δ . En [7] la cota exponencial dada para este algoritmo fue de $n \cdot 6^{n+1}$ sin embargo en este mismo artículo se sugiere que en la práctica el algoritmo funciona de modo más rápido. Atendiendo a los resultados que fueron mostrados en el capítulo anterior el peor caso ocurre cuando A tiene tipo Dynkin \mathbb{C}_n , con un máximo de iteraciones $l(A) = \mathbf{O}(n^4)$. Cuando se restringe a matrices simétricas el peor caso es \mathbb{D}_n con un máximo de $\mathbf{O}(n^2)$ iteraciones. Una implementación directa sería buscar las entradas no diagonales tales que $A_{sr} > 0$ haciendo un recorrido sobre toda la matriz A en cada iteración. Con lo cual el algoritmo tardaría $\mathbf{O}(n^6)$ para determinar el tipo Dynkin positivo de la matriz A , de tener uno esta.

Note que la matriz de entrada en el Algoritmo de las Inflaciones debe ser definida positiva. De ser dada como entrada una matriz que no es definida positiva el algoritmo puede entrar en un ciclo infinito como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11. Sea A la matriz casi Cartan asociada a la siguiente bigráfica:

$$G_A = \begin{array}{c} & 1 & \\ & / \quad \backslash & \\ 2 & & 4 \\ & \backslash \quad / & \\ & 3 & \end{array}$$

Si se escoge en cada iteración k s tal que $s \in \{1, 2, 3, 4\}$, $k \equiv s - 1(3)$ y $r = 4$ se obtiene un ciclo infinito.

3.2. Algoritmo de las Inflaciones modificado

En esta sección se mejorará el Algoritmo de las Inflaciones con el fin de manejar matrices enteras y reportar el tipo Dynkin finito de estas si tiene uno en $\mathbf{O}(\mathbf{n}^3)$ operaciones. Note que removiendo el vértice distinguido de \mathbb{B}_n y \mathbb{C}_n se obtiene \mathbb{A}_{n-1} , además note que \mathbb{F}_4 es el único diagrama de Dynkin con flechas definido positivo sin vértice distinguido.

Se dice que una matriz $A \in M_n(\mathbb{Z})$ es *localmente simetrizable* si $A_{ii} = 2$ y se cumplen las siguientes condiciones para todo $i \neq j$:

- $sgn(A_{ij}) = sgn(A_{ji})$, donde $sgn(x) \in \{-1, 0, 1\}$ denota el signo del número real x ;
- si $A_{ij} \neq A_{ji}$ entonces $\frac{A_{ij}}{A_{ji}} \in \mathbb{N}$ o $\frac{A_{ji}}{A_{ij}} \in \mathbb{N}$.

La matriz $A \in M_n(\mathbb{Z})$ es *admisibile* si es localmente simetrizable, no tiene aristas multiples y $|A_{ij}| < 3$ para toda $i \neq j$.

Un vértice v en una bigráfica G es llamado un *vértice pozo* si para todo vértice x adyacente a v , se tiene que x es adyacente a v por medio de una flecha $x \longrightarrow v$. El vértice v es llamado *vértice fuente* si para todo vértice x adyacente a v , se tiene que x es adyacente a v por medio de una flecha $x \longleftarrow v$. Decimos que un vértice v de una bigráfica G es un *vértice distinguido* si es un vértice pozo o un vértice fuente, y todas las flechas de G son incidentes en V .

Lema 14. Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan no simétrica tal que su bigráfica G_A no tiene vértice distinguido; entonces A tiene el tipo Dynkin \mathbb{F}_4 o no es definida positiva.

Demostración. Inmediata por Teoremas 12 y 11. □

A cada matriz admisible $A \in \mathbb{Z}_n$ se le asocia una bigráfica G_A de la siguiente forma, el conjunto de vértices es $\{1, \dots, n\}$, si $|A_{ij}| = 1 = |A_{ji}|$ se traza una

arista solida (respectivamente punteada) si $A_{ij} < 0$ (respectivamente $A_{ij} > 0$), en el caso que $|A_{ij}| \neq |A_{ji}|$ se traza una flecha solida $i \longrightarrow j$ (respectivamente punteada $i \dashrightarrow j$) si $|A_{ji}| > |A_{ij}|$ y $A_{ji} < 0$ (respectivamente si $|A_{ji}| > |A_{ij}|$ y $A_{ji} > 0$).

Basados en el Lema 14 tenemos que considerar matrices admisibles cuya bigráfica asociada tenga un vértice distinguido.

Lemma 3.1. *Sea A una matriz admisible. Si su bigráfica asociada G_A tiene un vértice distinguido entonces A es una matriz casi Cartan.*

Demostración. Como A es una matriz entera tal que $A_{ii} = 2$, sólo resta demostrar que A es simetrizable. Sea $r \in \{1, \dots, N\}$ es el vértice distinguido de G_A . Si r es un vértice pozo entonces $|A_{rj}| = 2$ y $|A_{ij}| = 1$ para toda $i \neq j, i \neq r$ (recordar que $|A_{ij}| < 3$), entonces si se define la matriz diagonal $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$, como

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = r; \\ 2 & \text{if } i \neq r. \end{cases}$$

tenemos que en $A' = DA$ todas las entradas fuera de la diagonal principal son iguales a cero o tienen valor absoluto igual a dos. Más aún, como A es localmente simetrizable, entonces $A'_{ij} = A'_{ji}$ para toda $i \neq j$, es decir, A' es simétrica y por lo tanto A es simetrizable. Si r es una fuente, se toma $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$, definida por

$$d_i = \begin{cases} 2 & \text{if } i = r; \\ 1 & \text{if } i \neq r. \end{cases}$$

□

Así, toda matriz admisible con vértice distinguido es una matriz casi Cartan y podemos usar toda la notación y resultados del capítulo 2.

Para cada matriz admisible A y se dirá que su bigráfica asociada G_A es *sólida en flechas* si todas sus flechas tienen un estilo de línea sólido.

Lema 15. Sea A una matriz admisible. Si la bigráfica G_A es sólida en flechas, tiene un vértice distinguido y contiene una arista punteada $s \dashrightarrow r$ entonces $T_{sr}^{-A_{sr}}(G_A)$ o $T_{rs}^{-A_{rs}}(G_A)$ es sólida en flechas.

Demostración. Por simplicidad suponga que el vértice distinguido x es un pozo; el caso donde x es una fuente es análogo. Ahora se tienen tres casos dependiendo de los vértices s y r :

1. Si no existen flechas sólidas $s \rightarrow x$ y $r \rightarrow x$ entonces tanto $T_{sr}^{-A_{sr}}(G_A)$ como $T_{rs}^{-A_{rs}}(G_A)$ son sólidas en flechas.
2. Si existen flechas sólidas $s \rightarrow x$ y $r \rightarrow x$ entonces $T_{sr}^{-A_{sr}}(G_A)$ elimina la flecha $r \rightarrow x$ mientras que $T_{rs}^{-A_{rs}}(G_A)$ elimina a $u \rightarrow x$. Cualquiera de los dos casos produce una bigráfica sólida en flechas.
3. Si sólo existe una de las flechas $s \rightarrow x$, $r \rightarrow x$, se puede asumir sin ninguna pérdida de generalidad que sólo existe la flecha $s \rightarrow x$. Así, $T_{rs}^{-A_{rs}}(G_A)$ deja la flecha $s \rightarrow x$ sin cambios.

□

3.2.1. Resumen del algoritmo propuesto

El siguiente algoritmo trabaja en tres etapas en una matriz de entrada A :

Entrada: una matriz entera A con entradas diagonales $A_{ii} = 2$.

Etapas **1** Preprocese A para comprobar si es una matriz admisible; si A es no simétrica, compruebe si tiene un vértice distinguido, y elimine cualquier flecha punteada usando flaciones. Además, durante esta etapa construya una estructura de datos que ayude a localizar aristas punteadas

Etapa 2 Aplique el algoritmo de inflaciones hasta un número máximo de iteraciones actualizando la matriz A en cada iteración; y considere lo siguiente, si A es no-simétrica escoja $A_{sr} > 0$ tal que $T_{sr}^{-A_{sr}}(G_A)$ es sólido por flechas (ver Lema 15 y su demostración). Por último, dar mantenimiento a la estructura de datos.

Etapa 3 Realizar como máximo dos recorridos transversales de bigráficas para decidir si algún diagrama de Dynkin coincide con la bigráfica.

3.2.2. Preprocesado de A

Esta parte del algoritmo está compuesta por dos pasos principales; el filtrado y la búsqueda eficiente de aristas punteadas. Después del primer paso se conocerá la admisibilidad y simetría de A y también su vértice distinguido si tiene uno. En el segundo paso se construye una estructura de datos para localizar cualquier arista punteada en tiempo lineal. Después de eso se transforma cada flecha punteada de G_A en sólida. El siguiente algoritmo toma una matriz A con entradas diagonales $A_{ii} = 2$ y dos vértices i, j tales que $|A_{ij}| = 2$ como entrada y devuelve la variable $distinguido \in \{i, j\}$ si uno de ellos es un vértice fuente o pozo y una variable P donde:

- **distinguido:** es inicializada con NONE y guardará el posible vértice distinguido de existir este,
- **P:** es una variable booleana la cual devolverá FALSE si la matriz A no tiene tipo Dynkin finito y TRUE en otro caso.

3.2.2.1. Filtrado de A

Se comienza recorriendo cada vértice i comprobando paso a paso si $|A_{ij}| < 3$ para todo j y las condiciones localmente simétricas. Si alguna de estas afirmaciones no se cumple entonces A no es admisible y por lo tanto A no tiene un

Algoritmo 3.2.1: Algoritmo para encontrar un posible vértice distinguido.

```

1 Algoritmo buscardistinguido( $A, i, j, N, P, distinguido$ )
3    $src = \text{esfuente}(A, i, j, N)$ 
5    $snk = \text{espozo}(A, i, j, N)$ 
6   si  $src = -1$  and  $snk = -1$  and  $N \neq 4$  entonces
7      $P := \text{FALSE}$ 
8   si  $src = -1$  and  $snk \neq -1$  entonces
9      $distinguido := snk$ 
10  si  $src \neq -1$  and  $snk = -1$  entonces
11     $distinguido := src$ 
13  devolver  $distinguido, P$ 
1 Function espozo( $A, i, j, N$ )
2    $z := 1$ 
3    $pozo := i$ 
4   mientras  $z \leq N$  and  $pozo = i$  hacer
5     si  $A_{iz} \neq 0$  and ( $|A_{iz}| \neq 2$  or  $|A_{zi}| \neq 1$ ) and  $z \neq i$  entonces
6        $pozo := -1$ 
7        $z ++$ 
8   devolver  $pozo$ 
9 Function esfuente( $A, i, j, N$ )
10   $z := 1$ 
11   $fuelle := j$ 
12  mientras  $z \leq N$  and  $fuelle = j$  hacer
13    si  $A_{zj} \neq 0$  and ( $|A_{jz}| \neq 1$  or  $|A_{zj}| \neq 2$ ) and  $z \neq j$  entonces
14       $fuelle := -1$ 
15       $z ++$ 
16  devolver  $fuelle$ 

```

tipo de Dynkin finito. Durante este proceso mientras las condiciones admisibles para A se mantienen, compruebe la simetría y si existe alguna entrada no simétrica, entonces compruebe que A tiene un vértice distinguido para $n \neq 4$. Si no es el caso entonces A no tiene un tipo finito de Dynkin. Si $n = 4$ esta condición no es necesaria. En primer lugar se crean las siguientes variables para almacenar esta información:

- **Sim:** es una variable booleana que devuelve TRUE si la matriz es simétrica y FALSE si no lo es.

- **Admissible:** es una variable booleana que devuelve TRUE si la matriz es admisible y FALSE si no lo es.

El algoritmo descrito a continuación muestra este proceso de filtrado.

Algoritmo 3.2.2: Filtrado de A

Datos: Una matriz entera A con entradas diagonales $A_{ii} = 2$.

Resultado: Admissible, A , Sim, distinguido, P

```

1 Admissible:=TRUE, Sim:=TRUE, distinguido:=NONE, P:=TRUE, i := 1;
2 mientras i ≤ N and P hacer
3   j := 1
4   mientras j ≤ N and P hacer
5     si i ≠ j entonces
6       si (|Aij| = 2 and |Aji| ≠ 1) or sgn(Aij) ≠ sgn(Aji) or
7         |Aij| ≥ 3 entonces
8           Admissible:=FALSE; P:=FALSE
9         si Aij ≠ Aji entonces
10          Sim:=FALSE
11          si Aij = 2 and distinguido:=NONE entonces
12            distinguido, P=buscardistinguido(A, i, j, N, P, distinguido)
13            si (Aij = 2 and distinguido ≠ NONE) and i, j ≠ distinguido
14              entonces
15                P:=FALSE
16           j ++
17         i ++

```

Remark 3.2. Note que si $P := \text{FALSE}$ la admisibilidad y la simetría no son verificadas necesariamente sobre toda la matriz.

3.2.2.2. Búsqueda eficiente de aristas punteadas y múltiples

Se denomina como aristas múltiples entre los vértices i y j si $|A_{ij}| = |A_{ji}| > 1$. Recuerde que el algoritmo de inflaciones busca una arista punteada $s \cdots r$ en cada iteración y luego realiza una inflación $T_{sr}^{-A_{sr}}(G_A)$. Recuerde que una inflación actúa sólo en columna y fila r de A . Además, observe que ninguna bigráfica G con aristas múltiples puede ser definida positiva. Idealmente, el

algoritmo de inflaciones debe buscar tanto aristas punteadas como un par de vértices con una arista múltiple en cada iteración. Si existen aristas múltiples entonces el algoritmo para inmediatamente, y se tiene que G no tiene tipo Dynkin.

Con una estructura de datos que proporcione información acerca de las aristas punteadas se puede acelerar su búsqueda. Esta estructura de datos es una matriz binaria $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ definida por

$$g_i = \begin{cases} 1 & \text{si existe al menos una arista punteada adyacente al vértice } i; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Después de realizar una inflación $T_{sr}^{-A_{sr}}(G_A)$ tenemos que dar mantenimiento a g . Esto es posible comprobando las filas y las columnas s, r de A , si hay otra arista punteada que termina en el vértice i entonces $g_i = 1$, sino $g_i = 0$. Sea x el vértice distinguido de G . Si G es una bigráfica que no es sólida en flechas entonces aplicando T_{uu}^{-1} para todas las flechas punteadas $u \rightsquigarrow x$ (o $x \rightsquigarrow u$ si x es una fuente) obtendremos una bigráfica sólida en flechas equivalente.

3.2.3. Inflaciones para el caso simétrico

Primero asuma que A es simétrica. Del Teorema 13 se sigue que si A es una matriz casi Cartan definida positiva entonces toda cadena de inflaciones tiene longitud a lo sumo:

$$\ell(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}(n+1) & \text{si } n < 4 \\ n(15n - 168) + 504 & \text{si } 6 \leq n \leq 8 \\ n(n-1) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

Esto significa que si A es una matriz simétrica admisible y el Algoritmo de las Inflaciones no ha llegado a su fin después de $\ell(n)$ iteraciones entonces A no es definida positiva o no es una matriz casi Cartan.

3.2.4. Inflaciones para el caso no simétrico

Para el caso no simétrico se puede utilizar otro enfoque. Después de la Etapa 1 si A es no simétrica entonces A tiene un vértice distinguido o $n \leq 4$. Si $n \leq 4$ se aplica el Algoritmo de las Inflaciones a A , si el algoritmo no ha llegado a su fin después de 24 iteraciones entonces A no tiene un tipo de Dynkin finito. De lo contrario, sea G sólido en flechas. Aplicando secuencialmente el Lema 15 se puede utilizar el Algoritmo de las Inflaciones sin introducir una flecha punteada. Así, el caso no simétrico puede resolverse aplicando inflaciones en la bigráfica simétrica $G^{[x]}$ usando como máximo $\ell(n - 1)$ iteraciones.

3.2.5. Recuperando el tipo Dynkin

Suponiendo que el ciclo principal del Algoritmo de las Inflaciones terminó exitosamente en menos de $\ell(n)$ pasos, no habrá aristas punteadas ni flechas punteadas en G , pero todavía tenemos que comprobar si G es un diagrama de Dynkin y devolver el tipo Dynkin. Para ello, considere el siguiente método de clasificación:

1. Realice un transversal de gráficas en la gráfica subyacente de G y calcule una lista de flechas y una lista de los vértices con exactamente uno o tres vecinos; si el transversal revela cualquier ciclo, cualquier arista múltiple, cualquier vértice con más de 3 vecinos, o más de una flecha, Entonces G no es un diagrama de Dynkin. El recorrido transversal se puede realizar utilizando un algoritmo de búsqueda en profundidad (véase [19] para una explicación detallada).

2. Si sólo existe un vértice u con exactamente 3 vecinos entonces:
 - a) si G contiene cualquier flecha entonces G no es un diagrama Dynkin;
 - b) realiza una búsqueda a lo ancho a partir de u y para cada vértice v calcule la distancia d_{uv} la cual consiste en el número de aristas de el camino más corto de u a v ;
 - si existe al menos un vértice a distancia 2 de u entonces G es \mathbb{D}_n ;
 - si $6 \leq n \leq 8$, existe al menos un vértice a distancia 3 y exactamente dos vértices a distancia 2 de u , entonces G es \mathbb{E}_n .
 - c) G no es un diagrama de Dynkin.

3. Sea x y y dos vértices con exactamente un vecino.
 - Si G tiene exactamente una flecha $u \rightarrow v$:
 - a) Si $v \in \{x, y\}$ entonces G es \mathbb{B}_n
 - b) Si $u \in \{x, y\}$ entonces G es \mathbb{C}_n
 - c) Si $n = 4$ y $u, v \notin \{x, y\}$ entonces G es \mathbb{F}_4
 - d) G no es un diagrama de Dynkin
 - G es \mathbb{A}_n

3.2.6. Análisis del algoritmo propuesto

En esta subsección se analiza brevemente el algoritmo. **Etapas 1** fue propuesta en las subsecciones 3.2.2 y 3.2.2.2. Escaneando la matriz A antes del bucle principal del Algoritmo de las Inflaciones se puede calcular g o encontrar aristas múltiples en $\mathbf{O}(n^2)$ iteraciones. La búsqueda de una arista punteada se puede hacer en $\mathbf{O}(n)$ buscando un i tal que $g_i = 1$ y luego escanear la i -th fila de A . Finalmente, después de cada inflación T_{sr} se puede buscar una arista punteada o aristas múltiples que terminan en r mediante el escaneado de la r -ésima fila en $\mathbf{O}(n)$ operaciones. A partir de lo cual se puede implementar la **Etapas 1** en

$\mathbf{O}(\mathbf{n}^2)$ pasos. El número máximo de iteraciones en la **Etapa 2** se mostró en las subsecciones 3.2.4 y 3.2.3 $\mathbf{O}(\mathbf{n}^2)$ al costo de $O(n)$ cada uno. Finalmente, a partir de la subsección 3.2.5 se tiene que la **Etapa 3** se puede implementar haciendo una búsqueda a lo ancho dos veces, para un total de $\mathbf{O}(\mathbf{n}^2)$ pasos. Claramente, la **Etapa 2** es la más lenta, con un tiempo de ejecución de $\mathbf{O}(\mathbf{n}^3)$; así se tiene que la complejidad del algoritmo sugerido es $\mathbf{O}(\mathbf{n}^3)$.

Capítulo 4

Álgebras de Lie complejas semisimples asociadas a matrices casi Cartan positivas.

En este capítulo se propone asociar a cada matriz casi Cartan definida positiva A un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}_5(A)$ definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i ($1 \leq i \leq N$) y las siguientes relaciones,

$$R_1(A) \quad [h_i, h_j] = 0 \text{ para todo } i, j,$$

$$R_2(A) \quad [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j}, \text{ para todo } i, j \text{ y } \varepsilon \in \{1, -1\},$$

$$R_3(A) \quad [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i \text{ para todo } i \text{ y } \varepsilon \in \{1, -1\},$$

$$R_4(A) \quad (\mathbf{ad} \ e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0, \text{ donde } n = \max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}, \text{ para } \varepsilon, \delta \in \{1, -1\} \text{ y } 1 \leq i, j \leq N.$$

$$R_5(A) \quad [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0, \text{ donde } (i_1, \dots, i_t) \text{ es un ciclo sin cuerdas en } G_A \text{ y}$$

$$\varepsilon_t \in \{1, -1\}, \varepsilon_l = \begin{cases} -\varepsilon_{l+1}, & \text{if } A_{i_l i_{l+1}} > 0 \\ \varepsilon_{l+1}, & \text{if } A_{i_l i_{l+1}} < 0 \end{cases}$$

para $1 \leq l \leq t - 1$. Los corchetes multiple son definidos inductivamente por:

$$[x_1, x_2, \dots, x_t] = [x_1, [x_2, \dots, x_t]].$$

El siguiente teorema es el principal resultado de este capítulo.

Teorema 14. Sean A y A' matrices casi Cartan definidas positivas. Entonces $A \sim A'$ si y sólo si $\mathfrak{g}_5(A) \simeq \mathfrak{g}_5(A')$.

4.1. Transformaciones elementales

El conjunto de matrices casi Cartan definidas positivas se denotara con qC^+ .

Por Teorema 7 se tiene que el siguiente resultado es suficiente para probar el Teorema 14.

Teorema 15. Sean A y A' matrices casi Cartan no simétricas positivas. Si $A \sim_G A'$ entonces $\mathfrak{g}_5(A)$ es isomorfo a $\mathfrak{g}_5(A')$.

El siguiente resultado es útil para reducir situaciones especiales.

Lema 16. Sea A una matriz casi Cartan no simétrica definida positiva y $1 \leq i_1, \dots, i_t \leq n$. Entonces

$$(T_{sr}^{-A_{sr}} I_{i_1} \dots I_{i_t})^t DA(T_{sr}^{-A_{sr}} I_{i_1} \dots I_{i_t}) = (I_{i_1} \dots I_{i_t} T_{sr}^{(-1)^\varepsilon A_{sr}})^t DA(I_{i_1} \dots I_{i_t} T_{sr}^{(-1)^\varepsilon A_{sr}}),$$

donde ε es el número de índices a con $1 \leq a \leq t$ y $i_a \in \{r, s\}$.

Demostración. Esto se sigue directamente del hecho que $T_{sr}^{-A_{sr}} I_i = I_i T_{sr}^{A_{sr}}$ para $i = r, s$ y $T_{sr}^{-A_{sr}} I_i = I_i T_{sr}^{-A_{sr}}$ en otro caso. \square

Nota 2. Para demostrar el Teorema 15, es suficiente considerar los dos casos $A' = D^{-1} I_r D A I_r$ y $A' = D^{-1} (T_{sr}^{-A_{sr}})^t D A T_{sr}^{-A_{sr}}$, donde $A_{sr} < 0$.

Proposición 6. Sea A una matriz casi Cartan no simétrica definida positiva. Si $A' = D^{-1}I_rDAI_r$ entonces las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_5(A)$ y $\mathfrak{g}_5(A')$ son isomorfas.

Demostración. Denote por e_i, e_{-i}, h_i y e'_i, e'_{-i}, h'_i los generadores de $\mathfrak{g}_5(A)$ y $\mathfrak{g}_5(A')$ respectivamente. Además

$$\tilde{e}_{\varepsilon_i} = \begin{cases} e_{\varepsilon_i}, & \text{si } i \neq r \\ e_{-\varepsilon_r}, & \text{si } i = r \end{cases} \quad \text{y} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_i, & \text{si } i \neq r \\ -h_r, & \text{si } i = r. \end{cases} \quad (4.1)$$

Verificar que estos elementos satisfacen las relaciones $R_1(A')$, $R_2(A')$, $R_3(A')$ y $R_4(A')$ es fácil. Para verificar $R_5(A')$ sea $\gamma = (i_1, \dots, i_t)$ un ciclo sin cuerdas de A' . Observe que γ es también un ciclo sin cuerdas en A . Si $r \notin \{i_1, \dots, i_t\}$ la comprobación es muy fácil. Si $r \in \{i_1, \dots, i_t\}$, $r = i_a$, entonces sea $\varepsilon'_t \in \{1, -1\}$ e inductivamente

$$\varepsilon_l = \begin{cases} -\varepsilon_{l+1}, & \text{if } A_{i_l i_{l+1}} > 0 \\ \varepsilon_{l+1}, & \text{if } A_{i_l i_{l+1}} < 0 \end{cases}$$

para $1 \leq l \leq t-1$. Entonces

$$\begin{aligned} & [\tilde{e}_{\varepsilon'_1 i_1}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon'_{a-1} i_{a-1}}, \tilde{e}_{\varepsilon'_a i_a}, \tilde{e}_{\varepsilon'_{a+1} i_{a+1}}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon'_t i_t}] \\ &= [e_{\varepsilon'_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon'_{a-1} i_{a-1}}, e_{-\varepsilon'_a i_a}, e_{\varepsilon'_{a+1} i_{a+1}}, \dots, e_{\varepsilon'_t i_t}] \\ &= [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_{a-1} i_{a-1}}, e_{\varepsilon_a i_a}, e_{\varepsilon_{a+1} i_{a+1}}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] =: x, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_a = -\varepsilon'_a$ y $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$ para todo $j \neq a$. En orden de ver que $x = 0$, se usará la relación $R_5(A)$. Para esto se debe asegurar que

$$\varepsilon_l = \begin{cases} -\varepsilon_{l+1}, & \text{si } A_{i_l i_{l+1}} > 0 \\ \varepsilon_{l+1}, & \text{si } A_{i_l i_{l+1}} < 0 \end{cases}$$

para $1 \leq l \leq t-1$ y $1 \leq l \leq t-1$. Esto se tiene fácilmente de $I_r D = D I_r$ y $A'_{i_l i_{l+1}} = A_{i_l i_{l+1}}$ para $l \neq a, a-1$ y de $A'_{i_l i_{l+1}} = -A_{i_l i_{l+1}}$ en el caso que $l = a$ o $l = a-1$.

La subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_6(A)$ generada por $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y \tilde{h}_i por $(i = 1, \dots, N, \text{ and } \varepsilon \in \{1, -1\})$ es claramente $\mathfrak{g}_6(A)$. Con lo cual se obtiene un homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g}_6(A') \rightarrow \mathfrak{g}_6(A)$ que aplica $e'_{\varepsilon i}$ en $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i en \tilde{h}_i . Similarmente se obtiene un homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g}_6(A) \rightarrow \mathfrak{g}_6(A')$. Esto es suficiente para probar que φ y ψ son inversos entre sí.

□

Corolario 1. Existe un automorfismo Φ de $\mathfrak{g}_5(q)$ que envía $e_{\varepsilon i}$ a $e_{-\varepsilon i}$ y h_i a $-h_i$ para todo $1 \leq i \leq N$.

Demostración. Denote por $\varphi_r : \mathfrak{g}_5(A) \rightarrow \mathfrak{g}_5(A)$ el isomorfismo que aplica $e_{\varepsilon i}$ en $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y h_i a \tilde{h}_i , donde $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y \tilde{h}_i son definidos como en (4.1). Entonces el isomorfismo $\Phi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_N$ aplica $e_{\varepsilon i}$ en $e_{-\varepsilon i}$ y h_i en $-h_i$ para todo $1 \leq i \leq N$. □

El resto del capítulo está dividido en varios pasos en orden de demostrar el siguiente resultado, el cual es suficiente para demostrar el Teorema 15 (y por lo tanto el Teorema 14).

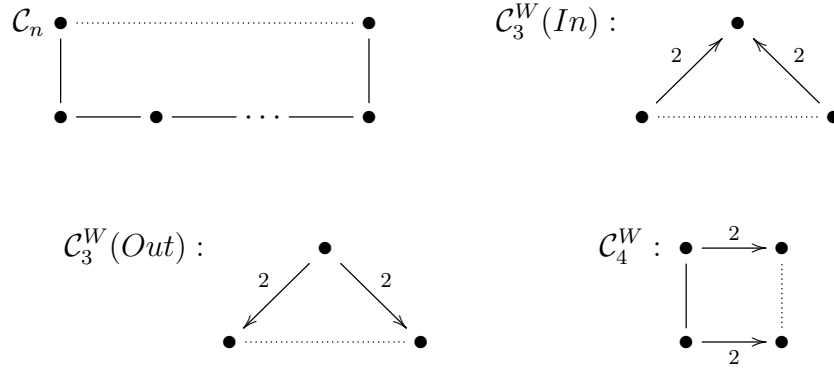
Proposición 7. Sea A una matriz casi Cartan no simétrica definida positiva, $A_{sr} < 0$ y $A' = D^{-1}(T_{sr}^{A_{sr}})^t D A (T_{sr}^{A_{sr}})$. Entonces $\mathfrak{g}_5(A)$ y $\mathfrak{g}_5(A')$ son álgebras de Lie isomorfas.

4.2. Ciclos sin cuerdas en matrices casi Cartan no simétricas definidas positivas

Un ciclo sin cuerdas en A es llamado positivo si cumple la condición de ciclo.

Teorema 16. Si A es una matriz casi Cartan positiva y suponga que $C = (i_1, \dots, i_t)$ ($t \geq 3$) es un ciclo sin cuerdas en A , entonces $B_A(C)$ es I -equivalente

a uno de los siguientes cuatro tipos.



Demostración. La demostración se sigue directamente de la clasificación de las matrices casi Cartan presentada en el capítulo 2. \square

4.3. Verificación de las relaciones $R_1(A')$ - $R_4(A')$

Asuma que A es una matriz casi Cartan definida positiva y $A = T_{sr}^{-A_{sr}}(A')$. Denote los generadores de $\mathfrak{g}_5(A)$ por e_i, e_{-i}, h_i y los generadores de $\mathfrak{g}_5(A')$ por e'_i, e'_{-i}, h'_i .

Entonces los siguientes elementos en $\mathfrak{g}_5(A)$ $\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{h}_i$ pueden ser definidos como:

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_r - A_{rs}h_s, & \text{si } i = r \quad \text{si } A_{sr} = -1 \\ h_i, & \text{si } i \neq r \end{cases} . \quad (4.2)$$

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} \frac{1}{2}[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_r + h_s, & \text{si } i = r \quad \text{si } A_{sr} = -2 \\ h_i, & \text{si } i \neq r \end{cases} . \quad (4.3)$$

Lema 17. Sea $A' = D^{-1}(T_{sr}^{-A_{sr}})^t D A T_{sr}^{-A_{sr}}$. Los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y \tilde{h}_i satisfacen las relaciones $R_1(A')$, $R_2(A')$ y $R_3(A')$.

Demostración. Claramente, estos elementos satisfacen las relaciones $R_1(A')$.

► Para $A_{sr} = -1$, si $i, j \neq r$ entonces $[\tilde{h}_i, \tilde{e}_{\varepsilon j}] = [h_i, e_{\varepsilon j}] = \varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j} = \varepsilon A'_{ij} e_{\varepsilon j}$ y $[\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{e}_{-\varepsilon i}] = [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i = \varepsilon \tilde{h}_i$, entonces sólo los casos que involucran al índice r deben ser considerados para la relaciones $R_2(A')$ y $R_3(A')$. Primero se verifica que la relación $R_2(A')$ se satisface.

$$\begin{aligned}
 [\tilde{h}_i, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_i, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] && \text{(por definición)} \\
 &= [e_{\varepsilon r}, [h_i, e_{\varepsilon s}]] + [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, h_i]] && \text{(por la identidad de Jacobi)} \\
 &= -\varepsilon A_{is} [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] + \varepsilon A_{ir} [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] && \text{(by } R_2(A') \text{ y la bilinearidad)} \\
 &= -\varepsilon (A_{ir} + A_{is}) [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= -\varepsilon A'_{ir} \tilde{e}_{\varepsilon r} && (A'_{ir} = A_{ir} + A_{is}).
 \end{aligned}$$

De un modo similar, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon j}] &= [h_r - A_{rs} h_s, e_{\varepsilon j}] \\
 &= -\varepsilon (A_{rj} - A_{rs} A_{sj}) e_{\varepsilon j} \\
 &= -\varepsilon (A_{rj} + 2A_{sj}) e_{\varepsilon j} \\
 &= -\varepsilon A'_{rj} \tilde{e}_{\varepsilon j} && (A'_{ri} = A_{ri} + 2A_{si})
 \end{aligned}$$

Para completar $R_2(A')$, se calcula

$$\begin{aligned}
 [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_r - A_{rs} h_s, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] \\
 &= [e_{\varepsilon r}, [h_r - A_{rs} h_s, e_{\varepsilon s}]] + [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, h_r - A_{rs} h_s]] \\
 &= (-\varepsilon A_{rs} + \varepsilon A_{rs} A_{ss}) [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] + (\varepsilon A_{rr} - \varepsilon A_{rs} A_{sr}) [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= -\varepsilon (A_{rs} - A_{rs} A_{ss} + A_{rr} - A_{rs} A_{sr}) [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= -\varepsilon A'_{rr} \tilde{e}_{\varepsilon r},
 \end{aligned}$$

en la última igualdad se usa que $A_{ss} = A_{rr} = 2$, $A_{sr} = -1$, $A_{rs} = -2$ y $A'_{rr} = 2$. Para demostrar $R_3(A')$ se puede repetidamente hacer uso de la identidad de Jacobi y la igualdad $[e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon r}] = \varepsilon h_r$ (la cual es obtenida de $R_3(A)$) en la

tercera línea de las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
 [\tilde{e}_{\varepsilon r}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}] &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [e_{-\varepsilon r}, e_{-\varepsilon s}]] \\
 &= [e_{-\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{-\varepsilon s}]] + [e_{-\varepsilon s}, [e_{-\varepsilon r}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]]] \\
 &= [e_{-\varepsilon r}, [[e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}]] + [e_{-\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon r}]]] \\
 &= -\varepsilon[e_{-\varepsilon r}, [h_s, e_{\varepsilon r}]] + \varepsilon[e_{-\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, h_r]] \\
 &= \varepsilon^2 A_{sr}[e_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}] + \varepsilon^2 A_{rs}[e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= -\varepsilon A_{sr} h_r - \varepsilon A_{rs} h_s \\
 &= \varepsilon h_r - \varepsilon A_{rs} h_s \\
 &= \varepsilon \tilde{h}_r.
 \end{aligned}$$

► En el caso $A_{sr} = -2$, para probar $R_2(A')$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 [h_i, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_i, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]] && \text{(por definición)} \\
 &= -2\varepsilon A_{is}[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] - \varepsilon A_{ir}[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= -\varepsilon(A_{ir} + 2A_{is})[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= -\varepsilon A'_{ir} \tilde{e}_{\varepsilon r} && (A'_{ir} = A_{ir} + 2A_{is}).
 \end{aligned}$$

Similarmente se tiene que:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{h}_r, e_{\varepsilon j}] &= [h_r + h_s, e_{\varepsilon j}] \\
 &= -\varepsilon(A_{rj} + A_{sj})e_{\varepsilon j} \\
 &= -\varepsilon A'_{rj} \tilde{e}_{\varepsilon j} && (A'_{ri} = A_{ri} + A_{si})
 \end{aligned}$$

Para completar la demostración de $R_2(A')$, se calcula

$$\begin{aligned}
 [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_r + h_s, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]] \\
 &= -\varepsilon(2A_{rs} + 2A_{ss} + A_{rr} + A_{sr})[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= -\varepsilon A'_{rr} \tilde{e}_{\varepsilon r},
 \end{aligned}$$

para probar $R_3(A')$ podemos realizar el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} 4[\tilde{e}_{\varepsilon r}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}] &= [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], [e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}]] \\ &= [[e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], e_{-\varepsilon s}]] + [e_{-\varepsilon s}, [[e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]]] \end{aligned}$$

usando la identidad de Jacobi es fácil probar que $[[e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]] = -([[[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], [e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}]], e_{\varepsilon s}] + [[[[e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], e_{\varepsilon s}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]]]) = -(0 + A_{sr}[e_{-\varepsilon r}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]]) = -A_{sr}A_{rs}e_{\varepsilon s}$

$$\begin{aligned} &= -2[[e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]] - A_{sr}A_{rs}[e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}] \\ &= -2\varepsilon A_{sr}h_r - 2\varepsilon A_{rs}h_s + A_{sr}A_{rs}\varepsilon h_s \\ &= 4\varepsilon \tilde{h}_r. \end{aligned}$$

□

Lema 18. Sea $A' = T_{sr}^{-A_{sr}}(A)$, entonces se cumple que $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y \tilde{h}_i satisfacen las relaciones $R_4(A')$.

Demostración. ► Sea $A_{sr} = -1$, se debe mostrar que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$ donde $m' = \max\{0, -\varepsilon\delta A'_{ij}\}$, para cualquier $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$ y cualquier $i, j = 1, \dots, n$. Si $i = j$ se consideran los casos cuando $\varepsilon = \delta$ y $\varepsilon = -\delta$. El primero es obvio. Si $\varepsilon = -\delta$ se tiene que $m' = 2$ y $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})(\tilde{e}_{-\varepsilon i}) = \varepsilon \tilde{h}_i$ por $R_3(q')$. Por tanto $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^2(\tilde{e}_{-\varepsilon i})$ es un múltiplo de $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ por $R_2(q')$, lo cual implica que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^3(\tilde{e}_{-\varepsilon i}) = 0$. Para $i \neq j$ se distinguen varios casos, los cuales son descritos como sigue.

► *Caso $i \neq r, j \neq r$:* Como consecuencia se tiene que $\tilde{e}_{\varepsilon i} = e_{\varepsilon i}, \tilde{e}_{\delta j} = e_{\delta j}$ y $A'_{ij} = A_{ij}$, $m' = \max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}$, por lo cual $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = (\mathbf{ad} e_{\varepsilon i})^{1+m'}(e_{\delta j}) = 0$ por $R_4(q)$.

► *Caso $i = r, j \neq r, s$:* Si $A_{rs} = -1$, entonces $A'_{rj} = A_{rj} + A_{sj}$ y si $A_{rs} = -2$, entonces $A'_{rj} = A_{rj} + 2A_{sj}$. Suponga que $m' = 0$. Entonces se cumple que $A'_{rj} = 0$ o $\varepsilon\delta A'_{rj} > 0$.

- ▶ Si $A'_{rj} = 0$, se tiene que $A_{rj} = -A_{sj}$ o $A_{rj} = -2A_{sj}$ con lo cual ambos son cero (por lo cual $[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0$, $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0$ y consecuentemente $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$ por $R_4(A)$) o ambos son distintos de cero y (j, r, s) es un ciclo sin cuerdas en A de lo cual se obtiene $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}] = -[e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] = 0$ por $R_5(A)$.
- ▶ Si $\varepsilon\delta A'_{rj} > 0$, se tiene que $\varepsilon\delta A_{rj} \geq 0$ y $\varepsilon\delta A_{sj} \geq 0$ o $\varepsilon\delta A_{rj} < 0$ y $\varepsilon\delta A_{sj} \geq 0$. Si $\varepsilon\delta A_{rj} \geq 0$ y $\varepsilon\delta A_{sj} \geq 0$, entonces $[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0 = [e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}]$ por $R_4(A)$. Usando la identidad de Jacobi se puede mostrar que $0 = [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}] = (\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})(\tilde{e}_{\delta j})$. Si $\varepsilon\delta A_{rj} < 0$ y $\varepsilon\delta A_{sj} \geq 0$ la demostración es obvia.
- ▶ Si $m' \neq 0$, una de las siguientes tres condiciones se satisface:
 - (a) $A_{sj} = 0$ y $A_{rj} \neq 0$
 - (b) $A_{sj} \neq 0$ y $A_{rj} = 0$
 - (c) $A_{sj} \neq 0$ y $A_{rj} \neq 0$
- ▶ Si $m' = 1$, la demostración para los casos (a) y (b) puede ser consultada en [3]. El caso (c) es obvio.
- ▶ Si $m' = 2$, entonces $A'_{rj} = -2\varepsilon\delta$ y además se cumple que $A_{sj} = 0$ o $A_{rj} = 0$. Si $A_{sj} = 0$, se obtiene

$$[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0,$$

$$[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0,$$

$$[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] = 0.$$

$$[e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] = 0.$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^3(\tilde{e}_{\delta j}) &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] \\
 &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]], e_{\varepsilon s}] \\
 &= [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] \\
 &= [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], e_{\varepsilon s}]], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]]
 \end{aligned}$$

Usando la identidad de Jacobi se obtiene que

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^3(\tilde{e}_{\delta j}) = -[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] - [e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]]].$$

Con lo cual,

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^3(\tilde{e}_{\delta j}) = [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] - (\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^3(\tilde{e}_{\delta j}),$$

por otro lado;

$$\begin{aligned}
 [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] &= [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] \\
 &= -[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= [e_{\varepsilon r}, [e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] + [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, [e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}], e_{\varepsilon r}] \\
 &= [e_{\varepsilon r}, [e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]], e_{\varepsilon r}] + [[[e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}], e_{\varepsilon r}], e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= -[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] + [[[e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]], e_{\varepsilon r}] \\
 &= -[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] - [e_{\varepsilon r}, [e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}], e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= -[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] - [e_{\varepsilon r}, [e_{\delta j}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], e_{\varepsilon r}] \\
 &= -[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] + [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= -[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] - [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= -2[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}].
 \end{aligned}$$

entonces $[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] = 0$ por lo cual $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^3(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$.

► El caso en el cual $A_{rj} = 0$ es similar al anterior.

► *Caso* $i = r, j = s$: Si $A'_{rs} = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^2(\tilde{e}_{-\varepsilon s}) &= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{-\varepsilon s}], \\
 &= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, [e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}], \\
 &= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, (-\varepsilon)h_s, e_{\varepsilon r}], \\
 &= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, \varepsilon^2 A_{rs} e_{\varepsilon r}], \\
 &= A_{rs} [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}], \\
 &= -A_{rs} (\mathbf{ad} e_{\varepsilon r})^2(e_{\varepsilon s}), \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

el cual es cero por $R_4(q)$ teniendo en cuenta que $1 + \max\{0, -\varepsilon^2 A_{rs}\} = 2$. Por otro lado se tiene que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})(\tilde{e}_{\varepsilon s}) = [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon s}] = (\mathbf{ad} e_{\varepsilon s})^2(e_{\varepsilon r}) = 0$ por $R_4(q)$ nuevamente. Si $A_{rs} = 2$, la demostración es análoga al caso anterior.

► *Caso* $i \neq r, s, j = r$: La demostración es similar al *caso* $i = r, j \neq r, s$.

► *Caso* $i = s, j = r$: si $A'_{rs} = 1, \varepsilon = -\delta$ se obtiene que $m' = 1$ y $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon s})^2(\tilde{e}_{-\varepsilon r}) = [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}] = [e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}, e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}]$. Con lo cual

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon s})^2(\tilde{e}_{-\varepsilon r}) = [e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}, -\varepsilon h_s] = [e_{\varepsilon s}, A_{rs} e_{-\varepsilon r}] = 0$$

por $R_4(q)$. Si $\varepsilon = \delta$, se tiene que $m' = 0$ y por tanto

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon s})(\tilde{e}_{\varepsilon r}) = -(\mathbf{ad} e_{\varepsilon s})^2(e_{\varepsilon r}) = 0$$

por $R_4(q)$ y teniendo en cuenta que $\max\{0, -\varepsilon^2 A_{sr}\} = 1$. El argumento para el caso $A'_{rs} = 2$, es muy similar al caso anterior.

► Si $A_{sr} = -2$, para demostrar $R_4(A')$ se deben considerar los siguientes casos. Si $i = j$ o $i, j \neq r$ la demostración es similar al caso cuando $A_{sr} = -1$.

► *Caso* $i = r, j \neq r, s$: Como $A_{rs} = -1$, entonces se cumple que $A'_{rj} = A_{rj} + A_{sj}$ y además se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (a) $A_{sj} = 0$ y $A_{rj} \neq 0$
- (b) $A_{sj} \neq 0$ y $A_{rj} = 0$
- (c) $A_{sj} \neq 0$ y $A_{rj} \neq 0$

- Si $A_{sj} \neq 0$ y $A_{rj} \neq 0$ se tiene que $[e_{\delta j}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] = 0$ por $R_5(A)$, de lo cual se obtiene $[[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]], e_{\delta j}] = [[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]] = [e_{\varepsilon r}[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}]]] = 0$ aplicando $R_4(A)$, entonces $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$.
- Si $A_{sj} \neq 0$ y $A_{rj} = 0$, se tiene que para $m' = 1$, $[[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]], e_{\delta j}] = [e_{\varepsilon r}[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}]]] = 0$ como $[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}]] = 0$ por $R_4(A)$. Si $m' = 2$ obtenemos una subgráfica que no es definida positiva.
- Si $A_{sj} = 0$ y $A_{rj} \neq 0$, para $m' = 1$ se tiene que $[[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]], e_{\delta j}] = [e_{\varepsilon r}[e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}]]] = 0$ dado que $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0$ por $R_4(A)$. Si $m' = 2$ se obtiene una submatriz de A que no es una matriz casi Cartan.

► *Caso $i \neq r, s, j = r$* : La demostración es similar al *caso $i = r, j \neq r, s$* .

► *Caso $i = s, j = r$* : Dado que $A'_{sr} = 2$, si $m' = 0$ se obtiene directamente por $R_4(A)$. Si $m' = 2$ entonces $\delta = -\varepsilon$ de lo cual

$$\begin{aligned}
 2(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon s})^3(\tilde{e}_{-\varepsilon r}) &= [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], \\
 &= A_{sr}[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], \\
 &= A_{sr}^3[e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}], \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

□

4.4. Verificación de las relaciones $R_5(A')$

Por el Teorema 16 y la Proposición 6 es suficiente considerar los ciclos sin cuerdas que aparecen en los tipos 1 a 5:

Lema 19. Para cualquier ciclo sin cuerdas $\gamma = (r, 1, s)$ de tipo 1 en A' , los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(A)$:

- (a) $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (b) $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (c) $[e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}]$ (d) $[\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}]$
 (e) $[\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}]$ (f) $[e_{-\varepsilon 1}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]$

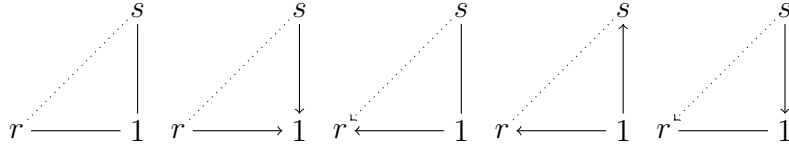


FIGURA 4.1: Tipo 1

Demostración. Primero se mostrará que $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$.

$$\begin{aligned}
 [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= [[e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= [[e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon s}] \\
 &= -[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]
 \end{aligned}$$

Ahora se muestra que $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$.

$$\begin{aligned}
 [e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}] \\
 &= \varepsilon [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}, h_s] \\
 &= -A_{sr} [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Los casos (c), (d) y (f) son similares al caso anterior. El caso (e) es un resultado directo del caso (a). \square

Lema 20. Para cualquier ciclo sin cuerdas $\gamma = (r, 1, s)$ de tipo 2 en A' , los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(A)$:

$$\begin{aligned}
 (a) [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] \quad (b) [e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] \quad (c) [e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}] \quad (d) [\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}] \\
 (e) [\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}] \quad (f) [e_{-\varepsilon 1}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]
 \end{aligned}$$

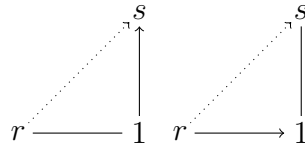


FIGURA 4.2: **Tipo 2**

Demostración. Primero se mostrará que $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$ al igual que en el caso anterior.

$$\begin{aligned}
 [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= -[e_{\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}] \\
 &= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}]
 \end{aligned}$$

la última oración se obtiene de $R_4(A)$ tomando en cuenta que $[e_{\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$. Para A_{sr}, A_{ri}, A_{si} se tienen las siguientes posibilidades:

- (a) Si A_{sr}, A_{ri} y A_{si} son diferentes de 0, entonces existe un ciclo sin cuerdas (i, s, r) en A , de lo cual $[\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}] = 0$,
- (b) Si al menos A_{ri} o A_{si} es igual a 0, entonces aplicando $R_4(A)$ se tiene que $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$ o $[e_{\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}] = 0$.

Para demostrar que $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= -[e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\ &= -([e_{\varepsilon r}, [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}]] + [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon 1}]]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Los casos (c), (d) y (f) son similares al caso anterior. El caso (e) es un resultado directo del caso (a). \square

Lema 21. Sea $\gamma = (r, 2, 1, s)$ un ciclo sin cuerdas de tipo 3 en A' , entonces los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(A)$:

- (a) $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (b) $[e_{-\varepsilon 2}, e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (c) $[e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}]$
 (d) $[e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}]$ (e) $[\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}]$ (f) $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}]$
 (h) $[\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}]$ (g) $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]$

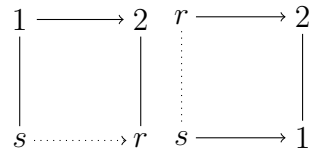


FIGURA 4.3: **Tipo 3**

Demostración. La demostración es un resultado directo de la relación $R_5(A)$ para los casos (b), (c), (d) y (g). En el caso (a) se tiene que $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = [e_{\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}] = 0$ por $R_5(A)$. Dado que $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}] = [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon s}] = 2[e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon r}] = 0$ el caso (f) se cumple. Para el caso (h) se obtiene que

$[\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}] = [\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}] = [[e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}], e_{\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = 0$ by $R_4(A)$. El caso (e) es similar al (h). \square

Lema 22. Sea $\gamma = (r, 2, 1, s)$ un ciclo sin cuerdas de tipo 4 en A' , entonces los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(A)$:

- (a) $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (b) $[e_{-\varepsilon 2}, e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (c) $[e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}]$
 (d) $[e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}]$ (e) $[\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}]$ (f) $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}]$
 (h) $[\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}]$ (g) $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]$

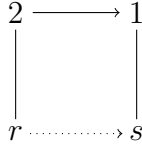


FIGURA 4.4: **Tipo 4**

Demostración. La demostración para los casos (b), (c), (a), (d) y (h) es la misma que en el tipo 3. Para el caso (e) se obtiene que $[\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}] = -[[e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}], e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}] = -[[e_{\varepsilon 1}, [e_{-\varepsilon s}, e_{-\varepsilon r}]], e_{\varepsilon 2}] = 0$ por $R_5(A)$. Para demostrar (f),

$$\begin{aligned} [e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}] &= [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon s}] \\ &= [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\ &= [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], e_{\varepsilon 2}, e_{-\varepsilon 1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

En el caso (g) se tiene que

$$\begin{aligned} [e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}] &= [e_{-\varepsilon 1}, e_{\varepsilon s}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{-\varepsilon 2}] \\ &= [[\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{-\varepsilon 2}], e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon 1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lema 23. Sea $\gamma = (r, 1, 2)$ un ciclo sin cuerdas de tipo 5 en A' , entonces los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(A)$:

- (a) $[e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (b) $[e_{-\varepsilon 1}, e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}]$ (c) $[e_{-\varepsilon 2}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1},]$ (d) $[\tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}]$
 (e) $[\tilde{e}_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon 2}]$ (f) $[e_{-\varepsilon 1}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon 2}]$

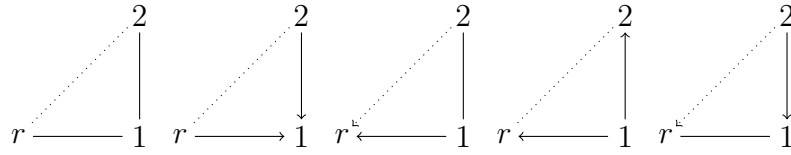


FIGURA 4.5: **Tipo 5**

Demostración. Los casos (d) y (f) pueden ser obtenidos directamente. Para el caso (a) se tiene que $[e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] = -[e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}] = -[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon 2}, e_{\varepsilon 1}, e_{\varepsilon r}] = 0$. El resto de los casos puede ser obtenido por un procedimiento similar. □

Sea A una matriz casi Cartan positiva, $A_{sr} < 0$ y $A' = T_{sr}^{-A_{sr}}(A)$. Entonces los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y \tilde{h}_i satisfacen las relaciones $R_1(A')$ - $R_5(A')$ y por lo tanto existe un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g}_5(A') \rightarrow \mathfrak{g}_5(A)$ que aplica $e'_{\varepsilon i}$ a $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i a \tilde{h}_i .

Similarmente, se definen los siguientes elementos $\mathfrak{g}_5(A')$ $\tilde{e}'_{\varepsilon i}, \tilde{h}'_i$ como:

$$\tilde{e}'_{\varepsilon i} = \begin{cases} [e'_{\varepsilon r}, e'_{\varepsilon s}], & \text{if } i = r \\ e'_{\varepsilon i}, & \text{if } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}'_i = \begin{cases} h'_r - A_{rs}h'_s, & \text{if } i = r & \text{if } A_{sr} = -1 \\ h'_i, & \text{if } i \neq r \end{cases} .$$

$$\tilde{e}'_{\varepsilon i} = \begin{cases} \frac{1}{2}[e'_{\varepsilon s}, e'_{\varepsilon s}, e'_{\varepsilon r}], & \text{if } i = r \\ e'_{\varepsilon i}, & \text{if } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}'_i = \begin{cases} h'_r + h'_s, & \text{if } i = r & \text{if } A_{sr} = -2 \\ h'_i, & \text{if } i \neq r \end{cases} .$$

Con lo cual, existe un homomorfismo $\psi : \mathfrak{g}_5(A) \rightarrow \mathfrak{g}_5(A')$ y es fácilmente verificable que son mutuamente inversos. Si $A_{sr} = -1$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \psi(e_{\varepsilon r}) &= \varphi([e'_{\varepsilon r}, e'_{-\varepsilon s}]), \\
 &= [\varphi(e'_{\varepsilon r}), \varphi(e'_{-\varepsilon s})], \\
 &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{-\varepsilon s}], \\
 &= -[[e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}], \\
 &= \varepsilon[h_s, e_{\varepsilon r}], \\
 &= -\varepsilon^2 A_{sr} e_{\varepsilon r}, \\
 &= e_{\varepsilon r}.
 \end{aligned}$$

Si $A_{sr} = -2$:

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \psi(e_{\varepsilon r}) &= \frac{1}{2} \varphi([e'_{-\varepsilon s}, e'_{-\varepsilon s}, e'_{\varepsilon r}]), \\
 &= \frac{1}{2} [\varphi(e'_{-\varepsilon s}), \varphi([e'_{-\varepsilon s}, e'_{\varepsilon r})]], \\
 &= \frac{1}{2} \left[e_{-\varepsilon s}, [e_{-\varepsilon s}, \frac{1}{2} [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]]] \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[e_{-\varepsilon s}, \left[-\frac{1}{2} [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], [e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}]] - \frac{1}{2} [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], e_{-\varepsilon s}] \right] \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[e_{-\varepsilon s}, \left(\frac{1}{2} \varepsilon [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], h_s] + [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \right) \right], \\
 &= \frac{1}{2} [e_{-\varepsilon s}, [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}]], \\
 &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 A_{sr} e_{\varepsilon r}, \\
 &= e_{\varepsilon r}.
 \end{aligned}$$

Con lo cual el resultado se cumple.

Bibliografía

- [1] Anthony W. Knap. *Lie Groups Beyond an Introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2nd edition, 2002. ISBN 9780817642594. URL <http://www.springer.com/book/978-0-8176-4259-4>.
- [2] Jean Pierre Serre. *Complex Semisimple Lie Algebras (G.A. Jones, Trans.)*. Springer-Verlag, 1987.
- [3] Michael Barot and Daniel Rivera. Generalized Serre relations for Lie algebras associated with positive unit forms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 211:360–373, 2007.
- [4] Sergei. A. Ovsienko. Integer weakly positive forms. *Schurian Matrix Problems and Quadratic Forms (Russian), Inst. Mat. Akad. Nauk USSR*, pages 3 – 17, Preprint 78.25, 1978.
- [5] Mario Abarca and Daniel Rivera. Graph theoretical and algorithmic characterizations of positive definite symmetric quasi-Cartan matrices. *Fundamenta Informaticae*, 149(3):241–261, 2016.
- [6] Claudia Pérez, Mario Abarca, and Daniel Rivera. Cubic algorithm to compute the Dynkin type of a positive definite quasi-Cartan matrix. *Fundamenta Informaticae*, 158(4):369–384, February 2018.
- [7] Justyna Kosakowska. Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms. *Fundamenta Informaticae*,

- 119(2):149–162, 2012. URL <http://content.iospress.com/articles/fundamenta-informaticae/fi119-2-02>.
- [8] Michael Barot, Christof Geiss, and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras of finite type and positive symmetrizable matrices. *Journal of the London Mathematical Society*, 73(3):545–564, 2006.
- [9] V Dlab and Claus Michael Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1976.
- [10] Claus Michael Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, volume 1099 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984. doi: 10.1007/BFb0072870.
- [11] Stanisław Kasjan and Daniel Simson. Mesh algorithms for coxeter spectral classification of cox-regular edge-bipartite graphs with loops, i. mesh root systems. *Fundamenta Informaticae*, 139:153–184, 2015.
- [12] Stanisław Kasjan and Daniel Simson. Algorithms for isotropy groups of Cox-regular edge-bipartite graphs. *Fundamenta Informaticae*, 139:249–275, 2015.
- [13] Bartosz Makuracki, Daniel Simson, and Blazej Zyglarski. Inflation algorithm for cox-regular positive edge-bipartite graphs with loops. *Fundamenta Informaticae*, 153(4):367–398, 2017.
- [14] Michael Barot. *Introduction to the Representation Theory of Algebras*. Springer International Publishing Switzerland, DOI 10.1007/978-3-319-11475-0, 2015.
- [15] Guillaume Fertin, Hafedh Mohamed-Babou, and Irena Rusu. Path-driven orientation of mixed graphs. *Discrete Applied Mathematics*, (116):271–278, 2015.

-
- [16] Claudia Pérez and Daniel Rivera. Graphical characterization of positive definite non symmetric quasi-Cartan matrices. *Discrete Mathematics*, 341(5):1215–1224, May 2018.
- [17] Michael Barot. A characterization of positive unit forms. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5:87–94, 1999.
- [18] Stanisław Kasjan and Daniel Simson. Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops,II. Application to Coxeter spectral analysis. *Fundamenta Informaticae*, 139:185–209, 2015.
- [19] Thomas H Cormen. *Introduction to algorithms*. MIT press, 2009.