



# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS  
INSTITUTO DE INVESTIGACION EN CIENCIAS BÁSICAS Y  
APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIAS

MONODROMÍA HAMILTONIANA EN UN PÉNDULO EXTENSIBLE

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTADA POR:

ERICK EDSON LORETO JIMENEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALVARO LORENZO SALAS BRITO



# Agradecimientos

Agradezco a mis sinodales por el apoyo que me dieron, especialmente al Dr. Rogelio Valdez Delgado y a la Dra. Larissa Sbitneva que me dieron la oportunidad de estudiar el posgrado, a mis padres Filogonia Jimenez Hernandez y Heldiberto Loreto Carmona, a mi hermana Lezly Rubi Loreto Jimenez y Emmitt que siempre me están apoyando en todo, a mis amigos Rosalino, Alejandro, Isaac, Jazz, Armando, Paco, Mazat, Erik, Alan, Enrique, Dani, Flor, Pao, Mariana, Jessy, Sofia y compañeros que siempre me aconsejaron.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Leyes de Newton . . . . .	5
1.2. Leyes de conservación . . . . .	8
<b>2. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana</b>	<b>13</b>
2.1. Formulación Lagrangiana . . . . .	13
2.1.1. Coordenadas generalizadas . . . . .	14
2.1.2. Ecuaciones Euler-Lagrange . . . . .	15
2.2. Formulación Hamiltoniana. . . . .	19
2.2.1. Momentos generalizados. . . . .	19
2.2.2. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	22
2.2.3. Espacio de fases . . . . .	26
<b>3. Monodromía Hamiltoniana</b>	<b>29</b>
3.1. Motivación y antecedentes . . . . .	29
3.2. MAPLE . . . . .	31
3.3. Péndulo extensible . . . . .	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
3.3.1. Péndulo extensible con dos grados de libertad . . . . .	33
3.3.2. Potencial del péndulo extensible. . . . .	38
3.3.3. Curvatura gaussiana . . . . .	45
3.3.4. Péndulo con tres grados de libertad . . . . .	53
3.3.5. Energías bajas . . . . .	56
3.4. Monodromía hamiltoniana . . . . .	65
3.4.1. Monodromía hamiltoniana en el péndulo . . . . .	66
3.4.2. Vistas y cortes de plano . . . . .	67
<b>4. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>5. Apéndice 1</b>	<b>77</b>
5.0.3. Teorema de máximos y mínimos . . . . .	78
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Al intentar entender el comportamiento de los sistemas y dar una explicación de fenómenos que ocurren en ellos, la intervención de la física y de las matemáticas ayudan a comprender y aprender las propiedades que éstos contienen, desde el aporte de las leyes de Newton, muchos fenómenos tuvieron una descripción más detallada.

En nuestro caso el péndulo extensible que pese a ser un sistema “simple” tiene cualidades extraordinarias, además de ser un modelo clásico para la molécula  $CO_2$  y ser un referente en la resonancia de Fermi; en nuestro trabajo se busca analizar de manera numérica y visual las propiedades del potencial asociado, esto en el caso donde el sistema es de dos grados de libertad, lo cual ayudará a entender su comportamiento correspondiente. Para el caso de tres grados de libertad con datos obtenidos del potencial antes mencionado, se implementaran las herramientas aprendidas, a través del estudio del flujo hamiltoniano asociado a la partícula y con cortes transversales en el espacio de fase en el plano  $q_1, q_3$ ; y por último el cálculo del ángulo que forma el plano de oscilación respecto

al eje  $q_1$ .

Se sabe que la monodromía hamiltoniana es la obstrucción más simple a la existencia de variables de ángulo en modelos integrables de dinámica clásica[17]. Seremos capaces de responder la siguiente pregunta: ¿Existe la monodromía hamiltoniana en nuestro sistema no integrable? La pregunta surge a partir de que en el 2009 demostraron experimentalmente la “monodromía hamiltoniana” en el péndulo extensible; de acuerdo con su artículo[16] utilizan un resorte con  $K = 6.8\frac{N}{m}$ , una masa de  $m = 0.224kg$  y longitud  $l_0 = 1.00m$ ; además de capturar el movimiento de la partícula con dos cámaras de vídeo que funcionan tomando 30 cuadros por segundo.

## 1.1. Leyes de Newton

Las leyes de Newton dieron inicio a la rama de la mecánica vectorial, las cuales pueden ser enunciadas de la siguiente manera:

1. **Primera ley de Newton.** Existe en la naturaleza una clase especial de sistemas llamados *sistemas inerciales*, que se caracterizan por tener la siguiente propiedad: respecto a un sistema inercial, un objeto se mueve siempre en línea recta con rapidez constante a menos de que actúe sobre éste una fuerza.

2. **Segunda ley de Newton.** Respecto a un marco referencial inercial, la respuesta de un cuerpo a una fuerza  $\vec{F}$  está descrito por la siguiente ecuación de movimiento:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}, \quad (1.1)$$

donde  $\vec{p}$  es el momento lineal o simplemente el momento del objeto, y está definido por

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}, \quad (1.2)$$

con  $\vec{v}$  la velocidad del cuerpo y  $m$  su masa.

3. **Tercera ley de Newton.** Para cualesquiera dos cuerpos, las fuerzas que aplican uno sobre el otro, llamadas acción y reacción son iguales en magnitud y opuestas en sentido.

Matemáticamente podemos representar la trayectoria de una partícula con una curva parametrizada  $\vec{r}(t)$  definida sobre el espacio físico (euclidiano)  $\mathbb{R}^3$ , donde el parámetro  $t$  es el tiempo; la *velocidad* y la *aceleración* de la partícula se definen como:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (1.3)$$

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}, \quad (1.4)$$

donde el punto sobre las cantidades significa derivada respecto al tiempo. Con esta notación, si suponemos que la masa del objeto permanece constante durante su trayectoria, podemos reescribir la segunda ley de Newton como una ecuación diferencial de segundo orden para la posición,

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\vec{a}(t). \quad (1.5)$$

La solución de esta ecuación diferencial dadas las condiciones iniciales ( $\vec{r}(t=0)$ ), será la trayectoria que seguirá la partícula.

Además existen dos cantidades vectoriales de gran interés en la mecánica: el momento angular y el torque definidos como:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}, \quad (1.6)$$

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.7)$$

donde el símbolo  $\times$  indica el producto vectorial de dos vectores (en las siguientes figuras se resalta con negritas la notación de vector).

Con esto bastaría para conocer la dinámica a través de las leyes de Newton. Sin embargo muchas veces no se conocen todas las fuerzas que actúan sobre el sistema; incluso cuando se llegan a conocer las ecuaciones diferenciales estas pueden ser complicadas y

difíciles de resolver. A pesar de todo esto, también es cierto que se pueden encontrar ciertas integrales, al identificar cantidades conservadas durante el movimiento. Uno de los teoremas más importantes de la física es la ley de conservación<sup>1</sup> de la energía.

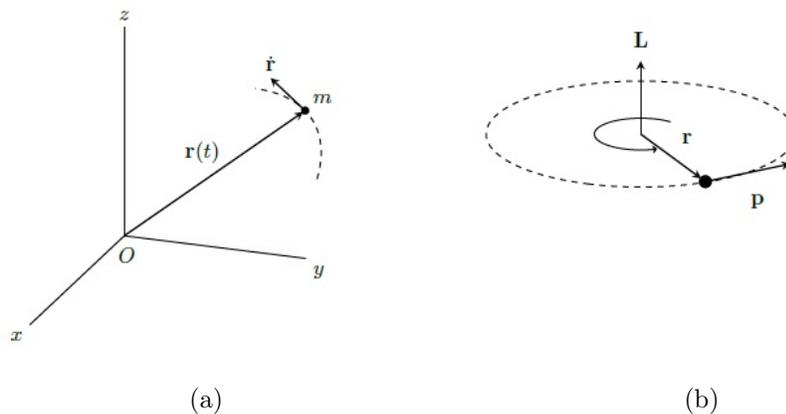


Figura 1.1: (a) A cada punto del espacio físico se le asigna una terna cartesiana  $\vec{r} = (x, y, z)$  medida desde un origen arbitrario  $O$ . (b) Representación geométrica del momento angular  $\vec{L}$ , el cuál es un vector siempre perpendicular al plano generado por los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$ .

---

<sup>1</sup>A partir de esta imagen y las que siguen la notación de vector será en negritas.

## 1.2. Leyes de conservación

De la segunda ley de Newton(1.1) y la definición de torque (1.7) se obtiene inmediatamente los siguientes resultados:

1. **Ley de conservación del momento lineal.** El movimiento lineal de una partícula permanece con velocidad constante en el tiempo si la fuerza neta que actúa sobre ella es cero,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = 0 \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0,$$

donde  $\vec{p}_0$  es una constante.

2. **Ley de conservación del momento angular.** El momento angular de una partícula permanece constante si el torque neto sobre ella es cero,

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{L}) = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_0,$$

Donde  $\vec{L}_0$  es una constante.

Como estas dos son cantidades vectoriales, su conservación implica que no cambia la magnitud ni la dirección durante el movimiento. El primer resultado implica que las partículas libres se mueven en el subespacio  $\mathbb{R}^3$  generado por un vector definido  $\vec{p}_0$ , es decir se mueve en línea recta. Mientras que el segundo, se asegura que las trayectorias con momento angular constante se encuentran sobre el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  que es el plano al cual el vector  $\vec{L}_0$  es perpendicular, debido a como lo definimos anteriormente. Este último resultado es de gran utilidad para resolver problemas de

campos de fuerza central.

Ahora supongamos que actúa una fuerza  $\vec{F}$  sobre una partícula de masa  $m$ , llevándola de un punto  $\vec{r}_a$  a un punto  $\vec{r}_b$ . Decimos que la fuerza realiza un trabajo mecánico  $W$  sobre la partícula y esta dado por la integral de línea:

$$W_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.8)$$

En general, la integral de línea depende de la trayectoria específica que se tome para ir de  $\vec{r}_a$  a  $\vec{r}_b$ . Independientemente de esto, podemos manipular la expresión haciendo uso de la segunda ley de Newton. Supongamos que  $\vec{F}_T = \sum_i \vec{F}_i$  es la fuerza total actuando sobre la partícula. El trabajo total realizado sería:

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_T \cdot \dot{\vec{r}} dt = m \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \cdot \vec{r} dt = \frac{1}{2} m \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{m v^2}{2} \Big|_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} = \Delta T. \end{aligned}$$

Donde

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1.9)$$

le llamamos energía cinética del sistema; notese que la energía no depende de la dirección del vector velocidad sino solo de su magnitud,  $v = |\vec{v}|$  usando la definición de momento, encontramos la expresión equivalente,

$$T = \frac{p^2}{2m}, \quad (1.10)$$

donde claramente  $p = |\vec{p}|$ . De esta manera, llegamos al *teorema del trabajo y la energía*.

El trabajo total realizado por la partícula es igual al cambio en su energía cinética:

$$W = \Delta T. \quad (1.11)$$

Existe una clase particular de fuerzas que cumplen la característica de que su función trabajo es independiente de la trayectoria que une los puntos  $a$  y  $b$ . A estas fuerzas se les conoce como *fuerzas conservativas*. A cada fuerza conservativa se le puede asignar a una función escalar llamada energía potencial definida como:

$$V(\vec{r}) \equiv - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}', \quad (1.12)$$

donde  $r_0$ , el cero de la función es un punto arbitrario. El signo negativo es convencional de aquí se obtiene que toda la fuerza conservativa es de la forma  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V$ , donde

$$\nabla V(\vec{r}) \equiv \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right). \quad (1.13)$$

De esto se puede definir la energía mecánica total del sistema como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E \equiv T + V. \quad (1.14)$$

Podemos calcular la evolución temporal de esta cantidad, usando el teorema del

trabajo-energía y la definición de energía potencial:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) + \frac{d}{dt} (V(\vec{r}(t), t)) \\
 &= \left( m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \right) + \left( \nabla V \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\
 &= \left( \vec{F}_T \cdot \dot{\vec{r}} \right) + \left( -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \left( \vec{F}_T - \vec{F} \right) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Del resultado anterior podemos ver que hay dos condiciones para que la derivada se anule. Estas condiciones son las que establecen la siguiente ley de conservación.

3. **Ley de la conservación de la energía mecánica.** La energía mecánica total de una partícula permanece constante en el tiempo si y sólo si todas las fuerzas que actúan sobre ella son conservativas, es decir, derivables de una función potencial, y no dependen explícitamente del tiempo,

$$\vec{F}_T = -\nabla V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad E = E_0, \tag{1.16}$$

donde  $E_0$  es una constante.

De acuerdo a la ec.(1.15)  $\vec{F}_T = \vec{F}$  y  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ . La energía se conserva en este sistema.

A diferencia del momento lineal y angular, la energía es una cantidad escalar y su conservación durante el movimiento es de gran utilidad para resolver las ecuaciones diferenciales que lo describen.



# Capítulo 2

## Formulación Lagrangiana y

## Hamiltoniana

### 2.1. Formulación Lagrangiana

A diferencia de la mecánica de Newton, la mecánica analítica desarrollada principalmente por Euler, Lagrange, Hamilton y Jacobi en el siglo *XVIII*, logran escribir las ecuaciones de movimiento de los cuerpos utilizando sólo cantidades escalares lo cual facilita en mucho las ecuaciones diferenciales; existen dos ramas importantes en la mecánica analítica que son: Los formalismos lagrangiano y hamiltoniano. Estas teorías dan herramientas teóricas muy poderosas para la solución de problemas clásicos, además de ser una base para teorías más avanzadas, como por ejemplo la mecánica cuántica. En este capítulo del trabajo se lo dedicaremos a estos formalismos, empezando por coordenadas generalizadas, ecuaciones de Euler-Lagrange y el principio de Hamilton.

### 2.1.1. Coordenadas generalizadas

Las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de un sistema pueden simplificarse bastante con la elección correcta del sistema coordenado. La mecánica analítica ofrece una manera alterna de expresar las ecuaciones de movimiento, no en términos de coordenadas cartesianas del espacio físico, sino en términos de las llamadas coordenadas generalizadas.

Consideremos un sistema de  $N$  partículas que interactúan. La posición de cada partícula en un tiempo determinado es un vector que pertenece siempre al espacio euclidiano

$$\vec{r}_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Supongamos que la posición de cada partícula se puede describir por  $3N$  variables independientes  $\vec{q}_i(t)$  de tal manera que existan relaciones inversas.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), & q_1 &= q_1(x_1, y_1, \dots, z_N), \\ &\vdots & \Leftrightarrow & \vdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), & q_{3N} &= q_{3N}(x_1, y_1, \dots, z_N). \end{aligned}$$

De esta manera se pueden escribir las ecuaciones de movimiento y describir la dinámica en términos de coordenadas generalizadas  $q_i$  y derivadas temporales  $\dot{q}_i$ , a los que se le conoce como velocidades generalizadas. Por ejemplo, una partícula moviéndose en el espacio puede describirse en coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , cilíndricas  $(r, \theta, z)$  o esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . La elección de coordenadas depende de las condiciones ideales de cada problema. En algunas ocasiones es posible simplificar el problema al encontrar alguna relación entre coordenadas generalizadas de la forma:

$$f_k(q_1, \dots, q_{3N}) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

A dichas relaciones se le conoce como ecuaciones de constricción. De manera general, si existen  $m$  ecuaciones de constricción, entonces se puede eliminar  $m$  coordenadas generalizadas del sistema de ecuaciones, quedando únicamente  $n = 3N - m$  variables independientes. A un número mínimo  $n$  de coordenadas generalizadas que se necesitan para describir completamente la dinámica de un sistema, se le llama número de grados de libertad. Mientras más ecuaciones de constricción se tengan, menos grados de libertad tendrá el sistema y por lo tanto se necesitarán menos coordenadas generalizadas para describirlo.

Para cada instante específico, la configuración del sistema queda totalmente definida por un vector  $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  en un espacio de dimensión  $n$  llamado espacio de configuraciones (espacio de fases).

### 2.1.2. Ecuaciones Euler-Lagrange

Durante el desarrollo de la mecánica analítica, sus autores se percataron que las ecuaciones de movimiento, dictadas por las leyes de Newton podían deducirse de un principio mucho más general, el llamado *principio de acción estacionaria o principio de Hamilton*, el cual asegura que entre todas las trayectorias  $\vec{q}(t)$  que puede hacer el sistema al moverse entre dos puntos en el espacio de configuraciones, seguirán a aquella que haga mínima, determinada función llamada acción; donde ésta tome un valor estacionario durante todo el trayecto. De este principio se derivan unas ecuaciones de movimiento, que aún teniendo una forma diferente a las de la segunda ley de Newton son completamente equivalentes.

Comenzaremos definiendo la función Lagrangiana o simplemente el lagrangiano del sistema como el exceso de energía cinética sobre la potencial del sistema:

$$L \equiv T - V. \quad (2.3)$$

En general, supongamos que el lagrangiano depende de las coordenadas generalizadas, de sus velocidades generalizadas y posiblemente del tiempo. Con esta cantidad definiremos la acción como:

$$S[\vec{q}(t)] \equiv \int_{t_a}^{t_b} L(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t); t) dt. \quad (2.4)$$

Si analizamos la expresión anterior nos daremos cuenta de que la acción como una función completa como argumento, esto quiere decir que define una transformación de la curva  $\vec{q}(t)$  a un número real. Es decir actúa sobre un espacio de funciones, más no de números reales. A este tipo de funciones se les llama funcionales. Por lo tanto la acción es una funcional sobre todas las posibles trayectorias que unen los puntos  $\vec{q}_a = \vec{q}(t_a)$  y  $\vec{q}_b = \vec{q}(t_b)$ . Como se menciona anteriormente la curva que describe el sistema es aquella que genera un valor estacionario minimizado  $S$ . Entonces hay que buscar una función que cualquier desviación por pequeña que sea no afecte el valor de la acción. A una pequeña desviación a partir de una función fija  $q$ , le llamaremos variación y se denota como  $\delta q$ , a una desviación de un valor fijo  $t$ , le llamaremos diferencial, lo denotamos  $dt$ ; por lo tanto se busca una curva que cumpla:

$$\delta S \equiv S[\vec{q}(t) + \delta \vec{q}(t)] - S[\vec{q}(t)] = 0. \quad (2.5)$$

Esto es para todas las posibles variaciones  $\delta\vec{q}$ . Además se pedirá que no cambie en el punto inicial  $t_a$  y el punto final  $t_b$

$$\delta\vec{q}(t)|_{t_a} = \delta\vec{q}(t)|_{t_b} = 0. \quad (2.6)$$

A este proceso se le llama variación con extremos fijos.

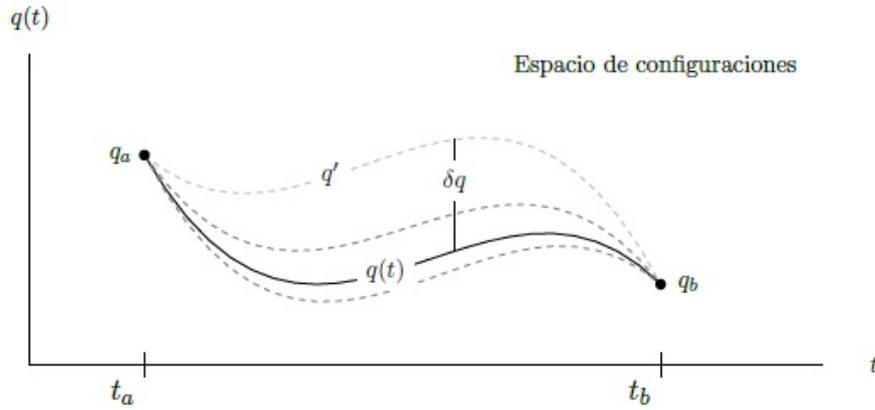


Figura 2.1: Cálculo de variaciones.

Por otro lado tenemos que todos los componentes  $q_i$  son independientes entre sí, variaremos entonces cada una por separado. Comenzamos escribiendo:

$$\delta S = S[q_i + \delta q_i] - S[q_i] = \int_{t_a}^{t_b} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) dt - \int_{t_a}^{t_b} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (2.7)$$

Después desarrollamos en series de Taylor e integrando la primera integral encontramos:

$$L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} (\delta q_i)^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} \delta q_i \delta \dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i^2} (\delta \dot{q}_i)^2 \right) + \dots$$

al despreciar los términos de segundo orden y superiores en  $\delta q_i$  y  $\delta \dot{q}_i$ , obtenemos

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt. \quad (2.8)$$

Nos interesa factorizar la variación  $\delta q_i$  de la integral, para que nuestro resultado sea completamente independiente de ésta. Para eso primero demostraremos que la variación y la derivada ordinaria conmutan. Ya que  $q_i(t)$  es una función continua y derivable para cualquier curva cercana a ella, sea  $q'_i = q_i + \delta q_i$  otra curva. Entonces  $\delta q_i = q'_i - q_i$  es una función continua y derivable, cuya derivada temporal es precisamente

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} (q'_i - q_i) = \dot{q}'_i - \dot{q}_i \equiv \delta \dot{q}_i. \quad (2.9)$$

Por lo tanto

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_a}^{t_b}. \quad (2.10)$$

Donde hemos usado el método de integración por partes para poder expresar, todo en producto de la variación  $\delta q_i$  y así poder factorizarla. Claramente el último término es cero por la condición de extremos fijos (2.6), la condición suficiente y necesaria sobre cada una de las componentes  $q_i(t)$  de  $q(t)$  para que  $S$  tome un valor estacionario, esta dada por,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

A estas ecuaciones de movimiento se le conoce como ecuaciones de Euler-Lagrange.

## 2.2. Formulación Hamiltoniana.

En ésta sección daremos una introducción a todos los conceptos importantes que serán utilizados más adelante. El formalismo hamiltoniano es útil para el desarrollo de problemas de mecánica clásica, además de ser un primer paso para describir la naturaleza cuántica de los cuerpos en movimiento a escala microscópica. Las ecuaciones de movimiento se derivan de una función llamada función de hamilton o simplemente hamiltoniano, que es análoga a la función lagrangiana, del formalismo lagrangiano. Veremos que una de las cualidades de mayor interés de los hamiltonianos es que bajo ciertas condiciones se les puede asociar con la energía mecánica total del sistema.

### 2.2.1. Momentos generalizados.

En la formulación lagrangiana las ecuaciones de movimiento se escriben como un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden; en la formulación hamiltoniana, en cambio, se describen como un sistema de  $2n$  ecuaciones de primer grado. Hamilton logra duplicar el número de variables mecánicas al introducir los momentos generalizados y darles una importancia no solo física si no también matemática.

Primero introduciremos los momentos generalizados de la siguiente manera: cuando un lagrangiano no depende de cierta coordenada generalizada  $q_k$  decimos que es cíclica o ignorable del sistema. La ecuación de Euler-Lagrange (E-L) para dicha ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (2.12)$$

lo que implica que,

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

es una constante la cual se conserva durante el movimiento. A esta nueva cantidad  $p_k$  se le conoce como momento generalizado correspondiente o conjugado a la coordenada generalizada  $q_k$ . Ahora si el momento generalizado no se conserva cabe recalcar que hay que introducirlo para simplificar la estructura de las ecuaciones de E-L

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Al encontrarse con momentos conservados en un sistema, en realidad estamos disminuyendo el número de las ecuaciones diferenciales de E-L para resolver el sistema, lo cual facilita encontrar sus soluciones. La función lagrangiana, que esta escrita en términos de coordenadas generalizadas y sus velocidades es,

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (2.14)$$

Ahora definimos una nueva función Función hamiltoniana que describa la dinámica del sistema en términos de las coordenadas y momentos generalizados,

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (2.15)$$

y puede ser encontrada por medio de la transformada de Legendre de la función lagrangiana respecto de las variables  $\dot{q}_i$ ,

$$H \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.16)$$

Ahora lo que nos interesa, es expresar las velocidades  $\dot{q}_i$  en términos de los momentos  $p_i$ , a partir de la definición (2.13). Esto sucede siempre y cuando se cumpla la condición

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} > 0. \quad (2.17)$$

Al nuevo par de variables independientes  $(p_i, q_i)$  se les conoce como coordenadas canónicas.

A continuación daremos una importante interpretación física de la función hamiltoniana.

Para sistemas mecánicos con lagrangianos definidos como<sup>2</sup>  $L = T - V$ , donde la energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades generalizadas y la energía potencial sólo depende de la coordenadas,

$$T = \sum_{j,k=1}^n C_{jk}(\vec{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad V = V(\vec{q}), \quad (2.18)$$

el hamiltoniano es la energía mecánica total  $H = T + V$ .

Para demostrar esto, usaremos el hecho que la energía cinética es una función homogénea de segundo grado en las velocidades, de manera que por el teorema de Euler para las funciones homogéneas [3], se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T, \quad (2.19)$$

así

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - V) = 2T - T + V = T + V = E, \quad (2.20)$$

tal como lo afirmamos.

---

<sup>2</sup>Aunque no existe una sola manera de justificar la forma del lagrangiano, citando a Landau y Lifshitz

[2] “la experiencia ha mostrado que ”la forma correcta es precisamente esta

### 2.2.2. Ecuaciones de Hamilton

Ya que hemos definido el hamiltoniano, veamos cómo se ven las ecuaciones de movimiento en términos de las variables canónicas. La manera más sencilla de observar como cambia la función hamiltoniana cuando el sistema se mueve de una configuración  $(\vec{q}, \vec{p})$  a una configuración  $(\vec{q} + d\vec{q}, \vec{p} + d\vec{p})$  luego de un intervalo de tiempo  $dt$  es:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.21)$$

Usando la definición (2.17):

$$\begin{aligned} dH &= d \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{q}_i dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^n (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

igualando cada término de la suma anterior como los términos de la definición, encontramos las ecuaciones de Hamilton:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Al igual que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

éstas describen toda la dinámica del sistema.

Una aplicación inmediata de estos resultados está asociada a la versión hamiltoniana de la ley de conservación de energía.

- Si el hamiltoniano asociado a un sistema mecánico no depende explícitamente del tiempo, entonces su energía total se conserva. Es decir:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E. \quad (2.23)$$

Donde  $E$  es constante.

Este resultado es una consecuencia directa de las ecuaciones de Hamilton, pues al buscar la evolución temporal total del hamiltoniano encontramos lo siguiente:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.24)$$

De hecho, este es un caso particular de la aplicación de un objeto matemático llamado paréntesis de Poisson, el cuál introducimos a continuación. La evolución de cualquier cantidad mecánica como función de las variables canónicas y posiblemente del tiempo  $f(\vec{p}, \vec{q}, t)$  se calcula como:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Así podemos definir el paréntesis de Poisson para dos cantidades  $f, g$ , respecto a las variables  $q_i$  y  $p_i$ ,

$$\boxed{\{f, g\}_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)}. \quad (2.26)$$

Entonces podemos escribir:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.27)$$

por lo tanto una condición necesaria y suficiente para que una cantidad  $c(\vec{p}, \vec{q})$  sea una constante de movimiento es que su paréntesis Poisson con el hamiltoniano del sistema sea cero,

$$\{c, H\}_{q,p} = 0 \Leftrightarrow c = c_0 \text{ cte.} \quad (2.28)$$

En términos de las ecuaciones de Hamilton toman una forma bastante elegante

$$\boxed{\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}}. \quad (2.29)$$

En general los paréntesis de Poisson satisfacen las siguientes propiedades para  $f, g, h$  funciones de variables canónicas y del tiempo.

#### 1. Bilinealidad

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}, \quad \{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}. \quad (2.30)$$

#### 2. Anticonmutatividad

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (2.31)$$

#### 3. Regla de Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g, \quad \{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \quad (2.32)$$

#### 4. Identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (2.33)$$

El formalismo de los paréntesis de Poisson es importante porque facilita encontrar cantidades conservadas en sistemas con muchos grados de libertad, pues el teorema de Poisson asegura que si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de movimiento, entonces los paréntesis también lo son:

$$\{c_1, H\} = \{c_2, H\} = 0 \Rightarrow \{\{c_1, c_2\}, H\} = 0. \quad (2.34)$$

El teorema es fácil de demostrar al usar la identidad de Jacobi, por otro lado si aplicamos los paréntesis de Poisson directamente a las variables canónicas obtenemos los paréntesis de Poisson fundamentales; estos son:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}. \quad (2.35)$$

Donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker, definida como:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{sí } i = j \\ 0 & \text{sí } i \neq j. \end{cases} \quad (2.36)$$

Cabe señalar que los paréntesis de Poisson es una estructura matemática conocida como álgebras de Lie.

### 2.2.3. Espacio de fases

El espacio de fases es una herramienta poderosa para analizar el movimiento aun antes de resolver las ecuaciones diferenciales. Está formado por los puntos  $\vec{z} = (\vec{q}, \vec{p})$  y la solución de las ecuaciones de Hamilton para una condición inicial  $z(0) = (q(0), p(0))$  es una trayectoria  $\vec{z}(t)$  en este espacio. El punto  $z(t)$  se mueve por el espacio de fases a una “velocidad de fase”  $\vec{v} = (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}})$ , pero  $\vec{z}(t)$  obedece a las ecuaciones de Hamilton entonces:

$$\vec{v} = (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q} \right). \quad (2.37)$$

Con esto es inmediato reconocer que  $v = \nabla H$ , entonces:

$$\nabla H = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q} \right),$$

que es siempre perpendicular a  $v$  es decir  $\boxed{v \perp \nabla H}$ . Entonces las trayectorias en el espacio de fases son siempre perpendiculares a la dirección de máxima variación de  $H$  (dirección del gradiente).

Por otro lado si  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , entonces  $\frac{dH}{dt} = 0$ , entonces  $H = \text{cte}$ . Así  $H$  es un “paisaje” a lo largo de las curvas de nivel.

Al igualar las ecuaciones a cero y después resolverlas, tendremos que las soluciones son los equilibrios del sistema; en el espacio de fases se les llama puntos fijos.

¿Pueden cruzarse las trayectorias en espacio de fases? No, Las ecuaciones de Hamilton nos dicen que hay una solución que puede pasar por cada punto del espacio de fases, el sistema es autónomo entonces  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ . Así todas las  $z(t)$  forman una especie de flujo en el espacio de fases, como si fuera un fluido.

Existe una excepción. La pendiente de la trayectoria en cada punto es la velocidad de

fase, es decir,  $(\frac{\partial H}{\partial p} / \frac{\partial H}{\partial q})$ , que tiene un valor único o bien definido. Por eso no se cruzan las trayectorias, claramente pueden ser cero (trayectorias “horizontales”) o infinita (trayectorias “verticales”). Pero además pueden estar indeterminada: en los puntos fijos donde vale  $0/0$ . Solo en esos puntos pueden cruzarse las trayectorias.

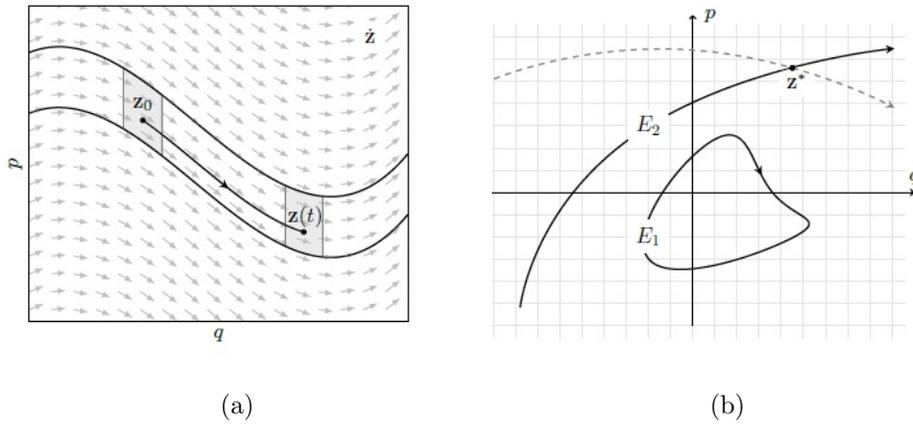


Figura 2.2: (a) Representación del flujo hamiltoniano en  $\dot{z}$ . (b) Representación del espacio de fase de un sistema de un grado de libertad.



# Capítulo 3

## Monodromía Hamiltoniana en un péndulo extensible

### 3.1. Motivación y antecedentes

En este trabajo se estudia ciertas propiedades globales asociadas a la dinámica de un péndulo extensible. Es un sistema mecánico (péndulo) en el que se supone que la partícula cuelga de un resorte de Hook como se representa en la fig.(3.1). El sistema es mecánico, conservativo, no lineal y se describe por el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + fq_2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.1)$$

El péndulo extensible se ha estudiado desde el inicio de la mecánica no lineal; además de ser no lineal exhibe resonancia auto paramétrica y caos. Inclusive se le ha usado como un modelo simplista de la interacción océano atmósfera [8] y como modelo clásico de sistemas cuánticos que exhiben la llamada resonancia de Fermi, la cual aparece en moléculas

tricotómicas tipo  $CO_2$  [17, 15].

Contra lo que pudiera esperarse, el sistema a un tiene sorpresas escondidas, estudios experimentales del péndulo extensible muestran que dicho sistema tridimensional exhibe una evolución, en la que el plano de oscilación cambia espontáneamente cada cierto número de oscilaciones. Estos cambios no ocurren periódicamente y han llevado a tratar de explicar este fenómeno a través de la monodromía hamiltoniana.

¿Qué es la monodromía hamiltoniana?

Monodromía hamiltoniana.- Obstrucción topológica a constantes de movimiento globales en un sistema hamiltoniano. En la naturaleza se hace presente, ya que al ver un girasol y observar en el ojo tiene 32 líneas hacia la izquierda y 52 a la derecha forman una malla donde se toma una celda que se mueve respecto al centro, lo que hace una rotación de la celda. El objetivo del trabajo es averiguar a que energía baja el péndulo extensible es capaz de realizar los cambios de plano de oscilación, tomando en cuenta las propiedades de éste. El hamiltoniano que describe al péndulo extensible es el siguiente:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + fq_2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2 + q_3^2} \right]^2. \quad (3.2)$$

Lo estudiaremos para averiguar si la monodromía hamiltoniana está presente en esto ya que los cambios de plano de oscilación es lo que hace notar este fenómeno. La motivación sale del estudio que se realizó en 2009[16] donde demostraron experimentalmente que la monodromía hamiltoniana existe en el sistema. Para hacer el experimento usaron un resorte de  $K = 6.8 \frac{N}{m}$ , una masa de  $m = 0.224kg$  y longitud  $l_0 = 1.00m$ . En el experimento capturaron el movimiento de la partícula con dos cámaras de vídeo que funcionan a 30 cuadros por segundo.

## 3.2. MAPLE

Software orientado a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional; fue desarrollado originalmente en 1981 por el grupo de cálculo simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario Canadá.

El método Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45), es una forma de tratar de resolver este problema. Tiene un procedimiento para determinar si se está utilizando el tamaño de paso ( $h$ ) en la integración. En cada paso, se hacen y comparan dos aproximaciones diferentes para la solución.

Cada paso requiere el uso de los siguientes seis valores:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= hf(t_k, y_k), \\
 K_2 &= hf\left(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}K_1\right), \\
 K_3 &= hf\left(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right), \\
 K_4 &= hf\left(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right), \\
 K_5 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right), \\
 K_6 &= hf\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 - \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right).
 \end{aligned}$$

Luego, una aproximación a la solución de P.V.I. se realiza utilizando un método Runge-

Kutta de orden 4:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4101}K_4 - \frac{1}{5}K_5,$$

Donde se usan los cuatro valores de la función  $f_1, f_3, f_4$  y  $f_5$ . Observe que  $f_2$  no se usa en la fórmula anterior, se determina un mejor valor para la solución utilizando un método

Runge-Kutta de orden 5:

$$Z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6.$$

El tamaño de paso óptimo ( $sh$ ) puede determinarse multiplicando el escalar  $s$  por el tamaño del paso actual. El escalar es:

$$s = \left( \frac{tolh}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,84 \left( \frac{tolh}{|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Maple tiene predeterminado el solucionador numérico RKF45 por lo que no tenemos que generar nuestro propio código, primero se definen las ecuaciones de movimiento, en seguida se pone la instrucción `dsolve(sistema,numeric)`, en seguida se despliega la lista de aproximaciones del sistema de ecuaciones.

### 3.3. Péndulo extensible

Un sistema mecánico “simple” que consiste de una masa sostenida por un resorte de masa despreciable, el cual tiene una longitud  $l_0$ . Se usan coordenadas cartesianas generalizadas de igual manera como se usó en el caso [12, 15, 16, 17]. El origen lo elegiremos en la posición de equilibrio de la lenteja, como lo muestra la figura(3.1).

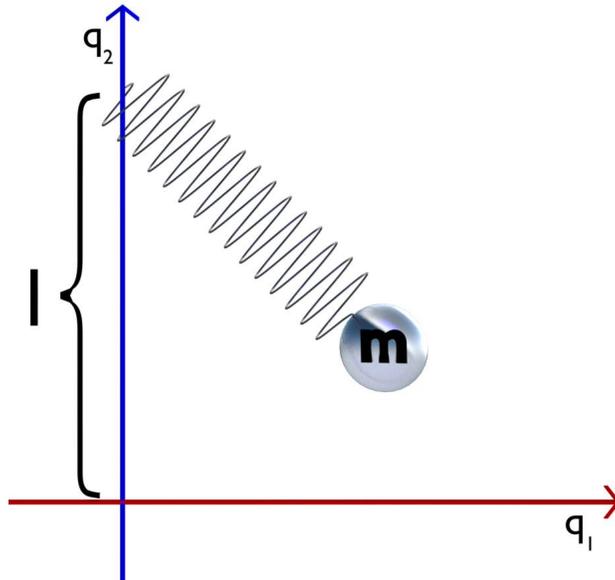


Figura 3.1: Péndulo extensible, fijo al plano con coordenadas  $q_1$  y  $q_2$ , con masa  $m$  y una longitud  $l$ .

### 3.3.1. Péndulo extensible con dos grados de libertad

El sistema con dos grados de libertad está obligado a moverse sólo en el plano  $(q_1, q_2)$ , que son las coordenadas generalizadas de este sistema que ayudan a entender su comportamiento; utilizaremos la definición (2.3), [2]. Entonces la ecuación lagrangiana es:

$$L = T - V. \quad (3.3)$$

Donde  $T$  = energía cinética,  $V$  = energía potencial, además  $l = l_0 + \frac{mg}{k}$  ( $l_0$  es la longitud del péndulo para  $m=0$ ) es la longitud del origen al punto donde se sostiene el resorte y

$r = (q_1, 1 - q_2)$  es el punto de de la partícula, donde  $\|r\| = \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad (3.4)$$

$$V = V_{resorte} + V_{gravedad} = \frac{1}{2}K [l_0 - \|r\|]^2 + mgq_2. \quad (3.5)$$

Donde  $K =$  constante del resorte y  $g =$  gravedad; sustituyendo (3.4) y (3.5) en (3.3)

tendremos:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}K [l_0 - \|r\|]^2 - mgq_2 \quad (3.6)$$

y al sustituir  $\|r\|$  y  $l_0$  en (3.6) se tiene:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}K \left[ l - \frac{mg}{k} - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2 - mgq_2. \quad (3.7)$$

Por lo tanto el lagrangiano necesario que describe al sistema esta dado por:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2 - \frac{1}{2}K \left[ l - \frac{mg}{k} - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.8)$$

Ahora en nuestro trabajo describiremos el comportamiento del sistema a través de un

hamiltoniano para ello usamos la definición (2.17):

$$H = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L. \quad (3.9)$$

Al sustituir lo anterior con (3.8), el hamiltoniano quedara de la siguiente manera :

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + mgq_2 + \frac{1}{2}K \left[ l - \frac{mg}{k} - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.10)$$

Además  $\dot{q}_k = p_k$ , para todo  $k = 1 \dots n$ . Teniendo esto en cuenta el hamiltoniano quedara

descrito como:

$$H = \frac{1}{2}m(p_1^2 + p_2^2) + mgq_2 + \frac{1}{2}K \left[ l - \frac{mg}{k} - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.11)$$

Haciendo los cambios mencionados y definimos el parámetro  $f = \left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)^2$ , el cual está descrito por  $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}}$  frecuencia pendular y  $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$  frecuencia del resorte. Por lo tanto el hamiltoniano adimensionalizado<sup>3</sup>[12] es:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + f q_2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.12)$$

Hay que notar la relación que tiene  $f = (1 - \frac{l_0}{l})$ , donde  $f$  toma valores del intervalo  $[0, 1]$ . Debe quedar claro que el sistema se vuelve integrable cuando  $f = 0$ , o cuando  $f = 1$  (apéndice ) [11].

En nuestro trabajo usaremos  $f = \frac{1}{4}$ , esto quiere decir que la frecuencia del resorte es exactamente el doble de la frecuencia del péndulo; que es el caso en que se produce una resonancia paramétrica fuerte [1]. Este es el valor más relevante para la física molecular y por tanto para el caos cuántico.

En los sistemas dinámicos se estudian ciertos comportamientos impredecibles ya que estos cambian a lo largo del tiempo, y se pueden clasificar en estables, inestables y caóticos.

Un sistema *estable* tiende a lo largo del tiempo a un punto u órbita.

Un sistema *inestable* tiende a escapar de los puntos críticos.

Un sistema *caótico* manifiesta los dos comportamientos; es decir, por un lado existe un atractor que atrae el sistema, pero a la vez hay “fuerzas” que lo alejan de este.

---

<sup>3</sup>Es una cantidad sin una dimensión física asociada, siendo por tanto un número puro que permite describir una característica física sin dimensión ni unidad de expresión explícita, y que como tal, siempre tiene una dimensión de 1

A partir de que el sistema se describe por medio del hamiltoniano, obtendremos las ecuaciones de movimiento, definidas como en el capítulo anterior las cuales nos ayudaran a sacar puntos críticos y analizar el potencial que usaremos más adelante; dichas ecuaciones se obtienen a partir de la definición (2.3),

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3.13)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (3.14)$$

Como es un sistema de dos grados de libertad tendremos cuatro ecuaciones de movimiento que son las siguientes:

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad (3.15)$$

$$\dot{q}_2 = p_2, \quad (3.16)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{3}{4} \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}} - q_1, \quad (3.17)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{3}{4} - q_2 \frac{(1 - q_2)}{\sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}}. \quad (3.18)$$

Esto nos ayuda a escoger las condiciones iniciales correctas en donde nuestro objetivo de encontrar la energía adecuada pueda estar.

### Mínima energía del sistema en reposo

Para obtener la mínima energía que puede tener el sistema en reposo, usamos el método de máximos y mínimos[9]; haciendo que la energía cinética es  $T = 0$  y  $q_1 = 0$  el hamiltoniano (3.12) queda de forma:

$$H = f^2 q_2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - f^2 - \sqrt{(1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.19)$$

Haciendo el álgebra necesaria tenemos:

$$\begin{aligned}
 H &= f^2 q_2 + \frac{1}{2} [1 - f^2 - (1 - q_2)]^2, \\
 H &= f^2 q_2 + \frac{1}{2} [-f^2 + q_2]^2, \\
 H &= f^2 q_2 + \frac{1}{2} (q_2 - f^2)^2, \\
 H &= f^2 q_2 + \frac{1}{2} q_2^2 - \frac{2}{2} q_2 f^2 + \frac{f^4}{2}, \\
 H &= \frac{q_2^2}{2} + \frac{f^4}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Entonces al derivar respecto a  $q_2$  obtenemos,

$$\frac{dH}{dq_2} = q_2.$$

Igualando a  $\frac{dH}{dq_2} = 0$ , tenemos que  $q_2 = 0$ , el punto a evaluar es:

$$q_2 = 0.$$

A continuación tenemos que evaluar  $q_2 = 0$ , en (3.20):

$$\begin{aligned}
 E_{min} &= \frac{1}{2} q_2^2 + \frac{f^4}{2}, \\
 E_{min} &= \frac{f^4}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32},^1
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

la energía mínima del sistema es:

$$E_{min} = \frac{1}{32} = 0.03125.$$

Donde  $E_{min}$  coincide con la energía del el péndulo extensible[12].

### 3.3.2. Potencial del péndulo extensible.

Al analizar el hamiltoniano con la energía mínima y tomar en cuenta solo la energía potencial, se toma la decisión de ver la superficie que forma el potencial, además de ver las curvas de nivel y el campo gradiente:

$$V(q_1, q_2) = f^2 q_2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - f^2 - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2} \right]^2. \quad (3.22)$$

Con las instrucciones *plot3d*, *gradplot* y *contourplot* obtenemos las siguientes superficies:

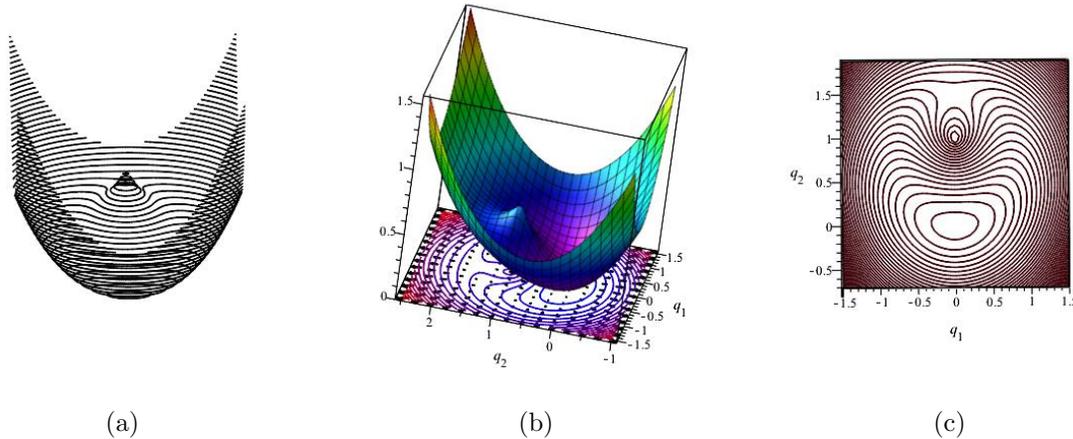


Figura 3.2: (a) Superficie vista con curvas de nivel. (b) Curvas de nivel con campo gradiente y la superficie (sabana). (c) Curvas de nivel en el plano  $(q_1, q_2)$ .

Después de trazar el potencial (3.22) nos percatamos que el paraboloides está pinchado (en el punto  $(0, 1)$ ), tenemos que analizar esto para poder obtener las condiciones iniciales y la energía mínima necesaria para nuestro propósito; en  $(0, 0)$  se puede observar que es un punto mínimo. Usaremos la definición del gradiente para encontrar los puntos críticos, para después analizar si son máximos o mínimos.

$$\nabla V(q_1, q_2) = -\frac{\left(\frac{3}{4} - \sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right) q_1}{\sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}} \hat{i} + \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{3}{4} - \left(\sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right)\right)(q_2 - 1)}{\sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}} \hat{j}.$$

Para que  $\nabla V(q_1, q_2) = 0$ , esto pasa si y sólo si  $(q_1, q_2) = (0, 0)$ . Sustituyendo en la ecuación anterior y haciendo las operaciones correspondientes tenemos:

$$\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{3}{4} - 1\right)(-1)}{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Esto implica que  $(0, 0)$  es un punto crítico.

Ahora supongamos que  $q_1 = 0$  y  $q_2 \neq 0$  y  $1$ , tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{3}{4} - \left(\sqrt{(q_2 - 1)^2}\right)\right)(q_2 - 1)}{\sqrt{(q_2 - 1)^2}} = \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{3}{4} - (q_2 - 1)\right)(q_2 - 1)}{(q_2 - 1)} = -\frac{6}{4} + q_2.$$

Lo que nos lleva a tener  $q_2 = \frac{3}{2}$ , esto implica que  $(0, \frac{3}{2})$ , es otro punto crítico.

La razón de que  $q_2 \neq 1$  es que en este punto existe una singularidad, “pinchazo” en el paraboloides.

A continuación usaremos el teorema de máximos y mínimos locales[9] que nos ayudará para analizar los puntos críticos anteriormente encontrados.

Entonces aplicando el teorema al potencial (3.2) analicemos que ocurre en el punto  $(0, 0)$ .

Cumple con la condición (i), en la condición (ii) sacando  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}$  tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{q_1^2}{q_1^2 + (q_2 - 1)^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} - \sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right) q_1}{(q_1^2 + (q_2 - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\frac{3}{4} - \sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right)}{\sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = \frac{(q_2^2 - 1)^2}{q_1^2 + (q_2 - 1)^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} - \sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right) (q_2 - 1)^2}{(q_1^2 + (q_2 - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\frac{3}{4} - \sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right)}{\sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{q_1(q_2 - 1)}{q_1^2 + (q_2 - 1)^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} - \sqrt{q_1^2 + (q_2 - 1)^2}\right) (q_2 - 1)q_1}{(q_1^2 + (q_2 - 1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entonces evaluando  $(0, 0)$ , en el discriminante tenemos

$$d = \left(\frac{1}{4}\right) (1) - (0) = \frac{1}{4} > 0,$$

esto implica que  $(0, 0)$  es un mínimo local estricto.

Al sustituir el punto  $(0, \frac{3}{2})$  en el discriminante tenemos:

$$d = \left(-\frac{1}{2}\right) (1) - (0) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Aquí observamos que  $(ii) < 0$  y afecta en el discriminante, entonces tenemos que el punto  $(0, \frac{3}{2})$  es un punto silla.

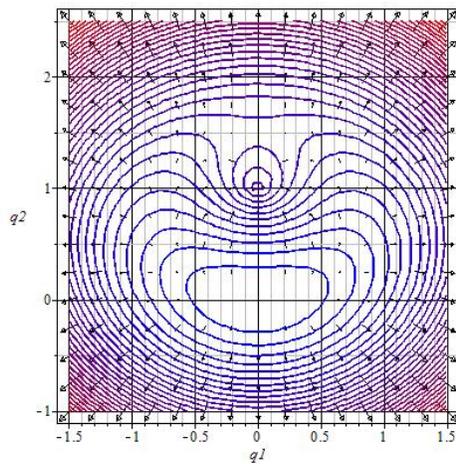
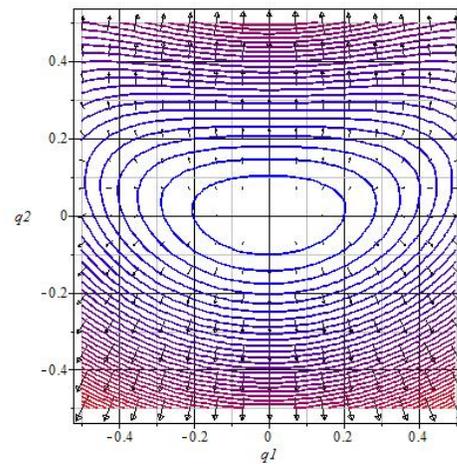
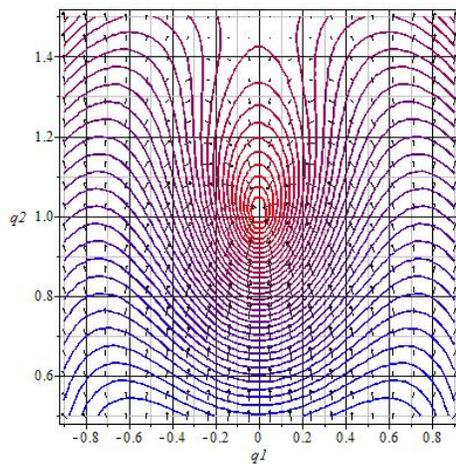
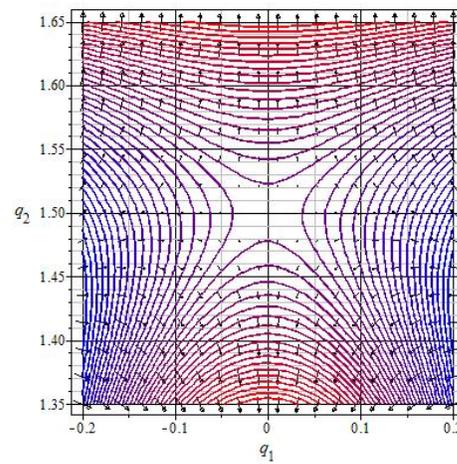
(a) Campo gradiente de  $V(q_1, q_2)$ .(b) Punto crítico  $(0, 0)$ .(c) Punto  $(0, 1)$  donde esta el pinchazo.(d) Punto silla  $(0, 1.5)$ .

Figura 3.3: Para ver a detalle el punto silla trazamos el campo gradiente a la superficie (el potencial) para observar el comportamiento de los puntos críticos y del punto  $(0, 1.5)$ .

Al realizar el análisis anterior, se opto por ver el comportamiento en el espacio de fases  $(q_1, q_2, p_1)$  donde usaremos tres energías diferentes como son  $E_1 = 0.3941$ ,  $E_2 = 0.4375$   $E_3 = 1.5$ ; las cuales se usaron también en [12]; ahora veremos que pasa en  $p_1$  al introducir las energías antes mencionadas.

$$E = \frac{1}{2}p_1^2 + V(q_1, q_2), \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2}p_1^2 = E - V(q_1, q_2),$$

$$p_1^2 = 2E - 2V(q_1, q_2),$$

$$p_1 = \pm \sqrt{2E - 2V(q_1, q_2)}. \quad (3.24)$$

teniendo la ecuación (3.25). Con ello se reprodujo las siguientes imágenes<sup>4</sup>:

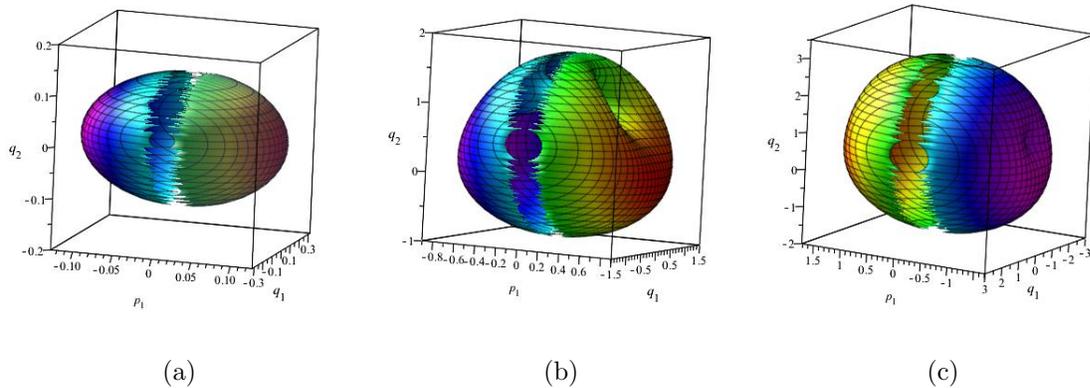


Figura 3.4: a)  $E = 0.03941$  superficie regular. b)  $E = 0.4375$  se forma una superficie hueca (dona). c) Con  $E = 1.5$  se obtiene superficie regular.

<sup>4</sup>La superficie es toda cerrada, con una tarjeta gráfica óptima se tendrá mejor resultado.

### Gráficas de densidad

Utilizamos la herramienta que nos ofrece nuestro software para ver la proyección de lo que ocurre en el espacio de fases  $(p_1, q_1, q_2)$  a partir de gráficas de densidad. Veremos como cambia la superficie al ir aumentando las energías, comenzando con  $E = 0.03941$  y terminando con  $E = 1.5$ . La instrucción para esto esta dada por *densityplot* que se encuentra dentro del paquete *with(plots)*, al realizar esta técnica obtenemos lo siguiente

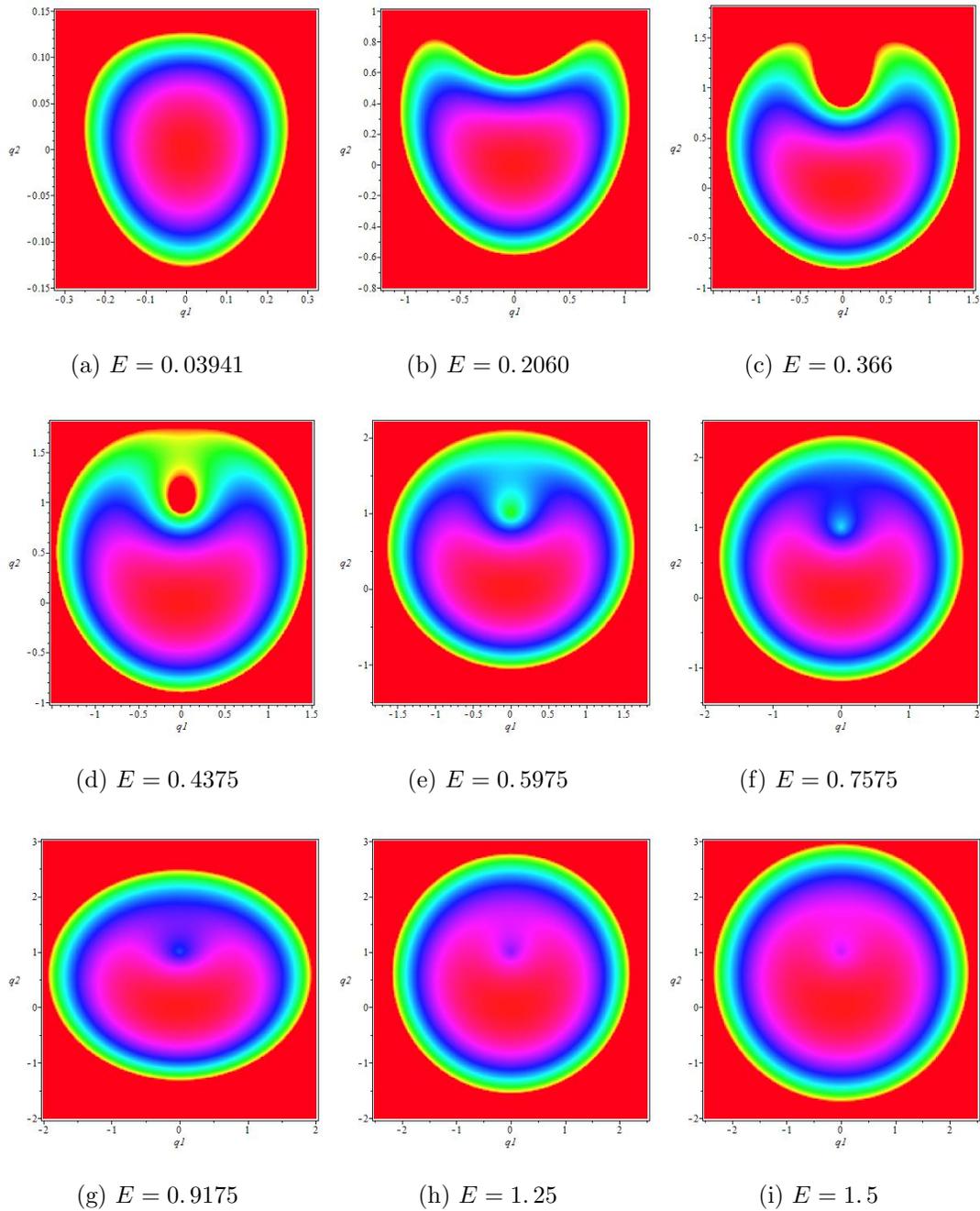


Figura 3.5: Gráficas de densidad mostrando las zonas de condiciones iniciales a diferentes energías de  $E = 0.03941 - 1.5$ . Ahora que tenemos marcadas las zonas de diferentes condiciones iniciales, usamos estas mismas para marcar el flujo que sigue la partícula durante el espacio de fases[14].

### 3.3.3. Curvatura gaussiana

La curvatura gaussiana es un concepto fundamental de la geometría diferencial; la mayor parte de curvas y superficies se pueden expresar a partir de curvaturas. En nuestro trabajo empezaremos a explicar un caso sencillo, el cual consta de una curva  $C \in \mathbb{R}^2$ . Sea  $P \in C$  y  $\theta$ , el ángulo de inclinación de la recta tangente a  $C$  en  $P$ . La curvatura  $K$  de  $C$  en  $P$ , se define como la razón de  $\theta$ , por la unidad de longitud de arco de  $s$  es decir:

$$k = \frac{d\theta}{ds}. \quad (3.25)$$

Si la curva  $C$  es una curva suave tal que  $y = f(x)$ , la fórmula de la curvatura viene dada por:

$$k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.26)$$

De esta ecuación se puede apreciar que  $k$  es positiva si  $P$  esta sobre un arco cóncavo hacia arriba y negativo cuando esta cóncavo hacia abajo.

En el caso de una superficie de  $\mathbb{R}^3$  la recta tangente es un plano tangente a la superficie, donde tendremos la fórmula de la curvatura gaussiana para una superficie suave  $z = U(x, y)$  es:

$$K(U) = \frac{U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2}{[1 + (U_{xx})^2 + (U_{yy})^2]}. \quad (3.27)$$

Para poder usar esta técnica es necesario manejar los siguientes conceptos y aplicarlos al potencial (3.22) tal y como se hace en[20]; el punto principal es encontrar las zonas de condiciones iniciales para la energía indicada.

### Exponente de Lyapunov

En la teoría de sistemas dinámicos los exponentes de Lyapunov consisten en determinar una medida de cuanto se separan a tiempo indefinido diferentes trayectorias generadas con condiciones iniciales dadas, fundamentalmente establece un parámetro que cuantifique el movimiento caótico. Se define el exponente de Lyapunov como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta_y(t)}{\delta_y(t_0)} \right|,$$

los exponentes de Lyapunov están asociados a cada curva y, en definitiva, a cada punto del espacio de fases.

La principal responsabilidad y estrecha relación en la aparición de caos es del potencial  $V(q_1, q_2)$ . Para poder determinar que existen orbitas caóticas tendremos que calcular los exponentes de Lyapunov del sistema, en este caso no las puedo calcular inmediatamente, entonces utilizaremos el método de la ecuación variacional[18].

Sea

$$\dot{v} = f(v).$$

un sistema de ecuaciones diferenciales el cual podemos resolver como  $F_t(v) : t \in \mathbb{R}$ , sustituyendo esto en el sistema tenemos:

$$\frac{d}{dt} F_t(v) = f(F_t(v)),$$

diferenciando respecto a  $v$  y usando la regla de la cadena tenemos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} DF_t(v) = Df(F_t(v))DF_t(v). \quad (3.28)$$

Realizando  $J_t = DF_t(v)$ ,  $A(t) = Df(F_t(v))$ , deducimos la ecuación variacional

$$\dot{J}_t = A(t)J_t. \quad (3.29)$$

Para poder determinar  $J_t$  necesitamos añadir una condición inicial  $J_0 = I$ , esto es consecuencia de que  $F_0 = v$ , basta observar que la ecuación diferencial no es autónoma pues la matriz depende del tiempo. Esto implica que  $A(t)$  son funciones dependientes del tiempo, sí sustituimos un punto (condición inicial del potencial)  $(q_{1_0}, q_{2_0})$  se obtendrán valores autónomos:

$$A = \left( \begin{array}{cccc} H_{q_1 p_1} & H_{q_2 p_1} & H_{p_1 p_1} & H_{p_2 p_1} \\ H_{q_1 p_2} & H_{q_2 p_2} & H_{p_1 p_2} & H_{p_2 p_2} \\ -H_{q_1 q_1} & -H_{q_2 q_1} & -H_{p_1 q_1} & -H_{p_2 q_1} \\ -H_{q_1 q_2} & -H_{q_2 q_2} & -H_{p_1 q_2} & -H_{p_2 q_2} \end{array} \right) \Big|_{(q_{1_0}, q_{2_0})}$$

Haciendo las derivadas parciales correspondientes, la matriz es de la siguiente forma:

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & H_{p_1 p_1} & H_{p_2 p_1} \\ 0 & 0 & H_{p_1 p_2} & H_{p_2 p_2} \\ -V_{q_1 q_1} & -V_{q_2 q_1} & 0 & 0 \\ -V_{q_1 q_2} & -V_{q_2 q_2} & 0 & 0 \end{array} \right) \Big|_{(q_{1_0}, q_{2_0})}$$

Después de sustituir  $(q_{1_0}, q_{2_0})$  establecemos la ecuación para valores propios  $A - \lambda \cdot I = 0$  para obtener el polinomio característico; por lo tanto los exponentes de Lyapunov son las soluciones a la ecuación

$$\left( \begin{array}{cccc} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -V_{q_{1_0} q_{1_0}} & -V_{q_{2_0} q_{1_0}} & -\lambda & 0 \\ -V_{q_{1_0} q_{2_0}} & -V_{q_{2_0} q_{2_0}} & 0 & -\lambda \end{array} \right) = 0.$$

Al resolver la matriz el polinomio característico es representado de la siguiente manera:

$$\lambda^4 + \lambda^2\beta + \alpha = 0.$$

Haciendo un cambio de variable y utilizando la fórmula general se tiene:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \left( \frac{1}{2} \left( -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

donde  $\beta = \Delta V = V_{q_1 q_1} + V_{q_2 q_2}$  y  $\alpha = (V_{q_1 q_1})(V_{q_2 q_2}) - (V_{q_1 q_2})^2$ , de este resultado se presentan dos observaciones:

1. Los signos de  $\alpha$  y  $K(V)$  coinciden.

Se puede observar que si  $\alpha$  es negativo el signo de la curvatura  $K(V)$  también lo es ya que el denominador siempre es positivo.

El signo de  $K$  coincide con el de  $\alpha$ , y por lo tanto con la condición para valores propios reales. Por lo tanto existe una relación entre las inestabilidades del movimiento y el signo de la curvatura. Este es el criterio buscado que llamamos el criterio de la curvatura negativa (*CCN*) para abreviar. Ofrece una forma de analizar la posible existencia de una dinámica inestable que genera caos simplemente observando la curvatura gaussiana de superficie de energía potencial. Es decir si la superficie de energía potencial del sistema tiene una región de curvatura negativa y los movimientos típicos la atraviesan, se viola la estabilidad del sistema y el movimiento de la partícula puede volverse caótico.

2. Si  $\beta \geq 0$  y  $\alpha > 0$ , entonces los  $\lambda_i$  son imaginarios en este caso se tiene el siguiente teorema[19]:

**Teorema 3.1.** *Sea  $\dot{v} = f(v)$  un sistema de ecuaciones diferenciales con un hamiltoniano de la forma (3.12). Si la función potencial  $V(q_1, q_2)$  satisface que  $\Delta V \geq 0$  y  $K(V) > 0$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , entonces el sistema no tiene orbitas caóticas.*

El criterio de curvatura negativa tiene la ventaja adicional de poder predecir si los movimientos caóticos pueden desaparecer al aumentar la energía. Para que esto suceda, es necesario que la región de curvatura negativa del potencial esté confinada, ya que, en tal caso, con energías suficientes el sistema volvería a ser estable. Incluso podemos ir un paso más allá y usar estas ideas para estimar el valor de energía en el que tiene lugar la transición. Para este fin, tenemos que evaluar la línea de curvatura cero, es decir, el conjunto de puntos para los cuales  $K(V) = 0$ , y determinar la energía mínima  $E_{min}$  necesaria para alcanzar esta curva.

$E_{min}$  desempeñaría el papel de la energía crítica para el inicio del caos, ya que para cualquier  $E > E_{min}$ , la trayectoria de fase del sistema puede llegar a la región de curvatura negativa, por lo que el movimiento puede volverse caótico. También podemos estimar la energía del caos máximo (es decir, la energía a la que el volumen del espacio de fase ocupado por las órbitas caóticas tiene un máximo)  $E_{max}$ , como la energía máxima que alcanza el sistema en la curva de curvatura cero. Esta última estimación de energía a veces se considera como una estimación de la energía donde el caos comienza a terminar

cuando hay una transición orden-caos-orden [12]. Pero independientemente de cuál sea la interpretación que le demos a la última estimación, debe quedar claro que es sólo una estimación de la  $E_{max}$ .

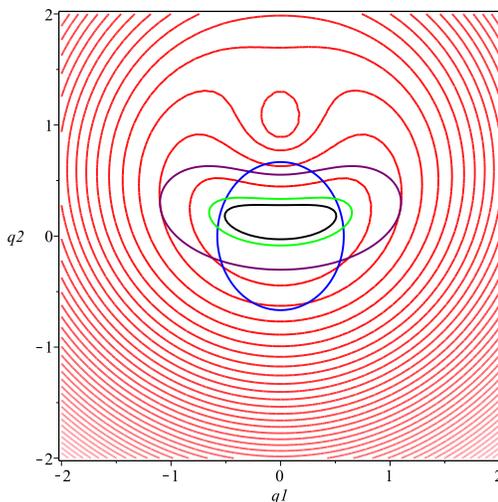


Figura 3.6: Las energías en el potencial son las curvas de color negro, verde y morado. Lo que esta de color azul es  $\alpha$ .

Para interpretar bien esto tenemos la siguiente observación, para todo  $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$  las órbitas estables solo pueden existir en regiones de curvatura positiva. Entonces, la única región de curvatura positiva es la imagen bajo  $V(q_1, q_2)$  del interior de  $\alpha$ [19].

En la figura (3.6) representamos de color negro es la energía  $E = 0.03941$ , de color verde es  $E = 0.05796$  y de color morado  $E = 0.1986$ , si se toman las energías dentro de la región azul se garantiza que el sistema esta en completo orden.

Con esto establecemos la condiciones iniciales y las energías con las que se trabajaran; en donde “la monodromía hamiltoniana” se podría manifestar.

### Flujo Hamiltoniano

A diferencia del espacio de configuraciones, el espacio fase tiene características matemáticas especiales. Si consideramos todos los vectores tangente a las órbitas de fase como un campo vectorial sobre el espacio fase llamado flujo hamiltoniano  $\dot{z}$ , este satisface la condición de incompresibilidad de los fluidos es decir:

$$\text{div}(\dot{z}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Esto significa que si tomamos cualquier región cerrada del espacio fase en un instante específico  $t_0$ , luego de un tiempo  $t$ , su volumen seguirá siendo el mismo aunque la forma de la región cambie. A esto se le conoce como *teorema de Liouville*[4].

Con el uso del método de integración (RKF 45) podemos graficar el trayecto de la partícula en el espacio fase  $(q_1, q_2)$ . Para observar mejor el comportamiento del sistema dejamos evolucionar por 100 unidades de tiempo a tres distintas energías, dicho flujo describe el recorrido de la partícula a través del plano. Para ello se usarán las energías  $E_1 = 0.03941$ ,  $E_2 = 0.4375$  y  $E_3 = 1.5$  lo que muestra la transición orden-caos-orden, cuya existencia fue demostrada en [12].

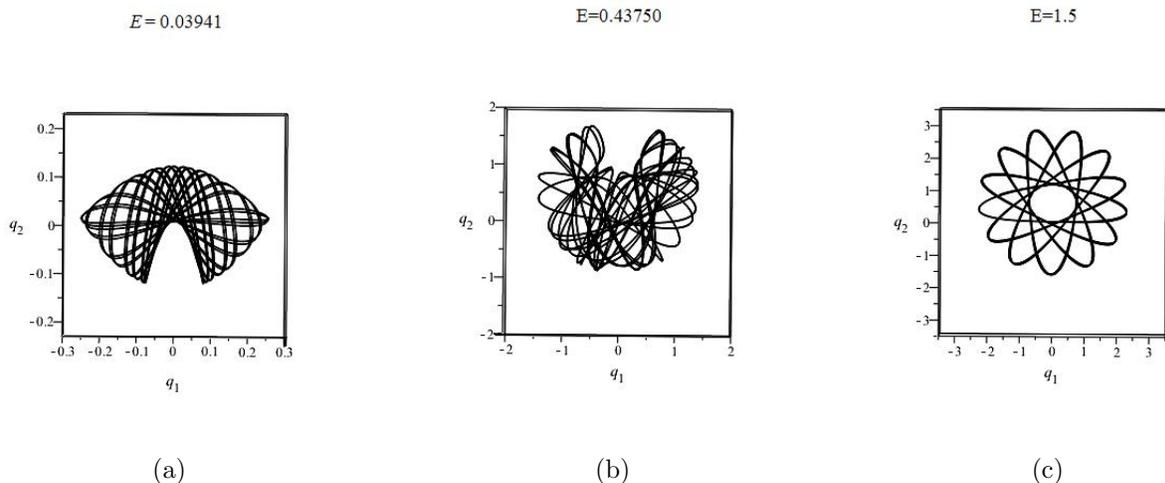


Figura 3.7: Flujo que recorre la partícula en el plano de oscilación  $q_1$  y  $q_2$ . (a) Flujo ordenado de la partícula. (b) Flujo caótico de la partícula. (c) Flujo nuevamente ordenado.

La fig. 3.7 (a) muestra que con la energía  $E = 0.03941$  el péndulo tiende a hacer un movimiento regular en el plano  $(q_1, q_2)$ . (b) Muestra que con la energía  $E = 0.43750$  el péndulo hace movimientos fuera de control. (c) Muestra que con la energía  $E = 1.5$  el péndulo vuelve a tener un comportamiento ordenado en las trayectorias. Esta es una prueba visual de la transición Orden-Caos-Orden.

Teniendo ya claro el comportamiento del péndulo extensible ahora agregaremos un grado más de libertad, esto implica introducir dos coordenadas generalizadas que son  $p_3$  y  $q_3$ ; entonces el sistema ya puede moverse en un espacio de tres dimensiones.

### 3.3.4. Péndulo con tres grados de libertad

Después del análisis del sistema con dos grados de libertad, se introduce la tercer coordenada generalizada. Donde  $q_3$  y  $p_3$ , son la coordenada y el momento generalizado. Entonces el sistema es ahora de tres grados de libertad lo cual implica que tenemos seis ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del sistema.

Será libre de moverse en tres dimensiones, lo que necesitamos para el desarrollo de nuestro trabajo. En la sección anterior se dan las energías que son óptimas para llegar a nuestro objetivo; el que consiste en encontrar los cambios de plano de oscilación. El sistema esta representado en la figura(3.8).

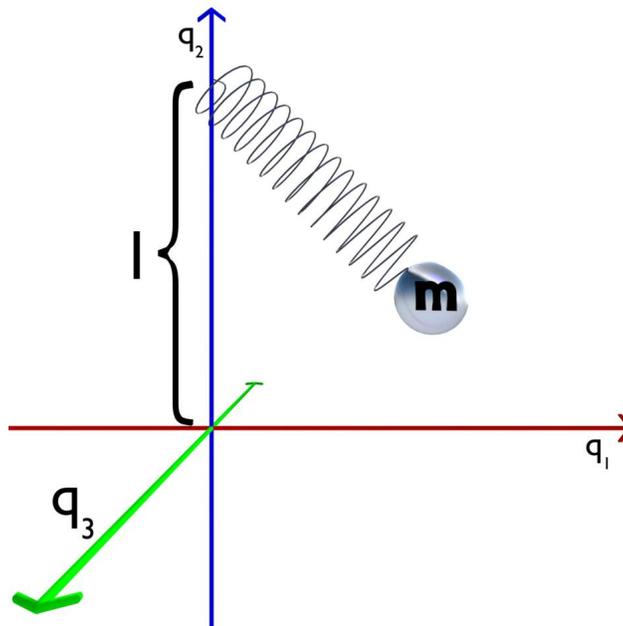


Figura 3.8: Péndulo extensible de tres grados de libertad; con coordenadas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ ; este diagrama muestra de color verde la coordenada agregada al sistema.

El hamiltoniano en este caso queda descrito de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + fq_2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2 + q_3^2} \right]^2. \quad (3.30)$$

Al hacer  $q_3 = 0$  y  $p_3 = 0$  tendremos el hamiltoniano (3.12) que describe la fig (3.1).

En este caso utilizaremos los cortes del flujo hamiltoniano, respecto al plano  $(q_1, q_3)$  con la energía  $E_1 = 0.03941$  a 800 unidades de tiempo donde observaremos los cambios de plano de oscilación que nosotros buscamos, según lo dice Lynch [2]. El hamiltoniano (3.30) tiene la misma característica de conservar la energía, es decir no importa cuanto tiempo se ponga a interactuar, el sistema seguirá con la misma energía con la que inicio.

## Potencial

Usamos el campo gradiente para poder visualizar el potencial  $V(q_1, q_2, q_3)$  de tal manera tendremos una idea de como es la superficie, ya que el campo gradiente es una proyección del comportamiento de la superficie, podemos ver en un espacio de tres dimensiones como se comporta el potencial que esta definido en un espacio de cuatro dimensiones.

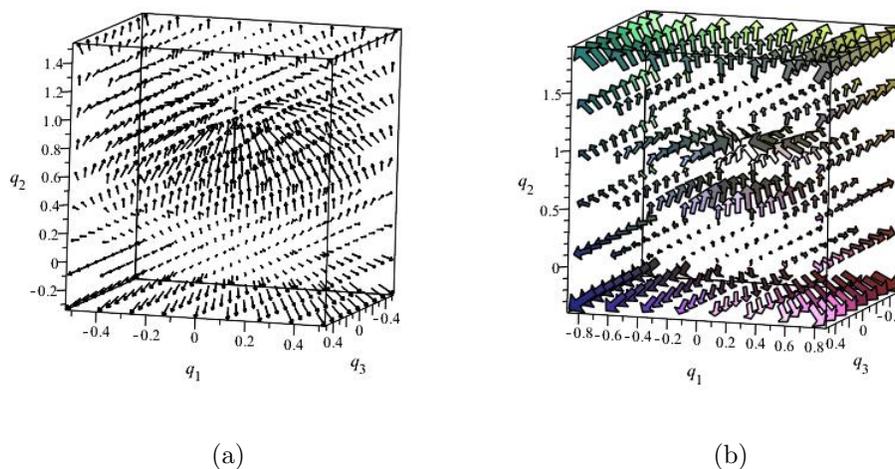


Figura 3.9: Campo gradiente de tres dimensiones con dos características, en una se usan flechas delgadas y en la otra son mas planas.

En la imagen se observa el comportamiento que tiene el campo gradiente sobre el potencial, al parecer en un intervalo la superficie tiene una atracción a cierto punto, esto se aprecia mejor en (a). En (b) es el mismo potencial sólo cambia el estilo de la flecha.

### 3.3.5. Energías bajas

Una de las motivaciones que dio inspiración para analizar el péndulo, es usar energías bajas para mostrar la monodromía hamiltoniana esta presente en el sistema, sin que el hamiltoniano se someta a aproximaciones integrables como [15]; ya que al hacer el experimento [16], no se hace este tipo de análisis como tal; se usa el modelo fabricado, con ayuda de pintura y cámaras se logra captar los cambios de plano de oscilación que hace el péndulo.

En nuestro caso tenemos la misión que teniendo un hamiltoniano no integrable, poder mostrar la existencia de dicho fenómeno a energías pequeñas y con condiciones iniciales favorables; con ayuda de Maple y herramientas utilizadas en [12, 13, 17], encontraremos las energías más óptimas para tratar de llegar a nuestro objetivo. Desde que surge el estudio de pequeñas oscilaciones a varios sistemas, ésto dió paso para estudiar modelos más apegados a la realidad [21].

Del análisis del péndulo bidimensional tenemos las condiciones iniciales del sistema para la energía  $E = 0.03941$ , usaremos esas condiciones iniciales y dejaremos evolucionar el péndulo durante 120 unidades de tiempo, para ver cual fue el movimiento de la partícula en el espacio de fases  $(q_1, q_2, q_3)$ .

### Flujo hamiltoniano

Con ayuda del software (Maple) se traza el flujo hamiltoniano en el espacio de fases  $(q_1, q_2, q_3)$ , donde podremos visualizar la evolución del péndulo extensible durante 800 unidades de tiempo; sólo la energía  $E_1 = 0.03941$ , la cual es 26 % más grande que la energía mínima (3.21), como nuestro hamiltoniano es independiente del tiempo y además no tenemos coeficientes de fricción, entonces el péndulo seguirá oscilando con la misma energía durante todas las unidades de tiempo que se le indique.

Para las otras dos energías se usaran tiempos más cortos, la justificación de esto se dará en la siguiente sección.

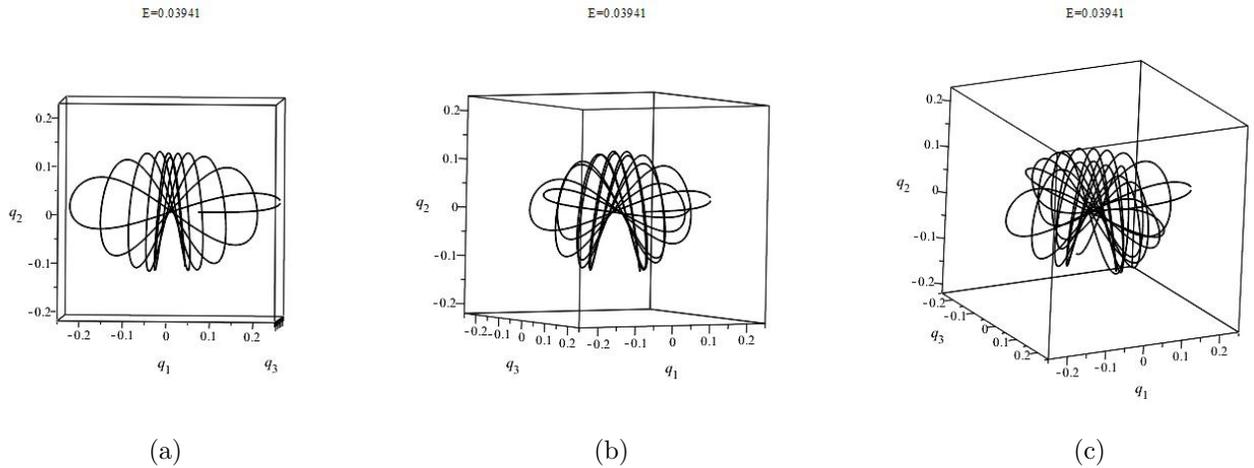


Figura 3.10: Flujo que recorre la partícula en el espacio  $(q_1, q_2, q_3)$  con energía  $E = 0.03941$ .

La partícula está oscilando en el espacio  $(q_1, q_2, q_3)$  donde se observa un comportamiento ordenado a una energía  $E = 0.03941$  y a 120 unidades de tiempo, donde se observa en la fig. 3.10 (c) que existe un cambio de plano en la oscilación, esto se discutirá en la

sección de monodromía. Las condiciones iniciales del sistema con el que se llevó a cabo son:  $q_1 = 0.062$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 0.01$ ,  $p_1 = 0.124$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 0$ , con estas condiciones iniciales se dejó analizar de 0 a 140 unidades de tiempo, y obteniendo una  $\delta E = 0.6e^{-7} \%$  (máxima desviación de energía).

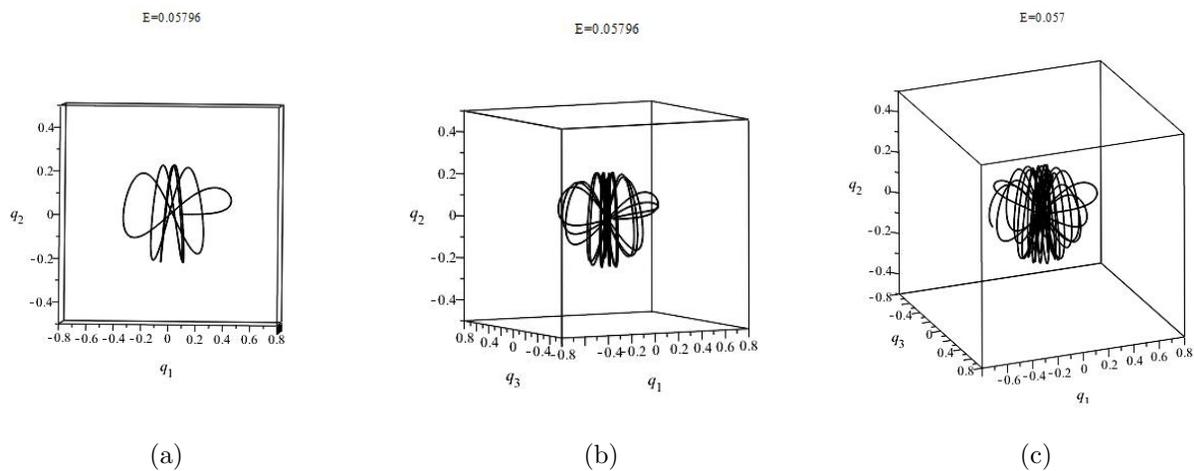


Figura 3.11: Flujo que recorre la partícula en el espacio de oscilación  $(q_1, q_2, q_3)$  a la energía  $E = 0.05796$ .

Esta trayectoria que hace la partícula está dada por las condiciones iniciales  $q_1 = 0.062$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 0.01$ ,  $p_1 = 0.229$ ,  $p_2 = 0$  y  $p_3 = 0$ ; y dejando oscilar de 0 a 140 unidades de tiempo obteniendo una  $\delta E = 0.18e^{-6} \%$  (máxima desviación de energía).



**Secciones transversales al flujo del sistema**

Después de trazar el flujo hamiltoniano que hace la partícula en las tres energías, procederemos a ver el comportamiento en el plano  $(q_1, q_3)$ (escena  $[q_1, q_3]$ )[?], esto ayudará a verificar si el péndulo hace los cambios de plano en la oscilación que tratamos de encontrar; lo que ayudará a obtener los resultados del trabajo y con eso llegar a nuestro objetivo.

Empezando con  $E = 0.03941$ .

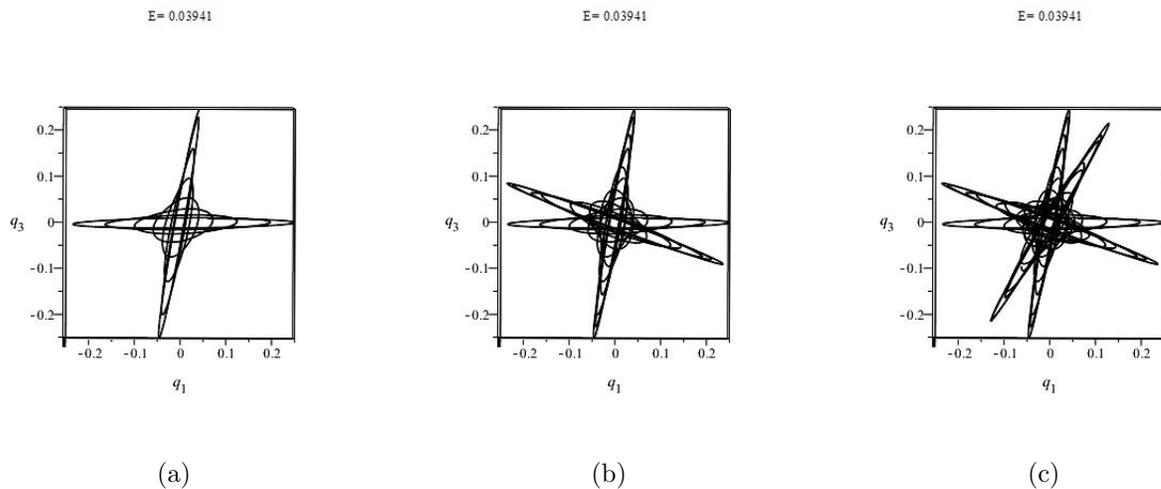


Figura 3.13: Escena del plano  $(q_1, q_3)$  de la energía  $E = 0.03941$  donde (a) esta de 0 – 50 unidades de tiempo, en (b) esta de 0 – 100 y en (c) esta de 0 – 150.

Respecto a la fig. 3.13 tenemos:

- (a) En la imagen se muestra como la partícula oscila en el eje  $q_1$  por un momento, después hace un cambio de oscilación.
- (b) En la imagen se muestra el siguiente cambio de plano donde ocurre de 50 – 100 unidades de tiempo.
- (c) Se muestra el tercer plano de oscilación el cual aparece en 100 – 150 unidades.

Los intervalos de unidades de tiempo se darán mas adelante así como los ángulos de inclinación de los planos de oscilación.

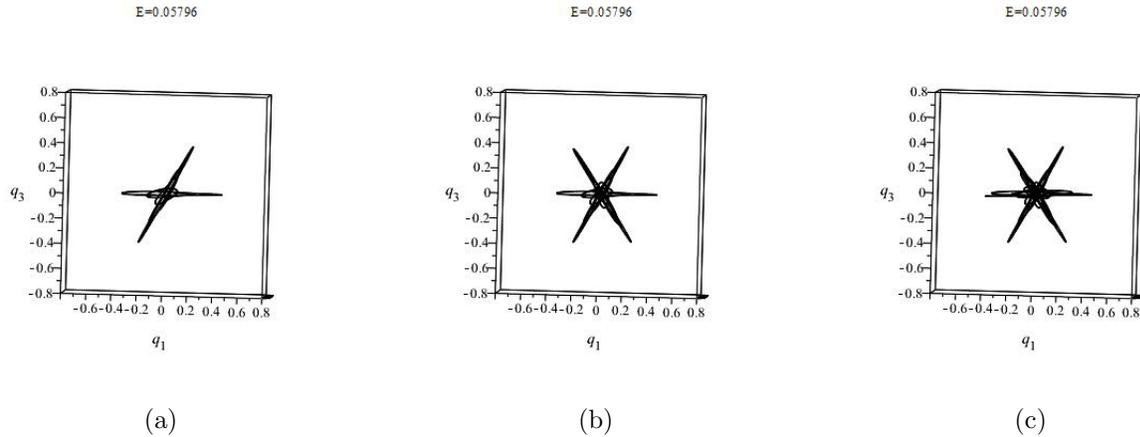


Figura 3.14: Escena del plano  $(q_1, q_3)$  de la energía  $E = 0.05796$  donde (a) esta de 0 – 30 unidades de tiempo, en (b) esta de 0 – 70 y en (c) esta de 0 – 130.

Realizando la descripción de la dinámica de la fig.3. 14:

- (a) En la imagen se muestra como la partícula oscila en el eje  $q_1$  donde esta oscilando por un tiempo de 0 a 30 unidades; hace un cambio de oscilación a partir de la unidad 40 y se mantiene oscilando por 30.
- (b) El cambio de oscilación lo hace a partir de la unidad 70. En 80 a 130 se forma el tercer plano; en este caso tarda oscilando sobre ese plano 50 unidades.
- (c) Parece ser la misma que (b), pero no, el plano de oscilación repite en  $q_1$ , es decir los planos de oscilación ya dieron la vuelta.

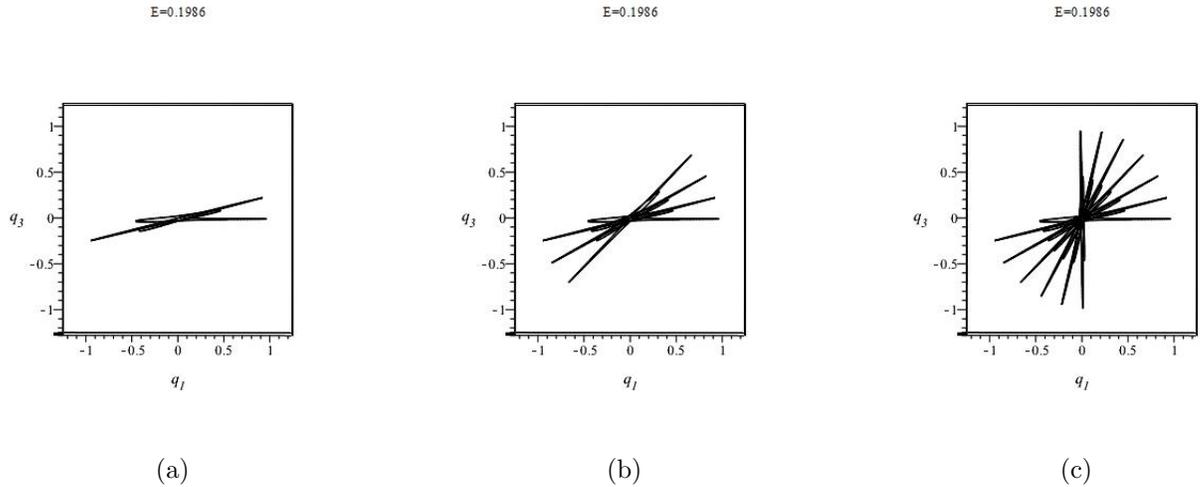


Figura 3.15: Escena del plano  $(q_1, q_3)$  de la energía  $E = 0.1986$ , donde (a) esta de 0 – 30 unidades de tiempo, en (b) esta de 0 – 70 y en (c) esta de 0 – 140.

Ahora en la fig. 3.15 tenemos en cada panel:

- (a) Se tiene que la partícula oscila en el eje  $q_1$  por 10 unidades de tiempo para después cambiar plano de oscilación que es el de 10 a 30, esto implica que tarda oscilando 20 unidades.
- (b) De 30 a 40 se forma el tercer plano y tarda 10 unidades para formar el otro plano el cual oscila de 60 a 70.
- (c) en esta imagen aparecen ya los 7 planos de oscilación trazados por la partícula a 140 unidades; el quinto plano aparece de 70 a 80, sexto plano 90 a 110 y por último de 120 a 130 unidades.

En la siguiente sección se discute del objetivo principal del trabajo que es el ver la manifestación de la monodromía hamiltoniana en el péndulo extensible; donde se describe

como cambios de plano de oscilación a tiempos indeterminados haciendo un movimiento inhabitual.

### 3.4. Monodromía hamiltoniana

La monodromía proviene del griego  $\mu\omicron\nu\omicron-\delta\rho\omicron\mu\psi$ , que significa recorrer una vez o recorrer uniformemente. De manera general, la monodromía describe fenómenos parametrizados por un espacio base de manera que al realizar caminos cerrados en dicho espacio base, los fenómenos sufren una cierta transformación, el siguiente ejemplo ayudara a entender más esta definición.

Sea  $t \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ , la espiral parametrizada por los puntos de la circunferencia base es decir, por

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

A cada punto de la circunferencia le asociamos los puntos que se proyectan sobre el, fijando un punto  $p_0 := (\cos(2\pi t_0), \sin(2\pi t_0))$  y los puntos asociados son de la forma  $(p_0, t_0 + k)$  donde  $k \in \mathbb{Z}$  de esta manera podemos considerar la espiral como la gráfica de una función *multivaluada* de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo, la imagen de  $t = 0$  es  $\mathbb{Z}$ ; la imagen de cualquier otro punto también se puede identificar con  $F$  una vez que hemos fijado un  $t_0$  apropiado. Si damos una vuelta en sentido antihorario, dichos puntos se transforman como  $K \rightarrow K + 1$ , es decir el efecto de *dar una vuelta* sobre la imagen de un punto de traslación es la *monodromía* y el grupo implicado es  $\mathbb{Z}$ .

El anterior ejemplo es de la teoría de cubiertas[10]; en 1980 el matemático holandés Duistermaat descubre el fenómeno llamado “monodromía hamiltoniana” que consiste en la existencia de una obstrucción topológica (superficie que no es *simplemente conexa*<sup>5</sup>)[10]

---

<sup>5</sup>conexo por trayectorias y su grupo fundamental es el trivial(grupo formado por un unico elemento)

a la aparición de variables globales acción-ángulo (constantes de movimiento), la monodromía hamiltoniana se ha demostrado teóricamente en sistemas tales como: los billares elipsoidales, los gases atrapados de Bose , la molécula de  $H_2^+$ , el átomo de hidrógeno en campos combinados eléctricos y magnéticos, y se tiene evidencia de su existencia en los espectros de vibración de moléculas cuasi lineales tales como  $CO_2$ .

### 3.4.1. Monodromía hamiltoniana en el péndulo

La monodromía hamiltoniana puede ocurrir cerca de equilibrios relativos en sistemas como el péndulo extensible, como ha sido demostrado recientemente de manera experimental [16]. Particularmente en el péndulo extensible la monodromía hamiltoniana es la responsable de que los planos de oscilación tengan un comportamiento inhabitual. En este trabajo demostramos numéricamente que la monodromía ocurre también en el modelo clásico del péndulo extensible que ha sido usado para investigar la aparición de caos [12], [14] y para modelar la interacción océano atmósfera [13]. Otro ejemplo, cuántico donde ocurre es en la resonancia de Fermi para la molécula de  $CO_2$ , cuyas características monodrómicas han sido investigadas en [17].

### 3.4.2. Vistas y cortes de plano

Con el corte transversal al flujo hamiltoniano, cuando éste termina su recorrido a las 140 unidades de tiempo, nos muestra los planos de oscilación que hizo, además el péndulo hace este cambio de plano en un lapso de 0 a 100 unidades de tiempo, en el primer plano de oscilación tenemos que dura oscilando 50 unidades después se tiene registrado que en el tercer plano tarda oscilando 70 unidades, 20 más. El análisis de los planos se hizo de tal manera de que el corte se viera lleno de planos de oscilación, para eso el péndulo se dejó oscilar durante 800 unidades.

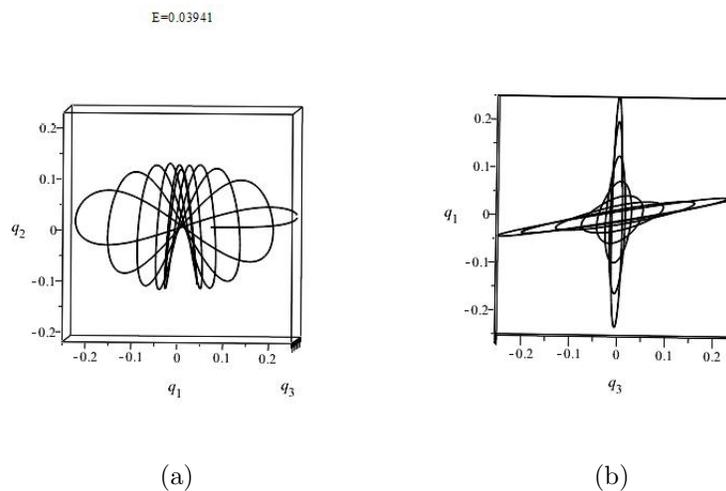


Figura 3.16:  $E = 0.03941$ , (a) Se tiene el flujo hamiltoniano a energía  $E = 0.03941$  donde se observa como la partícula recorre el espacio fásico  $(q_1, q_2, q_3)$ . (b) Se traza los dos planos de oscilación, donde oscilo primero sobre el eje  $q_1$ .

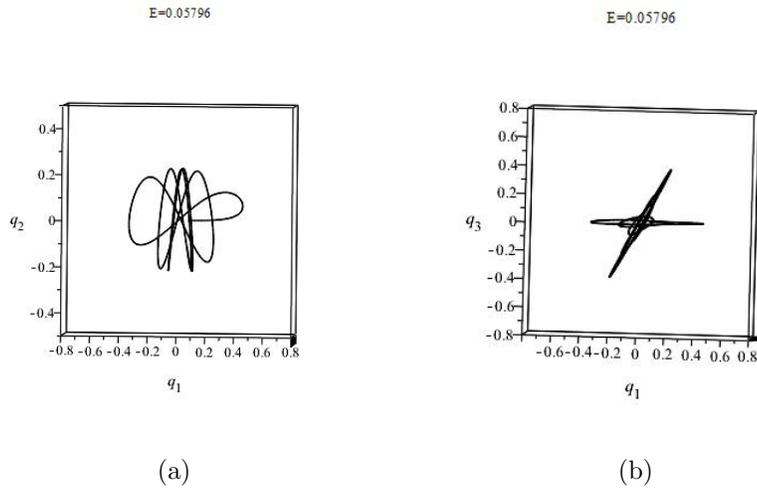


Figura 3.17: Con  $E = 0.05796$ . (a) Flujo hamiltoniano en vista del plano  $(q_1, q_2)$  donde se observa que la partícula hace movimientos mas cerrados. (b) Observamos en el plano  $(q_1, q_3)$  dos planos de oscilación.

Con la energía  $E = 0.05796$  en la figura (b) se observan dos planos de oscilación, el segundo plano aparece a partir de la unidad 30 a 40 y este oscila sobre ese plano aproximadamente 30 unidades.

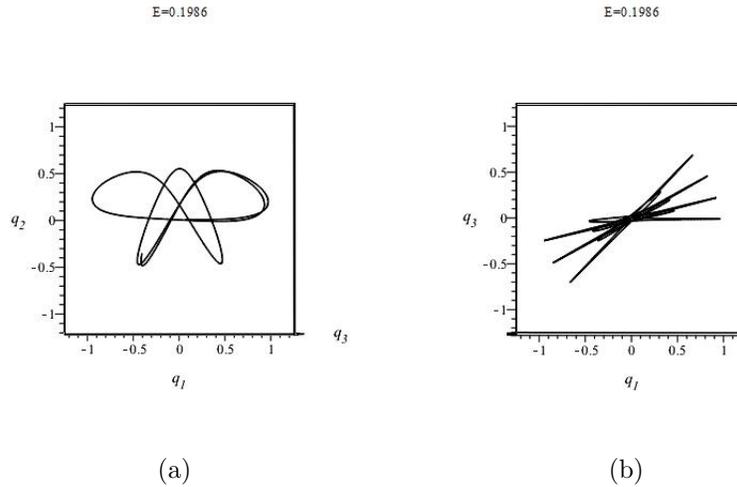


Figura 3.18: Con  $E = 0.1986$ . (a) El flujo hamiltoniano en el espacio fásico  $(q_1, q_2, q_3)$ .  
 (b) En esta escena hay cuatro planos de oscilación.

En este caso los planos de oscilación hacen cambios mucho más rápido, por la energía dada al sistema son cuatro los que aparecen de 0 a 70 unidades. A continuación se darán a conocer los ángulos y el sentido hacia donde van los planos de oscilación; ésta es la parte final de nuestro trabajo donde veremos si los cambios de plano son periódicos o no.

### Medida de ángulos

En este apartado analizaremos aspectos relacionados con los planos de oscilación que se obtuvieron a partir del estudio realizado, en el caso de  $E = 0.03941$  como se dijo en la sección anterior se dejó oscilar por 800 unidades de tiempo de tal manera que llenara el corte transversal con los planos; se obtienen los ángulos a partir de los dos puntos extremos que hacen este plano y la pendiente de la ecuación de la recta

$$m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

y aplicando:

$$\arctan(m) = \theta^\circ.$$

Esto mismo se llevara acabo con las otras dos energías  $E = 0.05796$  y  $E = 0.1986$ .

Analizaremos los cambios de plano hasta que este coincida con algún otro. Para el caso

$E = 0.03941$ :

Plano de oscilación	Ángulo	Unidades de tiempo
1	$0^\circ$	0 ... 50
2	$75^\circ$	50 ... 100
3	$-73^\circ$	100 ... 220
4	$56^\circ$	260 ... 320
5	$-62^\circ$	320 ... 400
6	$18^\circ$	400 ... 500
7	$-83^\circ$	500 ... 600

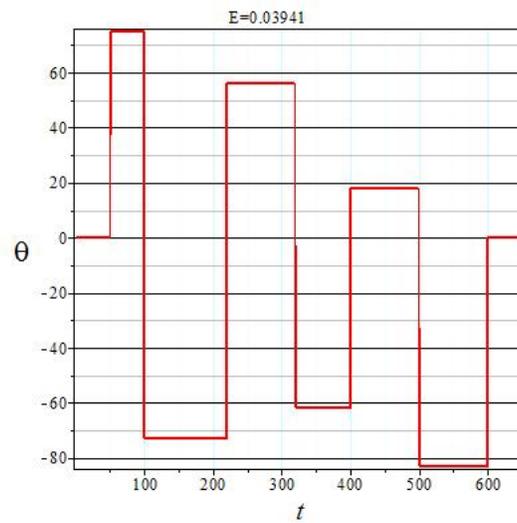


Figura 3.19: Ángulos que forman el plano de oscilación.

La gráfica (Figura.3. 18) muestra el ángulo en que esta el plano de oscilación de acuerdo al flujo hamiltoniano; En la tabla se explica como el péndulo extensible se comporta; en ésta se expresa mejor las unidades de tiempo que estuvo oscilando en el plano de oscilación. En particular esta energía es relevante para el trabajo ya que tiene un comportamiento diferente a energías un poco más altas; el plano de oscilación que coincide es el plano inicial que ocurre en 600 unidades, además de los cambios se han observado no ocurren de manera periódica y eso se debe a las condiciones iniciales [15].

Cuando la energía es  $E = 0.05796$ :

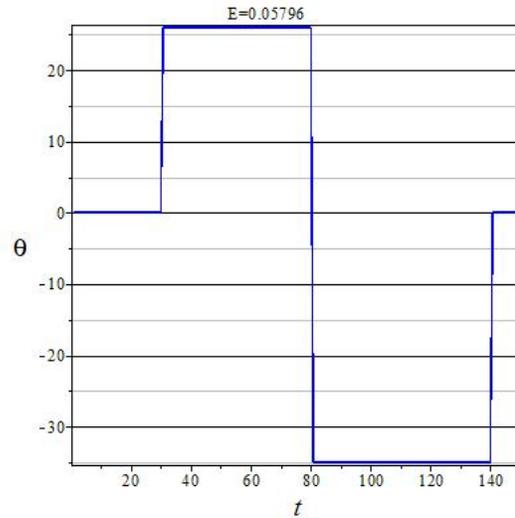


Figura 3.20: Ángulos que forman los planos de oscilación.

Plano de oscilación	Ángulo	Unidades de tiempo
1	$90^\circ$	0 ... 30
2	$26^\circ$	30 ... 70
3	$-35^\circ$	80 ... 130

A diferencia con la energía anterior en este caso sólo hay tres planos que mostrar, ya que el cuarto plano es donde repite el ángulo a pesar que los ángulos son diferentes; las unidades de tiempo son más cortos, donde es más visto esto es en el siguiente caso.

Para el caso  $E = 0.1986$ :

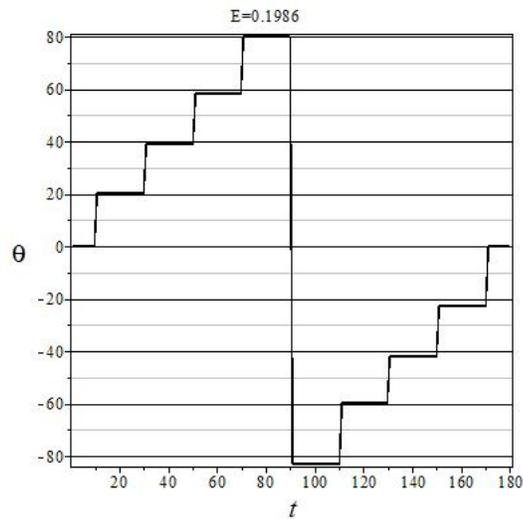


Figura 3.21: Ángulos que forman los planos de oscilación.

Plano de oscilación	Ángulo	Unidades de tiempo
1	$0^\circ$	0 ... 10
2	$20^\circ$	10 ... 30
3	$39^\circ$	30 ... 50
4	$58^\circ$	50 ... 70
5	$80^\circ$	70 ... 90
6	$-83^\circ$	90 ... 110
7	$-60^\circ$	110 ... 130
8	$-42^\circ$	130 ... 150
9	$-23^\circ$	150 ... 170

Este caso es interesante por como venimos desarrollando el trabajo, en la gráfica se nota como la pendiente es positiva y en las 90 unidades de tiempo hace el cambio a pendientes

negativas, aquí los planos de oscilación son mas rápidos y aparecen de manera consecutiva, es decir de forma periódica.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Con los resultados obtenidos damos a conocer que nuestro sistema hamiltoniano no integrable (el péndulo extensible), puede mostrar el fenómeno de la monodromía hamiltoniana, esto sucede cuando se consideran bajas energías. En este caso la energía principal es  $E = 0.03941$ , donde el péndulo mostró los cambios del plano de oscilación que no son periódicos como lo queríamos mostrar; con esto respondemos de forma afirmativa la pregunta que inspiró el trabajo.

¿Existe la monodromía hamiltoniana en nuestro sistema no integrable?.

Teniendo en cuenta que no se consideran aspectos como el efecto de torción en el resorte. Esperamos que los datos que resaltan sean de ayuda para futuras investigaciones como es el caso de un amortiguador interactuando con un neumático.



# Capítulo 5

## Apéndice 1

Los casos integrables del péndulo extensible:

A) El caso cuando  $f = 0$ .

Cuando  $f = 0$  el hamiltoniano del péndulo extensible es

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{(1 - q_2)^2} \right]^2;$$

Si hacemos la transformación de variables (en este caso, una transformación canónica)

$$\rho^2 = q_1^2 + (1 - q_2)^2, \quad \tan \phi = \frac{(1 - q_2)}{q_1},$$

es posible reescribir el hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2}p_\rho^2 + V_{ef}(\rho),$$

en donde hemos introducido el potencial efectivo  $V_{ef}(\rho)$  como

$$V_{ef}(\rho) = \frac{1}{2} \left( (1 - \rho)^2 - \frac{l^2}{\rho^2} \right),$$

y  $l = \rho^2 \dot{\phi}$  es una constante de movimiento. Entonces dado que hemos reducido el problema a uno unidimensional equivalente, hemos demostrado que el hamiltoniano es integrable cuando  $f = 0$ .

B) El caso  $f = 1$ .

Si  $f = 1$ , y cambiamos de variables

$$\rho^2 = q_1^2 + q_2^2, \quad \tan \phi = \frac{q_2}{q_1}.$$

El hamiltoniano queda de la forma

$$H = \frac{1}{2} p_\rho^2 + V_{ef}(\rho),$$

donde ahora

$$V_{ef} = \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{\rho^2} + \rho^2 \right),$$

y,  $l = \rho^2 \dot{\phi}$ , es como antes una constante de movimiento. De la expresión se obtiene que el hamiltoniano es integrable cuando  $f = 1$ .

### 5.0.3. Teorema de máximos y mínimos

**Teorema 5.1.** *Sea  $f(x, y)$  de clase  $C^3$  en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Un punto  $(x_0, y_0)$  es un mínimo local (estricto) de  $f$  si se cumplen las siguientes condiciones.*

$$i) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

$$ii) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0,$$

$$iii) d = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

Donde ( $D$  se llama el discriminante), entonces para (ii) se tiene que  $< 0$ , en lugar de

$> 0$ , sin cambiar la condición (iii), entonces tenemos un máximo local estricto, si (iii)  $< 0$ , entonces es un punto silla.



# Bibliografía

- [1] John H. Lowenstein. *Essentials Of Hamiltonian Dynamics, Cambridge University, first published. (2012)*
- [2] L. D. Landau E. M. Lifshitz. *Mecánica volumen 1 del curso de física teórica, 2ª edición corregida, ed. Reverté, S. A. 1994.*
- [3] Kai S. Lam. *Fundamental Principles Of Classical Mechanics a Geometrical Perspective, pp. 19-32 (2014)*
- [4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, New York, Springer-Verlag, 1978.*
- [5] Richard H. Enns George C. McGuire. *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers, Birkhäuser 1997.*
- [6] D. Richards *Advanced Mathematical Methods with Maple. Printed in the United Kingdom at the University Press, Cambridge. First published 2002.*
- [7] Peter Plaschko, Luis Mier Y Terán Casanueva *Sistemas Dinámicos no Lineales, Mecánica Clásica y Transición al Caos. Editorial: Mexico, McGraw Hill (2001).*

- [8] C.Henry Edwards, David E. Penney *Ecuaciones diferenciales y valores en la frontera, 4a. ed. PEARSON EDUCACIÓN, México, 2005.*
- [9] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial, publicado originalmente en inglés por W. H. Freeman and Company, Nueva York @ 1976, 1981 y 1988 por W. H. Freeman and Company.*
- [10] D. Enrique Artal Bartolo. *La monodromía: a vueltas entre latopología, la geometría y el álgebra. Académica numeraria 2009.*
- [11] H.N. Nuñez-Yepe. *MSC thesis, FC-UNAM, México D.F. 1990.*
- [12] H.N. NUÑEZ-YEPEZ, A.L. SALAS-BRITO, L.VICENTE. *Onset of chaos in an Extensible pendulum, Phys. Lett., Vol. 145A pp. 101-105, (1990).*
- [13] P. LYNCH. *The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. Pp. 64-108 in Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol II: Geometric Methods and Models. Ed. J. Norbury and I. Roulstone. Cambridge University Press. 2002.*
- [14] AARON LEWIN AND PAULA CHEN. *Numerical Analysis of the Dynamics of Single and Double Spring-Pendulum Systems. Math 53 - Fall 2015.*
- [15] HOLGER DULLIN, ANDREA GRACOBBE, AND RICHARD CUSHMAN. *Monodromy in the resonant swing spring. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2004.*

- [16] N. J. FITCH, C. A. WEIDNER, L. P. PARAZZOLI, H. R. DULLIN, AND H. J. LEWANDOWSKI. *Experimental Demonstration of Classical Hamiltonian Monodromy in the 1:1:2 Resonant Elastic Pendulum*, *Phys. Rev. Lett.* 103, 034301 Published 15 July 2009.
- [17] BORIS ZHILINSKIĪ. *Hamiltonian monodromy, its manifestations and generalizations*, *Université du Littoral Côte d'Opale, MREI2*, (2010), 1692: 57-77.
- [18] LUIS LARA, CESAR STACO, RODRIGO MACHADO, MARIO CASTAGNINO. *Estimación de los exponentes de Liapunov. Mecánica Computacional Vol. XXII. (Editores) Bahía Blanca, Argentina, Noviembre 2003.*
- [19] DIDIER ADÁN SOLÍS GAMBOA. *El papel de la curvatura gaussiana en las transiciones orden-caos. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. 2010.*
- [20] C. M. ARIZMENDI, R. CARRETERO GONZALEZ, H.N. NUÑEZ-YEPEZ. *Chaotic dynamics of a rolling elastic cylinder. Third Granada Lectures in Computational Physics. Pp. 326-326. 2005.*
- [21] DMITRIĪ A. SADOVSKIĪ. BORIS I. ZHILINSKIĪ. *Monodromy in non-integrable systems on certain compact classical phase spaces. Physics Letters A Volume 383, Issue 5, 21 January 2019, Pages 452-457.*







UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS**

Coordinación de Programas Educativos

Posgrado en Ciencias



**DR. VICTOR BARBA LÓPEZ**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS**  
**PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada "*Monodromía hamiltoniana en un péndulo extensible*" que presentó el alumno **Erick Edson Loreto Jimenez (5620170401)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Joaquín Escalona Segura CInC-UAEM	Aprobada	
Dr. Raúl Salgado García CInC-UAEM	Aprobado	
Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky ICN-UNAM	Aprobado	
Dr. Álvaro Lorenzo Salas Brito UAM	Aprobado	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM	Aprobado	